Ingeniería Civil Industrial
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
IN4221-1 Teoría de Juegos
Profesor: Roberto Cominetti. **Auxiliares:** Felipe Maldonado, Francisco Unda.

Auxiliar 5

Sea el juego de ruteo dado por: un grafo dirigido $G = (V, E)$, cada arco $e \in E$ tiene asociada una función creciente con el flujo del arco, $f_e : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}+$ (que se puede ver como el tiempo de espera en el arco e dada la congestión de éste). Consideramos N jugadores, cada uno de ellos $j \in \{1, ..., N\}$ lo caracterizamos por la tupla (s_j, t_j, w_j), en donde $s_j, t_j \in V$ son un par origen/destino, y $w_j \in \mathbb{R}^+$ corresponde al ancho de banda requerido por j (como satura el arco).

Denotamos por Q_j al conjunto de los $s_j - t_j$-caminos, cada jugador j puede elegir cualquiera de los caminos $Q \in Q_j$ (estrategias puras), o una distribución de probabilidades $\{p_j\}$ sobre todos los $Q \in Q_j$ (estrategias mixtas).

Consideramos un juego no cooperativo, en donde cada jugador quiere minimizar sus costos.

Para el caso de estrategias puras consideramos las siguientes definiciones:

- $\mathcal{R} := \bigcup_{i=1}^{N} Q_i$, el conjunto de todos los caminos que pueden elegir los jugadores.
- $J(e) := \{j | e \in \mathcal{R}\}$ (conjunto de los índices de los caminos que pasan por el arco e).
- $l_e = \sum_{j \in J(e)} w_j$, la carga del arco e.
- $C_{Q,j} = \sum_{e \in Q_j \cap Q} f_e(l_e) + \sum_{e \in Q, e \notin Q_j} f_e(l_e + w_j)$, el costo (en tiempo) del jugador j de elegir el camino Q en vez de alguno que esté en Q_j.

$\boxed{\text{P1.}}$ Para el caso $f_e(x) = a_e x + b_e$, con a_e, b_e constantes no negativas para cada $e \in E$, mostrar que el Precio de la Anarquía del juego (en estrategias puras) es a lo mas $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$.

$\boxed{\text{P2.}}$ Probar que para $x \geq 0, y \geq 0$ enteros se satisface lo siguiente:

- $xy = \frac{1}{3}y^2 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{3}(y - \frac{3}{2}x)^2$
- $\frac{9}{8}x^2 + \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}(y - \frac{3}{2}x)^2 \leq \frac{5}{2}x^2$

Y con esto demostrar que si en el caso de la pregunta 1 considerando $w_j = 1 \forall j \in \{1, ..., N\}$, se tiene que el Precio de la Anarquía es a lo mas $\frac{5}{2}$.

$\boxed{\text{P3.}}$ [PoA para estrategias mixtas]
Sea el mismo problema anterior, salvo que esta vez cada jugador j selecciona una distribución de probabilidades $\{p_j\}(Q \in Q_j)$ sobre todo el conjunto de los $s_j - t_j$caminos.

Entonces dado un sistema S de estrategias mixtas con distribución de probabilidades $\{p_j\}$. denotamos por $p_{e,j}$ la probabilidad de que el jugador j use el arco e y definimos las siguientes variables aleatorias.

- Un conjunto de variables aleatorias indicadoras $\{X_{Q,j}\}$, donde $X_{Q,j}$ indica que el jugador j elige el camino Q. Por definición: $\mathbb{P}(X_{Q,j}=1)=p_{Q,j}$.
- Un conjunto de variables aleatorias indicadoras $\{X_{e,j}\}$, donde $X_{e,j}$ indica cuando el jugador j utiliza en su ruta al arco e. Por definición: $X_{e,j}=\displaystyle\sum_{Q|e\in Q} X_{Q,j}$ y $\mathbb{P}(X_{e,j}=1)=p_{e,j}$.
- Por cada arco $e\in E$ definimos la variable aleatoria l_e, indicando la carga total sobre el arco: $l_e=\sum_{j=1}^{N} X_{e,j}w_j$

Definición 1: El costo esperado para el usuario j al elegir la ruta Q se define como: $C_{Q,j}=\mathbb{E}[\sum_{e\in Q} f_e(l_e)|X_{Q,j}=1]=\sum_{e\in Q}\mathbb{E}[f_e(l_e+(1-X_{Q,j})w_j)]$.

Definición 2: (Equilibrio de Nash) Un sistema S se dice equilibrio de Nash si y sólo si $\forall j\in\{1,...,N\}$ y $Q,Q'\in Q_j$, con $p_{Q,j}>0$ se tiene $C_{Q,j}\leq C_{Q',j}$.

Definicion 3: El costo esperado $C(S)$ para un sistema de estrategias mixtas se define como el costo esperado total generado por S, esto es, $C(S)=\mathbb{E}[\sum_{e\in E} f_e(l_e)l_e]$.

Consideramos $f_e(x)=a_e x+b_e$, con a_e,b_e no negativos $\forall e\in E$.

Se quiere probar que el Precio de la Anarquía es a lo más $\frac{3+\sqrt{5}}{2}$. Para ello proceder de manera similar al caso de estrategias puras, estableciendo las dos instancias (las que están en equilibrio de Nash, y los del óptimo global), utilizar la definición 2, considerando una ruta cualquiera $Q\in Q_j$, con $p_{Q,j}>0$ y Q_j^* la ruta óptima, entonces obtener algo del estilo:

$$\sum_{e\in Q} a_e[\mathbb{E}(l_e)+(1-p_{Q,j})w_j]+b_e\leq\sum_{e\in Q_j^*} a_e[\mathbb{E}(l_e)+w_j]+b_e$$

Multiplicar la desigualdad por $p_{Q,j}w_j$, agrupar de manera similar a lo del problema 1, sumar sobre los $Q\in Q_j$, hacer un cambio del orden de las sumas, probar las siguientes (des) igualdades:

- $\mathbb{E}[l_e^2]-(\mathbb{E}[l_e])^2=\displaystyle\sum_j p_{e,j}(1-p_{e,j})w_j^2$
- $\displaystyle\sum_{e\in E}\sum_j(a_e\mathbb{E}[l_e]+b_e)\sum_{Q|e\in Q} p_{Q,j}w_j+\sum_{e\in E} a_e\sum_j\sum_{Q|e\in Q}(p_{Q,j}-p_{Q,j}^2)w_j^2\geq\sum_{e\in E} a_e\mathbb{E}[l_e^2]+\sum_{e\in E} b_e\mathbb{E}[l_e]$
- $\displaystyle\sum_j\sum_{e\in Q_j^*} a_e(\mathbb{E}[l_e]w_j+w_j^2)+b_ew_j\leq\sqrt{\sum_{e\in E} a_e\mathbb{E}[l_e^2]+b_e\mathbb{E}[l_e]}\sqrt{\sum_{e\in E} a_e(l_e^*)^2+b_el_e^*}+\sum_{e\in E} a_e(l_e^*)^2+b_el_e^*$

Y con eso concluir de manera similar al otro caso.