Apuntes de Física Moderna: Relatividad Especial

Gonzalo Palma

(Apuntes en construcción)

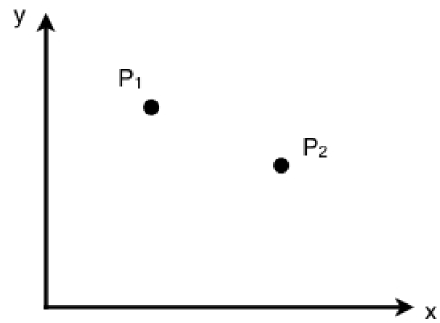
1 Principios relativistas

Comenzaremos nuestro estudio estableciendo los principios básicos tras la formulación introducida por Einstein acerca del espacio y del tiempo (o simplemente espacio-tiempo). Primero, desarrollemos algunos conceptos elementales que ciertamente ya nos son familiares, pero que nos serán tremendamente útiles.

1.1 Sistemas de referencias

Partamos considerando, por simplicidad, un espacio Euclidiano de dos dimensiones. En un espacio tan simple como éste usualmente nos interesa hablar de puntos y, si fuese posible, de figuras geométricas mas complejas. Por ahora, hablemos sólo de puntos. De más está decir que un sistema compuesto de un solo punto es poco interesante, por lo que consideremos una situación en la cual existen dos puntos P_1 y P_2, tal como lo muestra la siguiente figura:

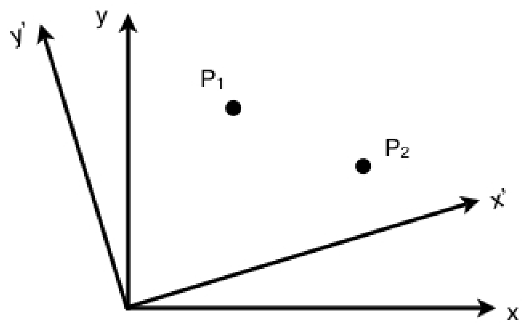
Típicamente, para estudiar estos puntos resulta útil introducir el concepto de sistemas de referencias. Ciertamente, el sistema de referencia más familiar consiste en el sistema Cartesiano, en el presente caso constituido por dos ejes ordenados (x, y) dispuestos en forma perpendicular. Llamemos K a este sistema.



En tal sistema podemos usar las coordenadas (x_1, y_1) para caracterizar la posición del primer punto y (x_2, y_2) para la posición del segundo. Más aun, podemos decir que ambos puntos están separados por una distancia Δr dada por

$$\Delta r^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2, \tag{1.1}$$

donde $\Delta x = x_2 - x_1$ y $\Delta y = y_2 - y_1$. Notemos, sin embargo, que bien pudimos haber adoptado el mismo sistema cartesiano pero con una configuración distinta relativa al primer sistema de referencia K. Supongamos por ejemplo un segundo sistema K' rotado en un ángulo θ con respecto al primero.



En tal sistema los puntos están caracterizados por las coordenadas (x'_1, y'_1) y (x'_2, y'_2) respectivamente. Noten sin embargo que, dado que sabemos que el segundo sistema de referencia está rotado en un ángulo θ con respecto a K, podemos establecer una relación entre las coordenadas de ambos puntos en ambos sistemas. Más concretamente, podemos escribir:

$$x'_1 = x_1 \cos\theta + y_1 \sin\theta, \qquad y'_1 = -x_1 \sin\theta + y_1 \cos\theta, \tag{1.2}$$

$$x'_2 = x_2 \cos\theta + y_2 \sin\theta, \qquad y'_2 = -x_2 \sin\theta + y_2 \cos\theta. \tag{1.3}$$

En términos de vectores y matrices, estas relaciones se pueden escribir de forma más sucinta:

$$\vec{X}'_1 = R \cdot \vec{X}_1 \qquad \vec{X}'_2 = R \cdot \vec{X}_2 \tag{1.4}$$

donde $\vec{X}_1 = (x_1, y_1)$, etc... y la matriz de rotación R viene dada por

$$R = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{1.5}$$

Quizás más importante que estas relaciones, es el hecho que los vectores diferencia $\Delta\vec{X} = \vec{X}_2 - \vec{X}_1$ y $\Delta\vec{X}' = \vec{X}'_2 - \vec{X}'_1$ pueden ser relacionados mediante relaciones similares

$$\Delta\vec{X}' = R \cdot \Delta\vec{X}. \tag{1.6}$$

Utilizando el hecho que $R^t \cdot R = R \cdot R^t = 1$ (donde t denota la traspuesta) podemos inferir la siguiente relación:

$$|\Delta\vec{X}'|^2 = \Delta\vec{X}'^t\Delta\vec{X}' = \Delta\vec{X}^t R^t R \Delta\vec{X} = |\Delta\vec{X}|^2 \tag{1.7}$$

Reconociendo que $|\Delta\vec{X}|^2 = \Delta r^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$ y $|\Delta\vec{X}'|^2 = (\Delta r')^2 = (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2$, hemos pues deducido nuestro primer resultado importante:

$$(\Delta r')^2 = \Delta r^2. \tag{1.8}$$

En otras palabras, la distancia es una cantidad invariante bajo rotaciones. No importa como elijamos la configuración de nuestros sistemas de referencia para describir los puntos P_1 y P_2, la distancia entre ambos puntos es una cantidad que no puede depender de tales disposiciones.

Ejercicio 1. En el ejemplo anterior consideramos dos sistemas de referencia relacionados por una rotación. Esto significa que necesitamos proveer un sólo parámetro para relacionar las coordenadas en un sistema con otro. Extienda los resultados anteriores para el caso en que ambos sistemas no sólo están rotados uno con respecto al otro, pero también el origen de uno está trasladado con respecto al otro. ¿Cuántos parámetros se requieren para relacionar las coordenadas en ambos sistemas?

Ejercicio 2. Evidentemente, la discusión anterior puede extenderse a tres dimensiones o más. En el caso de tres dimensiones la cantidad relacionando a dos puntos que resulta invariante bajo rotaciones y traslaciones viene dada por $\Delta r^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$. Repita el ejercicio anterior para el caso de tres dimensiones. ¿Cuántos parámetros se requieren ahora para relacionar las coordenadas de dos sistemas cartesianos?

1.2 Principio de relatividad Euclidiano

Hasta el momento hemos notado que la distancia entre dos puntos (partículas) en un espacio Euclidiano no depende de la forma (sistema) que elijamos para describirlos. Esto es ciertamente fácil de aceptar, ya que los sistemas de referencia los hemos impuesto nosotros para poder describir relaciones entre ambos puntos, pero la existencia de los puntos es independiente de nosotros, y por lo tanto, de nuestra elección de sistemas.

Evidentemente las relaciones físicas entre dos partículas, tales como interacciones, tampoco puede depender de la forma que escojamos para describirlas. Sin embargo, quizás por costumbre, insistimos en escribir las leyes de la física de tal forma que parecen depender de nuestros sistemas de referencia. Escribamos por ejemplo la segunda ley de Newton de una forma que nos resulte familiar:

$$m\vec{a} = m\ddot{\vec{X}} = \vec{F}. \tag{1.9}$$

En la expresión anterior $\vec{X}$ es el vector designando la posición de una partícula de masa m relativa al origen de cierto sistema, a la cual se le aplica una fuerza $\vec{F}$. Sin embargo, otro observador, dotado de intenciones y capacidades similares a las nuestras, pero contando con su sistema de referencia propio, escribirá exactamente la misma ecuación, provisto que tal sistema es estático con respecto al nuestro (es decir que las rotaciones y traslaciones que relacionan a su sistema con el nuestro no varían en el tiempo). Para ser más concretos, supongamos que estamos interesados en describir la interacción gravitacional de dos partículas P_1 y P_2 con masas m_1 y m_2 respectivamente, cuyas coordenadas en nuestro sistema K vienen dadas por $\vec{X}_1$ y $\vec{X}_2$ respectivamente. La fuerza en tal caso vienen dadas por

$$\vec{F} = -\frac{G_N m_1 m_2}{\Delta r^2}\frac{\Delta\vec{X}}{\Delta r}, \tag{1.10}$$

donde $\Delta r^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2$ y $\Delta\vec{X} = \vec{X}_2 - \vec{X}_1$, y por lo tanto, las ecuaciones de movimiento para ambas partículas viene dada por

$$\ddot{\vec{X}}_1 = \frac{G_N m_2}{\Delta r^2}\frac{\Delta\vec{X}}{\Delta r}, \qquad \ddot{\vec{X}}_2 = -\frac{G_N m_1}{\Delta r^2}\frac{\Delta\vec{X}}{\Delta r} \tag{1.11}$$

Supongamos que el sistema de referencia K' de este segundo observador está rotado con respecto a nuestro sistema K mediante una matriz de rotación R constante. Esto significa que las coordenadas de P_1 y P_2 escritas en K' están relacionadas con las nuestras a través de las relaciones

$$\vec{X}'_1 = R\vec{X}_1 \qquad \vec{X}'_2 = R\vec{X}_2. \tag{1.12}$$

Utilizando el hecho de que la diferencia entre ambos vectores también satisface $\Delta\vec{X}' = R\Delta\vec{X}$, podemos deducir, multiplicando R por la izquierda de ambas ecuaciones en (1.11), la siguientes relaciones validas en K'

$$\ddot{\vec{X}}'_1 = \frac{G_N m_2}{(\Delta r')^2}\frac{\Delta\vec{X}'}{\Delta r'}, \qquad \ddot{\vec{X}}'_2 = -\frac{G_N m_1}{(\Delta r')^2}\frac{\Delta\vec{X}'}{\Delta r'} \tag{1.13}$$

donde, dado que R es constante, hemos usado $R\ddot{\vec{X}}_1 = (R\vec{X}_1)^{\cdot\cdot} = \ddot{\vec{X}}'_1$. Para deducir la expresión anterior también fue importante recordar que $\Delta r^2 = (\Delta r')^2$ es un invariante bajo rotaciones. Hemos pues comprobado que la ley universal de la gravitación de Newton es invariante bajo rotaciones en cierto sentido: Esta se escribe en forma idéntica en dos sistemas de referencia conectadas por rotaciones constantes.

Ejercicio 3. Compruebe que las leyes de Newton también se escriben en forma idéntica si ambos sistemas están conectados no solo por rotaciones constantes, pero también traslaciones constantes.

Ya estamos en condiciones de formular nuestro primer principio de relatividad. Llamemos a éste le principio de relatividad Euclidiano: Las leyes de la naturaleza son escritas de forma idéntica en todos los sistemas de referencia conectados por rotaciones y traslaciones constantes.

Ejercicio 4. Compruebe que las leyes de Newton fallan en satisfacer nuestro principio de relatividad Euclidiano si los ángulos de rotación relacionando dos sistemas de referencia están variando en el tiempo.

1.3 Sistemas de referencias inerciales

El lector atento ciertamente ha notado que nuestro análisis anterior es incompleto e insatisfactorio. Existe una clase particular de sistemas de referencia que son de importancia fundamental para el estudio de las leyes de Newton. Estos son los llamados sistemas de referencia inerciales. Definimos un sistema de referencia inercial como aquel en el cual un cuerpo en movimiento libre (un cuerpo en movimiento sobre el cual no están siendo aplicadas fuerzas externas) permanece moviéndose a velocidad constante. Si dos sistemas de referencia se mueven uniformemente uno respecto al otro, y uno de ellos es inercial, entonces el otro también es necesariamente inercial. Es decir, existe una clase de equivalencia infinita de sistemas inerciales.

Estrictamente hablando, las ecuaciones de gravitación de Newton (1.11) sólo pueden ser escritas de tal forma si el sistema de referencia es inercial. Notemos por ejemplo que si no hubiese interacción gravitacional entre ambas partículas (lo que corresponde a apagar el acoplamiento de Newton $G_N \to 0$) entonces uno simplemente tendría

$$\ddot{\vec{X}}_1 = 0, \qquad \ddot{\vec{X}}_2 = 0, \tag{1.14}$$

y por lo tanto ambas partículas se moverían libremente a velocidad constante. Recordemos que para analizar la situación en la cual $G_N \neq 0$ debemos pensar en ambas partículas como parte de un sistema compuesto caracterizadas por un centro de masas

$$\vec{X}_0 = \frac{m_1\vec{X}_2 + m_2\vec{X}_1}{m_1 + m_2}. \tag{1.15}$$

De esta forma, ambas partículas son componentes de una partícula compuesta cuya ubicación en nuestro sistema de coordenadas viene dada por $\vec{X}_0$. En tal caso es fácil comprobar que tal partícula compuesta se mueve libremente con una velocidad constante, dado que en virtud de las ecuaciones de movimiento uno tiene la relación:

$$\ddot{\vec{X}}_0 = 0. \tag{1.16}$$

Si estuviésemos muy lejos de este sistema compuesto de partículas, de hecho sólo podríamos distinguir una única partícula P_0 a velocidad uniforme. Esto revela que nuestro sistema inicial en el cual escribimos las ecuaciones (1.11) efectivamente era inercial.

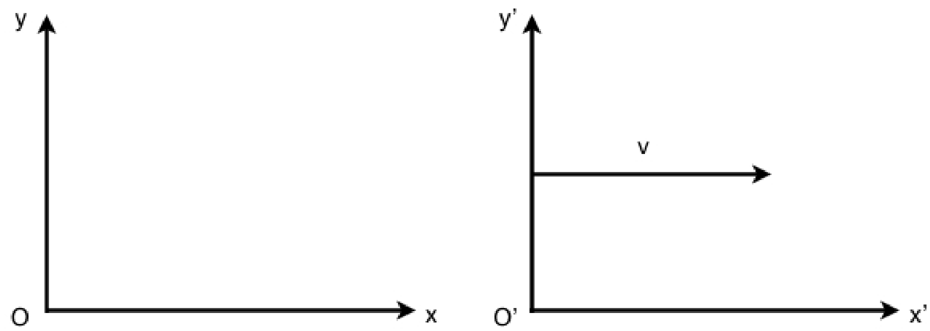
1.4 Principio de la relatividad

Usando como motivación nuestra ley de la relatividad Euclidiana, resulta natural hacer un esfuerzo para extenderla incorporando el concepto más amplio de sistemas de referencia inerciales. La formulación de este principio es de hecho sencillo: *Las leyes de la naturaleza deben poder ser escritas de forma idéntica en todos los sistemas de referencia inerciales.* En otras palabras, las ecuaciones de movimiento expresando las leyes de la naturaleza son invariantes con respecto a las transformaciones de coordenadas desde un sistema inercial a otro. Pero ¿Cuáles son las transformaciones correctas relacionando las coordenadas de dos sistemas de referencia inerciales?

1.5 Principio de relatividad Galiliano

Supongamos dos observadores O y O' moviéndose a una velocidad relativa $\vec{v}$ constante. Ambos observadores pueden, por derecho propio, establecer sus sistemas de referencia K y K' con los orígenes centrados en ellos mismos (ver figura). Tales sistemas son, por definición, sistemas de referencias inerciales. La experiencia nos revela que una buena relación matemática entre ambos sistemas de coordenadas K y K' bajo estas circunstancias viene dada por las célebres transformaciones de Galileo. En el caso en que ambos sistemas están convenientemente alineados y la velocidad v de O' relativa a O es en la dirección del eje x, entonces estas transformaciones adquieren la forma sencilla

$$x' = x - vt, \qquad y' = y \qquad z' = z, \tag{1.17}$$



donde por simplicidad, también hemos asumido que en $t = 0$ la posición de ambos observadores es coincidente. Es fácil verificar que si un cuerpo se mueve a velocidad $\vec{u}$ en K, entonces el observador en O' lo registrara en su sistema de referencia K' a una velocidad

$$\vec{u}' = \vec{u} - \vec{v}. \tag{1.18}$$

La verdadera importancia de las transformaciones de Galileo es que las leyes de Newton son invariantes bajo su acción, en el sentido que dichas leyes son expresadas de forma idéntica en ambos sistemas. Por dicho motivo, resulta natural especificar que el principio de relatividad expresado en 1.4 debe ser complementado con las transformaciones de Galileo. Veremos, sin embargo, que esta actitud es algo apresurada.

1.6 Interacciones

Observemos que las ecuaciones (1.11) poseen una propiedad desconcertante. Si se interviene en el sistema descrito por estas ecuaciones desplazando una de las partículas de su posición, la segunda partícula sentirá dicho efecto en forma instantánea. Esto se debe a que, en general, en mecánica Newtoniana, la fuerza entre partículas puede ser deducida a partir de un potencial de energía, que es función únicamente de las coordenadas de las partículas (más bien de la distancia relativa).

Sin embargo, resulta natural exigir que la interacción entre partículas no sea instantáneo, y que, si algún cambio toma lugar en alguna de las partículas del sistema, influenciará a otras partículas sólo después de un cierto lapso de tiempo. Esto implica la existencia de una velocidad máxima $v_{\max}$ de propagación de interacción.

Dicha velocidad $v_{\max}$ es máxima dado que, si hubiesen partículas o cuerpos que fuesen capaces de exceder tal velocidad, sería posible realizar un proceso incluyendo una interacción con una velocidad mayor a la ya acordada velocidad máxima de interacción. Cuando nos refiramos a interacciones propagándose a tal velocidad, hablaremos de señales.

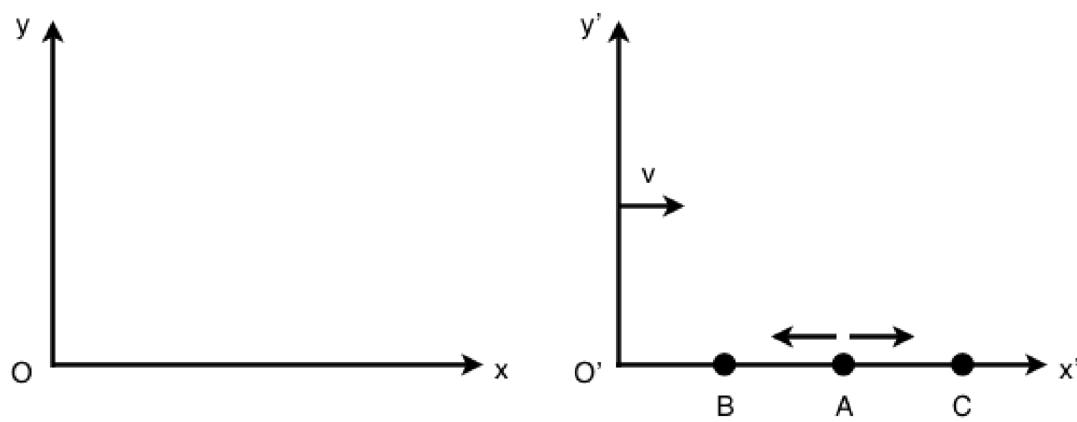
1.7 Principio de relatividad especial de Einstein

Si existe una velocidad máxima de propagación de señales, claramente el principio de relatividad Galiliano no puede ser correcto. En efecto, si las transformaciones de Galileo fuesen correctas, siempre se podría constatar una velocidad mayor que la de las señales mediante el movimiento relativo adecuado. Esto implica que debemos cambiar drásticamente nuestra visión del espacio y del tiempo, puesto que si hemos de persistir con el principio de relatividad expresado en la Sección 1.4, debemos aceptar que la velocidad $v_{\max}$ es universal y registrada de forma idéntica por todos los observadores utilizando sistemas de referencia inerciales para escribir las leyes de la naturaleza. En otras palabras, $v_{\max}$ es necesariamente una constate universal. La velocidad de la luz es un candidato ideal para ser identificada como dicha constante. Más adelante veremos que en efecto este es el caso y, por lo tanto

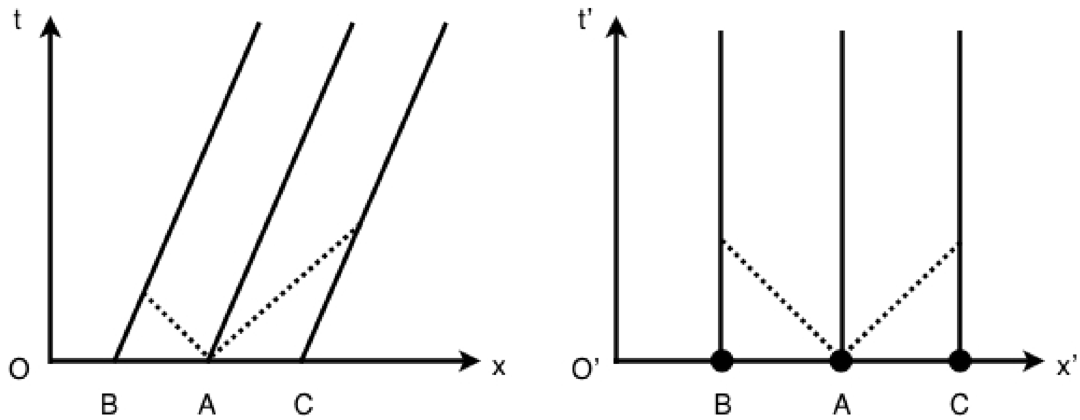
$$v_{\max} = c = 299792\text{Km/s}. \tag{1.19}$$

1.8 Sobre el concepto de simultaneidad

Es posible notar desde ya que ciertas nociones forjadas en el estudio de la mecánica no relativista (Newtoniana) son radicalmente afectadas. Una de ellas es el concepto de simultaneidad. En efecto, supongamos la misma situación descrita por la figura 2.3. Esta vez, sin embargo, el observador O' observa la siguiente situación: Dos señales abandonan una fuente A en reposo con respecto a K' en direcciones opuestas a lo largo del eje x. Dos receptores B y C, también en reposo con respecto a K' se encuentran a la misma distancia de A, y están dispuestos sobre el eje x para interceptar las señales. Desde el



punto de vista de O', claramente ambas señales llegan a B y C en forma simultánea, en tiempos $t'_B = t'_C$. Dado que hemos aceptado que la velocidad de la luz es una constante universal, debemos concluir que el observador O, utilizando su sistema de referencia K para registrar eventos, percibirá que las señales son interceptadas por B y C a tiempos t_B y t_C que no coinciden (ver siguiente figura). Para llegar a esta conclusión no hemos

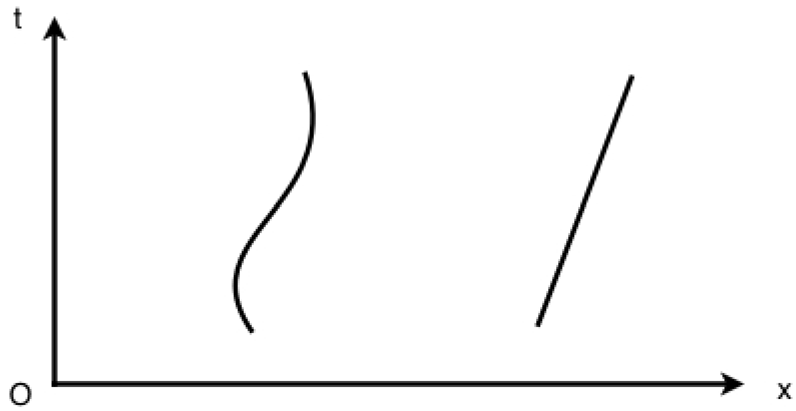


hecho más que aceptar dos principios básicos. Primero, el principio de la relatividad, que establece que las leyes de la naturaleza deben ser escritas en forma idénticas en todos los sistemas inerciales. Y segundo, la existencia de una velocidad máxima de propagación para las interacciones. La combinación de ambos principios es lo que se denomina el principio de relatividad de Einstein.

Es importante señalar, sin embargo, que la Mecánica de Newton no carece de "relatividad" en el mismo sentido profundo del principio de relatividad de Einstein, ya que, como hemos visto, las leyes de Newton son invariantes bajo transformaciones de Galileo, las que relacionan a observadores en sistemas inerciales. El verdadero cambio conceptual llega a partir de aceptar la existencia de una velocidad máxima de propagación de señales. Históricamente, esto fue posible sólo gracias a un mayor entendimiento de los fenómenos electromagnéticos y la naturaleza ondulatoria de la luz.

1.9 Intervalos espacio-temporales

Evidentemente, para poder entender este tipo de discrepancias debemos reeducar nuestra noción del espacio-tiempo. Para ello resulta conveniente introducir ciertos conceptos básicos que nos serán útiles en el estudio de la relatividad especial. En general, trabajaremos con espacios geométricos donde el tiempo puede ser representado mediante un eje coordenado, al igual que el resto de las coordenadas espaciales (tal como en la figura anterior). En dichos espacios, eventos vienen representados por puntos, caracterizados por coordenadas determinando el tiempo en el que el evento ocurre y las coordenadas espaciales. Por otro lado, una partícula puede ser representada como una sucesión de eventos, siguiendo la trayectoria de la partícula. La curva compuesta por tal sucesión de eventos es denominada línea mundo, y en el caso que la partícula se propague a velocidad constante, la línea mundo corresponde una linea recta en un sistema de referencia inercial.



