Auxiliar 1 - IN3202
Primavera 2011

Profesor: Felipe Balmaceda
Auxiliares: Nicolás Inostroza, Sebastián Vergara

1. Considere el siguiente juego, encuentre los equilibrios de Nash en estrategias puras y mixtas, utilizando el metodo de eliminacion iterada de estrategias estrictamente dominadas.

Jugador 2

Jugador 1	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
s_1	$4,1$	$2,1$	$3,1$	$5,2$	$3,3$
s_2	$3,6$	$3,4$	$4,3$	$1,2$	$2,1$
s_3	$2,3$	$4,3$	$5,6$	$3,5$	$2,2$
s_4	$3,2$	$6,4$	$2,3$	$4,5$	$2,4$
s_5	$5,2$	$4,2$	$6,1$	$4,3$	$3,2$

Solution:

Recordemos que una estretegia s_i es estrictamente dominada por una estrategia s_i', si $U_1(s_i, t_i) < U_1(s_i', t_i)\ \forall t_i$. Analogo para el jugador 2.

Dado lo anterior, podemos notar que s_5 domina estrictamente a s_2, por lo que eliminamos la estrategia s_2, y el juego queda de la siguiente forma:

Jugador 2

Jugador 1	t_1	t_2	t_3	t_4	t_5
s_1	$4,1$	$2,1$	$3,1$	$5,2$	$3,3$
s_3	$2,3$	$4,3$	$5,6$	$3,5$	$2,2$
s_4	$3,2$	$6,4$	$2,3$	$4,5$	$2,4$
s_5	$5,2$	$4,2$	$6,1$	$4,3$	$3,2$

Ahora vemos que t_4 domina estrictamente a t_2 para el jugador 2, por lo que eliminamos t_2 y el juego queda asi:

Jugador 2

Jugador 1	t_1	t_3	t_4	t_5
s_1	$4,1$	$3,1$	$5,2$	$3,3$
s_3	$2,3$	$5,6$	$3,5$	$2,2$
s_4	$3,2$	$2,3$	$4,5$	$2,4$
s_5	$5,2$	$6,1$	$4,3$	$3,2$

Vemos que s_1 domina estrictamente a s_4 y que s_5 domina estrictamente a s_3, por lo que eliminamos ambas estrategias y el juego queda asi:

Jugador 2

Jugador 1		t_1	t_3	t_4	t_5
	s_1	4, 1	3, 1	5, 2	3, 3
	s_5	5, 2	6, 1	4, 3	3, 2

Finalmente, t_4 domina estrictamente a t_3 y a t_1, por lo que el juego queda asi:

Jugador 2

Jugador 1		t_4	t_5
	s_1	5, 2	3, 3
	s_5	4, 3	3, 2

Ahora que no quedan mas estrategias estrictamente dominadas para ningun jugador, podemos resolver el nuevo juego, el cual es equivalente al inicial, pero mas simple.

Para encontrar los equilibrios, calculamos las funciones de mejor respuesta de cada jugador usando la utilidad esperada.

Sea p la probabilidad con que el jugador 1 juega la estrategia s_1 y q la probabilidad con que el jugador 2 juega la estrategia t_4.

$$U_1(p,q) = p(5q + 3 - 3q) + (1-p)(4q + 3 - 3q)$$
$$U_1(p,q) = p(3 + 2q) + (1-p)(3 + q)$$
$$U_1(p,q) = p(q) + (3 + q)$$

Con esto, la funcion de mejor respuesta del jugador 1 es:

$$Br_1(q) = \begin{cases} p = 1 & si \quad q > 0 \\ p \in [0,1] & si \quad q = 0 \end{cases}$$

Analogamente para el jugador 2:

$$U_2(p,q) = q(2p+3-3p) + (1-q)(3p+2-2p)$$
$$U_2(p,q) = q(3-p) + (1-q)(2+p)$$
$$U_2(p,q) = q(1-2p) + (2+p)$$

Con esto, la funcion de mejor respuesta del jugador 2 es:

$$Br_2(p) = \begin{cases} q = 1 & si \quad p < 1/2 \\ q \in [0,1] & si \quad p = 1/2 \\ q = 0 & si \quad p > 1/2 \end{cases}$$

Los equilibrios seran aquellos en que las mejores respuestas se induzcan mutuamente, es decir, los perfiles (σ_1^*, σ_2^*) tal que:

$$Br_i(Br_{-i}(\sigma_i^*)) = \sigma_i^* \qquad \forall i$$

Por lo tanto, se verifica facilmente que los siguientes perfiles son equlibrios de Nash:

$$EN_{puros} = \{(s_1, t_5)\}$$
$$EN_{mixtos} = \{((p, 1-p), (0,1)) \mid p \in (1/2, 1]\}$$

2. Considere dos vendedores compitiendo por el mercado. Por cada periodo en que ambos vendedores estén en el mercado, ambos incurren en un costo c por competir. Si uno de los dos vendedores deja de competir en algún determinado periodo, lo hace para siempre, y el vendedor que quedó dentro del mercado deja de incurrir en el costo c, y obtiene una utilidad de V por el monopolio (en caso de empate, se reparten V en partes iguales). El juego consiste en que cada vendedor debe elegir en el comienzo del juego, cuándo se va a retirar de la competencia. Caracterice el juego en forma normal y muestre que no existe equilibrio en estrategias puras. CORRECCIÓN: HAY UN EQUILIBRIO.

