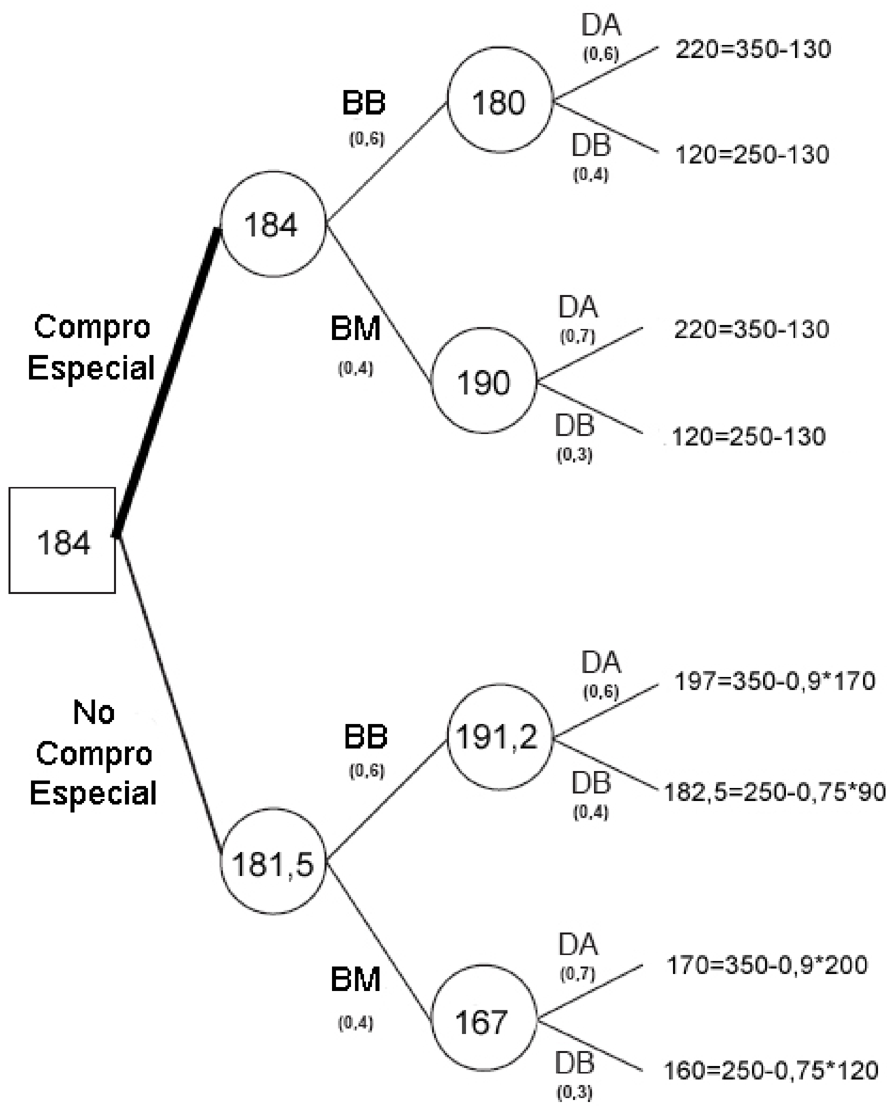
IN3702: Investigación de Operaciones
Profs: J. Correa, R. Epstein
Auxs: F. Lagos, N. Padilla, I. Rios, F. Vidal.

Pauta Auxiliar 2: Árboles de Decisión

Martes 25 de Octubre de 2011

Problema 1

a) Representando a los eventos "Balence Bueno" y "Balance Malo" por 'BB'y 'BM', respectivamente y a "Demanda Alta" y "Demanda Baja", por 'DA'y 'DB', respectivamente, el árbol que resulta se ve en la figura (los valores en las hojas están en miles de pesos):



