INGENIERIA INDUSTRIAL
UNIVERSIDAD DE CHILE

IN3702: Investigación de Operaciones
Profs: J. Correa, R. Epstein
Auxs: F. Lagos, N. Padilla, I. Ríos, F. Vidal

Pauta Auxiliar 5: Procesos de Poisson

Martes 22 de Noviembre 2011

Pregunta 1

1. Dado que el proceso es poissoniano $\Rightarrow$ Tiempo entre llegadas $\rightarrow exp(\lambda)$.
   Por lo tanto:

$$P_s(\text{caminar}) = \int_s^\infty \lambda e^{-\lambda t} \partial t = e^{-\lambda s}$$

2. Hay que distinguir dos casos:
   - Si el bus pasa en t, con $t \leq s$, me demoro t+R en llegar a casa.
   - Si el bus pasa en t, con $t > s$, me demoro s+W en llegar a casa.

3. Para calcular esta esperanza condicionaremos sobre t, el instante de llegada del bus.

$$\begin{aligned} E(T) &= \int_0^\infty E(T|t) \cdot \lambda e^{-\lambda t} \partial t \\ E(T) &= \int_0^s (t+R) \cdot \lambda e^{-\lambda t} \partial t + \int_s^\infty (S+W) \cdot \lambda e^{-\lambda t} \partial t \end{aligned}$$

   Desarrollando deberían llegar a la siguiente expresión:

$$E(T) = R + \frac{1}{\lambda} + e^{-\lambda s}(W - R - \frac{1}{\lambda})$$

4. Claramente si:
   - $W - R - \frac{1}{\lambda} > 0$, entonces E(T) se minimiza en s= ∞
   - $W - R - \frac{1}{\lambda} < 0$, entonces E(T) se minimiza en s=0
   - $W - R - \frac{1}{\lambda} = 0$, entonces la expresión no depende de s.

5. Dada la pérdida de memoria de la exponencial, si espero un s>0 y cada vez que pasa ese tiempo reevalúo mi desición estaré siempre frente al mismo problema original por lo que mi s será el mismo $\Rightarrow$ si s>0, entonces s=∞.

Pregunta 2

1. Para que esto ocurra el tiempo entre cada uno de los 6 últimos 6 goles debe ser superior a B (notar que la probabilidad de ver el primer gol es 1). Sean x_i = tiempo entre el gol (i-1)-ésimo y el i-ésimo. Entonces:

$$P(\text{ver los 7 primeros goles}) = P(x_2 > B, x_3 > B, ..., x_6 > B, x_7 > B) = (e^{-\lambda B})^6 = e^{-6\lambda B}$$

2. Sea Y_i el tiempo trascurrido entre el (i-1)-ésimo gol observado y el i-ésimo gol observado. De esta manera tenemos que:
   - $Y_1 \rightarrow exp(\lambda)$
   - $Y_i \rightarrow exp(\lambda)\ \forall i \neq 1$

Entonces sea S_N el tiempo en que vemos el N-ésimo gol.

$$S_n = \sum_{i=1}^{N} Y_i \Rightarrow S_N - (N-1)B \rightarrow Gamma(N, \lambda)$$

De lo anterior, y sabiendo que $P(S_N \leq t) = P(R(T) \geq N)$[1] se concluye que:

$$P(R(T) \geq N) = \int_0^{t-(n-1)B} \frac{\lambda^N \cdot t^{N-1} \cdot e^{-\lambda t} \partial t}{(n-1)!}$$

Problema 3

1. Dado que la esperanza de un proceso de Poisson de tasa λ es $E(N(t)) = \lambda t$ entonces, si se desea que en $t = 1[hr]$ el promedio de buses despachados sea 6, se requiere que $\lambda = 6$ [buses hora] .

2. Sabemos que X_i , el tiempo entre buses, se distribuye exponencialmente con parametro λ. Por perdida de memoria de la exponencial, no importa a que hora llegue el pasajero al paradero, la esperanza de tiempo para que pase el proximo bus siempre es $E(X_i) = \frac{1}{\lambda} = 10$ minutos.