Ahora bien, supongamos dos eventos P_1 y P_2 arbitrarios. En general, dado un sistema inercial K, podremos asignar a estos eventos coordenadas espacio-temporales (t_1, x_1, y_1, z_1) y (t_2, x_2, y_2, z_2) respectivamente. Definamos al intervalo espacio temporal Δs^2 entre ambos eventos de la siguiente forma:

$$\Delta s^2 = -c^2 \Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2, \tag{1.20}$$

donde c es la velocidad de la luz y $\Delta t = t_2 - t_1$, $\Delta x = x_2 - x_1$, $\Delta y = y_2 - y_1$ y $\Delta z = z_2 - z_1$. Por otro lado, en otro sistema inercial K' estos eventos vendrán descritos por las coordenadas espacio-temporales (t'_1, x'_1, y'_1, z'_1) y (t'_2, x'_2, y'_2, z'_2) respectivamente, por lo que podemos definir una cantidad similar en términos de las coordenadas de K':

$$(\Delta s')^2 = -c^2 (\Delta t')^2 + (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2, \tag{1.21}$$

donde $\Delta t = t'_2 - t'_1$, $\Delta x = x'_2 - x'_1$, $\Delta y = y'_2 - y'_1$ y $\Delta z = z'_2 - z'_1$. Supongamos por un momento que ambos eventos están separados por un intervalo espacio-temporal caracterizado por $\Delta s^2 = 0$. La ecuación $\Delta s^2 = 0$ corresponde ni más ni menos que a una curva rectilínea en la cual una señal se propaga desde P_1 a P_2 a la velocidad de la luz. Sin embargo sabemos que la propagación de una señal es registrada en todos los sistemas de referencia con la misma velocidad (ya que corresponde a la velocidad universal máxima). Por lo tanto, si $\Delta s^2 = 0$ en K, necesariamente uno debe registrar $(\Delta s')^2 = 0$ en K'. En otras palabras $(\Delta s)^2 = 0$ y $(\Delta s')^2 = 0$ son equivalentes. Noten que ésta conclusión es completamente independiente de la orientación relativa de los ejes, o desplazamiento del origen de ambos sistemas, uno con respecto a otro.

Preguntemonos ahora cómo están estos intervalos, escritos en distintos sistemas inerciales, relacionados para eventos P_1 y P_2 arbitrarios (es decir, no necesariamente conectados por señales). Para ello, consideremos primero el caso en que tales eventos están infinitesimalmente cerca el uno del otro. En tal caso nos permitimos escribir el intervalo espacio-temporal en forma infinitesimal

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \tag{1.22}$$

Claramente, si la separación de dos eventos es infinitesimal en K, también lo debe ser en K'. De modo que la única relación entre ds y ds' aceptable es una relación lineal de la forma:

$$ds = a ds'. \tag{1.23}$$

Observen que ninguna otra cantidad infinitesimal puede entrar en esta relación, dado que para $ds' = 0$ sabemos que debemos invariablemente reobtener $ds = 0$. Más aún, el coeficiente a sólo puede depender del valor absoluto de la velocidad relativa de ambos sistemas K y K'. En efecto, observen primero que a no puede depender ni de las coordenadas espaciales ni del tiempo, de otro modo distintos puntos en el tiempo y en el espacio no serían equivalentes. En forma similar, a tampoco puede depender de la dirección de la velocidad relativa, pues eso introduciría una anisotropía del espacio al momento de describir la relación entre ambos eventos[1]. Noten que en total analogía, pudimos haber escrito

$$ds' = a ds, \tag{1.24}$$

donde a es precisamente la misma función. Por lo tanto podemos deducir que $a = \pm 1$. Notemos sin embargo que un caso particular corresponde a aquel en que $v = 0$, en cuyo caso debemos reobtener $ds = ds'$. Por dicho motivo, debemos concluir que $a = 1$ y en general:

$$ds = ds'. \tag{1.25}$$

Dado que hemos supuesto homogeneidad e isotropía del espacio-tiempo, este resultado puede ser extendido a intervalos finitos

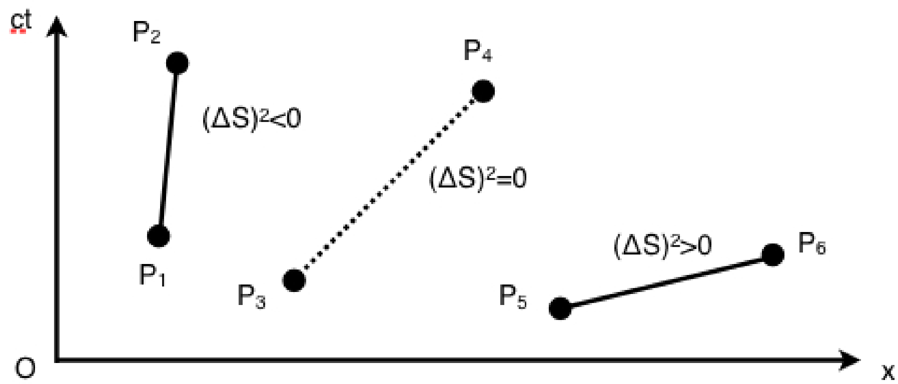
$$\Delta s = \Delta s'. \tag{1.26}$$

[1]Resulta útil pensar en estas dos reglas para el caso ya conocido que consideramos en la sección 1.1. Ahí bien pudimos haber deducido que el intervalo espacial $dr^2 = dx^2 + dy^2 + dy^2$ está relacionado al intervalo $dr'^2 = dx'^2 + dy'^2 + dy'^2$ mediante una relación lineal de la forma $dr = adr'$. En tal caso resulta natural entender por qué a no puede depender ni de las coordenadas ni de los ángulos de la matriz de rotación R, por exactamente las mismas razones

De esta forma, hemos llegado a un resultado crucial: El intervalo espacio-temporal Δs^2 caracterizando dos eventos arbitrarios es una cantidad invariante en todos los sistemas de referencia inerciales.

1.10 Variedades de intervalos

Noten que existen tres categorías de intervalos espacio temporales, dependiendo del signo. Aquellos eventos que están separados por intervalos $\Delta s^2 < 0$ se dicen separados por un intervalo tipo tiempo. Por otro lado, eventos cuya separación esta caracterizada por $\Delta s^2 = 0$, se dicen separados por un intervalo tipo luz. Finalmente, dos eventos caracterizados una separación $\Delta s^2 > 0$, se dicen separados por un intervalo tipo espacio. Para graficar estas tres situaciones, resulta muy conveniente dibujar el eje temporal multiplicado por c. En tal caso, si nos enfocamos por conveniencia solamente en el plano (x, t), los intervalos tipo luz corresponden a curvas rectilíneas siempre en 45^0. La siguiente figura muestra los tres tipos de intervalos.



1.11 Cono de luz

Un concepto importante en relatividad especial es aquel del “cono de luz”. Supongamos un evento P_1 con coordenadas (t_1, x_1, y_1, z_1) y visualicemos la superficie definida por el conjunto de todos los eventos $P = (t, x, y, z)$ tales que:

$$\Delta s^2 = -c^2 \Delta t^2 + \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 = 0, \tag{1.27}$$

donde $\Delta t = t - t_1$, $\Delta x = x - x_1$, $\Delta y = y - y_1$ y $\Delta z = z - z_1$. A esta superficie se le denomina el cono de luz, ya que toda línea mundo uniendo a P_1 con un evento P sobre la superficie, corresponde a la trayectoria que describiría un rayo de luz. La siguiente figura muestra como se vería el cono si nos despreocupamos del eje z. Observen que cualquier evento $P = (t, x, y, z)$ tal que $\Delta s^2 < 0$ (a una distancia tipo tiempo de P_1) necesariamente está dentro del cono, mientras que si es tal que $\Delta s^2 > 0$ (a una distancia tipo espacio de P_1) necesariamente está fuera del cono.

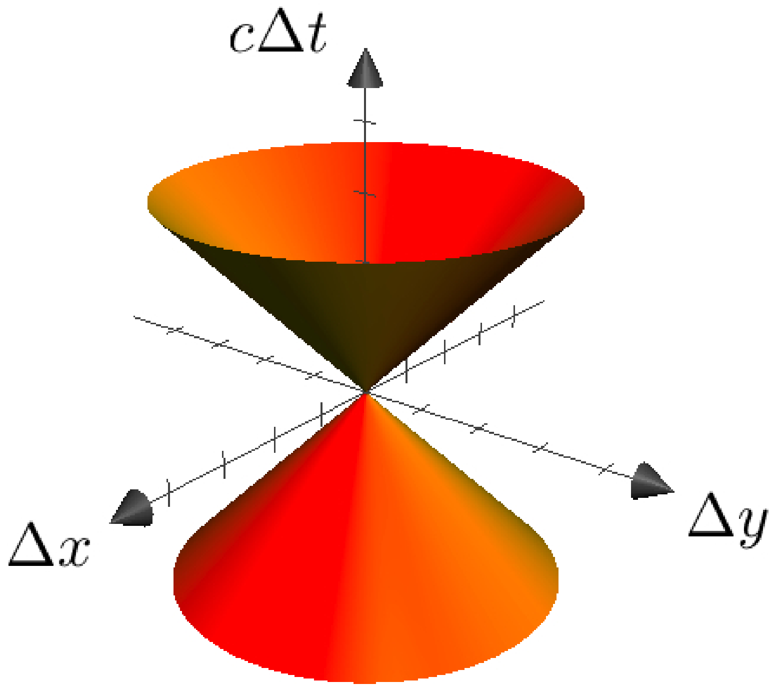


Figure 1: La figura muestra la superficie $\Delta s^2 = -c^2(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 = 0$ proyectada sobre el plano (ct, x, y). Esta superficie es denominada cono de luz.

2 Transformaciones de Lorentz

Ahora procedemos a deducir y estudiar las celebres transformaciones de Lorentz, relacionando sistemas de referencia inerciales para observadores en movimiento relativo uniforme.

2.1 Tiempo propio

Antes de deducir las transformaciones de Lorentz, resulta útil introducir un concepto fundamental en el estudio de la cinemática relativista. Supongamos un observador inercial O junto a su sistema de referencia K. Por definición, este observador verá partículas libres en movimiento uniforme y rectilíneo. Supongamos en particular una partícula con velocidad $\vec{v}$ con respecto a O. Ya sabemos que si dicha partícula es física (real), entonces $v < c$ y su línea de mundo debe ser tipo tiempo. Es decir, cualquier par de eventos P_1 y P_2 localizados sobre su línea mundo deben estar separados por un intervalo espacio-temporal tal que

$$\Delta s^2 = -c^2(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 < 0. \tag{2.1}$$

Más aún, dado que el movimiento es rectilíneo, tendremos que la la velocidad de la partícula satisface

$$v^2 = \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2. \tag{2.2}$$

Por otro lado, debe existir un sistema inercial K' donde dicha partícula se registra en reposo. Esto significa que para el mismo par de eventos P_1 y P_2 localizados sobre su línea mundo éstos estarán caracterizados en K' por $\Delta x' = 0$, $\Delta y' = 0$ y $\Delta z' = 0$. Tendremos por lo tanto la relación

$$-c^2(\Delta t')^2 = -c^2(\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2. \tag{2.3}$$

Noten que t' es la coordenada utilizada para medir el tiempo en el sistema de referencia en reposo con respecto a la partícula en cuestión y por lo tanto corresponde al tiempo percibido por la partícula. Es más, si reemplazásemos a la partícula por un reloj, este sería precisamente el tiempo indicado por dicho reloj, al ser observado por O. Por lo tanto, nos referiremos a este tiempo como el *tiempo propio* τ de la partícula. Notemos que un cierto periodo *propio* $\Delta\tau = \Delta t'$ viene relacionado con un periodo de tiempo medido por un reloj en K de la siguiente forma

$$(\Delta\tau)^2 = (\Delta t)^2 - \frac{(\Delta t)^2}{c^2}\left[\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z}{\Delta t}\right)^2\right], \tag{2.4}$$

y por lo tanto, podemos escribir $\Delta\tau = \Delta t\sqrt{1 - v^2/c^2}$. Esto quiere decir que el tiempo de un reloj en movimiento es percibido por un observador O pasando en forma más lenta que aquel registrado por su reloj

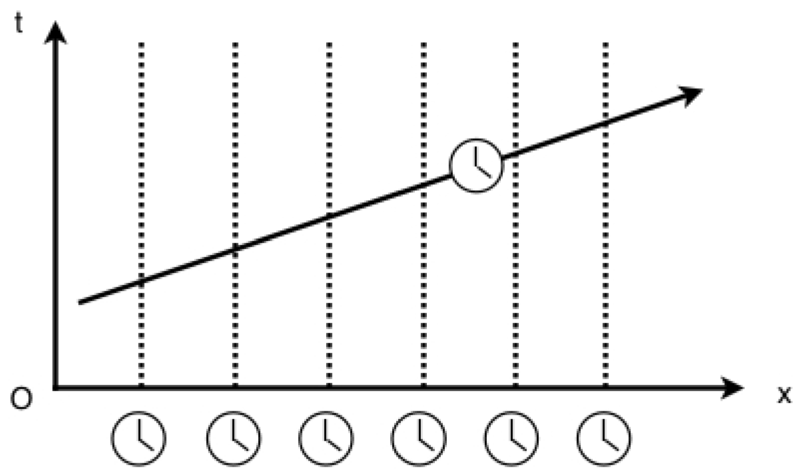
$$\Delta t = \frac{\Delta\tau}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{2.5}$$

2.2 Sobre el concepto de medición

Hay algo que a primera vista resulta extraño en la conclusión anterior. Supongamos que en vez de una partícula en movimiento rectilíneo uniforme tenemos un observador O' con un reloj. Este, al observar O moviéndose a una velocidad $-\vec{v}$ con respecto a si mismo habría deducido, correctamente, que el tiempo propio de O transcurre de forma más lenta que aquel que marca su reloj. De hecho el constataría que

$$\Delta t' = \frac{\Delta t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{2.6}$$

donde Δt es ahora el intervalo de tiempo propio de O. En otras palabras, ambos observadores perciben que el reloj del observador contrario marca el tiempo a intervalos regulares mas lentos que el suyo. ¿Cómo podemos explicar esta aparente contradicción? Para responder a esta pregunta debemos aclarar el concepto de medición. De hecho, hay cierta asimetría en la labor de medir y comparar relojes. Para ser más precisos, y volviendo al caso anterior de la Sección 2.1, si el observador O deseara medir el tiempo propio de un reloj en movimiento rectilíneo y uniforme, estará obligado a construir un arreglo de relojes, todos calibrados, y ubicados en distintos puntos espaciales de su sistema de referencia (ver figura). En otras palabras, el observador requiere construir un



arreglo de relojes consistente con su sistema de referencia para comparar el tiempo con el reloj en movimiento. Hay por lo tanto una asimetría inevitable al momento de intentar comparar relojes. Lo mismo ocurre si ahora reemplazamos al reloj por un observador O' y éste desease comparar como evoluciona el tiempo marcado por el reloj de O con sus sistema de referencia.

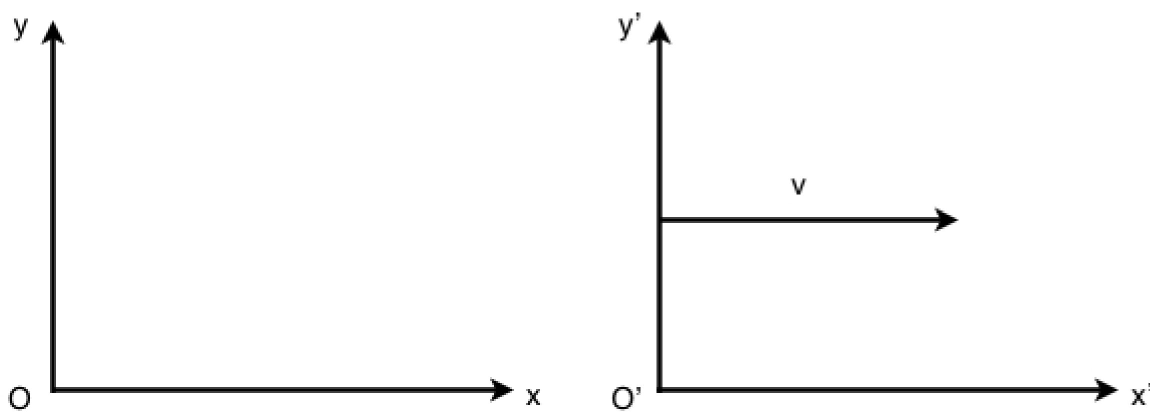
2.3 Transformaciones de Lorentz

Supongamos dos observadores O y O' con una velocidad relativa entre ambos dada por v. Ambos observadores estarán tentados en utilizar sus propios diagramas espacio-temporales (sistemas de referencia) para ubicar eventos. Por dicho motivo distinguimos entre los sistemas de referencias K y K' caracterizados por coordenadas (t, x, y, z) y (t', x', y', z') respectivamente. En la clase anterior vimos que, sin importar la orientación de los ejes, o desplazamiento del origen de dichos sistemas, dado dos eventos arbitrarios P_1 y P_2, existe una cantidad invariante, denominada el intervalo espacio-temporal Δs^2, dada por

$$\begin{aligned}(\Delta s)^2 &= -(c\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 \\ &= -(c\Delta t')^2 + (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2,\end{aligned} \tag{2.7}$$

donde $\Delta t = t_2 - t_1$, $\Delta x = x_2 - x_1$, etc... Es deseable contar con una transformación matemática relacionando directamente a las coordenadas de ambos sistemas que cumplan con la propiedad de mantener $(\Delta s)^2$. Al igual que con las rotaciones que vimos en la Sección 1.1, estas transformaciones deben ser relaciones lineales entre las diferencias $(\Delta t, \Delta\vec{x})$ y $(\Delta t', \Delta\vec{x}')$. Esto es evidente, pues buscamos mantener invariante una cantidad que es cuadrática en la diferencia de coordenadas.

En general estas transformaciones son complicadas (las deduciremos en su forma general un poco más adelante) pero podemos simplificar el problema de deducirlas si acordamos que ambos observadores tienen sus sistemas de referencia con los ejes espaciales alineados y que el movimiento relativo es a lo largo del eje x, tal como lo muestra la figura. Partamos



considerando la existencia de dos eventos P_1 y P_2 ubicados en el plano (t, x) de K. Estos eventos están caracterizados por un intervalo $\Delta s^2 = -(c\Delta t)^2 + (\Delta x)^2$. Evidentemente estos eventos continuarán siendo registrados en el plano (t', x') en K', por lo que sólo debemos considerar la invariancia del intervalo $(\Delta s')^2 = -(c\Delta t')^2 + (\Delta x')^2$. Tenemos pues

$$-(c\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 = -(c\Delta t')^2 + (\Delta x')^2. \tag{2.8}$$

Para deducir las transformaciones lineales teniendo lugar entre las coordenadas de ambos sistemas usemos el siguiente truco. Notemos que al escribir $\eta = ict$ y $\eta' = ict'$, la expresión anterior puede ser reexpresada de la forma

$$(\Delta\eta)^2 + (\Delta x)^2 = (\Delta\eta')^2 + (\Delta x')^2. \tag{2.9}$$

Esta expresión es de hecho conocida. Corresponde ni más ni menos que al intervalo invariante bajo rotaciones en el plano (η, x) examinado en la Sección 1.1. Para tal situación sabemos bien cuales son las transformaciones entre coordenadas. Estas son

$$\Delta\eta' = \Delta\eta\cos\theta - \Delta x\sin\theta, \qquad \Delta x' = \Delta x\cos\theta + \Delta\eta\sin\theta, \tag{2.10}$$

mientras que sus inversas vienen dadas por

$$\Delta\eta = \Delta\eta'\cos\theta + \Delta x'\sin\theta, \qquad \Delta x = \Delta x'\cos\theta - \Delta\eta'\sin\theta. \tag{2.11}$$

Para entender el significado de θ en este caso, consideremos la linea de mundo de una partícula en reposo en el sistema K'. Desde la perspectiva de O, esta partícula se mueve a una velocidad v y sigue un movimiento rectilíneo. Supongamos que los eventos P_1 y P_2 interceptan el paso de esta partícula. Luego, tendremos $\Delta x/\Delta t = v$. Desde la perspectiva de O', los dos eventos P_1 y P_2 están caracterizaos por $\Delta x' = 0$, dado que la partícula no se desplaza en su sistema de coordenadas. Por lo tanto, tenemos

$$\Delta\eta = \Delta\eta'\sin\theta, \qquad \Delta x = -\Delta\eta'\sin\theta. \tag{2.12}$$

Dividiendo la segunda relación por la primera, tenemos

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = -ic\tan\theta. \tag{2.13}$$

Es decir, θ esta directamente relacionado con la velocidad relativa de ambos sistemas K y K'. En virtud de esta última relación, podemos escribir

$$\sin\theta = \frac{iv/c}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{2.14}$$

Volviendo a las ecuaciones (2.11), y reescribiendo $\eta = ict$ y $\eta' = ict'$ deducimos finalmente las transformaciones de Lorentz:

$$\Delta t = \frac{\Delta t' + v\Delta x'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad \Delta x = \frac{\Delta x' + v\Delta t'}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{2.15}$$

Para deducir las relaciones inversas, podemos invertir directamente las relaciones lineales anteriores, o alternativamente, recordar que ellas son deducidas del mismo razonamiento anterior pero con v reemplazado por $-v$. Estas vienen dadas por

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - v\Delta x/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \qquad \Delta x' = \frac{\Delta x - v\Delta t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{2.16}$$

Es fácil comprobar que en efecto $(\Delta s)^2$ es un invariante bajo estas transformaciones. Terminemos esta sección señalando que si los eventos P_1 y P_2 están adicionalmente separados por componentes Δy y Δz perpendiculares al eje x, donde el movimiento relativo entre los observadores se realiza, entonces éstas no sufrirán cambios bajo las transformaciones. En otras palabras

$$\Delta y = \Delta y', \qquad \Delta z = \Delta z'. \tag{2.17}$$

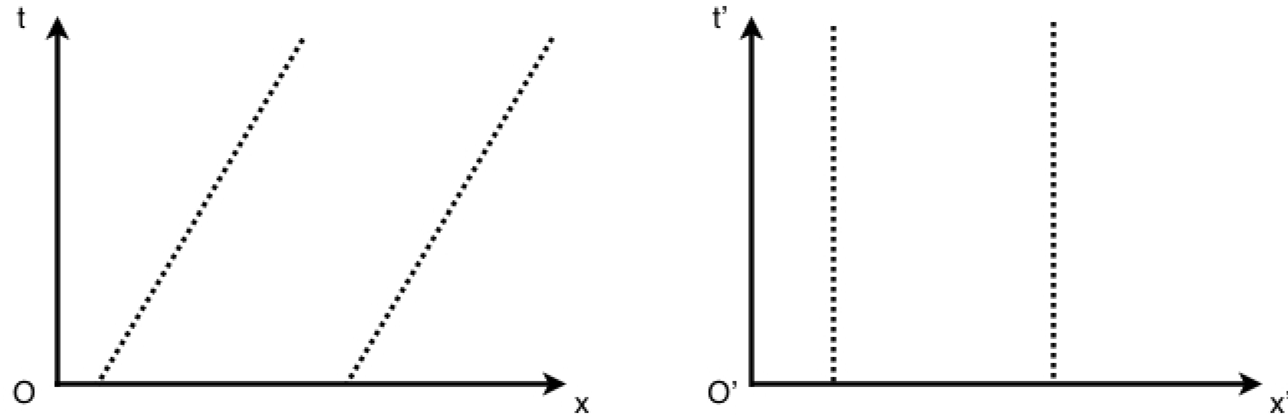
Para convencerse de esto podemos volver a la notación auxiliar mediante la cual escribimos $ic\Delta t = \Delta\eta$. En tal caso tenemos $(\Delta s)^2 = (\Delta\eta)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$. Este intervalo es invariante bajo rotaciones en un espacio de cuatro dimensiones. Sin embargo, ya vimos que si el movimiento entre los sistemas de referencia es a lo largo del eje x, la transformación entre ambos sistemas equivale a una rotación en el plano (η, x). Tal rotación en efecto deja sin modificación a las cantidades Δy y Δz.