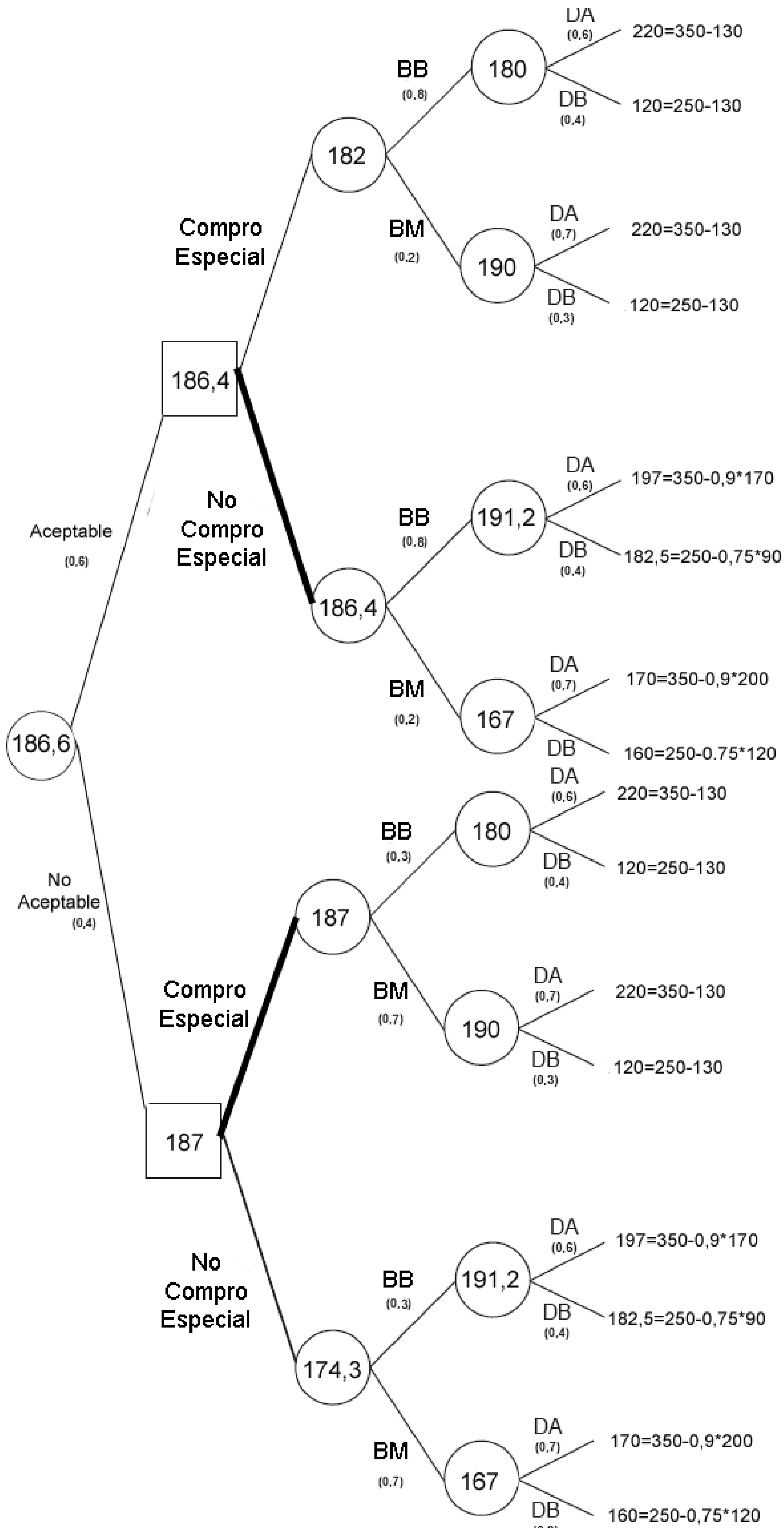
b) Para calcular el valor de la información provista por el experto, vamos a plantear un árbol que incluya los resultados de su estudio. Para esto se necesitan las probabilidades de que el balance sea bueno o malo, condicionada en la información del experto y las probabilidades de que el experto prediga un balance "Aceptable" o "No Aceptable". Es decir, las probabilidades que necesitamos y no tenemos son $P(Aceptable)$, $P(BB|Aceptable)$ y $P(BB|No\ Aceptable)$:

$$
\begin{aligned}
P(Aceptable) &= P(Aceptable|BB)P(BB) + P(Aceptable|BM)P(BM) \\
&= 0,8 \cdot 0,6 + 0,3 \cdot 0,4 \\
&= 0,6
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(BB|Aceptable) &= \frac{P(Aceptable|BB) \cdot P(BB)}{P(Aceptable)} \\
&= \frac{0,8 \cdot 0,6}{0,6} \\
&= 0,8
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
P(BB|No\ \ Aceptable) &= \frac{P(No\ \ Aceptable|BB) \cdot P(BB)}{P(No\ \ Aceptable)} \\
&= \frac{0,2 \cdot 0,6}{0,4} \\
&= 0,3
\end{aligned}
$$