Solution:

El juego en forma normal es:

$$< I, (S_i)_{i\in I}, (u_i)_{i\in I} >$$

donde $I = 2$, $S_i = \mathbb{R}_+$ y

$$u_i(s_i, s_{-i}) = \begin{cases} V - cs_{-i} & \text{si } s_i > s_{-i} \\ \frac{V}{2} - cs_{-i} & \text{si } s_i = s_{-i} \\ -cs_i & \text{si } s_i < s_{-i} \end{cases}$$

Inicialmente, es fácil ver que podemos restringir el conjunto de acciones a $S_i = [0, \frac{V}{c}]$, ya que para valores mayores, el jugador aún ganando la competencia, termina ganando menos de los que gasta, por lo que no es óptimo en ningún caso.

Para ver si hay o no equilibrios, tenemos que postular distintos perfiles de estrategias $s = (s_i, s_j)$ (s_j es la estrategia del otro jugador, es simplemente para facilitar la notación), y ver si existen desvíos beneficiosos para algún jugador. Para esto, podemos separar estos perfiles en los siguientes casos o clases (lo importante es que la unión de todos los casos sean todos los casos posibles):

- **Caso 1:** $0 \leq s_i = s_j < \frac{V}{c}$

  Bajo este perfil, la utilidad del jugador i es

  $$u_i(s_i, s_j) = \frac{V}{2} - cs_i$$

  sin embargo, existe el desvío $s_i' = s_i + \epsilon$, que mejora al jugador i, en efecto:

  $$u_i(s_i', s_j) = V - cs_j > \frac{V}{2} - cs_i = u_i(s_i, s_j)$$

  ya que $s_i = s_j$. Por lo tanto, el jugador i prefiere aumentar un poco su tiempo de retirada y asi quedarse con el mercado. Este caso no es entonces equilibrio.

- **Caso 2:** $s_i = s_j = \frac{V}{c}$

  $$u_i(s_i, s_j) = \frac{V}{2} - c\frac{V}{c} = -\frac{V}{2}$$

  en este caso un desvío posible es $s_i' = 0$ con lo cual

  $$u_i(s_i', s_j) = 0 > -\frac{V}{2} = u_i(s_i, s_j)$$

  Este caso entonces tampoco es equilibrio ya que hay un desvío.

- **Caso 3:** $0 < s_i < s_j \leq \frac{V}{c}$ (esto es sin perdida de generalidad ya que los jugadores son simetricos).

  $$u_i(s_i, s_j) = -cs_i$$

en este caso un desvío posible es: $s_i' = 0$ con lo cual

$$u_i(s_i', s_j) = 0 > -cs_i = u_i(s_i, s_j)$$

por lo que este caso tampoco puede ser equilibrio.

- **Caso 4:** $0 = s_i < s_j < \frac{V}{c}$

$$u_i(s_i, s_j) = 0$$

sin embargo, aca el jugador i puede aumentar hasta ganarle a j, esto es: $s_i' = s_j + \epsilon$, con lo que

$$u_i(s_i', s_j) = V - c_s j > 0 = u_i(s_i, s_j)$$

Este caso tampoco es equilibrio.

- **Caso 5:** $s_i = 0$, $s_j = \frac{V}{c}$

$$u_i(s_i, s_j) = 0$$

es fácil ver aca que cualquier desvío para i no lo mejora, ya que al aumentar solo esta aumentando sus costos, y si logra empatar, sigue siendo peor ya que gana $-\frac{V}{2}$.

$$u_j(s_i, s_j) = V - c \cdot 0 = V$$

Para j tampoco hay desvíos beneficiosos, ya que de bajar su tiempo, sigue ganando la competencia y el costo sigue siendo nulo (ya que el costo viene dado por la estrategia del otro jugador). Y si llega a bajar hasta $s_j' = 0$, gana 0 lo que no lo mejora.

Por lo tanto, hemos encontrado un equilibrio $s = (s_i, s_j) = (0, \frac{V}{c})$. (En realidad son dos equilibrios, ya que es simetrico, entonces podemos permutara los jugadores).

Recuerden que para probar que un perfil no es equilibrio, basta que algún jugador tenga un desvío que lo beneficie, mientras que para probar que un perfil es equilibrio, se necesita que no existan desvíos beneficiosos para ningún jugador.

3. Considere el siguiente problema de *los comunes*. Un grupo de campesinos debe colaborar en un proyecto de mantención de un camino rural. Cuando el vector esfuerzo de los n campesinos es $\{e\} = (e_1, \ldots, e_n)$, la calidad del camino produce un beneficio al campesino i de $u(e_i, e_{-i}) = \sqrt{\sum_{j=1}^n e_j^2}$. Por otro lado, hay un costo de esfuerzo dado por e_i^2, por lo que la utilidad del campesino que realiza un esfuerzo e_i, cuando los demás realizan un esfuerzo e_{-i} es

$$U(e_i, e_{-i}) = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} e_j^2} \; - \; e_i^2$$

(a) Suponga que los campesinos como una comunidad en forma colaborativa. Encuentre el nivel de esfuerzo de los campesinos que permite obtener la máxima utilidad cuando actuan colaborativamente.

(b) Suponga ahora que los campesinos no actuan colaborativamente ¿Cuál sería el nivel de esfuerzo que elegirían?

(c) Compare el esfuerzo de cada campesino en cada caso y la diferencia en bienestar total entre ambos casos. Explique intuitivamente sus resultados.