2.4 Longitud propia

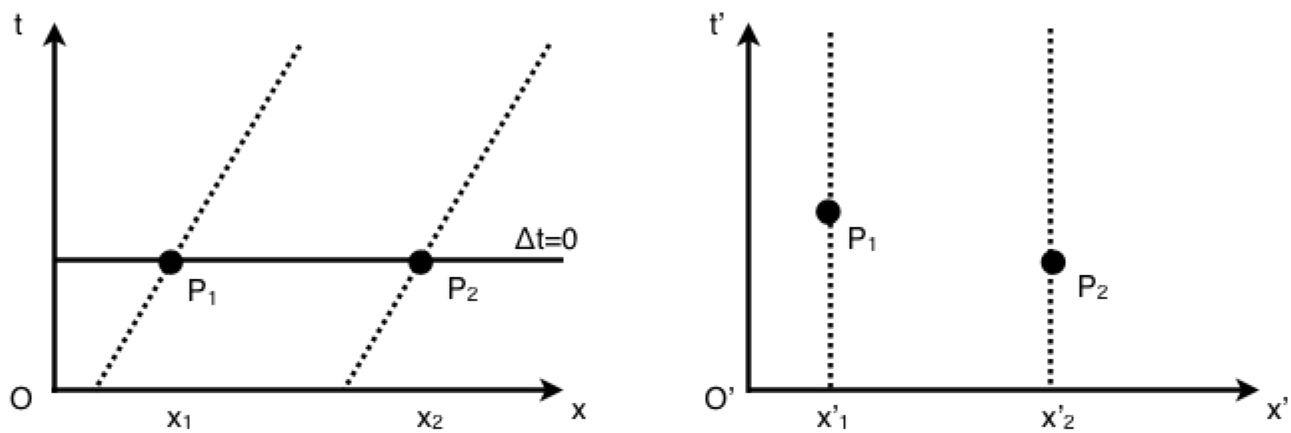
Como primera aplicación de las transformaciones de Lorentz, discutamos la medición del largo de un objeto extendido en movimiento, por ejemplo una barra. Supongamos que contamos con una barra *rígida* que en reposo mide ℓ_0. Dado que este es el largo medido en un sistema de referencia donde la barra está en reposo, nos referiremos a éste como el *largo propio* de la barra. Supongamos ahora que la misma barra está en movimiento, con una velocidad constante v con respecto a un observador O, y en una dirección que coincide con el largo de la barra. Como es costumbre, alineemos la dirección del movimiento (y del largo) con el eje x del sistema de referencia K utilizado por O para registrar eventos. En dicho sistema de referencia, O podrá constatar que la barra cubre una región de dos dimensiones en el plano (x, t) delimitada por dos *líneas mundo* denotando los extremos de la barra (ver siguiente figura). Es usual denominar a tal región como *sabana mundo*. Es conveniente pensar en los extremos de la barra como partículas. Dado que la barra pretende ser un objeto físico, los extremos de la barra deben seguir lineas de mundo tipo tiempo (recuerden la discusión de la Sección 1.10). En el presente caso, el observador O claramente verá los extremos de la barra en movimiento rectilíneo uniforme, a velocidad v. Por otro lado un observador O' en reposo con respecto a la barra, pero a velocidad v con respecto a O, verá que los extremos de la barras corresponden a líneas mundo completamente verticales en el plano (x', t') de su sistema de referencia, la primera en x'_1 y la segunda en x'_2. Para el observador O', la diferencia de las coordenadas corresponde a ℓ_0, es decir

$$\Delta x' = x'_2 - x'_1 = \ell_0. \tag{2.18}$$

Para establecer la medición del largo de la barra que hace O, debemos primero acordar que para éste, la medición del largo de un objeto extendido se hace en forma simultánea.



Es decir, el observador O debe registrar la posición de los extremos de la barra a tiempos iguales. Por lo tanto, para él, el largo de la barra consistirá a la distancia espacial entre dos eventos P_1 y P_2 caracterizados por $\Delta t = 0$ (ver siguiente figura). Utilizando (2.18) y



la segunda ecuación de (2.16), vemos pues que

$$\Delta x = \ell_0 \sqrt{1 - v^2/c^2}. \tag{2.19}$$

Dado que $\sqrt{1 - v^2/c^2} < 1$, vemos que el largo medido por O es menor que el largo propio de la barra. A esto se le denomina contracción de Lorentz. Notemos que la forma en que hemos deducido este resultado fue asociando a los extremos de la barra lineas de mundo, y asociando dos eventos P_1 y P_2 a la intersección de estas líneas de mundo con una curva a t =constante. Para O, estos eventos son simultáneos, que es la única forma que el o ella puede medir longitudes (piensen bien esto!). Por otra parte, estos eventos no serán simultáneos para un observador O' en reposo con respecto a la barra (ver figura anterior). De hecho la primera ecuación (2.16) nos dice que si bien P_1 y P_2 están separados por una distancia $\Delta x' = \ell_0$ en K', también son registrados por O' a destiempo:

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = -\frac{v\Delta x/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = -v\ell_0/c^2, \tag{2.20}$$

donde hemos usado (2.19) en la segunda igualdad. Este es quizás el aspecto más característico de la relatividad especial, es decir, el que no exista una forma absoluta de definir simultaneidad. Aquellos eventos que ocurren en forma simultánea para un observador inercial O no serán observados como simultáneos para un observador O' en movimiento con respecto a O.

Para terminar, observen que en el cálculo anterior necesitamos especificar si el origen de ambos sistemas de referencia coinciden o no. Es decir, no fue necesario acordar que los relojes utilizados en ambos sistemas de referencia están sincronizados de tal forma que para $(t, x) = (0, 0)$ uno tiene $(t, x) = (0, 0)$, lo que es utilizado en muchos textos. De hecho, en general tal convención es completamente irrelevante para resolver problemas en relatividad especial, ya que nuestro interés es típicamente describir la relación entre dos o mas eventos, en donde intervienen diferencias de coordenadas, y no la ubicación de los orígenes de los sistemas de referencia.

2.5 Notación β y γ

En ocasiones resulta útil introducir dos parámetros β y γ para simplificar la escritura de las transformaciones de Lorentz. Estos son:

$$\beta = \frac{v}{c}, \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \tag{2.21}$$

Teniendo en cuenta estos parámetros, las transformaciones de Lorentz pueden ser reexpresadas como

$$c\Delta t = \gamma(c\Delta t' + \beta\Delta x'), \qquad \Delta x = \gamma(\Delta x' + \beta c\Delta t'), \tag{2.22}$$

(donde hemos omitido las relaciones adicionales $\Delta y = \Delta y'$ y $\Delta z = \Delta z'$) mientras que sus inversas son

$$c\Delta t' = \gamma(c\Delta t - \beta\Delta x), \qquad \Delta x' = \gamma(\Delta x - \beta c\Delta t). \tag{2.23}$$

Noten también que por conveniencia hemos multiplicado por c en ambos lados, de modo que Δt y $\Delta t'$ siempre vienen acompañados del factor c.

2.6 Adición de velocidades

Claramente podemos repetir la deducción de las transformaciones de Lorentz para el caso en que dos eventos P_1 y P_2 están infinitesimalmente separados. En tal caso las transformaciones de Lorentz adquieren la forma

$$c\,dt = \gamma(c\,dt' + \beta dx'), \qquad dx = \gamma(dx' + \beta c\,dt'), \tag{2.24}$$

junto a las relaciones $dy = dy'$ y $dz = dz'$. Supongamos ahora que nuestro observador O constata una partícula en movimiento a velocidad u a lo largo del eje x. El movimiento de dicha partícula satisface

$$u = \frac{dx}{dt}. \tag{2.25}$$

Supongamos ahora que un segundo observador O' se mueve a velocidad v con respecto a O, también a lo largo del eje x (es decir $dy = dz = 0$). El observador O' observara la trayectoria de la partícula caracterizada por los infinitésimos dx' y dt' y por lo tanto observará una velocidad

$$u' = \frac{dx'}{dt'}. \tag{2.26}$$

Es posible obtener una relación de adición de velocidades involucrando las cantidades u y u'. Para obtenerla, dividamos la segunda relación en (2.31) por la primera

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx' + \beta c\,dt'}{dt' + \beta dx'/c} = \frac{\frac{dx'}{dt'} + v}{1 + \frac{v}{c^2}\frac{dx'}{dt'}}. \tag{2.27}$$

Esta relación nos permite finalmente obtener

$$u = \frac{u' + v}{1 + vu'/c^2}, \tag{2.28}$$

que es la relación deseada. También es posible invertir esta relación para obtener u' en términos de u. Es posible obtener tal relación ya sea invirtiendo directamente la relación anterior, o simplemente recordando que el mismo razonamiento para deducir la regla puede ser repetido pero invirtiendo el rol de los observadores mediante $v \to -v$

$$u' = \frac{u - v}{1 - vu/c^2}. \tag{2.29}$$

Comparen esta última relación con la regla Galiliana para la adición de velocidades (1.18) examinada en la primera cátedra. Noten que si la velocidad de propagación de señales fuese infinita ($c \to +\infty$) reobtendríamos la regla Galiliana, lo que es consistente con nuestra discusión sobre la instantaneidad de las interacciones.

2.7 Algo más sobre adición de velocidades

Retomemos el último resultado de la clase anterior. Recordemos que dedujimos la regla de adición de velocidades asumiendo que la partícula en cuestión se movía a lo largo del mismo eje en el cual los observadores O y O' presentan un movimiento relativo. Supongamos ahora que la partícula tiene componentes perpendiculares al eje x. Es decir, la velocidad de la partícula corresponde a un vector $\vec{u}$ con componentes

$$u_x = \frac{dx}{dt}, \qquad u_y = \frac{dy}{dt}, \qquad u_z = \frac{dz}{dt}. \tag{2.30}$$

Las transformaciones de Lorentz nos dicen que los infinitesimales dt, dx, dy, dz asociados al movimiento de la partícula en el sistema de referencia K están relacionados con los infinitesimales dt', dx', dy', dz' en el sistema de referencia K' (utilizado por un observador O' en movimiento con respecto a O con velocidad v a lo largo del eje x) en la forma siguiente:

$$c\,dt = \gamma(c\,dt' + \beta dx'), \qquad dx = \gamma(dx' + \beta c\,dt'), \qquad dy = dy', \qquad dz = dz'. \tag{2.31}$$

Repitiendo el calculo hecho en la última sección de la clase anterior, pero ahora teniendo en cuenta las componentes a lo largo de los ejes y y z, obtenemos

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + vu'_x/c^2}, \qquad u_y = \frac{u'_y\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + vu'_x/c^2}, \qquad u_z = \frac{u'_z\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + vu'_x/c^2}. \tag{2.32}$$

Por otro lado, las relaciones inversas, corresponden a

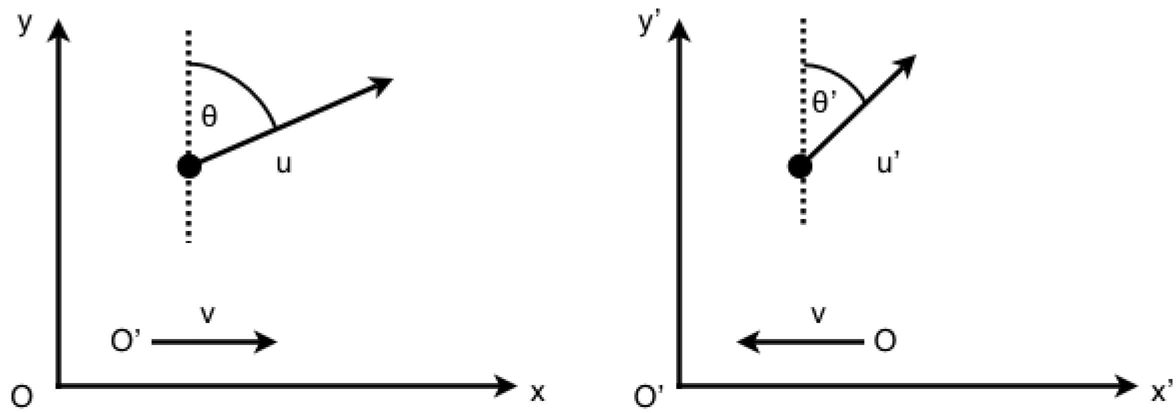
$$u'_x = \frac{u_x - v}{1 - vu_x/c^2}, \qquad u'_y = \frac{u_y\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - vu_x/c^2}, \qquad u'_z = \frac{u_z\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 - vu_x/c^2}. \tag{2.33}$$

Es decir, las componentes transversales al movimiento relativo de ambos observadores, son registrados por ambos observadores en forma distinta en sus sistemas K y K' respectivos.

2.8 Aberración de la luz

Como aplicación del resultado anterior, analicemos una situación relevante para la astronomía. Supongamos primero que la partícula de nuestro ejemplo anterior tiene una velocidad $\vec{u}$ caracterizada solo por componentes a lo largo del plano $x - y$. Debido a las relaciones anteriores, sabemos que la partícula también se constatará moviéndose en el plano $x' - y'$ por el observador O' pero con componentes distintas. En los dos sistemas de referencia K y K' podemos descomponer la velocidad de la partícula en sus componentes de la siguiente manera (ver figura siguiente)

$$u_x = u\sin\theta, \qquad u_y = u\cos\theta, \qquad u'_x = u'\sin\theta', \qquad u'_y = u'\cos\theta'. \tag{2.34}$$



Debería ser claro que en general $u' \neq u$ y $\theta' \neq \theta$ (esto también es cierto en mecánica Newtoniana, utilizando las transformaciones de Galileo). Utilizando las relaciones (2.32), podemos entonces deducir

$$u \sin\theta = \frac{u' \sin\theta' + v}{1 + vu' \sin\theta'/c^2}, \qquad u\cos\theta = \frac{u'\cos\theta' \sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + vu'\sin\theta'/c^2}. \tag{2.35}$$

Dividiendo ahora la primera ecuación por la segunda obtenemos entonces

$$\tan\theta = \frac{u'\sin\theta' + v}{u'\cos\theta'\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{2.36}$$

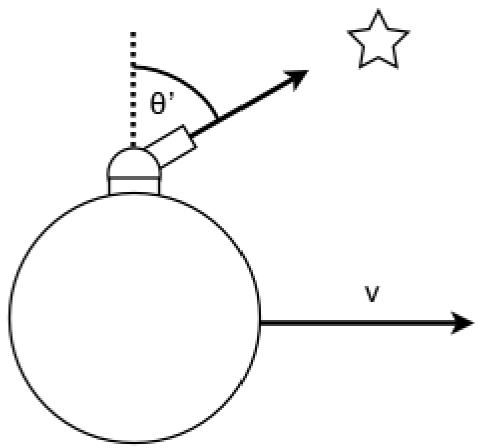
Esta es una relación interesante. Nos entrega el ángulo θ medido en K como función de la velocidad u' y el ángulo θ' medidos en K'. Noten que la única diferencia con el resultado deducido a través del uso de las transformaciones de Galileo es el factor $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ multiplicando el lado derecho. Como ya es habitual, si quisiéramos obtener la relación inversa, ahora entre el ángulo θ' medido en K' y u y el ángulo θ medidos en K, simplemente debemos invertir el rol de todas las cantidades y cambiar $v \to -v$:

$$\tan\theta' = \frac{u\sin\theta - v}{u\cos\theta\sqrt{1 - v^2/c^2}}. \tag{2.37}$$

El caso que nos interesa es aquel en que la partícula corresponde a un fotón (un *cuanto* de luz). En tal caso, dado que la velocidad de la luz es universal, debemos usar $u = u' = c$. Remplazando estas cantidades en la relación (2.37), obtenemos finalmente

$$\tan\theta' = \frac{\sin\theta - \beta}{\cos\theta\sqrt{1 - \beta^2}}, \tag{2.38}$$

donde $\beta = v/c$. Esta es la ecuación relativista para la aberración de la luz. Pensemos ahora en una situación cotidiana. Supongamos que estamos interesados en observar una estrella determinada y para ello contamos con las coordenadas de la estrella utilizadas para la observación de la misma seis meses atrás. La ecuación anterior nos señala que debemos realizar una corrección al ángulo θ de nuestro telescopio con relación al eje en el cual la tierra se mueve (ver figura). Dado que la estrella se encuentra muy distante,



para cualquier efecto el movimiento de esta no es del todo relevante para este problema, por lo que lo importante es la velocidad relativa de la tierra con respecto a su velocidad seis meses atrás. Llamemos a esta cantidad v. Para calcular la corrección que debemos aplicara a nuestro telescopio para observar la estrella, constatemos primero que para $\beta = 0$ (es decir $v = 0$) tendremos $\theta' = \theta$. Esto quiere decir que para pequeñas velocidades $v \ll c$ tendremos pequeñas correcciones al ángulo modificando la relación $\theta' = \theta$. Definamos por lo tanto $\Delta\theta$ de la forma

$$\theta' = \theta + \Delta\theta. \tag{2.39}$$

Reemplazando esta expresión en la ecuación (2.38) y expandiendo ambos lados linealmente en $\Delta\theta$ y β (que son pequeñas), obtenemos

$$\tan\theta + \frac{\Delta\theta}{\cos^2\theta} + \mathcal{O}(\Delta\theta^2) = \tan\theta - \frac{\beta}{\cos\theta} + \mathcal{O}(\beta^2). \tag{2.40}$$

Luego, despreciando las cantidades cuadráticas, obtenemos

$$\Delta\theta \simeq -\frac{v}{c}\cos\theta. \tag{2.41}$$

Esta ecuación nos entrega la corrección que debemos considerar para orientar un telescopio en el cielo. Vale mencionar que esta relación fue deducida antes de la llegada de relatividad especial, y fue utilizada para medir estimar la velocidad de la luz.

2.9 Problemas propuestos

2.9.1 Problema 1

Un cohete K' de largo propio ℓ_0 viaja a una velocidad constante v relativa al sistema de referencia K. La nariz de la nave A' pasa por el punto A (fijo en K) justo cuando ambos relojes en K y K' marcan $t = t' = 0$. En ese preciso instante una señal sale de A' hacia la cola B' de la nave.

(a) ¿Qué tiempo t'_1 marca el reloj de K' cuando la señal llega a B'?

(b) ¿Qué tiempo t_1 marca el reloj de K cuando la señal llega a B'?

(c) ¿Qué tiempo t_2 marca el reloj de K cuando la cola de la nave B' pasa por A?

2.9.2 Problema 2

a.- Dos estrellas A y B, en reposo relativo, se ubican a una distancia de un año luz entre ellas. Una nave espacial sale desde A para llegar a B a una rapidez constante v_o. El capitán se propone viajar a una velocidad tal, que en su reloj transcurra un año. ¿Cuál es el valor de la velocidad v_o?

b.- Un tren de largo L viaja a una velocidad $4\,c/5$ de Oriente a Poniente. Otro tren cuya longitud es $3\,L$, viaja por una vía paralela y se traslada con una rapidez $3\,c/5$ de Poniente a Oriente. Considere un observador muy curioso que se ubica justo en el punto en que la nariz de ambos trenes coinciden. ¿Con qué rapidez debe correr este observador para ser testigo de lo siguiente: Los últimos carros de ambos trenes coinciden. Acompañe una diagrama espacio-tiempo de esta situación.

2.9.3 Problema 3

Al mediodía un cohete pasa por la Tierra a una velocidad de $0.8c$. Tanto los observadores en la nave como los observadores en la Tierra están de acuerdo que son las 12:00 en punto.

(a) A las 12:30 p.m. del reloj del cohete, la nave pasa por una estación espacial interplanetaria a una distancia fija de la tierra y cuyo reloj está sincronizado con el de la Tierra. Qué hora es en dicha estación?

(b) ¿Cuán lejos de la Tierra está la estación?

(c) Precisamente a las 12:30 p.m. según el reloj del cohete, el capitán de la nave manda un reporte por radio de vuelta hacia la tierra. ¿A qué hora terrestre llega llega la señal?

(d) La estación en la tierra responde en forma inmediata. ¿Qué hora marca el reloj de la nave cuando la respuesta llega de vuelta?

4 Transformaciones de Lorentz II

Continuemos profundizando nuestro entendimiento de las transformaciones de Lorentz. Resulta conveniente introducir una notación que persistirá a lo largo de este curso. Observemos que en todo momento hemos tenido que lidiar con la combinación ct en lugar de solamente t. Esto se debe a que las transformadas de Lorentz intercambian coordenadas temporales por espaciales (y vice versa) por lo que necesitamos una cantidad con unidades de velocidad para realizar dicho intercambio. Por supuesto, dicha velocidad es precisamente la luz, que tiene un rol universal. Definamos entonces nuevas coordenadas $\bar{t}$ y $\bar{x}$ exclusivamente con unidades de longitud:

$$\bar{t} \equiv ct, \qquad \bar{x} \equiv x. \tag{4.1}$$

Claramente esta definición es redundante para x. Observen que si bien $\bar{t}$ tiene unidades de longitud, en realidad mide el tiempo. Diremos entonces que podemos medir longitudes haciendo referencia al tiempo (y vice versa). Por ejemplo, la distancia de la estrella más cercana (Próxima Centauri) es de 4.24 años luz. Lo que en términos de Kilómetros significa

$$\begin{aligned}
\Delta\bar{t} &= c \times (4.24 \times 3.15 \times 10^7 \text{s}), && (4.2)\\
&= 2.99 \times 10^8 \times 4.24 \times 3.15 \times 10^7 \text{Km} && (4.3)\\
&= 39.93 \times 10^{15} \text{Km}. && (4.4)
\end{aligned}$$

Ahora las transformaciones de Lorentz pueden ser escritas de la forma:

$$\begin{aligned}
\Delta\bar{t} &= \gamma(\Delta\bar{t}' + \beta\Delta\bar{x}'), && (4.5)\\
\Delta\bar{x} &= \gamma(\Delta\bar{x} + \beta\Delta\bar{t}'). && (4.6)
\end{aligned}$$

Supongamos que nos interesa describir la trayectoria de una señal de luz $\frac{dx}{dt} = c$. Luego, en las nuevas coordenadas la velocidad de la luz viene dada por

$$\bar{c} = \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = \frac{1}{c}\frac{dx}{dt} = \frac{c}{c} = 1. \tag{4.7}$$

Es decir, con estas nuevas unidades la velocidad universal límite es simplemente 1. La conveniencia de trabajar con estas coordenadas es precisamente esta, que las velocidades no tienen unidades, ya que se miden con respecto a la velocidad de la luz. Por ejemplo, una partícula que se mueve con velocidad $\frac{dx}{dt} = v$ en el sistema de unidades antiguas, descritas con las nuevas unidades lo hará a una velocidad:

$$\bar{v} = \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} = \frac{1}{c}\frac{dx}{dt} = \frac{v}{c} = \beta. \tag{4.8}$$

A partir de ahora continuaremos trabajando con estas nuevas unidades. Dado que la notación con barras es redundante, simplemente usaremos el par t y x, y aceptaremos que $c = 1$. Esto es, simplemente trabajaremos en un sistema de unidades donde $c = 1$.

4.1 Transformaciones de Lorentz como rotaciones

Dada que las transformaciones de Lorentz corresponden a una relación lineal entre las diferencias de coordenadas (t, x) y (t', x'), las expresiones anteriores pueden ser reexpresadas de la forma

$$\begin{pmatrix} \Delta t \\ \Delta x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta \\ \gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta t' \\ \Delta x' \end{pmatrix}. \tag{4.9}$$

Noten que la inversa de la matriz usada en la última expresión es precisamente la misma matriz pero con $\beta \to -\beta$. En otras palabras, las relaciones inversas vienen dadas por

$$\begin{pmatrix} \Delta t' \\ \Delta x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta \\ -\gamma\beta & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta t \\ \Delta x \end{pmatrix}. \tag{4.10}$$

Noten que estas matrices dependen únicamente de un parámetro, es decir $\beta = v$. De hecho resulta conveniente parametrizar estas matrices introduciendo el siguiente parámetro θ (no confundir con el ángulo usado en la Sección anterior)

$$\tanh\theta = \beta. \tag{4.11}$$

Dado que $-1 < \beta < 1$, la relación anterior corresponde a un mapa de uno a uno entre v y $\theta \in \mathbb{R}$. Observen adicionalmente que, dada la definición anterior, podemos escribir:

$$\gamma = \cosh\theta, \qquad \gamma\beta = \sinh\theta. \tag{4.12}$$

La transformación (4.9) puede ahora ser escrita de la siguiente forma

$$\begin{pmatrix} \Delta t \\ \Delta x \end{pmatrix} = \Lambda(\theta) \begin{pmatrix} \Delta t' \\ \Delta x' \end{pmatrix}, \qquad \text{donde} \qquad \Lambda(\theta) \equiv \begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix}, \tag{4.13}$$

mientras que la transformación inversa (4.10) puede ser escrita como

$$\begin{pmatrix} \Delta x' \\ \Delta x' \end{pmatrix} = \Lambda^{-1}(\theta) \begin{pmatrix} \Delta t \\ \Delta x \end{pmatrix}, \qquad \text{donde} \qquad \Lambda^{-1}(\theta) \equiv \begin{pmatrix} \cosh\theta & -\sinh\theta \\ -\sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix}. \tag{4.14}$$

En la expresión anterior Λ^{-1} corresponde a la inversa de Λ. Es decir $\Lambda^{-1}\Lambda = \Lambda\Lambda^{-1} = 1$. Noten que la matriz $\Lambda(\theta)$ satisface varias propiedades interesantes. Primero que nada $\Lambda^{-1}(\theta) = \Lambda(-\theta)$. Más aún, en general, para dos valores θ_1 y θ_2 arbitrarios, las matrices $\Lambda(\theta_1)$ y $\Lambda(\theta_2)$ satisfacen (verifiquen esto):

$$\Lambda(\theta_1)\Lambda(\theta_2) = \Lambda(\theta_1 + \theta_2). \tag{4.15}$$

Este último resultado es de hecho muy sugerente: Dos transformaciones de Lorentz aplicadas sucesivamente, caracterizadas por parámetros θ_1 y θ_2 respectivamente, corresponde a una sola transformación de Lorentz caracterizada por un parámetro $\theta_1 + \theta_2$. Analicemos esto en más detalle. Supongamos tres observadores O, O' y O'' utilizando, como es habitual, sistemas de referencia K, K' y K'' para registrar eventos. Supongamos que la velocidad de O' con respecto a O es v, a lo largo del eje x, y que la velocidad de O'' con respecto a O' es u, también a lo largo del eje x. Dada la presente situación, sabemos bien que existen transformaciones de Lorentz relacionando intervalos en el espacio-tiempo registrados K, y K' por O y O' respectivamente. Estas son:

$$\begin{pmatrix} \Delta t \\ \Delta x \end{pmatrix} = \Lambda(\theta_1) \begin{pmatrix} \Delta t' \\ \Delta x' \end{pmatrix}, \qquad \text{donde} \qquad \theta_1 \equiv \operatorname{arctanh}(v). \tag{4.16}$$

Por otro lado, existen transformaciones de Lorentz relacionando intervalos en el espacio-tiempo registrados K', y K'' por O' y O'' respectivamente. Estas son:

$$\begin{pmatrix} \Delta t' \\ \Delta x' \end{pmatrix} = \Lambda(\theta_2) \begin{pmatrix} \Delta t'' \\ \Delta x'' \end{pmatrix}, \qquad \text{donde} \qquad \theta_2 \equiv \operatorname{arctanh}(u). \tag{4.17}$$

Juntando ambas ecuaciones podemos pues deducir

$$\begin{pmatrix} \Delta t \\ \Delta x \end{pmatrix} = \Lambda(\theta_1)\Lambda(\theta_2) \begin{pmatrix} \Delta t'' \\ \Delta x'' \end{pmatrix} = \Lambda(\theta_1 + \theta_2) \begin{pmatrix} \Delta t'' \\ \Delta x'' \end{pmatrix}. \tag{4.18}$$

Por lo tanto, $\Lambda(\theta_1+\theta_2)$ corresponde a la transformación de Lorentz relacionando intervalos en el espacio-tiempo registrados K, y K''. Noten que, por definición, el parámetro $\beta = u''/c$ asociando a esta transformación satisface $\beta = \tanh(\theta_1 + \theta_2)$. De hecho, es posible constatar la siguiente relación trigonométrica

$$\tanh(\theta_1 + \theta_2) = \frac{\tanh\theta_1 + \tanh\theta_2}{1 + \tanh\theta_1 \tanh\theta_2}. \tag{4.19}$$

De este modo, al hacer los reemplazos $\tanh\theta_1 = v$, $\tanh\theta_2 = u$ y $\tanh(\theta_1 + \theta_2) = u''$, obtenemos

$$u'' = \frac{u + v}{1 + vu/c^2}, \tag{4.20}$$

que es precisamente la regla de adición de velocidades obtenida anteriormente.