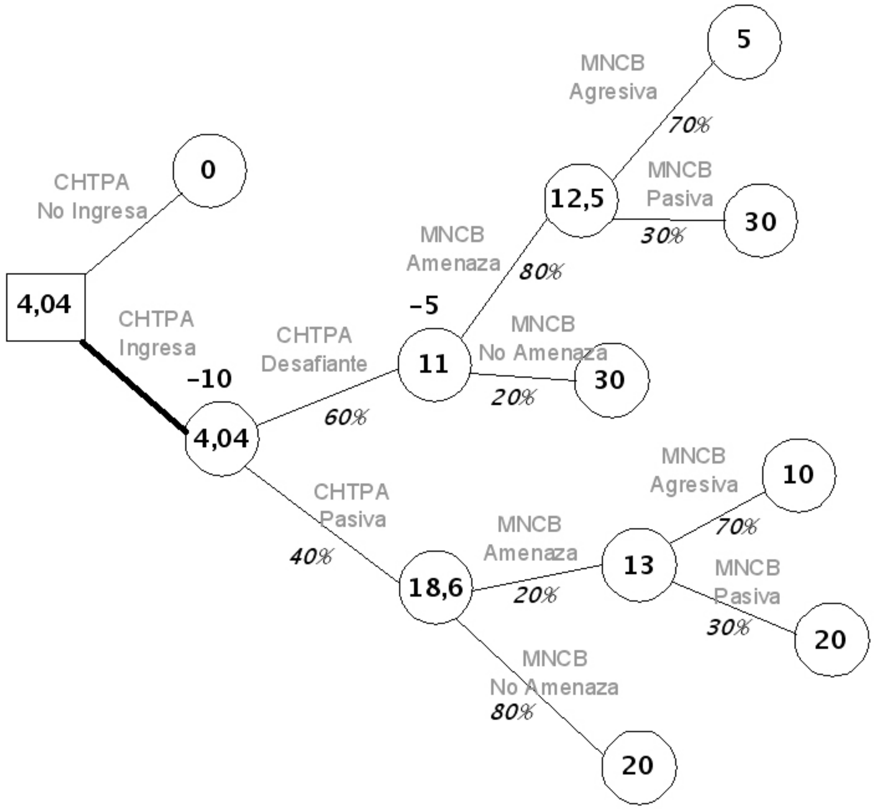
Una vez calculadas las probabilidades, podemos plantear y resolver el árbol asociado a esta parte, que se muestra en la figura:



De los valores finales, podemos calcular que lo más que estaría dispuesto a pagar es $186,6 - 184 = 2,6$ miles de pesos.

Problema 2

1. El árbol de decisión queda como indica la figura:



Las probabilidades que no se especifican en el enunciado (la probabilidad que MonoCobre amenace dado que ChileExplota entra desafiante) fueron calculadas de la siguiente manera:

$$\mathcal{P}(CHTPA\ des. \mid MNCB\ am.) = 85,7\,\%$$

$$\mathcal{P}(MNCB\ am. \mid CHTPA\ des.) = \frac{\mathcal{P}(CHTPA\ des. \mid MNCB\ am.) \cdot \mathcal{P}(MNCB\ am.)}{\mathcal{P}(CHTPA\ des.)}$$
$$= \frac{0,857 \cdot \mathcal{P}(MNCB\ am.)}{0,6}$$

Por otro lado:

$$\mathcal{P}(MNCBam.) = \mathcal{P}(MNCBam.|CHTPAdes.)\cdot\mathcal{P}(CHTPAdes.)+\mathcal{P}(MNCBam.|CHTPApas.)\cdot\mathcal{P}(CHTPApas.)$$
$$= 0,857 \cdot \mathcal{P}(MNCB\ am.) + 0,2 \cdot 0,4$$