3. Sabemos que cada pasajero llega según un proceso de Poisson en un intervalo de 10 minutos, el tiempo de llegada entre dos buses. Por lo tanto, la distribución del instante de su llegada en cualquiera de esos intervalos es uniforme, por lo que la esperanza de tiempo de espera es 5 minutos.

4. Para el proceso determinístico se requieren 12 buses, para poder sacar un bus cada 10 minutos durante 2 horas. Para el proceso de Poisson, la cantidad de buses que salen en 2 horas puede ser infinita. Dado que se requieren más buses y el tiempo de espera es mayor con un proceso de Poisson, es más conveniente para la empresa despachar los buses determinísticamente.

Problema 4

(a) (1.5 puntos) Por pérdida de memoria, se tiene que el tiempo esperado es de 15 minutos.

(b) (1.5 puntos) Análogamente a la parte (a), se tiene que el tiempo esperado que deberá esperar el estudiante es 15 minutos. Además, se tiene que en esperanza el último bus paso hace 15 minutos, por lo tanto el tiempo esperado que transcurre entre que pasó el último bus y la llegada del próximo bus (en el que se sube el alumno) es 30 minutos.

(c) (1.5 puntos) Dado que sabemos que exactamente un bus pasará en los próximos 30 minutos, la distribución del tiempo de llegada de éste es una uniforme entre 0 y 30 minutos, por lo tanto el tiempo esperado que deberá esperar el estudiante es la esperanza de la uniforme [0,30], ie, 15 minutos.

(d) (1.5 puntos) Nuevamente, como se sabe que en los próximos minutos llegarán exactamente dos buses, se tiene que el tiempo de llegada de éstos se distribuye uniforme en el intervalo 0 - 30 minutos. Por lo tanto, se debe estudiar la distribución del tiempo mínimo entre dos v.a uniformes[0,30]. Entonces, sean x_1 y x_2 los tiempos de llegada de los buses, con $x_i \sim U[0,30], i \in \{1,2\}$, y sea $z = \min\{x_1, x_2\}$ el mínimo entre ambas variables.
Por lo tanto, se tiene que,

$$\mathbb{F}(\xi) = \mathbb{P}(z \leq \xi) = \mathbb{P}(\min\{x_1, x_2\} \leq \xi) = 1 - \mathbb{P}(\min\{x_1, x_2\} \geq \xi) = 1 - \mathbb{P}(x_1 \geq \xi) \cdot \mathbb{P}(x_2 \geq \xi)$$

donde esta última igualdad se debe a que las variables son independientes, y $\xi \in [0, 30]$.
Luego, sabemos que para $X \sim U[0, t]$ se tiene que:

$$\mathbb{P}(X \geq x) = \int_x^t \frac{1}{t} dy = \frac{(t-x)}{t}$$

[1] Identidad valida para cualquier proceso de conteo

con lo cual, para nuestro caso, se tiene que $\mathbb{P}(x_1 \geq \xi) = \mathbb{P}(x_2 \geq \xi) = \frac{(t-\xi)}{t}$.
Entonces:

$$\mathbb{F}(\xi) = 1 - (\frac{t-\xi}{t})^2$$

Sabiendo que $\frac{\partial \mathbb{F}(\xi)}{\partial \xi} = f(\xi)$, se tiene que la distribución de z está dada por:

$$\frac{\partial \mathbb{F}(\xi)}{\partial \xi} = f(\xi) = \frac{2(t-\xi)}{t^2}$$

Finalmente, calculamos la esperanza de la v.a z,

$$\mathbb{E}(z) = \int_0^t \xi \frac{2(t-\xi)}{t^2} d\xi$$

integrando por partes, con $u = \xi, du = d\xi, dv = (t-\xi), v = \frac{-(t-\xi)^2}{2}$, se obtiene que:

$$\mathbb{E}(z) = \frac{2}{t^2}[(-\xi \cdot \frac{(t-\xi)^2}{2})_0^t + \int_0^t \frac{(t-\xi)^2}{2} d\xi]$$

$$\mathbb{E}(z) = \frac{1}{t^2} \cdot \frac{t^3}{3} = \frac{t}{3}$$

Por lo tanto, reemplazando t por 30, se obtiene que el tiempo esperado es 10 minutos.