4.2 Calibrando los orígenes

Hasta el momento hemos estudiado las transformaciones de Lorentz actuando sobre diferencias de coordenadas caracterizando dos eventos arbitrarios P_1 y P_2 en el espacio tiempo. Por simplicidad, en este análisis hemos utilizado sistemas de referencia inerciales con ejes convenientemente alineados. Es decir, hemos convenido en que si hay dos observadores inerciales O y O' en movimiento relativo, entonces el observador O usa un sistema de referencia K en el cual el observador O' se mueve en la dirección positiva de su eje x, mientras que el observador O' usa un sistema de referencia K' en el cual el observador O se mueve en la dirección negativa de su eje x'.

Por otro lado, en ningún momento nos hemos visto en la necesidad de hacer coincidir los orígenes de ambos sistemas de referencia. Esto debido al hecho que estamos describiendo diferencias de coordenadas, por lo que poco importa donde están centrados los orígenes. Sin embargo, nada nos impide en convenir que ambos sistemas de referencias están calibrados, de modo que el evento $(t, x, y, z) = (0, 0, 0, 0)$ en K coincide con el evento $(t', x', y', z') = (0, 0, 0, 0)$ en K'. Al convenir esto, un evento arbitrario P con coordenadas (t'_P, x'_P, y'_P, z'_P) relativas al origen (0,0,0,0) en K' estará registrado con coordenadas (t_P, x_P, y_P, z_P) en K dadas por

$$t_P = \gamma(t'_P + \beta x'_P), \tag{4.21}$$

$$x_P = \gamma(x'_P + \beta t'_P), \tag{4.22}$$

$$y_P = y'_P, \tag{4.23}$$

$$z_P = z'_P. \tag{4.24}$$

De hecho estas transformaciones son válidas para cualquier evento P en el espacio-tiempo, por lo que no necesitamos especificar el evento en cuestión, y simplemente escribir la siguiente relación entre coordenadas:

$$t = \gamma(t' + \beta x'), \tag{4.25}$$

$$x = \gamma(x' + \beta t'), \tag{4.26}$$

$$y = y', \tag{4.27}$$

$$z = z'. \tag{4.28}$$

Lo importante aquí es recordar que estas relaciones son sólo válidas para sistemas de referencias donde los orígenes coinciden.

4.3 Relacionando sistemas de coordenadas

Nuestro propósito es adquirir una idea más profunda de la estructura del espacio tiempo. Si bien hemos insistido en que los sistemas de coordenadas son meramente formas arbitrarias de registrar eventos, el estudio de cómo dos sistemas de coordenadas están relacionados nos resultará tremendamente provechoso. Como de costumbre, ignoremos por el momento las coordenadas y y z y consideremos únicamente lo que pasa en el plano t-x. Aprovechando la notación introducida previamente, tenemos:

$$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \Lambda(\theta) \begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix}, \qquad \text{donde} \qquad \Lambda(\theta) \equiv \begin{pmatrix} \cosh\theta & \sinh\theta \\ \sinh\theta & \cosh\theta \end{pmatrix}, \tag{4.29}$$

y

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} = \Lambda(-\theta) \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}. \tag{4.30}$$

Estas transformaciones relacionan a cualquier par de coordenadas (t, x) en K con otro par de coordenadas (t', x') en K'. Un evento cualquiera P registrado en K' con coordenadas (t', x') será por lo tanto registrado con coordenadas (t, x) en K.

Dado que las relaciones (4.29)-(4.30) tienen inversas bien definidas, éstas pueden ser pensadas como mapas de uno a uno (biyecciones) entre dos espacios $\mathbb{R}^2$. Es posible, por lo tanto, graficar ambos sistemas de coordenadas en un sólo diagrama! Veamos como hacer esto. Partamos considerando el sistemas de coordenadas K de la forma usual. Es decir, con los ejes t y x perpendiculares el uno con respecto al otro (ver figura siguiente). Hemos

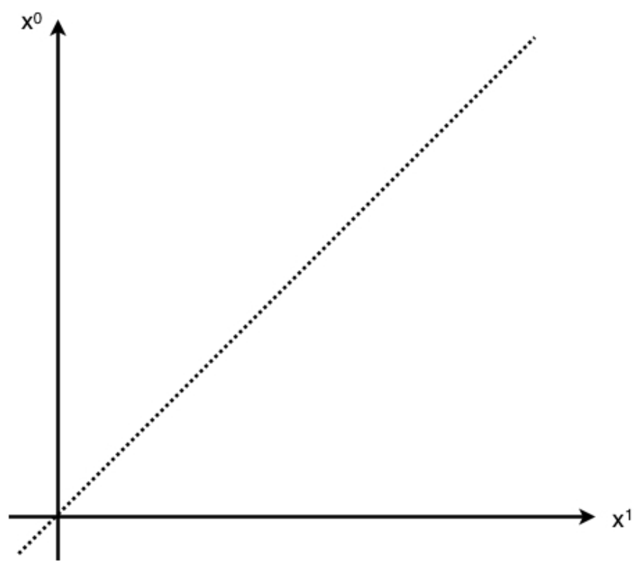


Figure 2: Los ejes t y x del sistema inercial K son perpendiculares el uno con respecto al otro. La figura también muestra la proyección del cono de luz correspondiente a la ecuación $t = x$.

también graficado la diagonal $t = x$ que consiste en la trayectoria rectilínea seguida por una señal a partir del origen. Sobre este diagrama, intentemos ahora graficar la posición de los ejes t' y x' del sistema de referencia K'. Esto corresponde a graficar un conjunto de eventos caracterizados por ciertas condiciones. Por ejemplo, el eje t' corresponde a un conjunto de eventos caracterizados por la condición $x' = 0$. Utilizando esta condición junto a la relación (4.30), podemos concluir que tal conjunto de eventos está caracterizado por

$$-\sinh\theta\, t + \cosh\theta\, x = 0. \tag{4.31}$$

En otras palabras tenemos una línea en el plano t-x en K respetando la ecuación $t = (\tan\theta)^{-1}x$. Esta línea se intercepta con el origen y tiene un ángulo ϕ con respecto al eje t dado por $\tan\phi = \tanh\theta$ (ver figura siguiente). Recordemos que $\tan\theta = v$ donde v es la velocidad relativa de nuestros observadores usuales. Para graficar el eje x' podemos proceder en forma análoga. En efecto, el eje x' corresponde al conjunto de eventos caracterizados por la condición $t' = 0$, y tal condición arroja la ecuación

$$\cosh\theta\, t - \sinh\theta\, x = 0. \tag{4.32}$$

Esta es una línea en el plano t-x en K respetando la ecuación $t = \tan\theta x$. Esta línea se intercepta con el origen y tiene el mismo ángulo ϕ anterior pero esta vez con respecto al eje x (ver figura siguiente). Vemos entonces que es posible graficar los ejes t' y x' del

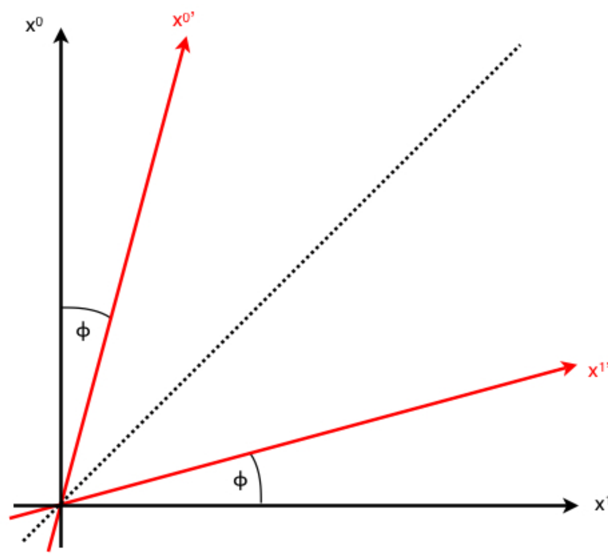


Figure 3: Es posible graficar los ejes t' y x' del sistema K' en el sistema de referencia K. Desde el punto de vista del observador O', éstos son perpendiculares!

sistema K' en el sistema de referencia K. De hecho podemos comparar ambos sistemas de referencia de forma exhaustiva. Para ello podemos continuar con el procedimiento anterior para graficar el *cuadriculado* del sistema K' sobre el *cuadriculado* del sistema de coordenadas K, tal como lo muestra la siguiente figura. Con esta forma de graficar, podemos ubicar eventos en forma simultánea en ambos sistemas de referencia.

Ejercicio 1. Discuta como se grafica las coordenadas de K sobre el sistema de coordenadas K'. Es decir, realice la operación inversa.

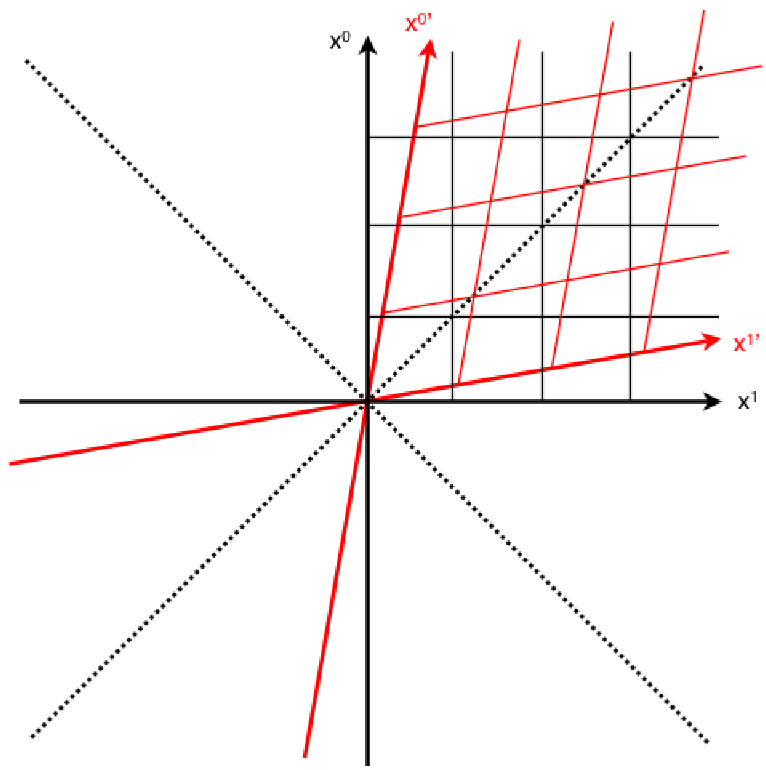


Figure 4: Es posible comparar simultáneamente los cuadriculados de ambos sistemas de coordenadas K y K'. En este caso, hemos optado por un diagrama en el cual los ejes t y x del sistema de coordenadas de K aparezcan perpendiculares.

Para finalizar, resulta instructivo reconocer que el análisis anterior puede ser repetido también para el caso más familiar de una rotación. Si dos sistemas de referencia están relacionados mediante una rotación en un ángulo ϕ, podemos graficar ambos sistemas de referencia en forma simultánea (ver figura siguiente).

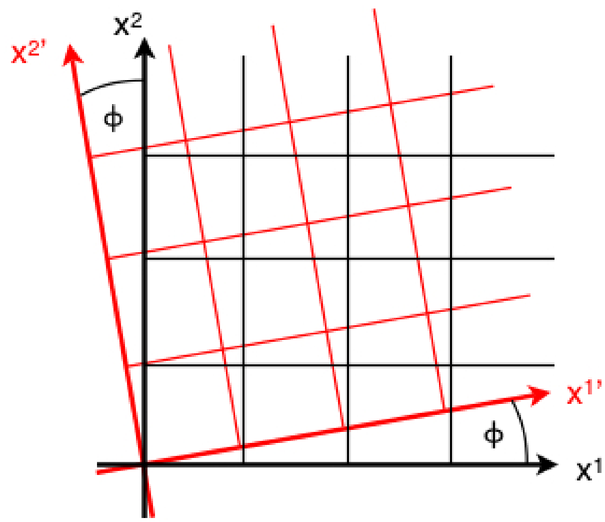


Figure 5: Un caso análogo reconocible es aquel en el cual dibujamos los reticulados de dos sistemas de coordenadas rotados.

4.4 Superficies invariantes

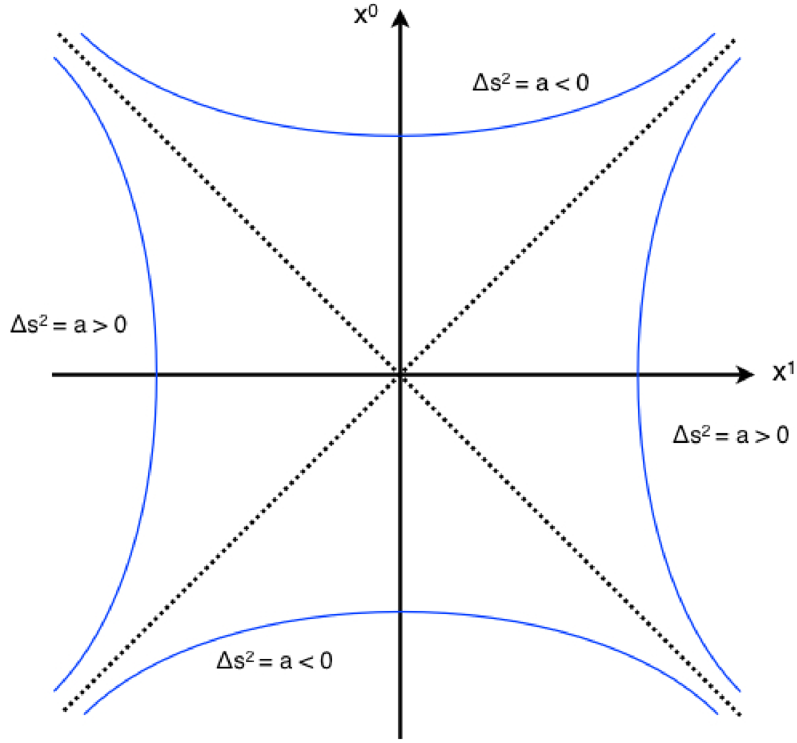
Recordemos que el intervalo espacio-temporal Δs^2 es un invariante bajo transformaciones de Lorentz. Dado que en el presente análisis estamos interesados en la posición de los eventos con respecto al origen, este invariante puede ser escrito de la forma:

$$\Delta s^2 = -t^2 + x^2, \tag{4.33}$$

donde el par (t, x) corresponden a las coordenadas del evento en cuestión. Está claro que hay una infinitud de eventos todos a la misma distancia desde el origen. En otras palabras, para un valor fijo $\Delta s^2 = a$, la ecuación anterior puede ser entendida como la ecuación de una curva caracterizada por eventos equidistantes del origen. Esta curva cumple con la ecuación

$$t = \pm\sqrt{x^2 - a}, \tag{4.34}$$

la que corresponde a la ecuación de una hipérbole. La siguiente figura muestra las curvas obtenidas para distintos signos de a. Por ejemplo, si $a < 0$, entonces los eventos sobre la curva están separados del origen por un intervalo tipo tiempo y por lo tanto deben estar o en el futuro absoluto del origen (que corresponde a la parte superior del cono) o en el pasado absoluto del origen (que corresponde a la parte inferior del cono). Estas corresponden a las hipérboles superiores e inferiores de la figura siguiente. En forma



similar, si $a > 0$, entonces los eventos de la curva están separados del origen por un intervalo tipo espacio. En la figura, estas son las curvas fuera del cono de luz.

4.5 Más sobre la comparación de sistemas de coordenadas

Podemos juntar los resultados desarrollados en las secciones anteriores para entender como las superficies invariantes están relacionados con el cuadriculado de dos sistemas de referencia, cuando éstos son graficados en un mismo diagrama (tal como lo hicimos en la Sección 4.3). Para ello, partamos considerando a los usuales sistemas de referencia K y K' con coordenadas relacionadas mediante

$$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \Lambda(\theta) \begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix}, \tag{4.35}$$

y consideremos un evento P_1 ubicado en la posición $(t_1, x_1) = (a, 0)$. Ya sabemos como visualizar la superficie invariante $\Delta s^2 = -a^2$ (la que corresponde a una hipérbola) pasando sobre este evento (ver figura anterior). Observen que podemos definir una recta L_1 pasando por P_1 y que sea tangente a la superficie invariante. La ecuación de esta recta es simplemente $t = a$, y tal como lo muestra la figura 6, ésta es paralela al eje x. En el sistema de referencia K, dicha recta corresponde al conjunto de todos los eventos simultáneos a P_1. Por otro lado, hemos visto que un evento P_2 con coordenadas $(t_2, x_2) = (a\cosh\theta, a\sinh\theta)$ es registrado por el observador O' en las coordenadas $(t'_2, x'_2) = (a, 0)$. En su propio sistema de coordenadas este observador también puede dibujar la superficie invariante y una recta L_2 pasando por P_2 tangente a la mencionada superficie. La ecuación de dicha recta $t' = a$, la que es paralela al eje x'. Esto quiere decir que, necesariamente, al graficar L_2 en el sistema de referencia K, ésta debe continuar siendo tangente a la superficie, paralela a x' (ver figura siguiente). Esto se puede comprobar fácilmente al insertar la ecuación de la

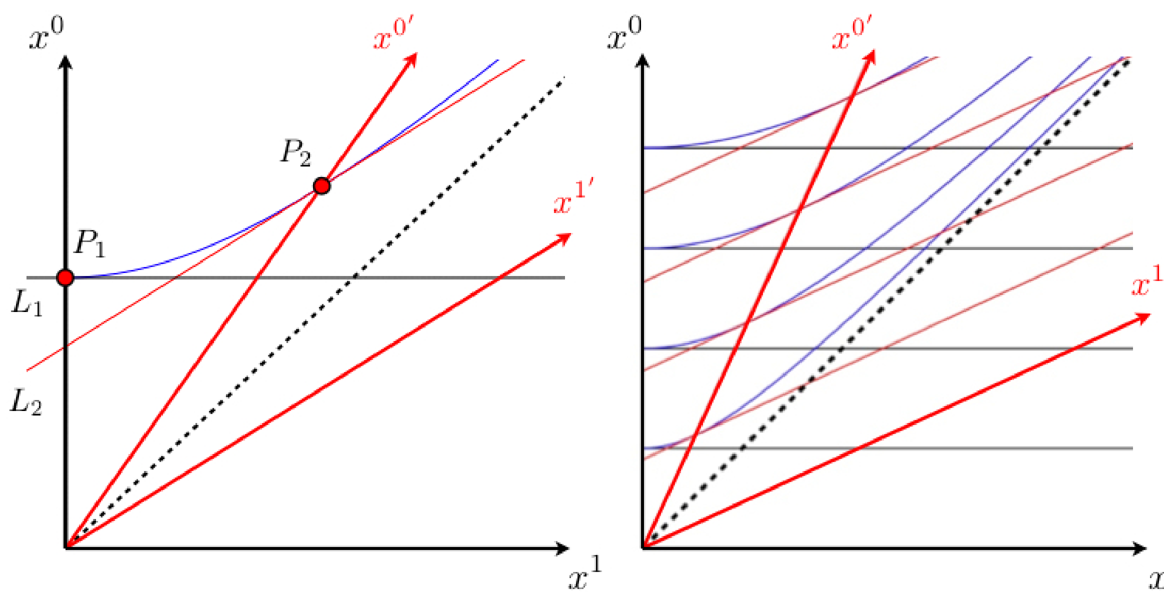


Figure 6: La recta L_1 corresponde al conjunto de eventos simultáneos a P_1 en el sistema inercial del observador O. Así mismo, la recta L_2 corresponde al conjunto de eventos simultáneos a P_2 en el sistema inercial del observador O'. Ambas rectas son tangenciales a la curva invariante $\Delta s^2 = -a^2$

recta L_2 (dada por $t' = a$) en la expresión (4.35) para obtener la ecuación de dicha recta en el sistema de coordenadas K. La ecuación, en forma paramétrica, viene dada por:

$$(t, x) = (\cosh\theta\, a + \sinh\theta\, x', \sinh\theta\, a + \cosh\theta\, x'), \tag{4.36}$$

donde x' es el parámetro. De otro modo, eliminando el parámetro, la ecuación viene dada por

$$t = x\tanh\theta + \frac{a}{\cosh\theta}, \tag{4.37}$$

la que efectivamente es tangente a la curva invariante $t = \sqrt{x^2 + a}$. Esto nos permite ver como las unidades del cuadriculado de ambos sistemas de referencia son afectados por las transformaciones de Lorentz en un mismo diagrama (ver figura anterior).

4.6 Problemas propuestos

4.6.1 Problema 1

Analice la siguiente recurrencia unidimensional: Un observador O_1, se mueve con velocidad v_1 con respecto al observador O_2, quien se mueve con velocidad v_2 con respecto a O_3, quien a su vez viaja con velocidad v_3 con respecto a O_4 y así sucesivamente hasta el observador O_n. Muestre que la velocidad de O_1 con respecto a O_n es:

$$\beta_n = \frac{P_n^+ - P_n^-}{P_n^+ + P_n^-}, \quad \text{donde}$$

$$P_n^+ \equiv \prod_{i=1}^{n}(1+\beta_i), \;\text{ y }\; P_n^- \equiv \prod_{i=1}^{n}(1-\beta_i), \;\text{ donde }\; \beta_i \equiv \frac{v_i}{c}.$$

4.6.2 Problema 2

Tres eventos, P_1, P_2 y P_3 son vistos por un observador O ocurriendo en el orden $P_1P_2P_3$. Otro observador, O', ve estos mismos eventos ocurrir en el orden $P_3P_2P_1$. ¿Es posible que un tercer observador vea estos eventos en el orden $P_1P_3P_2$? Apoye su conclusión utilizando diagramas espacio-temporales.

4.6.3 Problema 3

(a) Considere una partícula en movimiento acelerado (arbitrario) a lo largo del eje x de un sistema inercial K fijo. En cierto instante t_0 la partícula se mueve a una velocidad v_0. En dicho instante existe un sistema inercial K' para el cual la partícula está en reposo. Es decir $u'(t_0') = 0$. Considere ahora lo que ocurre en un instante $t = t_0 + dt$ posterior, donde dt es un infinitésimo (en el sistema K', esto corresponde a $t' = t_0' + dt'$). En dicho instante se ve que $u'(t') = u'(t_0') + du' = du'$ en el sistema K' y $u(t) = u(t_0) + du = v + du$ en el sistema K. Usando la regla de adición de velocidades (tome $c = 1$), derive la siguiente ecuación relacionando las aceleraciones en ambos sistemas:

$$\left.\frac{du}{dt}\right|_{t=t_0} = (1-v^2)^{3/2} \left.\frac{du'}{dt'}\right|_{t'=t_0'}. \tag{4.38}$$

Explique por qué la ecuación anterior puede ser generalizada para todo instante t, de la forma:

$$\frac{du}{dt} = (1-u^2)^{3/2}\,\frac{du'}{dt'}, \tag{4.39}$$

donde $\frac{du'}{dt'}$ es la aceleración de la partícula en un sistema instantáneamente en reposo con respecto a ella.