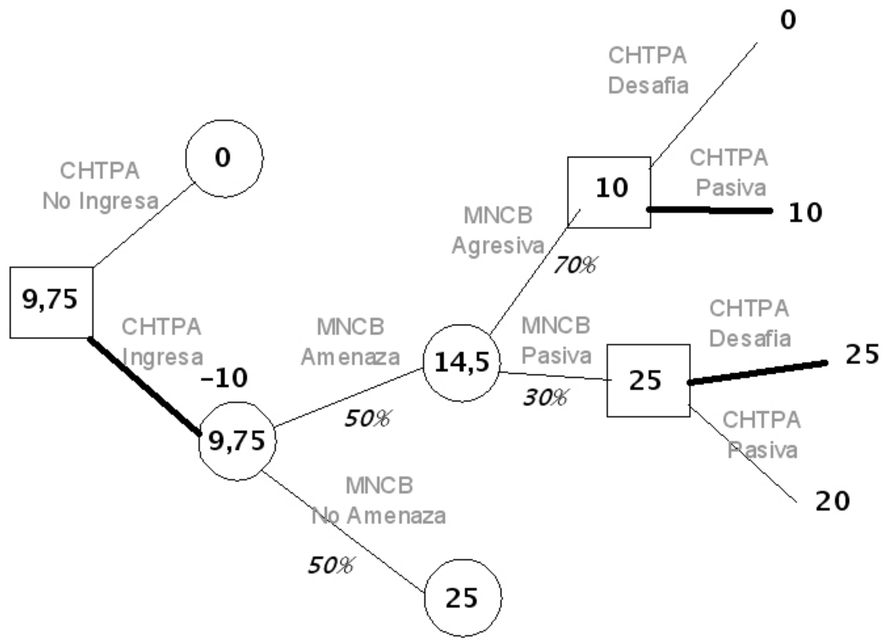
$$\Rightarrow \quad \mathcal{P}(MNCB\ am.) = 0,56$$

Por último

$$\mathcal{P}(MNCB\ am. \mid CHTPA\ des.) = \frac{0,857 \cdot 0,56}{0,6} = 0,8$$

La empresa ganaría $4,04$ millones por ingresar.

2. El nuevo arbol sería:
Y el valor de la información perfecta es: $9,75 - 4,04 = 5,71$ millones de pesos.



Problema 3

El árbol es el que indica la figura:

Para calcular la probabilidad que falta (la probabilidad que se descubra a Farmacias Coludidas dado que la farmacia de Matta, que fue comprada por Don Pancho, está coludida) se realiza el siguiente y sencillo cálculo:

$$\mathcal{P}(Matta\ coludida \mid se\ descubre\ FC) = 70\,\%$$

$$\mathcal{P}(\ se\ descubre\ FC|Matta\ no\ coludida\ ) = 60\,\%$$

$$\mathcal{P}(Matta\ coludida) = 80\,\%$$

Por Bayes:

$$\mathcal{P}(\ se\ descubre\ FC \mid Matta\ coludida\ ) = \frac{\mathcal{P}(Matta\ coludida \mid se\ descubre\ FC) \cdot \mathcal{P}(\ se\ descubre\ FC\ )}{\mathcal{P}(Matta\ coludida)}$$

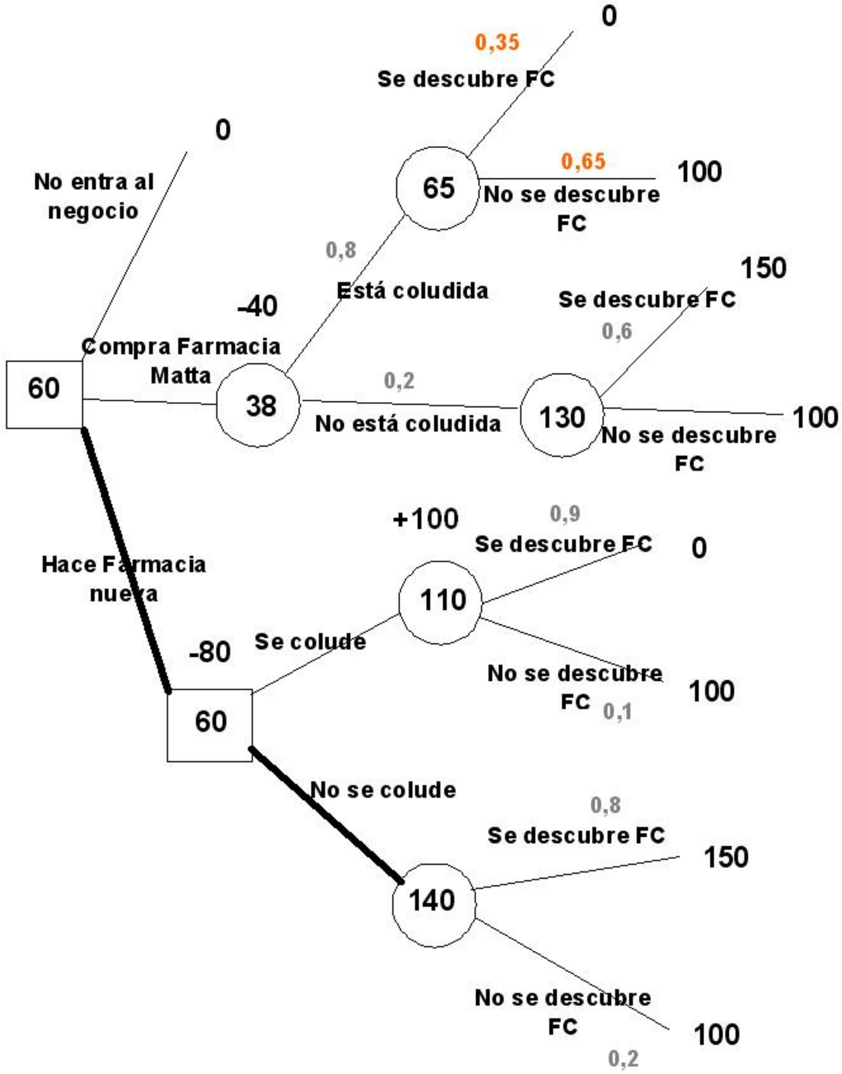
$$= \frac{0,7 \cdot \mathcal{P}(\ se\ descubre\ FC\ )}{0,8}$$