(b) Suponga que, en todo momento, todo observador K' instantáneamente en reposo con respecto a una partícula acelerada constata que $\frac{du'}{dt'} = a_0$, donde a_0 es un valor constante. Diremos que dicha partícula está siendo acelerada en forma uniforme. Si en $t = 0$ la partícula está en reposo ($u = 0$) y en la posición $x = 1/a_0$, determine la trayectoria que sigue la partícula en el sistema de referencia K. Para un tiempo t arbitrario, determine la "distancia" a la cual la partícula se encuentra del origen $(t, x) = (0, 0)$.

(c) La estrella más cercana al Sol está a unos 4 años luz. Imaginemos una nave que parte desde las vecindades del sistema solar con velocidad inicial cero y movimiento acelerado. Debido a esta aceleración, los habitantes de esta gran nave se sienten pegados al suelo con aceleración g igual que en casa. A mitad del viaje los cohetes son apagados y encendidos en la dirección opuesta, de modo que al llegar a la distancia deseada tiene velocidad cero nuevamente. El tiempo que tarda la operación de invertir los motores podemos despreciarlo: ¿Cuánto tarda el viaje de ida según los tripulantes? ¿Cuánto tarda el viaje según los observadores en tierra?

5 Notación covariante y 4-velocidad

A partir de ahora comenzaremos a usar una nueva notación en la cual la coordenada temporal recibe el mismo tratamiento que las coordenadas espaciales. A dicha notación se le llama covariante y, como veremos, es extraordinariamente poderosa a la hora de discutir aspectos formales del espacio-tiempo. Primero que nada, en lugar de continuar utilizando las coordenadas t, x, y y z, introducimos nuevas coordenadas x^0, x^1, x^2 y x^3 definidas como

$$x^0 \equiv ct, \tag{5.1}$$

$$x^1 \equiv x, \tag{5.2}$$

$$x^2 \equiv y, \tag{5.3}$$

$$x^3 \equiv z. \tag{5.4}$$

Es conveniente referirnos colectivamente a cualquiera de estas coordenadas simplemente escribiendo x^μ, con $\mu = 0, 1, 2, 3$. Es decir, usando un superíndice griego. También es conveniente usar la notación x^i, con $i = 1, 2, 3$, para las coordenadas puramente espaciales x^1, x^2 y x^3. Es decir, usando un superíndice latino. Noten que hemos introducido superíndices y no subíndices. Esto es claramente convencional. Sin embargo, y como veremos más adelante, una vez adoptada tal convención, resultará imprescindible continuar con ella.

En términos de estas coordenadas, el intervalo espacio-temporal puede ser escrito de la forma:

$$\Delta s^2 = -(\Delta x^0)^2 + \sum_i (\Delta x^i)^2. \tag{5.5}$$

Dado que una transformación de Lorentz mezcla los ejes temporales con los ejes espaciales (mediante una transformación lineal) de dos sistemas de referencia inerciales, es preciso introducir una notación en la cual no haya una distinción tan explícita entre la coordenada temporal y las coordenadas espaciales. Para ello consideremos la siguiente matriz:

$$\eta_{\mu\nu} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}. \tag{5.6}$$

Es decir, una matriz η cuyas componentes son $\eta_{00} = -1$, $\eta_{0i} = \eta_{i0} = 0$ y $\eta_{ij} = \delta_{ij}$ donde δ_{ij} es la delta de Kronecker. Con la ayuda de esta matriz podemos escribir

$$\Delta s^2 = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu. \tag{5.7}$$

La expresión anterior puede de hecho ser escrita en una forma aún más sucinta al omitir la sumatoria:

$$\Delta s^2 = \eta_{\mu\nu} \Delta x^\mu \Delta x^\nu. \tag{5.8}$$

En esta última expresión estamos usando la llamada convención de Einstein para la suma de índices. Esta convención nos permite omitir el símbolo de sumatoria $\sum$ cada vez que estén siendo multiplicadas dos cantidades, una con un indice griego arriba (superíndice) y la otra con el mismo indice griego abajo (subíndice). Algunos ejemplos de esta regla son:

$$V^\mu U_\mu = \sum_{\mu=0}^{3} V^\mu U_\mu, \qquad M^{\nu\mu} U_\mu = \sum_{\mu=0}^{3} M^{\nu\mu} U_\mu, \qquad M^{\nu\mu} V_\nu U_\mu = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} M^{\nu\mu} V_\nu U_\mu. \tag{5.9}$$

La matriz $\eta_{\mu\nu}$ tiene un rol central en el estudio de la relatividad especial. Se denomina métrica, y nos permite realizar productos entre vectores y tensores. Más adelante estudiaremos en algún detalle su significado geométrico y su utilidad. Por ahora, simplemente será un símbolo que simplifica bastante la notación del intervalo espacio-temporal Δs^2. Dado que Δs^2 es un invariante bajo transformaciones de Lorentz, también podemos escribir

$$\Delta s^2 = \eta_{\mu'\nu'} \Delta x^{\mu'} \Delta x^{\nu'}, \tag{5.10}$$

donde $x^{\mu'}$ son las coordenadas usadas para describir puntos otro sistema de referencia inercial K'. Noten que las componentes de la métrica $\eta_{\mu'\nu'}$ no cambian de un sistema a otro. Es decir

$$\eta_{\mu'\nu'} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}. \tag{5.11}$$

También es posible expresar una transformación de Lorentz explotando la convención anterior. Dado que una transformación de Lorentz corresponde a una transformación lineal relacionando diferencias de coordenadas Δx^μ y $\Delta x^{\mu'}$ de dos sistemas inerciales K y K', podemos escribir

$$\Delta x^\mu = \Lambda^\mu{}_{\nu'} \Delta x^{\nu'}, \tag{5.12}$$

donde x^μ y $x^{\mu'}$ corresponden a las coordenadas usadas en K y K'. Dado que la relación inversa también corresponde a una transformación de Lorentz, ésta deberá ser expresada en forma análoga:

$$\Delta x^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_{\nu} \Delta x^\nu. \tag{5.13}$$

Noten que la única diferencia entre ambas expresiones es la posición de la prima $'$ en los indices. Combinando ambas relaciones podemos escribir:

$$\Delta x^\mu = \Lambda^\mu{}_{\nu'} \Lambda^{\nu'}{}_{\rho} \Delta x^\rho. \tag{5.14}$$

Dado que esta relación es valida para toda diferencia Δx^μ caracterizando pares de eventos, podemos concluir que en general:

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu'}\Lambda^{\nu'}{}_{\rho} = \delta^{\mu}_{\rho}, \tag{5.15}$$

donde δ^{μ}_{ρ} es la delta de Kronecker en su versión 4-dimensional. Es decir, $\delta^{\mu}_{\rho} = 1$ si $\mu = \nu$ y $\delta^{\mu}_{\rho} = 0$ si $\mu \neq \nu$. De igual forma podemos deducir:

$$\Lambda^{\mu'}{}_{\nu}\Lambda^{\nu}{}_{\rho'} = \delta^{\mu'}_{\rho'}. \tag{5.16}$$

Por otro lado, insertando la relación (5.13) en la ecuación (5.8) y recordando que Δs^2 es un invariante, podemos escribir

$$\eta_{\mu\nu}\Delta x^\mu \Delta x^\nu = \eta_{\mu'\nu'}\Lambda^{\mu'}{}_{\mu}\Lambda^{\nu'}{}_{\nu}\Delta x^\mu \Delta x^\nu. \tag{5.17}$$

Usando nuevamente el hecho que esta relación es valida para todo par de eventos caracterizados por la diferencia Δx^μ, encontramos la expresión general:

$$\eta_{\mu\nu} = \eta_{\mu'\nu'}\Lambda^{\mu'}{}_{\mu}\Lambda^{\nu'}{}_{\nu}. \tag{5.18}$$

Más aún, utilizando la relación inversa (5.16), podemos llegar a la expresión análoga:

$$\eta_{\mu'\nu'} = \eta_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\mu'}\Lambda^{\nu}{}_{\nu'}. \tag{5.19}$$

Las relaciones anteriores son todas ejemplos de relaciones que hemos usado frecuentemente en el curso hasta ahora, pero explotando la convención de suma de índices de Einstein. Esta nueva notación es frecuentemente denominada *notación covariante*. El significado preciso de esta nomenclatura lo entenderemos más tarde.

A primera vista, la notación covariante parece ser sumamente abstracta, pero simplemente hacen referencia a operaciones cotidianas, tales como transformaciones lineales. Por ejemplo, en el caso particular en que K' fuese un sistema inercial de un observador en movimiento con velocidad $\beta = v$ (recuerden que ahora $c = 1$) en la dirección del eje x^1 con respecto a un observador en reposo en el sistema inercial K (nuestro ejemplo de costumbre), entonces $\Lambda^{\mu}{}_{\nu'}$ adquiriría la forma

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu'} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma\beta & 0 & 0 \\ \gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{5.20}$$

donde $\gamma = \sqrt{1-\beta^2}$, mientras que la transformación inversa vendría caracterizada por

$$\Lambda^{\mu'}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.21}$$

Por otro lado, no olvidemos que una rotación también es una transformación lineal que deja invariante al intervalo espacio temporal Δs^2. Por ejemplo, dos sistemas de coordenadas x^μ y $x^{\mu'}$ relacionadas por una rotación en un ángulo θ en torno al eje x^3 vendrán caracterizadas por una matriz $\Lambda^\mu{}_{\nu'}$ con componentes

$$\Lambda^\mu{}_{\nu'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{5.22}$$

mientras que la transformación inversa estaría caracterizada por

$$\Lambda^{\mu'}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{5.23}$$

Para concluir esta discusión, mencionemos que hoy en día es común denominar transformación de Lorentz a toda transformación lineal de las diferencias de coordenadas Δx^μ dejando invariante al intervalo espacio temporal $\Delta s^2 = \eta_{\mu\nu}\Delta x^\mu \Delta x^\nu$, incluyendo rotaciones. En dicho contexto, a las transformaciones del tipo (5.20) y (5.21) se les denomina boosts, para distinguirlas de las rotaciones. Más adelante deduciremos la forma más general de una transformación de Lorentz (incluyendo boosts y rotaciones), algo que tenemos pendiente.

5.1 La 4-velocidad

Como ya es habitual, en el caso en que dos eventos estén infinitesimalmente cerca, éstos pueden ser descritos por diferenciales de coordenadas dx^μ, y por lo tanto podemos escribir:

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \tag{5.24}$$

Por su parte, una transformación de Lorentz y su inversa, relacionando dos diferenciales dx^μ y $dx^{\mu'}$ escritos en distintos sistemas de referencia inerciales K y K' respectivamente, pueden ser expresadas de la forma:

$$dx^\mu = \Lambda^\mu{}_{\nu'} dx^{\nu'}, \qquad dx^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_{\nu} dx^\nu. \tag{5.25}$$

Consideremos ahora la trayectoria de una partícula física (una partícula real), moviéndose a través del espacio-tiempo. Resulta muy conveniente parametrizar a dicha trayectoria mediante el uso del tiempo propio de la partícula τ. Recordemos que el tiempo propio viene definido por la relación

$$d\tau = \sqrt{-ds^2} = \sqrt{-\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu}. \tag{5.26}$$

El resultado, es una curva $\gamma = \gamma(\tau)$ con parámetro[2] τ, cuya ubicación viene descrita por las coordenadas

$$x^\mu = x^\mu(\tau). \tag{5.27}$$

La razón por la cual hemos de elegir al tiempo propio τ para describir la trayectoria de esta partícula es que el tiempo propio es en esencia el parámetro afín de dicha curva, es decir, el parámetro cuya longitud calza con la longitud del intervalo espacio temporal de dos eventos sucesivos en la curva (ver figura 7). Es importante precisar, sin embargo,

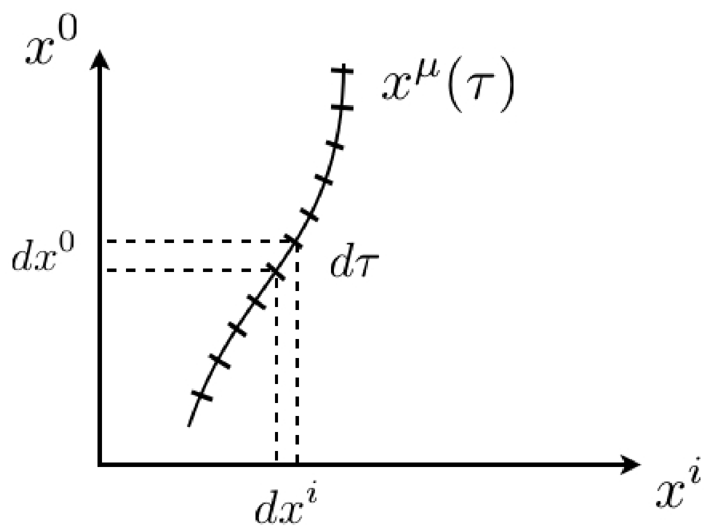


Figure 7: Curva describiendo la trayectoria de una partícula física.

que bien pudimos haber elegido otro parámetro, tal como el tiempo t medido por relojes en reposo con respecto a K. Más aún, recordemos que $d\tau = d\tau'$ es un invariante bajo transformaciones de Lorentz:

$$d\tau = \sqrt{-\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu} = \sqrt{-\eta_{\mu'\nu'}dx^{\mu'}dx^{\nu'}} = d\tau'. \tag{5.28}$$

Consideremos ahora el vector tangente a la curva. Este puede ser definido como aquel vector con componentes:

$$u^\mu = \frac{dx^\mu(\tau)}{d\tau}. \tag{5.29}$$

[2]Recuerden que toda curva debe venir acompañada de un parámetro, y que dos curvas con el mismo conjunto de eventos, pero parametrizadas por parámetros distintos, son curvas distintas.

Observen que a lo largo de la curva tenemos

$$d\tau = \sqrt{-\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu} = dt\sqrt{-\eta_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{dt}\frac{dx^\nu}{dt}} = dt\sqrt{1-v^2}, \tag{5.30}$$

donde

$$v^2 \equiv \sum_i (v^i)^2. \tag{5.31}$$

En la expresión anterior hemos usado $dx^0/dt = 1$ (dado que $x^0 = t$) y $v^i = dx^i/dt$. Noten que los v^i's corresponden precisamente a las componentes de la velocidad de la partícula medida en el sistema K. Por lo tanto, vemos que las componentes espaciales i del vector u satisfacen:

$$u^i = \frac{dx^i(\tau)}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\frac{dx^i}{dt} = \frac{v^i}{\sqrt{1-v^2}} = \gamma v^i. \tag{5.32}$$

De este modo, hemos deducido que, en términos de la velocidad de la partícula v^i medida en K, el vector tangente tiene componentes:

$$u^\mu = (\gamma, \gamma v^i) = (\gamma, \gamma\beta^i). \tag{5.33}$$

A este vector se le denomina 4-velocidad. Desde el punto de vista del espacio-tiempo 4-dimensional, es precisamente la velocidad de la partícula. Recordemos que en geometría Euclidiana, al usar un parámetro afín para describir una curva, el vector tangente de la curva es unitario. En el caso de la geometría Minkowskiana pasa exactamente lo mismo. Para apreciar esto, notemos que:

$$u \cdot u \equiv \eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -(u^0)^2 + \sum_i (u^i)^2 = -\gamma^2(1-\beta^2) = -1. \tag{5.34}$$

Como mencionamos anteriormente, para calcular productos de vectores debemos utilizar la métrica. Esto aún no lo hemos demostrado, pero en este ejemplo la idea de por qué la métrica es el objeto que permite tal operación queda algo clara. Por otro lado, noten que el vector u^μ al cuadrado $u \cdot u = -1$ ha dado como resultado un número negativo. Esto es parte de la esencia de la geometría Minkowskiana. Observen que el resultado $u \cdot u = -1$ es independiente del parámetro τ. Este resultado ha sido obtenido por construcción, y se desencadena del hecho que hemos elegido como parámetro al tiempo propio de la partícula describiendo la trayectoria.

Es importante no confundirse con los significados de los objetos apareciendo en las componentes de u^μ. Las componentes espaciales u^i de la 4-velocidad NO corresponden a la velocidad de la partícula v^i medida en K, dado que hay un factor γ de por medio. Por otro lado, la importancia de contar con u^μ es que su forma de transformar desde un sistema de referencia a otro es extraordinariamente sencilla de expresar en términos de nuestra nueva notación. Dado que $d\tau$ es un invariante bajo transformaciones, al usar las relaciones (5.25) podemos escribir

$$u^{\mu'} = \frac{dx^{\mu'}}{d\tau'} = \frac{\Lambda^{\mu'}{}_{\nu} dx^{\nu}}{d\tau} = \Lambda^{\mu'}{}_{\nu} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} = \Lambda^{\mu'}{}_{\nu} u^{\nu}, \tag{5.35}$$

donde usamos $d\tau = d\tau'$. En otras palabras, encontramos que

$$u^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_{\nu} u^{\nu}, \qquad u^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu'} u^{\nu'}. \tag{5.36}$$

Estas relaciones expresan cómo transforma la 4-velocidad bajo transformaciones de Lorentz. Como veremos, la 4-velocidad es un ejemplo particular de un 4-vector, cuya propiedad más significativa es el hecho de que es un objeto cuyas componentes transforman de la forma (5.36).

5.2 La 4-aceleración

Habiendo definido la 4-velocidad, resulta natural dar un paso adicional y definir la 4-aceleración a^{μ} de la siguiente forma:

$$a^{\mu} = \frac{du^{\mu}}{d\tau} = \frac{d^2 x^{\mu}}{d\tau^2}. \tag{5.37}$$

Antes de ver la forma precisa que tiene, veamos como relacionar la 4-aceleración expresada en dos sistemas distintos. Diferenciando la segunda expresión en (5.36) con respecto a τ, vemos que:

$$\frac{du^{\mu}}{d\tau} = \frac{d}{d\tau}(\Lambda^{\mu}{}_{\nu'} u^{\nu'}) \tag{5.38}$$

$$= \frac{d}{d\tau'}(\Lambda^{\mu}{}_{\nu'} u^{\nu'}) \tag{5.39}$$

$$= \Lambda^{\mu}{}_{\nu'} \frac{du^{\nu'}}{d\tau'}, \tag{5.40}$$

en donde, para pasar desde la primera igualdad a la segunda, usamos el hecho de que $d\tau = d\tau'$, mientras que para pasar de la segunda igualdad a la tercera, se usó que $\Lambda^{\mu}{}_{\nu'}$ es constante. La expresión anterior se puede reescribir como:

$$a^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu'} a^{\nu'}. \tag{5.41}$$

Si contraemos ambos lados de la relación anterior con $\Lambda^{\rho'}{}_{\mu}$ a través del indice μ y usamos la identidad $\Lambda^{\rho'}{}_{\mu} \Lambda^{\mu}{}_{\nu'} = \delta^{\rho'}_{\nu'}$ obtenemos:

$$a^{\rho'} = \Lambda^{\rho'}{}_{\mu} a^{\mu}. \tag{5.42}$$

Esta corresponde a la transformación inversa a (5.41). Observen que (5.41) y (5.42) son idénticas en forma a las relaciones en (5.36). Esta característica común es lo que hace que ambos u^μ y a^μ sean denominados 4-vectores. Veamos ahora en qué consiste a^μ. Primero, diferenciemos la componente $u^0 = \gamma$ con respecto a τ (*c.f.* (5.33)):

$$\begin{aligned} \frac{du^0}{d\tau} &= \frac{d\gamma}{d\tau} && (5.43)\\ &= \frac{d}{d\tau}(1-v^2)^{-1/2} && (5.44)\\ &= \frac{1}{2}(1-v^2)^{-3/2}\frac{d(v^2)}{d\tau} && (5.45)\\ &= (1-v^2)^{-3/2}\sum_i v^i \frac{dv^i}{d\tau}. && (5.46)\end{aligned}$$

Pero, dado que $d\tau = dt\sqrt{1-v^2}$, podemos continuar el cálculo anterior de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{du^0}{d\tau} &= (1-v^2)^{-2}\sum_i v^i \frac{dv^i}{dt} && (5.47)\\ &= \gamma^4 \sum_i v^i \tilde{a}^i, && (5.48)\end{aligned}$$

donde $\tilde{a}^i = \frac{dv^i}{dt}$ son las componentes espaciales de la aceleración física más familiar. Al diferenciar las componentes $u^i = \gamma v^i$ con respecto a τ, un cálculo similar nos conduce al siguiente resultado:

$$\frac{du^i}{d\tau} = \gamma^4 \tilde{a}^i + \gamma^4 \sum_j v^j (v^i \tilde{a}^j - \tilde{a}^i v^j). \tag{5.49}$$

Una forma iluminadora de reescribir la relación anterior es:

$$\frac{du^i}{d\tau} = \gamma^4 \sum_j (\delta^{ij} - v^2 P^{ij})\tilde{a}^j, \tag{5.50}$$

donde

$$P^{ij} = \delta^{ij} - \frac{v^i v^j}{v^2}, \tag{5.51}$$

es la matriz de proyección al espacio ortogonal a la dirección v^i. Es decir, en general se cumple que:

$$\sum_j P^{ij} v^j = 0 \qquad \text{y} \qquad \sum_i P^{ij} v^i = 0. \tag{5.52}$$

La notación usada en (5.50) revela en forma inmediata que:

$$\sum_i u^i \frac{du^i}{d\tau} = \gamma^5 \sum_i v^i \tilde{a}^i. \tag{5.53}$$

Por otro lado, la ecuación (5.48) nos dice que

$$u^0 \frac{du^0}{d\tau} = \gamma^5 \sum_i v^i \tilde{a}^i. \tag{5.54}$$

Por lo tanto, vemos que

$$-u^0 \frac{du^0}{d\tau} + \sum_i u^i \frac{du^i}{d\tau} = 0. \tag{5.55}$$

O, explotando la notación de Einstein:

$$\eta_{\mu\nu} u^\mu a^\nu = 0. \tag{5.56}$$

Este sencillo resultado pudo haber sido obtenido en forma mucho más directa al diferenciar la expresión $\eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -1$ con respecto a τ. Sin embargo, el camino seguido aquí revela la forma en que la aceleración física $\tilde{a}^i$ aparece en las componentes espaciales $a^i = \frac{du^i}{d\tau}$ de la 4-aceleración a^μ.

5.3 Algo más sobre la convención de Einstein

En los cálculos anteriores resulta tedioso tener que lidiar con la sumatoria $\sum_i$ al trabajar con las componentes espaciales de los 4-vectores (etiquetadas con índices latinos). Motivados por la notación covariante podemos, sin inconvenientes, implementar la convención de Einstein para las componentes espaciales, que nos permita omitir la sumatoria en nuestros cálculos. La convención es la siguiente: Cada vez que en una expresión hay un super-índice y un sub-índice (ambos latinos) que se repiten, se asume que hay una sumatoria de por medio. Por ejemplo:

$$U_i V^i \equiv \sum_i U_i V^i. \tag{5.57}$$

Vemos entonces que los cálculos anteriores se simplifican al usar las deltas de Kronecker δ^{ij} y δ_{ij} con índices arriba y abajo. Por ejemplo, ahora la ecuación (5.53) puede ser reescrita como:

$$\delta_{ij} u^i \frac{du^j}{d\tau} = \gamma^5 \delta_{ij} v^i \tilde{a}^j. \tag{5.58}$$

Evidentemente no es mucho lo que hemos ganado: Hemos reemplazado la aparición de la sumatoria $\sum_i$ por otro simbolo δ^{ij}, lo que puede ser aun más tedioso. Sin embargo, podemos suplementar la notación anterior con una regla adicional: Dadas las componentes espaciales V^i con un super-índice latino i, definimos las componentes V_j con sub-índice j de la siguiente forma:

$$V_j \equiv \delta_{ji} V^i, \tag{5.59}$$

(observen que estamos usando la convención de Einstein). Esta definición es trivial. Lo único que estamos diciendo es que $V_1 = V^1$, $V_2 = V^2$ y $V_3 = V^3$. Sin embargo, ahora vemos que la convención de Einstein puede ser explotada para escribir, por ejemplo:

$$\sum_i v^i v^i = \delta_{ij} v^i v^j = v_i v^i. \tag{5.60}$$

No cabe duda que la última igualdad es mucho más simple que las anteriores. De este modo, ahora la ecuación (5.53) puede ser reescrita en forma aun más sencilla:

$$u_i \frac{du^i}{d\tau} = \gamma^5 v_i \tilde{a}^i. \tag{5.61}$$

Por cierto, queda claro que $v_i \tilde{a}^i = v^i \tilde{a}_i$.

6 Tensores

La notación anterior se vuelve particularmente efectiva para discutir ciertos objetos matemáticos conocidos como tensores. Como veremos, cualquier cantidad física en la naturaleza debe ser algún tipo de tensor! Elaboremos esta discusión en forma sistemática.

6.1 Vectores

Como ya hemos dicho, un 4-vector V^μ es un objeto que tiene componentes relativos a las coordenadas de un sistema de referencia K. Es decir, V^0 es la componente de V^μ a lo largo del eje temporal $t = x^0$, mientras que V^2 es la componente de V^μ a lo largo del eje $x^2 = y$. La principal propiedad que caracteriza a un 4-vector es la manera en que transforman sus componentes cuando hacemos una transformación de Lorentz. Un 4-vector V^μ respeta la siguiente regla bajo una transformación de Lorentz:

$$V^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_{\nu} V^\nu. \tag{6.1}$$

La transformación inversa puede ser naturalmente escrita como:

$$V^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu'} V^{\nu'}, \tag{6.2}$$

donde $\Lambda^{\mu}{}_{\nu'}$ es la transformación inversa de $\Lambda^{\mu'}{}_{\nu}$. Es decir, se cumplen: $\Lambda^{\mu'}{}_{\nu}\Lambda^{\nu}{}_{\rho'} = \delta^{\mu'}_{\rho'}$ y $\Lambda^{\mu}{}_{\nu'}\Lambda^{\nu'}{}_{\rho} = \delta^{\mu}_{\rho}$.

6.2 Co-vectores

A partir de un vector V^μ podemos definir un co-vector V_μ. Observen que la única diferencia es la posición del índice Griego! La forma de definir V_μ es la siguiente:

$$V_\mu \equiv \eta_{\mu\nu} V^\nu. \tag{6.3}$$

Observen que estamos usando la métrica $\eta_{\mu\nu}$ para definir V_μ a partir de V^μ. Se podría decir que estamos usando la métrica para bajar el super-índice y así convertirlo en un sub-índice. En términos concretos, vemos que

$$V_0 = -V^0, \tag{6.4}$$

$$V_i = \delta_{ij} V^j. \tag{6.5}$$

Es interesante apreciar que $V_i = \delta_{ij} V^j$ es precisamente la regla introducida en la Sección 5.3, lo que ciertamente no es casualidad. El aspecto más relevante de un co-vector es la manera en que transforma. Esta puede ser deducida directamente de la regla (6.1) y de la ecuación (5.18). En efecto, observen que juntando ambas ecuaciones obtenemos:

$$
\begin{aligned}
V_\mu &= \eta_{\mu\nu} V^\nu && (6.6)\\
&= \eta_{\mu\nu} \Lambda^{\nu}{}_{\rho'} V^{\rho'} && (6.7)\\
&= (\eta_{\mu'\nu'} \Lambda^{\mu'}{}_{\mu} \Lambda^{\nu'}{}_{\nu}) \Lambda^{\nu}{}_{\rho'} V^{\rho'} && (6.8)\\
&= \eta_{\mu'\nu'} \Lambda^{\mu'}{}_{\mu} (\Lambda^{\nu'}{}_{\nu} \Lambda^{\nu}{}_{\rho'}) V^{\rho'} && (6.9)\\
&= \eta_{\mu'\nu'} \Lambda^{\mu'}{}_{\mu} \delta^{\nu'}_{\rho'} V^{\rho'} && (6.10)\\
&= \Lambda^{\mu'}{}_{\mu} \eta_{\mu'\nu'} V^{\nu'} && (6.11)\\
&= \Lambda^{\mu'}{}_{\mu} V_{\mu'}. && (6.12)\\
& && (6.13)
\end{aligned}
$$

En el último paso usamos la definición de co-vector $V_{\mu'} = \eta_{\mu'\nu'} V^{\nu'}$. De modo que hemos deducido la regla de transformación:

$$V_\mu = \Lambda^{\mu'}{}_{\mu} V_{\mu'}. \tag{6.14}$$

La transformación inversa es claramente:

$$V_{\mu'} = \Lambda^{\mu}{}_{\mu'} V_{\mu}. \tag{6.15}$$

Es importante comparar el par de ecuaciones (6.14) y (6.15) con el par análogo (6.1) y (6.2), y apreciar que V_μ transforma de manera inversa a V^μ. Esta es la razón por la cual la posición de los indices es tan importante.

Y ahora un resultado importante: Al contraer un co-vector V_μ que satisface (6.14) con un vector U^μ que satisface (6.2) obtenemos la siguiente relación:

$$
\begin{aligned}
V_\mu U^\mu &= (\Lambda^{\mu'}{}_{\mu} V_{\mu'})(\Lambda^{\mu}{}_{\nu'} U^{\nu'}) && (6.16)\\
&= (\Lambda^{\mu'}{}_{\mu} \Lambda^{\mu}{}_{\nu'}) V_{\mu'} U^{\nu'} && (6.17)\\
&= \delta^{\mu'}_{\nu'} V_{\mu'} U^{\nu'} && (6.18)\\
&= V_{\mu'} U^{\mu'}. && (6.19)
\end{aligned}
$$

Es decir, la contracción $V_\mu U^\mu$ se escribe de forma idéntica en cualquier sistema de coordenadas. Esta es la razón del nombre co-vector: mientras el vector transforma, el co-vector "co-transforma", de manera que ambas operaciones se compensan la una con la otra.

Ahora que contamos con el concepto de co-vector, vemos que podemos definir una co-velocidad u_μ a partir de la 4-velocidad u^μ de forma que la relación (5.34) se reescribe de manera más simple:

$$u_\mu u^\mu = -1. \tag{6.20}$$

Otra relación conocida que también podemos simplificar consiste en:

$$u_\mu a^\mu = 0. \tag{6.21}$$

6.3 La inversa de la métrica

Dada la métrica,

$$\eta_{\mu\nu} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}. \tag{6.22}$$

resulta natural definir su inversa usando la siguiente notación:

$$\eta^{\mu\nu} \to \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{pmatrix}. \tag{6.23}$$

Observen que para denotar a la inversa estamos usando super-índices en lugar de sub-índices. Evidentemente $\eta_{\mu\nu}$ y $\eta^{\mu\nu}$ tienen las mismas componentes, lo que a primera vista hace que la definición de $\eta^{\mu\nu}$ sea redundante. Sin embargo, dado que sabemos que un co-vector transforma de manera opuesta a un vector, podemos sospechar que $\eta^{\mu\nu}$ cumplirá un rol importante. Primero que nada observemos que, por definición, se cumple

$$\eta_{\mu\rho}\eta^{\rho\nu} = \delta^{\nu}_{\mu}. \tag{6.24}$$

Esta expresión, junto con (5.18), nos permite inferir que

$$\eta_{\mu'\rho'}\Lambda^{\mu'}{}_{\mu}\Lambda^{\rho'}{}_{\rho}\eta^{\rho\nu} = \delta^{\nu}_{\mu}. \tag{6.25}$$

Luego, contrayendo ambos lados de esta ecuación con $\Lambda^{\mu}{}_{\sigma'}$ a través de μ, obtenemos

$$\eta_{\mu'\rho'}(\Lambda^{\mu'}{}_{\mu}\Lambda^{\mu}{}_{\sigma'})\Lambda^{\rho'}{}_{\rho}\eta^{\rho\nu} = \delta^{\nu}_{\mu}\Lambda^{\mu}{}_{\sigma'}. \tag{6.26}$$

Esta ecuación se puede simplificar para obtener una relación sumamente interesante:

$$\Lambda^{\nu}{}_{\sigma'} = \eta_{\sigma'\rho'}\Lambda^{\rho'}{}_{\rho}\eta^{\rho\nu}. \tag{6.27}$$

Es decir, si conocemos la transformación de Lorentz $\Lambda^{\rho'}{}_{\rho}$, podemos deducir mediante simples contracciones con la métrica y su inversa la transformación inversa $\Lambda^{\rho}{}_{\rho'}$. Por supuesto, la siguiente expresión análoga también se cumple:

$$\Lambda^{\nu'}{}_{\sigma} = \eta_{\sigma\rho}\Lambda^{\rho}{}_{\rho'}\eta^{\rho'\nu'}. \tag{6.28}$$

Finalmente, repitiendo pasos similares, podemos deducir una última ecuación que relaciona las componentes de la inversa de la métrica en un sistema K con las respectivas componentes en un sistema K':

$$\eta^{\mu'\nu'} = \Lambda^{\mu'}{}_{\mu}\Lambda^{\nu'}{}_{\nu}\eta^{\mu\nu}. \tag{6.29}$$

Como ya es costumbre, la relación inversa es obtenida al intercambiar índices con primas por índices sin primas:

$$\eta^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\mu'}\Lambda^{\nu}{}_{\nu'}\eta^{\mu'\nu'}. \tag{6.30}$$

Nuevamente podemos constatar que mientras $\eta_{\mu\nu}$ (un objeto con sub-índices) transforma de cierta manera bajo transformaciones de Lorentz, la inversa $\eta^{\mu\nu}$ (un objeto con super-índices) transforma de la manera opuesta (o co-transforma).

6.4 La derivada parcial

La derivada parcial de una función con respecto a las coordenadas x^{μ} se puede escribir usando la siguiente notación:

$$\partial_{\nu} = \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}. \tag{6.31}$$

Observen que estamos usando un sub-índice al lado izquierdo. La razón de esto se vuelve evidente al analizar la manera en que transforma este operador. De hecho, podemos deducir esta manera directamente de la regla de la cadena. Recordemos que

$$dx^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu'}dx^{\nu'}. \tag{6.32}$$

Esta relación implica inmediatamente que

$$\frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\nu'}} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu'}. \tag{6.33}$$

De manera análoga, también tenemos

$$\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\nu}} = \Lambda^{\mu'}{}_{\nu}. \tag{6.34}$$

Luego, usando la regla de la cadena, obtenemos:

$$\partial_{\nu} = \Lambda^{\mu'}{}_{\nu}\partial_{\mu'}, \tag{6.35}$$

al igual que

$$\partial_{\nu'} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu'}\partial_{\mu}. \tag{6.36}$$

6.5 La derivada parcial de un vector

Preguntemonos cómo transforma la derivada parcial de un vector. Supongamos que tenemos un campo vectorial $V^{\mu} = V^{\mu}(x)$. Es decir, una función de las coordenadas x^{μ} que transforma de acuerdo a la regla (6.1) en cada punto del espacio tiempo. Un ejemplo de esto podría ser el perfil de 4-velocidades de un fluido: en cada punto x^μ del espacio-tiempo un fluido tiene un elemento de volumen moviéndose a una cierta 4-velocidad u^μ. Esto daría como resultado un campo $V^\mu(x) = u^\mu(\mathrm{x})$. Luego, podemos derivar $V^\mu(x)$ con respecto a las coordenadas. En particular, la derivada parcial con respecto a x^ν se puede escribir usando la siguiente notación:

$$\partial_\nu V^\mu = \frac{\partial V^\mu}{\partial x^\nu}. \tag{6.37}$$

Repitiendo los pasos usados en las secciones anteriores, es realmente fácil deducir que la regla de transformación de $\partial_\nu V^\mu$ viene dada por

$$\partial_{\nu'} V^{\mu'} = \Lambda^{\nu}{}_{\nu'} \Lambda^{\mu'}{}_{\mu} \partial_\nu V^\mu. \tag{6.38}$$

Previsiblemente, también podemos escribir

$$\partial_\nu V^\mu = \Lambda^{\nu'}{}_{\nu} \Lambda^{\mu}{}_{\mu'} \partial_{\nu'} V^{\mu'}, \tag{6.39}$$

relación que denota la regla inversa.

6.6 La derivada parcial de un co-vector

Dadas las discusiones anteriores, no es difícil deducir que la derivada parcial de un co-vector V_μ satisface las siguientes reglas de transformación:

$$\partial_{\nu'} V_{\mu'} = \Lambda^{\nu}{}_{\nu'} \Lambda^{\mu}{}_{\mu'} \partial_\nu V_\mu, \tag{6.40}$$

$$\partial_\nu V_\mu = \Lambda^{\nu'}{}_{\nu} \Lambda^{\mu'}{}_{\mu} \partial_{\nu'} V_{\mu'}. \tag{6.41}$$

6.7 Definición de tensores

Hasta el momento hemos visto que la posición de los índices de distintos objetos es fundamental para entender de que manera transforman dichos objetos. Casos particulares son las derivadas parciales de un vector y un co-vector. Por ejemplo, la derivada parcial de un vector $\partial_\nu V^\mu$ es un objeto que tiene un super-índice y un sub-índice, mientras que la derivada parcial de un co-vector $\partial_\nu V_\mu$ es un objeto con dos sub-índices. Estos dos objetos son casos particulares de tensores, cuya definición pretende generalizar la manera en que transforman los objetos que hemos discutido.

Diremos que un tensor T del tipo-(k, l) es un objeto $T^{\mu_1 \cdots \mu_k}{}_{\nu_1 \cdots \nu_l}$ con un número de super-índices k y un número de sub-índices l, que transforma bajo transformaciones de Lorentz de acuerdo a la siguiente regla:

$$T^{\mu'_1 \cdots \mu'_k}{}_{\nu'_1 \cdots \nu'_l} = \Lambda^{\mu'_1}{}_{\mu_1} \cdots \Lambda^{\mu'_k}{}_{\mu_k} \Lambda^{\nu_1}{}_{\nu'_1} \cdots \Lambda^{\nu_l}{}_{\nu'_l} T^{\mu_1 \cdots \mu_k}{}_{\nu_1 \cdots \nu_l}. \tag{6.42}$$

La ecuación anterior nos revela la regla algebraica relacionando las componentes de un tensor dado T en dos sistemas de referencia inerciales. Es decir, si un tensor T es observado teniendo componentes $T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}$ en cierto sistema de referencia inercial K con coordenadas x^μ, entonces inmediatamente podemos calcular con qué componentes $T^{\mu'_1\cdots\mu'_k}{}_{\nu'_1\cdots\nu'_l}$ es observado el mismo tensor pero en otro sistema de referencia inercial K' con coordenadas $x^{\mu'}$ (y relacionado con el primer sistema de referencia K mediante la transformación de Lorentz Λ). La relación inversa puede ser deducida fácilmente repitiendo el mismo procedimiento que hemos usado en los cálculos anteriores:

$$T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l} = \Lambda^{\mu_1}{}_{\mu'_1}\cdots\Lambda^{\mu_k}{}_{\mu'_k}\Lambda^{\nu'_1}{}_{\nu_1}\cdots\Lambda^{\nu'_l}{}_{\nu_l}\,T^{\mu'_1\cdots\mu'_k}{}_{\nu'_1\cdots\nu'_l}. \tag{6.43}$$

Con esta definición, podemos ver que $\partial_\nu V_\mu$ es un tensor del tipo-$(0,2)$, mientras que $\partial_\nu V^\mu$ es del tipo-$(1,1)$. De igual forma, vemos que un 4-vector es un tensor del tipo $(1,0)$ mientras que un co-vector es un tensor del tipo $(0,1)$. La métrica es un tensor del tipo $(0,2)$ y su inversa es del tipo $(2,0)$. La delta de Kronecker δ^μ_ν, que resulta de la contracción de la métrica y su inversa, es por lo tanto un tensor del tipo $(1,1)$. También existen cantidades que no transforman bajo transformaciones de Lorentz. Un ejemplo de esto es la contracción de un vector con un co-vector:

$$f = U_\mu V^\mu, \tag{6.44}$$

como ya hemos visto, la relación entre $f = U_\mu V^\mu$ expresado en un sistema de referencia K con $f' = U_{\mu'}V^{\mu'}$ expresado en un sitema de referencia K' es sencillamente:

$$f = f'. \tag{6.45}$$

Es decir, no hay ninguna transformación lineal Λ de por medio. De hecho, f es un tensor del tipo $(0,0)$, lo que es evidente por la ausencia de índices. Es frecuente referirse a los tensores del tipo $(0,0)$ como "escalares".

Hoy en día se espera que toda cantidad física sea algún tipo de tensor. Más adelante veremos ejemplos de tensores relevantes en la física, tales como el campo electro-magnético.

6.8 La métrica

Resulta conveniente pensar en la métrica como un objeto que permite subir y bajar índices. Es decir, dado un tensor T tipo $(2,0)$, con componentes $T^{\mu\nu}$, podemos definir un único tensor T tipo $(1,1)$ pero ahora con componentes $T^\mu{}_\nu$ con la ayuda de la métrica:

$$T^\mu{}_\nu = T^{\mu\rho}\eta_{\rho\nu}. \tag{6.46}$$

En forma análoga, también podemos definir un único tensor T tipo $(1,1)$ pero ahora con componentes $T_\mu{}^\nu$:

$$T_\mu{}^\nu = T^{\rho\nu}\eta_{\rho\mu}. \tag{6.47}$$

Por último, también podemos definir un único tensor T tipo $(0,2)$ con componentes $T_{\mu\nu}$:

$$T_{\mu\nu} = T^{\rho\sigma}\eta_{\rho\mu}\eta_{\sigma\nu}. \tag{6.48}$$

Dado que todos estos tensores están relacionados de forma unívoca, podemos permitirnos pensar que todos ellos son un mismo tensor T, y por ello usamos el mismo símbolo T para referirnos a cada caso. Esta misma situación puede ser aplicada para casos más complicados. Por ejemplo, podemos escribir expresiones del tipo:

$$T^{\mu\nu\rho}{}_{\alpha\beta} = \eta^{\nu\sigma}T^\mu{}_\sigma{}^\rho{}_{\alpha\beta}. \tag{6.49}$$

Por último, noten ahora que un producto entre dos vectores puede ser expresado de la forma:

$$A \cdot B = \eta_{\mu\nu}A^\mu B^\nu = A_\mu B^\mu = A^\mu B_\mu = \eta^{\mu\nu}A_\mu B_\nu. \tag{6.50}$$

6.9 Tensores y transformadas de Lorentz

Hemos visto que un tensor es un objeto cuyas componentes transforman bajo cambios de coordenadas de acuerdo a cierta regla. En el caso más general de un tensor T tipo (k,l), debemos escribir:

$$T^{\mu'_1\cdots\mu'_k}{}_{\nu'_1\cdots\nu'_l} = \Lambda^{\mu'_1}{}_{\mu_1}\cdots\Lambda^{\mu'_k}{}_{\mu_k}\Lambda^{\nu_1}{}_{\nu'_1}\cdots\Lambda^{\nu_l}{}_{\nu'_l}\,T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}, \tag{6.51}$$

$$T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l} = \Lambda^{\mu_1}{}_{\mu'_1}\cdots\Lambda^{\mu_k}{}_{\mu'_k}\Lambda^{\nu'_1}{}_{\nu_1}\cdots\Lambda^{\nu'_l}{}_{\nu_l}\,T^{\mu'_1\cdots\mu'_k}{}_{\nu'_1\cdots\nu'_l}, \tag{6.52}$$

donde $T^{\mu'_1\cdots\mu'_k}{}_{\nu'_1\cdots\nu'_l}$ y $T^{\mu_1\cdots\mu_k}{}_{\nu_1\cdots\nu_l}$ son las componentes de T registrados por observadores O y O' respectivamente. Noten que la única forma que tenemos para distinguir si las componentes de un tensor están siendo expresadas en cierta base, es mediante la notación que tenemos para sus índices. En el ejemplo anterior, usamos indices μ y μ' para referirnos a las componentes registradas por O y O' respectivamente. Esto lo hacemos para enfatizar el hecho de que el tensor T, como objeto abstracto, es independiente del sistema de coordenadas utilizado para expresar sus componentes.

Es importante entender que $\Lambda^{\mu'}{}_\nu$, si bien es un objeto con índices, no es un tensor! Por el contrario, es el objeto que permite relacionar las componentes de un mismo tensor en dos sistemas de coordenadas distintas. La propiedad fundamental que define a una transformación de Lorentz es el hecho que deja invariante a ds^2. Esto significa que

$$\eta_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = \eta_{\mu'\nu'}dx^{\mu'}dx^{\nu'}, \tag{6.53}$$

donde $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$ y $\eta_{\mu'\nu'} = \mathrm{diag}(-1,1,1,1)$. Usando (2.15) encontramos que

$$\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \eta_{\mu'\nu'} \Lambda^{\mu'}{}_\mu \Lambda^{\nu'}{}_\nu dx^\mu dx^\nu, \qquad \eta_{\mu'\nu'} dx^{\mu'} dx^{\nu'} = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_{\mu'} \Lambda^\nu{}_{\nu'} dx^{\mu'} dx^{\nu'}. \tag{6.54}$$

Dado que estas relaciones son válidas para toda diferencia de coordenadas dx^μ obtenemos:

$$\eta_{\mu\nu} = \eta_{\mu'\nu'} \Lambda^{\mu'}{}_\mu \Lambda^{\nu'}{}_\nu, \qquad \eta_{\mu'\nu'} = \eta_{\mu\nu} \Lambda^\mu{}_{\mu'} \Lambda^\nu{}_{\nu'}, \tag{6.55}$$

que son relaciones que ya conocemos bien. Sin embargo, ahora que sabemos que $\eta_{\mu\nu}$ son las componentes de un tensor, las relaciones anteriores cobran aún más sentido. Lo que no debemos olvidar, es que estas relaciones precisamente definen lo que es una transformada de Lorentz Λ. Es decir, una transformada de Lorentz consiste en todo cambio de bases que deja invariante a la métrica $\eta_{\mu\nu}$ (aquí, por invariante nos referimos a que $\eta_{\mu\nu}$ se escribe de forma idéntica en todo sistema de referencia).

Ahora que contamos con la inversa de la métrica $\eta^{\mu\nu}$, podemos deducir una relación bastante útil. Multiplicando la primera relación en (6.55) por $\Lambda^\mu{}_{\mu'}$, obtenemos:

$$\Lambda^\mu{}_{\mu'} \eta_{\mu\nu} = \eta_{\rho'\sigma'} \Lambda^{\rho'}{}_\mu \Lambda^{\sigma'}{}_\nu \Lambda^\mu{}_{\mu'} = \eta_{\rho'\sigma'} \delta^{\rho'}_{\mu'} \Lambda^{\sigma'}{}_\nu = \eta_{\mu'\sigma'} \Lambda^{\sigma'}{}_\nu. \tag{6.56}$$

Luego, multiplicando esta relación por la inversa $\eta^{\mu\nu}$, encontramos:

$$\Lambda^\mu{}_{\mu'} = \eta_{\mu'\sigma'} \eta^{\mu\rho} \Lambda^{\sigma'}{}_\rho. \tag{6.57}$$

En forma análoga, si hubiésemos multiplicado por $\eta^{\mu'\nu'}$, habríamos encontrado:

$$\Lambda^{\mu'}{}_\mu = \eta_{\mu\sigma} \eta^{\mu'\rho'} \Lambda^\sigma{}_{\rho'}. \tag{6.58}$$

En otras palabras, vemos que dada una transformada de Lorentz $\Lambda^{\mu'}{}_\nu$, podemos calcular su inversa simplemente utilizando la métrica en la forma descrita. Este resultado nos permite ahorrarnos mucho trabajo al momento de deducir la inversa de una transformada de Lorentz dada. Veamos un ejemplo de esto: Supongamos un boost relacionando a dos observadores O y O' con O' moviendose a una velocidad v con respecto a O en la dirección x^1. Luego, sabemos que la transformación de Lorentz $\Lambda^\mu{}_{\nu'}$ relacionando a ambos observadores puede ser expresada de la forma:

$$\Lambda^\mu{}_{\nu'} \to \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{6.59}$$

donde $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$, $\beta = v$ (con $c = 1$). En la expresión anterior hemos identificado μ con filas y ν' con columnas. A partir de esta expresión, vemos que

$$\Lambda^{0'}{}_{0} = \eta^{0'\mu'}\eta_{0\nu}\Lambda^{\nu}{}_{\mu'} = \eta^{0'0'}\eta_{00}\Lambda^{0}{}_{0'} = (-1)(-1)\gamma = \gamma, \tag{6.60}$$

$$\Lambda^{0'}{}_{1} = \eta^{0'\mu'}\eta_{1\nu}\Lambda^{\nu}{}_{\mu'} = \eta^{0'0'}\eta_{11}\Lambda^{1}{}_{0'} = (-1)(+1)\beta\gamma = -\beta\gamma, \tag{6.61}$$

$$\Lambda^{1'}{}_{0} = \eta^{1'\mu'}\eta_{0\nu}\Lambda^{\nu}{}_{\mu'} = \eta^{1'1'}\eta_{00}\Lambda^{1}{}_{0'} = (+1)(-1)\beta\gamma = -\beta\gamma, \tag{6.62}$$

$$\Lambda^{1'}{}_{1} = \eta^{1'\mu'}\eta_{1\nu}\Lambda^{\nu}{}_{\mu'} = \eta^{1'1'}\eta_{11}\Lambda^{1}{}_{1'} = (+1)(+1)\gamma = \gamma. \tag{6.63}$$

De esta forma, encontramos que:

$$\Lambda^{\mu'}{}_{\nu} \to \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{6.64}$$

donde ahora identificamos μ' con filas y ν con columnas. Observen que la representación matricial de $\Lambda^{\mu}{}_{\rho'}\Lambda^{\rho'}{}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}$ corresponde a (noten el orden de los indices)

$$\begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{6.65}$$

mientras que la representación matricial de $\Lambda^{\mu'}{}_{\rho}\Lambda^{\rho}{}_{\nu'} = \delta^{\mu'}_{\nu'}$ corresponde a

$$\begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{6.66}$$

Veamos otro ejemplo. Consideremos esta vez el caso en que $\Lambda^{\mu}{}_{\nu'}$ corresponde a una rotación en torno al eje x^3. Sabemos que en tal caso podemos escribir:

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu'} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{6.67}$$

donde θ es el ángulo de la rotación. Al igual que antes, en la expresión anterior hemos identificado μ con filas y ν' con columnas. Luego, realizando el mismo tipo de operaciones, encontramos que:

$$\Lambda^{1'}{}_1 = \eta^{1'\mu'}\eta_{1\nu}\Lambda^\nu{}_{\mu'} = \eta^{1'1'}\eta_{11}\Lambda^1{}_{1'} = (+1)(+1)\cos\theta = \cos\theta, \tag{6.68}$$
$$\Lambda^{1'}{}_2 = \eta^{1'\mu'}\eta_{2\nu}\Lambda^\nu{}_{\mu'} = \eta^{1'1'}\eta_{22}\Lambda^2{}_{1'} = (+1)(+1)\sin\theta = \sin\theta, \tag{6.69}$$
$$\Lambda^{2'}{}_1 = \eta^{2'\mu'}\eta_{1\nu}\Lambda^\nu{}_{\mu'} = \eta^{2'2'}\eta_{11}\Lambda^1{}_{2'} = (+1)(+1)(-\sin\theta) = -\sin\theta, \tag{6.70}$$
$$\Lambda^{2'}{}_2 = \eta^{2'\mu'}\eta_{2\nu}\Lambda^\nu{}_{\mu'} = \eta^{2'2'}\eta_{22}\Lambda^2{}_{2'} = (+1)(+1)\cos\theta = \cos\theta. \tag{6.71}$$

Luego, la representación matricial para $\Lambda^{\mu'}{}_\nu$ está dada por:

$$\Lambda^{\mu'}{}_\nu \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{6.72}$$

6.10 Manipulación de índices

Hay una serie de operaciones que podemos realizar con tensores que se reducen únicamente a manipular índices en la forma correcta. Una operación básica consiste en la contracción de índices, que lleva a un tensor del tipo (k, l) a otro de tipo $(k-1, l-1)$. Consideremos por ejemplo un tensor T del tipo $(3, 2)$, con componentes $T^{\mu\nu\rho}{}_{\alpha\beta}$, entonces podemos definir un nuevo tensor S tipo $(k-1, l-1)$ a través de la suma de un superíndice con un subíndice de la forma:

$$S^{\mu\rho}{}_\sigma = T^{\mu\nu\rho}{}_{\sigma\nu}, \tag{6.73}$$

donde estamos sumando el índice ν (recuerden la regla de suma de índices de Einstein). Es posible confirmar que, en efecto, S definido de esta forma es un tensor genuino (es decir, sus componentes transforman de la forma adecuada). También podemos definir otros tensores tipo $(k-1, l-1)$ mediante contracciones de otros índices, sin embargo, algo que no debemos olvidar es que el orden de los índices importa. Esto significa que tensores con contracciones definidas sobre índices distingos por lo general son distintos:

$$T^{\mu\nu\rho}{}_{\sigma\nu} \neq T^{\mu\rho\nu}{}_{\sigma\nu}. \tag{6.74}$$

Otra operación básica que no debemos olvidar es que la métrica puede ser utilizada para subir y bajar índices en tensores. Por ejemplo, dado un tensor $T^{\mu\nu\rho}{}_{\alpha\beta}$, podemos usar la métrica para definir nuevos tensores que elegimos denominar con la misma letra T:

$$T^{\mu\nu\rho\alpha}{}_\beta = \eta^{\alpha\sigma}T^{\mu\nu\rho}{}_{\sigma\beta}, \tag{6.75}$$
$$T_\mu{}^{\nu\rho}{}_{\alpha\beta} = \eta_{\mu\sigma}T^{\sigma\nu\rho}{}_{\alpha\beta}, \tag{6.76}$$
$$T_{\mu\nu\rho}{}^{\alpha\beta} = \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\delta}\eta_{\rho\epsilon}\eta^{\alpha\gamma}\eta^{\beta\tau}T^{\sigma\delta\epsilon}{}_{\gamma\tau}, \tag{6.77}$$

etc... Observen que el acto de subir y bajar un índice no cambia su posición relativa a otros índices. También, noten que un índice libre (uno que no está siendo sumado) debe ser el mismo en ambos lados de la ecuación, mientras que un índice que está siendo sumado, aparece sólo una vez en un lado de la ecuación (es decir, nunca escribiremos expresiones del estilo ${S_\alpha}^\nu = T_{\mu\alpha\mu} V^\mu \eta^{\mu\nu}$). Casos particulares de las expresiones anteriores son los casos ya familiares:

$$V_\mu = \eta_{\mu\nu} V^\nu, \qquad \omega^\mu = \eta^{\mu\nu} \omega_\nu. \tag{6.78}$$

Notemos que dado un vector con componentes $V^\mu = (V^0, V^1, V^2, V^3)$, entonces el co-vector V_μ vendrá dada por:

$$V_\mu = (-V^0, V^1, V^2, V^3). \tag{6.79}$$

De igual forma, dado un co-vector $\omega_\mu = (\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3)$, entonces el vector ω^μ vendrá dado por:

$$\omega^\mu = (-\omega_0, \omega_1, \omega_2, \omega_3). \tag{6.80}$$

A veces un tensor puede respetar ciertas reglas de simetrías. Por ejemplo, la métrica es (por definición) un tensor simétrico, en el sentido que $\eta_{\mu\nu} = \eta_{\nu\mu}$. Esta propiedad puede darse en forma más general. Por ejemplo, si

$$S_{\mu\nu\rho} = S_{\nu\mu\rho}, \tag{6.81}$$

entonces diremos que S es simétrico en sus dos primeros índices. En forma análoga, si se da que

$$S_{\mu\nu\rho} = S_{\rho\nu\mu}, \tag{6.82}$$

diremos que S es simétrico en el primer y tercer índice, etc... También puede darse que un tensor sea simétrico en todos sus índices. Por ejemplo, si

$$S_{\mu\nu\rho} = S_{\nu\mu\rho} = S_{\rho\nu\mu} = S_{\nu\rho\mu} = S_{\rho\mu\nu} = S_{\mu\rho\nu}, \tag{6.83}$$

entonces diremos que S es totalmente simétrico. También es posible que un tensor sea antisimétrico en un par de índices. Por ejemplo, si

$$A_{\mu\nu\rho} = -A_{\nu\mu\rho}, \tag{6.84}$$

entonces decimos que A es antisimétrico en sus dos primeros índices. En general no tiene sentido hablar de simetría o antisimetría entre pares de indices involucrando un índice superior y un índice inferior.

Dado un tensor, siempre es posible simetrizar o anti-simetrizar pares de indices. Por ejemplo, dado un tensor $T_{\mu\nu}$, podemos definir su simetrización $T_{(\mu\nu)}$ mediante:

$$T_{(\mu\nu)} = \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} + T_{\nu\mu}). \tag{6.85}$$

Observen que en efecto, se tiene que $T_{(\mu\nu)} = T_{(\nu\mu)}$. De la misma forma, podemos definir su antisimetrización $T_{[\mu\nu]}$ mediante:

$$T_{[\mu\nu]} = \frac{1}{2}(T_{\mu\nu} - T_{\nu\mu}). \tag{6.86}$$

Observen que $T_{[\mu\nu]} = -T_{[\nu\mu]}$. Noten que un tensor arbitrio $T_{\mu\nu}$ siempre puede ser descompuesto en su parte simetrizada y su parte antisimetrizada:

$$T_{\mu\nu} = T_{(\mu\nu)} + T_{[\mu\nu]}. \tag{6.87}$$

Notemos por último que, dado que una derivada parcial ∂_μ transforma de la manera

$$\partial_{\mu'} = \Lambda^{\nu}{}_{\mu'}\partial_\nu, \tag{6.88}$$

entonces su acción sobre un tensor arbitrario del tipo (k,l), define un nuevo tensor del tipo $(k,l+1)$. Por ejemplo, dado un tensor $T_{\mu\nu}$, podemos definir un nuevo tensor

$$S_{\rho\mu\nu} = \partial_\rho T_{\mu\nu}. \tag{6.89}$$

6.11 Tensores 3-dimensionales

Recuerden que aveces es conveniente escribir un vector distinguiendo entre su parte temporal y su parte espacial:

$$V^\mu = (V^0, V^i), \tag{6.90}$$

donde $i = 1,2,3$. Observen que la acción de la métrica $\eta_{\mu\nu}$ no afecta a la parte espacial de dicho vector. Es decir:

$$V_\mu = \eta_{\mu\nu}V^\nu = (V_0, V_i) = (-V^0, V^i). \tag{6.91}$$

En otras palabras $V^i = V_i$. Usualmente nos referiremos a V^i como las componentes de un 3-vector. Observen que una rotación aplicada sobre un 4-vector V^μ tiene la forma

$$V^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_{\nu}V^\nu, \qquad \text{donde} \qquad \Lambda^{\mu'}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^{i'}{}_{j} \end{pmatrix}, \tag{6.92}$$

donde R es una rotación dada. Vemos entonces que al aplicar $\Lambda^{\mu'}{}_{\nu}$ sobre un 4-vector, sólo afectará su parte espacial. En términos de 3-vectores, la ecuación anterior adquiere la forma:

$$V^{i'} = R^{i'}{}_{j}V^j. \tag{6.93}$$

Cuando sólo consideramos rotaciones, entonces el objeto δ_{ij} (la delta de Kronecker pero con sus dos índices abajo) pasa a ser la métrica del espacio 3-dimensional. De igual forma, la inversa de dicha métrica es δ^{ij}. En efecto, las rotaciones son aquellas transformaciones lineales que dejan invariante al intervalo puramente espacial

$$ds^2 = \delta_{ij} dx^i dx^j. \tag{6.94}$$

Por dicho motivo, ciertamente tiene sentido escribir expresiones tales como $V_i = \delta_{ij} V^j = V^i$. Por último, noten que toda la maquinaria matemática que desarrollamos para definir tensores en espacios de Minkowski, puede ser repetida para el caso del espacio Euclidiano 3-dimensional. De ahí vemos que las componentes puramente espaciales $T^{i_1 \cdots i_k}{}_{j_1 \cdots j_l}$ de un tensor $T^{\mu_1 \cdots \mu_k}{}_{\nu_1 \cdots \nu_l}$ tipo (k, l) , transforman bajo rotaciones de acuerdo a la regla:

$$T^{i'_1 \cdots i'_k}{}_{j'_1 \cdots j'_l} = R^{i'_1}{}_{i_1} \cdots R^{i'_k}{}_{i_k} R^{j_1}{}_{j'_1} \cdots R^{j_l}{}_{j'_l} T^{i_1 \cdots i_k}{}_{j_1 \cdots j_l}. \tag{6.95}$$

6.12 El boost más general

Una aplicación de las herramientas que hemos acumulado es la deducción del boost más general posible. Para ello, recuerden que un boost es una transformación de Lorentz que relaciona las coordenadas de dos observadores inerciales a cierta velocidad uniforme el uno con respecto al otro. Supongamos que O' se mueve a una 3-velocidad v^i con respecto a O. Esto quiere decir que O ve a O' moverse a una velocidad:

$$v^i = \frac{dx^i}{dt}, \tag{6.96}$$

donde $t = x^0$ y x^i son las coordenadas usadas por O. La 4-velocidad asociada a tal 3-velocidad está dada por:

$$u^\mu = (\gamma, \gamma \beta^i), \tag{6.97}$$

donde $\beta^i = v^i$ (recuerden que $c = 1$), y $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$. Para simplificar la notación, estamos usando $\beta^2 = \beta^i \beta_i$. Por otro lado, el observador O' se ve a sí mismo en reposo. Por dicho motivo, las componentes $u^{\mu'}$ de u en el sistema de referencia usado por O', deben escribirse de la forma:

$$u^{\mu'} = (1, 0). \tag{6.98}$$

En otras palabras $v^{i'} = 0$. La transformación de Lorentz $\Lambda^{\mu'}{}_\nu$ relacionando ambos sistemas de referencia debe por lo tanto satisfacer:

$$u^{\mu'} = \Lambda^{\mu'}{}_\nu u^\nu, \qquad \text{donde} \qquad u^\mu = (\gamma, \gamma \beta^i), \qquad \text{y} \qquad u^{\mu'} = (1, 0). \tag{6.99}$$

Explotando la presencia de los índices denotando componentes espaciales (índices latinos), esta relación puede ser reescrita de la forma

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Lambda^{0'}{}_0 & \Lambda^{0'}{}_j \\ \Lambda^{i'}{}_0 & \Lambda^{i'}{}_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma \beta^j \end{pmatrix}. \tag{6.100}$$

La ecuación anterior consiste en 4 ecuaciones independientes, pero la notación tensorial nos permite mantenerla en dos. Noten que continuamos usando la convención de suma de índices de Einstein para los índices latinos. Intentemos deducir la forma de las componentes ${\Lambda^{0'}}_0$, ${\Lambda^{0'}}_j$, ${\Lambda^{i'}}_0$ y ${\Lambda^{i'}}_j$. Una de las ecuaciones presentes en (6.100) que debemos resolver está dada por:

$$1 = {\Lambda^{0'}}_0\gamma + {\Lambda^{0'}}_j\gamma\beta^i. \tag{6.101}$$

Para deducir los valores de ${\Lambda^{0'}}_0$ y ${\Lambda^{0'}}_j$ debemos tener en cuenta que estas cantidades sólo pueden depender de β^i, ya que ésta es la única información con la que contamos para relacionar ambos sistemas de coordenadas. Por otro lado, noten que ${\Lambda^{0'}}_j$ tiene un índice j. Esto sugiere que ${\Lambda^{0'}}_j$ debe ser proporcional a β_j. Escribiendo ${\Lambda^{0'}}_j = \alpha_1\beta_j$ (donde α_1 es una cantidad todavía por determinar) la ecuación anterior queda como

$$1 = \gamma({\Lambda^{0'}}_0 + \alpha_1\beta^2). \tag{6.102}$$

Dado que ${\Lambda^{0'}}_0$ y α_1 no tienen índices, estas cantidades sólo pueden depender de β^i a través de la combinación $\beta^2 = \beta^i\beta_i$. Esto significa que ${\Lambda^{0'}}_0$ y α_1 no dependen de la dirección en que O' se mueve con respecto a O, y para deducir sus valores sólo necesitamos conocer un caso particular. Afortunadamente ya conocemos bien el caso en que O' se mueve en la dirección positiva de x^1 con respecto a O, en cuyo caso uno tiene que ${\Lambda^{\mu'}}_\nu$ viene dada por la expresión en (6.64). Vemos entonces que necesariamente $\alpha_1 = -\gamma$ y por lo tanto:

$${\Lambda^{0'}}_0 = \gamma, \qquad {\Lambda^{0'}}_j = -\gamma\beta_j. \tag{6.103}$$

La siguiente ecuación que debemos resolver consiste en:

$$0 = {\Lambda^{i'}}_0\gamma + {\Lambda^{i'}}_j\gamma\beta^j. \tag{6.104}$$

Al igual que antes, las cantidades ${\Lambda^{i'}}_0$ y ${\Lambda^{i'}}_j$ sólo pueden depender de β^i. Esto quiere decir que ${\Lambda^{i'}}_0$ debe ser proporcional a β^i, y por lo tanto podemos escribir ${\Lambda^{i'}}_0 = \alpha_2\beta^{i'}$ donde hemos introducido la notación $\beta^{i'} \equiv \delta^{i'}_j\beta^j$, con $\delta^{i'}_j = 1$ si $i = j$ y $\delta^{i'}_j = 0$ si $i \neq j$.[3] Esto lo hemos hecho para dejar en claro que $\beta^{i'}$ no es la velocidad $v^{i'}$ medida por O' (de hecho recuerden que $v^{i'} = 0$). Al igual que con α_1, la cantidad α_2 sólo puede depender de β^2, y por lo tanto su valor no depende de la dirección en la que O' se mueve con respecto a O. Podemos entonces comparar la presente situación con el caso particular ofrecido por la expresión (6.64) y deducir que

$${\Lambda^{i'}}_0 = -\gamma\beta^{i'}. \tag{6.105}$$

Reemplazando esta expresión en la ecuación (6.104) nos queda por resolver la siguiente ecuación:

$${\Lambda^{i'}}_j\beta^j = \gamma\beta^{i'}. \tag{6.106}$$

[3] Noten que ${R^{i'}}_j = \delta^{i'}_j$ corresponde a la rotación unidad. De hecho, en esta discusión podríamos usar ${R^{i'}}_j$ en lugar de $\delta^{i'}_j$ para obtener un resultado aún más general que además de un boost incluya rotaciones.

Repitiendo la misma lógica anterior, $\Lambda^{i'}{}_j$ sólo puede depender de β^i. Esto sugiere que escribamos $\Lambda^{i'}{}_j$ proporcional a $\beta^{i'}\beta_j$. Sin embargo, ésta no es la única opción que tenemos. Otra posibilidad es que $\Lambda^{i'}{}_j$ contenga entre sus términos una cantidad proporcional a $\delta^{i'}_j$. Esto significa que debemos usar como *ansatz* la siguiente expresión para $\Lambda^{i'}{}_j$

$$\Lambda^{i'}{}_j = \alpha_3 \delta^{i'}_j + \alpha_4 \beta^{i'} \beta_j. \tag{6.107}$$

Apoyados una vez más por el caso particular (6.64), no es difícil encontrar que $\alpha_3 = 1$ y $\alpha_4 = (\gamma - 1)/\beta^2$. Esto quiere decir que

$$\Lambda^{i'}{}_j = \delta^{i'}_k (P^k{}_j + \gamma \beta^k \beta_j / \beta^2), \qquad \text{donde} \qquad P^k{}_j = \delta^k_j - \frac{\beta^k \beta_j}{\beta^2}. \tag{6.108}$$

Observen que $P^i{}_j = \delta^i_j - \beta^i \beta_j / \beta^2$ corresponde al 3-tensor proyector al espacio perpendicular a β^i. Es decir, se tiene que $P^i{}_j \beta^j = 0$ y $P^i{}_j \beta_i = 0$, además de la propiedad $P^i{}_j P^j{}_k = P^i{}_k$. Juntando todos los resultados anteriores, llegamos a la siguiente expresión final:

$$\Lambda^{\mu'}{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \beta_j \\ -\gamma \delta^{i'}_k \beta^k & \delta^{i'}_k (P^k{}_j + \gamma \beta^k \beta_j / \beta^2) \end{pmatrix}, \qquad \text{donde} \qquad P^i{}_j \equiv \delta^i_j - \frac{\beta^i \beta_j}{\beta^2}. \tag{6.109}$$

Usando los resultados de la Sección 6.13 es posible deducir fácilmente la transformada inversa, la que viene dada por:

$$\Lambda^\mu{}_{\nu'} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma \delta^k_{j'} \beta_k \\ -\gamma \beta^i & \delta^k_{j'} (P^i{}_k + \gamma \beta^i \beta_k / \beta^2) \end{pmatrix}. \tag{6.110}$$

6.13 Clasificación del grupo de Lorentz

El grupo de Lorentz consiste en el conjunto de todas las transformadas de Lorentz. Recuerden que éstas vienen definidas como aquellas transformadas lineales de las coordenadas x^μ que dejan invariante al intervalo espacio-temporal

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \tag{6.111}$$

Recordemos que si $\Lambda^\mu{}_{\nu'}$ es una de tales transformaciones, y $\Lambda^{\mu'}{}_\nu$ su inversa, entonces podemos escribir:

$$\Lambda^\mu{}_{\nu'} = \eta^{\mu\rho} \eta_{\nu'\sigma'} \Lambda^{\sigma'}{}_\rho. \tag{6.112}$$

Notemos que la expresión anterior puede ser reescrita de la forma:

$$\Lambda^\mu{}_{\nu'} = \eta^{\mu\rho} \Lambda_\rho{}^{\sigma'} \eta_{\sigma'\nu'}, \tag{6.113}$$

donde $\Lambda_\rho{}^{\sigma'}$ es la transpuesta de $\Lambda^{\sigma'}{}_\rho$. Luego, si $\Lambda^\mu{}_{\nu'}$ corresponden a los elementos de una matriz Λ, la expresión anterior puede ser escrita en la forma matricial:

$$\Lambda = \eta^{-1}(\Lambda^{-1})^t\eta. \tag{6.114}$$

donde el símbolo t es utilizado para distinguir la operación transpuesta. Calculando el determinante de la relación anterior obtenemos:

$$(\det\Lambda)^2 = 1. \tag{6.115}$$

Para llegar a esta expresión necesitamos recordar que el determinante es un mapa multiplicativo que satisface las propiedades $\det(A\cdot B) = \det(A)\det(\mathrm{B})$, $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$ y $\det(A^t) = \det A$. (Noten además que $\det\eta = -1$ y $\det\eta^{-1} = -1$). Vemos entonces que una transformación de Lorentz Λ satisface

$$\det\Lambda = \pm 1. \tag{6.116}$$

En general una transformada de Lorentz cae dentro de una de las cuatro siguientes categorías:

6.13.1 Grupo ortocrono propio

Estas corresponden a las transformadas de Lorentz caracterizadas por $\det\Lambda = +1$ y $\Lambda^0{}_{0'} > 0$. Ejemplos de tales transformadas son todas las que hemos estudiado hasta el momento, es decir boosts y rotaciones.

6.13.2 Inversiones espaciales

Estas corresponden a las transformadas de Lorentz caracterizadas por $\det\Lambda = -1$ y $\Lambda^0{}_{0'} > 0$. Dichas transformadas siempre involucran una inversión espacial. Ejemplos sencillos son:

$$\Lambda^\mu{}_{\nu'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad \Lambda^\mu{}_{\nu'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{6.117}$$

Observen que en el primer ejemplo hemos invertido la dirección de una de las coordenadas, la del eje x^1, mientras que en el segundo hemos invertido las direcciones de todas. Noten por otro lado, que la transformación

$$\Lambda^\mu{}_{\nu'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{6.118}$$

aunque parece estar invirtiendo el sentido espacial de las coordenadas, pertenece al grupo ortocrono propio, y de hecho corresponde a una rotación! (Una rotación en 180° en torno al eje x^3).

6.13.3 Inversiones temporales

Estas corresponden a las transformadas de Lorentz caracterizadas por $\det \Lambda = -1$ y ${\Lambda^0}_{0'} < 0$. Dichas transformadas siempre involucran una inversión temporal. Un ejemplo sencillo es:

$$ {\Lambda^\mu}_{\nu'} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{6.119} $$

6.13.4 Inversiones temporales y espaciales

Estas corresponden a las transformadas de Lorentz caracterizadas por $\det \Lambda = +1$ y ${\Lambda^0}_{0'} < 0$. Dichas transformadas siempre involucran una inversión temporal y una inversión espacial. Un ejemplo sencillo es:

$$ {\Lambda^\mu}_{\nu'} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{6.120} $$

Observen que estas transformaciones pueden ser obtenidas a partir de la aplicación sucesiva de una inversión temporal y una transformación espacial.

6.14 El tensor de Levi-Civita

Olvidemos por un rato el álgebra de tensores que hemos desarrollado, y definamos un símbolo con n-índices $\tilde{\epsilon}_{i_1 \dots i_n}$ (con cada uno de sus índices tomando valores entre 1 y n (es decir $i_k = 1, \dots n$ con $k = 1, \dots n$) de la siguiente forma:

$$ \tilde{\epsilon}_{i_1 \dots i_n} = \begin{cases} +1 & \text{si } i_1 \dots i_n \text{ es una permutación par de } 1, 2, 3, \dots, n \\ -1 & \text{si } i_1 \dots i_n \text{ es una permutación impar de } 1, 2, 3, \dots, n \\ 0 & \text{de cualquier otra forma} \end{cases}. \tag{6.121} $$

El que $i_1 \dots i_n$ sea una permutación par (impar) de $1, 2, 3, \dots, n$ significa que el orden $i_1 \dots i_n$ ha sido obtenido mediante un número par (impar) de intercambios de índices sucesivos. Por ejemplo, para el caso $n = 3$, el orden de índices $i_1 i_2 i_3 = 123$ es una permutación par de 123, ya que hay *cero* intercambios de índices de por medio. El orden de índices $i_1 i_2 i_3 = 213$ es una permutación impar de 123, ya que para llegar a $i_1 i_2 i_3 = 213$ a partir de 123 se requiere *una* permutación $12 \to 21$ de los dos primeros índices. El orden de índices $i_1 i_2 i_3 = 312$ es una permutación par de 123, ya que para llegar a $i_1 i_2 i_3 = 312$ a partir de 123 se requieren *dos* permutaciones sucesivas: primero la permutación $23 \to 32$ y luego la permutación $13 \to 31$.