Por probabilidades totales:

$$\mathcal{P}(sedescFC) = \mathcal{P}(sedescFC|Mattacolud) \cdot \mathcal{P}(Mattacolud) + \mathcal{P}(sedescFC|Mattanocolud) \cdot \mathcal{P}(Mattanocolud)$$

$$= 0,7 \cdot \mathcal{P}(\ se\ descubre\ FC\ ) + 0,6 \cdot 0,2$$

$$\Rightarrow\ \ \mathcal{P}(\ se\ descubre\ FC\ ) = \frac{0,6 \cdot 0,2}{0,3} = 0,4$$



Luego

$$\mathcal{P}(\ se\ descubre\ FC\ |\ Matta\ coludida\ ) = \frac{0,7 \cdot 0,4}{0,8} = 0,35$$

que es la probabilidad que se necesitaba en el árbol.

Problema 4

1. El resultado corresponde a una carrera de exponenciales entre $T_c \backsim \text{Min}\{t_{c1}, ..., t_{cN}\}$ y $T_v \backsim \text{Min}\{t_{v1}, ..., t_{vM}\}$. Donde $T_c \backsim exp(N\lambda)$ y $T_v \backsim exp(M\mu)$. El hecho que sean las 10 de la mañana no es considerado debido a la pérdida de memoria de la exponencial.

$$P(T_c \leq Tv) = \frac{N\lambda}{N\lambda + M\mu}$$

2. Si $k > N$ la probabilidad pedida es nula. Para el caso $0 < k \leq N$ consideremos que T_i representa el tiempo que demora en pasar el primero de los $N-i$ conejos que quedan recorriendo la ciudad (o en otras palabras, el tiempo que demora en pasar el próximo conejo dado que ya han pasado i por la casa de Alicia).

$$T_i \backsim exp((N-i)\lambda)$$

Si queremos que cuando pase el primer vehículo municipal hayan pasado k conejos, debemos imponer que $T_0 < T_v$, $T_1 < T_v$, ..., $T_{k-1} < T_v$ además que $T_k > T_v$, es decir:

$$P(\text{Hayan pasado k conejos}) = P(T_0 < T_v) \cdot ... \cdot P(T_{k-1} < T_v) \cdot P(T_k > T_v) = \prod_{i=0}^{k-1} \frac{(N-i)\lambda}{(N-i)\lambda + M\mu} \cdot \frac{M\mu}{M\mu + (N-k)\lambda}$$

3. El tiempo que demora en pasar el conejo amigo de Alicia se distribuye exponencial de tasa λ. Como la esperanza de una exponencial es el inverso del parámetro se tiene que el tiempo esperado es $\frac{1}{\lambda}$.

4. Le calcularemos la esperanza a una variable aleatoria de la forma:

$$T = \sum_{i=0}^{N-1} T_i$$

Como la exponencial tiene pérdida de memoria, calculamos el tiempo esperado directamente como $E[T]$:

$$E[T] = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{(N-i)\lambda}$$