El objeto definido en la ecuación (6.121) es el llamado *simbolo* de Levi-Civita definido sobre un espacio n-dimensional. Nos ofrece la posibilidad de definir al determinante $\det A$ de una matriz $n \times n$ arbitraria A, con componentes $A^i{}_j$, en forma elegante:

$$(\det A)\tilde{\epsilon}_{i_1 \dots i_n} \equiv A^{j_1}{}_{i_1} \cdots A^{j_n}{}_{i_n} \tilde{\epsilon}_{j_1 \dots j_n}, \tag{6.122}$$

donde estamos usando la convención de Einstein para la suma de índices. Para convencernos de que tal definición es correcta, evaluemos el caso $i_1 \dots i_n = 1, 2, 3, \dots, n$:

$$\det A = A^{j_1}{}_1 \cdots A^{j_n}{}_n \tilde{\epsilon}_{j_1 \dots j_n}. \tag{6.123}$$

Observen que $\tilde{\epsilon}_{j_1 \dots j_n}$ evita que se repitan elementos de $A^i{}_j$ en la multiplicación de cada término, y además, dada la anti-simetría de $\tilde{\epsilon}_{i_1 \dots i_n}$ cada término en la suma va cambiando de signo.

Nada nos impide definir el símbolo de Levi-Civita para el caso particular del espacio-tiempo 4-dimensional. Dado un sistema de coordenadas x^μ, definimos el símbolo de Levi-Civita como aquel objeto con índices griegos que tiene por elementos

$$\tilde{\epsilon}_{\mu\nu\rho\sigma} = \begin{cases} +1 & \text{si } \mu\nu\rho\sigma \text{ es una permutación par de } 0123 \\ -1 & \text{si } \mu\nu\rho\sigma \text{ es una permutación impar de } 0123 \\ 0 & \text{de cualquier otra forma} \end{cases} \tag{6.124}$$

Utilizando la definición de determinante de la ecuación (6.122), encontramos que dado un tensor $A^\mu{}_\nu$ del tipo $(1,1)$ (donde μ denota filas y ν columnas), tenemos:

$$(\det A)\tilde{\epsilon}_{\mu\nu\rho\sigma} \equiv A^\alpha{}_\mu A^\beta{}_\nu A^\gamma{}_\rho A^\delta{}_\sigma \tilde{\epsilon}_{\alpha\beta\gamma\delta}. \tag{6.125}$$

En particular, si bien sabemos que Λ no es un tensor, podemos utilizar la propiedad algebraica de la ecuación (6.125) para escribir:

$$\Lambda^\mu{}_{\mu'} \Lambda^\nu{}_{\nu'} \Lambda^\rho{}_{\rho'} \Lambda^\sigma{}_{\sigma'} \tilde{\epsilon}_{\mu\nu\rho\sigma} = \det \Lambda \, \tilde{\epsilon}_{\mu'\nu'\rho'\sigma'}. \tag{6.126}$$

Supongamos ahora que definimos un tensor ϵ tipo $(0,4)$ cuyas componentes $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ coincidan con los del símbolo de Levi-Civita, en cierto sistema de coordenadas x^μ. Es decir

$$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \equiv \tilde{\epsilon}_{\mu\nu\rho\sigma}. \tag{6.127}$$

Dicho tensor es conocido como el tensor de Levi-Civita. Preguntemonos ahora como se ve este tensor en otros sistemas de referencia. Para ello debemos calcular las componentes $\epsilon_{\mu'\nu'\rho'\sigma'}$ del tensor de Levi-Civita en otro sistema de coordenadas. Dado que conocemos sus componentes en un sistema de referencia determinado, podemos calcular sus componentes en cualquier otro sistema mediante la relación:

$$\epsilon_{\mu'\nu'\rho'\sigma'} = \Lambda^{\mu}{}_{\mu'}\Lambda^{\nu}{}_{\nu'}\Lambda^{\rho}{}_{\rho'}\Lambda^{\sigma}{}_{\sigma'}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}. \tag{6.128}$$

Con la ayuda de (6.125) podemos calcular el lado derecho de la ecuación anterior para obtener el resultado:

$$\epsilon_{\mu'\nu'\rho'\sigma'} = (\det\Lambda)\,\tilde{\epsilon}_{\mu'\nu'\rho'\sigma'}. \tag{6.129}$$

De esta forma vemos que si Λ es un boost o una rotación (grupo ortocrono propio), entonces $\det\Lambda = +1$, y el tensor $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ se escribe de forma idéntica en todo sistema de referencia.

6.15 Rotaciones de un tensor antisimétrico

Consideremos un tensor antisimétrico $A_{\mu\nu} = -A_{\nu\mu}$. Observen que las únicas componentes que tienen una chance de ser distintas de cero son $A_{0i} = -A_{i0}$, y $A_{ij} = -A_{ji}$ con $i \neq j$. En general, resulta útil escribir dicho tensor en la forma siguiente:

$$A_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -V_1 & -V_2 & -V_3 \\ V_1 & 0 & U^3 & -U^2 \\ V_2 & -U^3 & 0 & U^1 \\ V_3 & U^2 & -U^1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.130}$$

Luego, en términos de V_i y U^i tenemos:

$$A_{0i} = -V_i, \qquad A_{i0} = V_i, \qquad A_{ij} = \tilde{\epsilon}_{ijk}U^k, \tag{6.131}$$

donde $\tilde{\epsilon}_{ijk}$ es el símbolo de Levi-Civita 3-dimensional. Para justificar esta notación, veamos como transforma $A_{\mu\nu}$ bajo rotaciones. Una rotación arbitraria aplicada sobre $A_{\mu\nu}$ define nuevos componentes $A_{\mu'\nu'}$ dados por:

$$A_{\mu'\nu'} = \Lambda^{\mu}{}_{\mu'}\Lambda^{\nu}{}_{\nu'}A_{\mu\nu}, \qquad \text{donde} \qquad \Lambda^{\mu}{}_{\mu'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & R^{i}{}_{j'} \end{pmatrix}. \tag{6.132}$$

Evidentemente, las componentes de A satisfacen las mismas propiedades de anti-simetría: $A_{\mu'\nu'} = -A_{\nu'\mu'}$. Desarrollando la expresión anterior, vemos que los elementos $A_{0'i'}$ de A en el nuevo sistema de referencia vienen dados por:

$$A_{0'i'} = \Lambda^{\mu}{}_{0'}\Lambda^{\nu}{}_{i'}A_{\mu\nu} = \Lambda^{0}{}_{0'}\Lambda^{i}{}_{i'}A_{0i} = R^{i}{}_{i'}A_{0i}. \tag{6.133}$$

Por lo tanto, bajo rotaciones V_i transforma como un 3-vector:

$$V_{i'} = R^j{}_{i'} V_j. \tag{6.134}$$

Analicemos ahora lo que pasa con las componentes $A_{i'j'}$ de A en el nuevo sistema de coordenadas. Estas vienen dadas por:

$$A_{i'j'} = \Lambda^\mu{}_{i'} \Lambda^\nu{}_{j'} A_{\mu\nu} = \Lambda^i{}_{i'} \Lambda^j{}_{j'} A_{ij} = R^i{}_{i'} R^j{}_{j'} A_{ij}. \tag{6.135}$$

Este resultado nos permite escribir

$$\tilde{\epsilon}_{i'j'k'} U^{k'} = R^i{}_{i'} R^j{}_{j'} \tilde{\epsilon}_{ijk} U^k. \tag{6.136}$$

Recordemos sin embargo que una rotación satisface $R^j{}_{k'} R^{k'}_i = \delta^j_i$. Por lo que la expresión anterior puede ser reescrita de la manera:

$$\tilde{\epsilon}_{i'j'k'} U^{k'} = (R^i{}_{i'} R^j{}_{j'} R^k{}_{k'} \tilde{\epsilon}_{ijk}) R^{k'}_l U^l = \det R \, \tilde{\epsilon}_{i'j'k'} R^{k'}_l U^l, \tag{6.137}$$

en donde usamos el resultado general para expresar un determinante con la ayuda del símbolo de Levi-Civita. Dado que una rotación satisface $\det R = 1$, vemos que

$$\tilde{\epsilon}_{i'j'k'} U^{k'} = \tilde{\epsilon}_{i'j'k'} R^{k'}_l U^l. \tag{6.138}$$

De aquí, deducimos que $U^{i'} = R^{i'}_j U^j$. Para concluir, recuerden que $R^{i'}{}_j = \delta^{i'k'} \delta_{jl} R^l{}_{k'}$. Por lo tanto, finalmente podemos escribir

$$U_{i'} = R^j{}_{i'} U_j, \tag{6.139}$$

donde hemos bajado los índices de U^i con la 3-métrica δ_{ij}. Vemos por lo tanto que U_i, al igual que V^i, transforma como un 3-vector. Esto quiere decir que un tensor antisimétrico del tipo $(0,2)$ acomoda en forma natural dos 3-vectores. No olviden que podemos usar la métrica para subir y bajar índices, por lo que $A^\mu{}_\nu$ y $A^{\mu\nu}$ también acomodan pares de 3-vectores.

Ejercicio: Es importante tener en mente que esta propiedad es útil solo si consideramos rotaciones. Si consideramos boosts, las componentes de V_i y U^i necesariamente se mezclaran las unas con las otras. Estudie como transforma $A_{\mu\nu}$ bajo la aplicación de un boost.

6.16 Ecuaciones de Maxwell

Una de las aplicaciones más importantes y poderosas del formalismo tensorial consiste en expresar las ecuaciones de Maxwell en forma covariante (escrita unicamente en términos de tensores). Recordemos que, en el vacío, éstas están dadas por ($c = 1$)

$$\nabla \times \vec{B} - \partial_t \vec{E} = \vec{\jmath}, \tag{6.140}$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = \rho, \tag{6.141}$$

$$\nabla \times + \partial_t \vec{B} = 0, \tag{6.142}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \tag{6.143}$$

donde $\nabla\times$ es el rotor y $\nabla\cdot$ es la divergencia. Recordemos que $\vec{E}$ es el campo eléctrico, $\vec{B}$ es el campo magnético, $\vec{\jmath}$ es la corriente eléctrica, y ρ es la densidad de carga eléctrica. Para elucidar como expresar estas ecuaciones en forma covariante, escribámoslas primero usando notación 3-tensorial. Para ello, observen primero que el rotor aplicado sobre un vector $\vec{V}$ tiene por componentes

$$(\nabla \times \vec{V})^i = \epsilon^{ijk} \partial_j V_k. \tag{6.144}$$

Así mismo, la divergencia de un vector $\nabla \cdot \vec{V}$ puede ser escrita como:

$$\nabla \cdot \vec{V} = \partial_i V^i. \tag{6.145}$$

Luego, podemos reescribir las ecuaciones de Maxwell de la forma:

$$\epsilon^{ijk} \partial_j B_k - \partial_0 E^i = j^i, \tag{6.146}$$

$$\partial_i E^i = \rho, \tag{6.147}$$

$$\epsilon^{ijk} \partial_j E_k + \partial_0 B^i = 0, \tag{6.148}$$

$$\partial_i B^i = 0. \tag{6.149}$$

Sabemos por experiencia que E^i y B^i transforman como 3-vectores bajo rotaciones. Debemos preguntarnos entonces de qué objetos 4-dimensionales pueden E^i y B^i ser 3-componentes. Sin duda, la primera alternativa que debemos explorar es la posibilidad de que éstos pertenezcan a 4-vectores con componentes E^μ y B^μ. Esto significa que debemos buscar entre las ecuaciones de Maxwell cantidades físicas que sean candidatas a ser identificadas con E^0 y B^0. Lamentablemente, a parte de ρ y j^i (que son cuatro cantidades), no hay más objetos a partir de los cuales podemos elegir candidatos para E^0 y B^0. Por otro lado, sabemos que las ecuaciones de Maxwell son válidas aún en la ausencia de densidades de cargas ρ y corrientes j^i, por lo simplemente no podemos acomodar E^i y B^i en pares de 4-vectores.

Estamos por lo tanto obligados a considerar un tensor de otro tipo. El siguiente caso que podemos considerar es el caso de un tensor con dos índices. Por ejemplo un tensor tipo $(0, 2)$. Como hemos visto en la sección anterior, un tensor antisimétrico permite acomodar dos 3-vectores en forma natural. Resulta atractivo entonces definir un tensor antisimétrico $F_{\mu\nu}$ de la forma:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & B^3 & -B^2 \\ E_2 & -B^3 & 0 & B^1 \\ E_3 & B^2 & -B^1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.150}$$

Resulta que en efecto es posible utilizar este tensor para reescribir las ecuaciones de Maxwell en forma covariante. No es difícil mostrar que (haga este ejercicio!):

$$\partial_\mu F^{\nu\mu} = j^\nu, \tag{6.151}$$

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\partial_\nu F_{\rho\sigma} = 0. \tag{6.152}$$

Donde $j^\nu = (\rho, j^i)$. Noten que también fue necesario ordenar ρ y j^i en un 4-vector! A esta cantidad se le denomina 4-corriente. Estas son las celebres ecuaciones de Maxwell en forma covariante. El hecho de que éstas pueden efectivamente ser escritas en forma covariante es de fundamental importancia: Recuerden que uno de los cimientos que usamos para justificar los principios de la relatividad especial fue el hecho de que la luz, cuya dinámica está descrita por las ecuaciones de Maxwell, se propaga a una velocidad universal, y que todas las leyes de la física deben ser escritas en forma idéntica en sistemas de referencia inerciales.

Para concluir, recordemos que es posible definir un potencial vectorial $\vec{A}$ y un potencial electrostático ϕ de modo que

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}, \tag{6.153}$$

$$\vec{E} = -\nabla\phi - \partial_t \vec{A}. \tag{6.154}$$

No es difícil comprobar que ϕ y $\vec{A}$ pueden ser acomodados en un sólo 4-vector $A^\mu = (\phi, A^i)$, de modo que

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{6.155}$$

Al 4-vector A^μ se le llama campo de *gauge*, y es uno de los objetos más importantes en la física contemporánea. Una de las propiedades más importantes es que $F_{\mu\nu}$ es invariante bajo la siguiente transformación abstracta

$$A_\mu \to A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \lambda, \tag{6.156}$$

donde $\lambda = \lambda(x)$ es una función escalar arbitraria. En efecto, es fácil ver que $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu$. Observen que tal transformación no es una transformación de las coordenadas espacio-temporales x^μ, sino que una simple redefinición del campo A.

7 Dinámica

Para continuar nuestro estudio del movimiento de las partículas en el espacio-tiempo, es imprescindible extender resultados bien establecidos en Mecánica Newtoniana al caso relativista.

7.1 4-momentum

Uno de los pilares de la Mecánica Newtoniana es la segunda Ley de Newton, que establece la existencia de un 3-vector denominado momentum, que en ausencia de fuerzas se mantiene constante. Si deseamos que dicha ley sea independiente del observador inercial, y por lo tanto, del sistema de coordenadas en el cual se exprese (principio relativista), es necesario que el 3-momentum sea la componente de algún tipo de tensor. La posibilidad más simple, es que sea la 3-componente de un 4-vector. Verifiquemos esta posibilidad y examinemos sus consecuencias.

Definimos el 4-momentum asociado a una partícula de masa m como un vector de las siguiente forma

$$p^\mu \equiv m u^\mu. \tag{7.1}$$

De forma explícita, las componentes del 4-momentum son: $p^0 = m\gamma$ y $p^i = m\gamma v^i$. Nótese que

$$p_\mu p^\mu = -m^2. \tag{7.2}$$

Es decir, bajo la presente definición, la masa m es un invariante bajo transformaciones de Lorentz. Más aún, en el contexto del lenguaje tensorial, podemos decir que la masa es un escalar. Por supuesto, aún no hemos demostrado que la cantidad m puede ser efectivamente identificada como la masa de una partícula. Para ello, examinemos el límite no relativista $v^2 \ll 1$ de las componentes del 4-momentum. Recordemos que para $v^2 \ll 1$, la función γ puede ser expandida como:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} = 1 + \frac{1}{2}v^2 + \frac{3}{8}v^4 + \cdots . \tag{7.3}$$

Luego, rescatando los términos más relevantes, vemos que

$$p^i = m v^i + \cdots , \tag{7.4}$$

$$p^0 = m + \frac{m}{2}v^2 + \cdots , \tag{7.5}$$

de donde se comprueba que en efecto, p^i coincide con el vector momentum usual encontrado en Mecánica Newtoniana para velocidades pequeñas comparadas con la velocidad de la luz. De paso, vemos que el segundo término de la expansión de p^0 coincide con la energía cinética $\frac{1}{2}mv^2$ asociada a una partícula de masa m. De este modo, para velocidades pequeñas, la conservación de p^i y de p^0 coinciden con la conservación de el 3-momentum usual y de la energía cinética de la partícula.

Ahora bien, si nos tomamos en serio el hecho de que p^μ es la cantidad correcta que entra en la ley de conservación, entonces estamos obligados a aceptar que $p^0 = m\gamma$ es la extensión correcta para lo que denominamos energía cinética de la partícula. Por lo tanto escribiremos:

$$E \equiv p^0 = m\gamma. \tag{7.6}$$

Por supuesto, si conocemos p^i conocemos inmediatamente E. Esto se hace particularmente evidente al reescribir (7.2) de la siguiente forma:

$$-E^2 + p^2 = -m^2, \tag{7.7}$$

donde $p^2 = p_i p^i$. La relación anterior implica que:

$$E = \sqrt{m^2 + p^2}. \tag{7.8}$$

Luego, si el 3-momentum p^i es tal que $p^2 \ll m^2$, entonces obtenemos:

$$E = \sqrt{m^2 + p^2} = m + \frac{p^2}{2m} + \cdots . \tag{7.9}$$

7.2 Conservación del 4-momentum

La ley de conservación del 4-momentum establece que para un sistema de partículas, en ausencia de fuerzas externas, la suma de los momenta en un cierto tiempo inicial t_i debe ser igual a la suma de los momenta en un cierto tiempo final t_f. En otras palabras:

$$\sum_{\text{part. iniciales}} p^\mu(t_i) = \sum_{\text{part. finales}} p^\mu(t_f). \tag{7.10}$$

Lo importante de esta relación es que si la reescribimos en otro sistema de referencia inercial K', será igualmente válida. Un ejemplo sencillo es el caso en que inicialmente existen dos partículas a y b, cuya única interacción posible es mediante colisiones elásticas. En dicho caso, debemos escribir:

$$p_a^\mu(t_i) + p_b^\mu(t_i) = p_a^\mu(t_f) + p_b^\mu(t_f). \tag{7.11}$$

La componente $\mu = 0$ de la relación anterior se puede leer como conservación de energía:

$$E_{\text{tot}} = E_a(t_i) + E_b(t_i) = E_a(t_f) + E_b(t_f). \tag{7.12}$$

O en forma más explícita:

$$\sqrt{m_a^2 + p_a^2(t_i)} + \sqrt{m_b^2 + p_b^2(t_i)} = \sqrt{m_a^2 + p_a^2(t_f)} + \sqrt{m_b^2 + p_b^2(t_f)}. \tag{7.13}$$

Si las partículas son no-relativista, es decir $p_a^2 \ll m_a^2$ y $p_b^2 \ll m_b^2$, usando la ecuación (7.9) obtenemos la relación usual de conservación de energía cinética:

$$\frac{p_a^2(t_i)}{2m_a} + \frac{p_b^2(t_i)}{2m_b} = \frac{p_a^2(t_f)}{2m_a} + \frac{p_b^2(t_f)}{2m_b}, \tag{7.14}$$

válida para colisiones elásticas. Observen que para pasar de (7.13) a (7.14) las masas que surgen del primer término de la expansión (7.9) sufren cancelaciones en ambos lados de la ecuación. Sin embargo, en el caso más general, en que las partículas son relativista, no podemos usar esta relación, y debemos conformarnos con la ecuación (7.13).

Para completar el desarrollo del ejemplo que estamos considerando, notemos también que la conservación de las componentes espaciales requiere:

$$p^i_{\text{tot}} = p_a^i(t_i) + p_b^i(t_i) = p_a^i(t_f) + p_b^i(t_f). \tag{7.15}$$

Supongamos que conocemos los momenta iniciales $p_a^i(t_i)$ y $p_b^i(t_i)$. Entonces, conocemos el valor de E_{tot}, que es conservado. Luego, usando (7.13), deducimos que

$$\sqrt{m_b^2 + p_b^2(t_f)} = E_{\text{tot}} - \sqrt{m_a^2 + p_a^2(t_f)}, \tag{7.16}$$

$$p_b^i(t_f) = p^i_{\text{tot}} - p_a^i(t_f). \tag{7.17}$$

Para proceder, resulta conveniente asumir que estamos en el sistema de referencia en donde $p^i_{\text{tot}} = 0$ (es decir, el sistema de centro de momentum). En tal caso $p_b^2(t_f) = p_a^2(t_f)$, la primera ecuación del sistema anterior se simplifica, de modo que:

$$\sqrt{m_b^2 + p_a^2(t_f)} = E_{\text{tot}} - \sqrt{m_a^2 + p_a^2(t_f)} \tag{7.18}$$

Elevando al cuadrado ambos lados de esta ecuación, obtenemos:

$$2E_{\text{tot}}\sqrt{m_a^2 + p_a^2(t_f)} = E_{\text{tot}}^2 + m_a^2 - m_b^2, \tag{7.19}$$

De donde se deduce finalmente que:

$$p_a^2(t_f) = \frac{1}{4E_{\text{tot}}^2}\left(E_{\text{tot}}^2 + m_a^2 - m_b^2\right)^2 - m_a^2. \tag{7.20}$$

Este resultado determina completamente el valor final de la magnitud del momentum $p_a^2(t_f)$ de la partícula a (y por lo tanto también de la partícula b) en el sistema en donde $p^i_{\text{tot}} = 0$. En general, para conocer los valores individuales de las componentes $p_a^i(t_f)$ se requiere conocer el tipo de interacción que afecta a las partículas.

Sin embargo, en el caso particular de una colisión unidimensional (por ejemplo, a lo largo del eje x), el problema puede ser resuelto sin mayores complicaciones. En este caso, el sistema de ecuaciones (7.16) y (7.17) se simplifica, de modo que podemos escribirlas omitiendo el índice espacial i:

$$\sqrt{m_b^2 + p_b^2(t_f)} = E_{\rm tot} - \sqrt{m_a^2 + p_a^2(t_f)}, \tag{7.21}$$
$$p_b(t_f) = p_{\rm tot} - p_a(t_f). \tag{7.22}$$

En dicho caso, elevando ambas expresiones al cuadrado, obtenemos:

$$m_b^2 + p_b^2(t_f) = E_{\rm tot}^2 - 2E_{\rm tot}\sqrt{m_a^2 + p_a^2(t_f)} + m_a^2 + p_a^2(t_f), \tag{7.23}$$
$$p_b^2(t_f) = p_{\rm tot}^2 + p_a^2(t_f) - 2p_{\rm tot}p_a(t_f). \tag{7.24}$$

Juntando ambas expresiones obtenemos entonces:

$$2E_{\rm tot}\sqrt{m_a^2 + p_a^2(t_f)} = E_{\rm tot}^2 - p_{\rm tot}^2 + m_a^2 - m_b^2 + 2p_{\rm tot}p_a(t_f). \tag{7.25}$$
$$\tag{7.26}$$

Elevando una vez más al cuadrado, finalmente obtenemos la ecuación para $p_a^2(t_f)$:

$$\begin{aligned} p_a^2(t_f)(E_{\rm tot}^2 - p_{\rm tot}^2) - p_{\rm tot}p_a(t_f)(E_{\rm tot}^2 - p_{\rm tot}^2 + m_a^2 - m_b^2) \\ = \frac{1}{4}(E_{\rm tot}^2 - p_{\rm tot}^2 + m_a^2 - m_b^2)^2 - m_a^2 E_{\rm tot}^2. \end{aligned} \tag{7.27}$$

Esta ecuación es una ecuación cuadrática de la variable $p_a^2(t_f)$: y puede ser resuelta en función de los datos. La solución a dicha ecuación resulta:

$$\begin{aligned} 2p_a(t_f) = {} & p_{\rm tot}\frac{E_{\rm tot}^2 - p_{\rm tot}^2 + m_a^2 - m_b^2}{E_{\rm tot}^2 - p_{\rm tot}^2} \\ & \pm \frac{E_{\rm tot}\sqrt{(E_{\rm tot}^2 - p_{\rm tot}^2 - (m_a - m_b)^2)(E_{\rm tot}^2 - p_{\rm tot}^2 - (m_a + m_b)^2)}}{E_{\rm tot}^2 - p_{\rm tot}^2}. \end{aligned} \tag{7.28}$$

Los signos $\pm$ reflejan dos posibilidades de acuerdo a la dirección final en la que la partícula a emerge. En el caso en que ambas partículas tienen la misma masa inicial, observamos que $m_a = m_b$ y la solución anterior se simplifica:

$$2p_a(t_f) = p_{\rm tot} \pm E_{\rm tot}\sqrt{\frac{E_{\rm tot}^2 - p_{\rm tot}^2 - 4m_a^2}{E_{\rm tot}^2 - p_{\rm tot}^2}}. \tag{7.29}$$

7.3 Energía interna

Uno de los resultados más interesantes que emerge de la ecuación (7.9) tiene relación con el concepto de energía interna. Es posible apreciar que el primer termino en la expansión es una constante dada por la masa de la partícula. Esta cantidad no tiene mayor significado en el caso de considerar colisiones elásticas en el límite relativista. Sin embargo, nada impide que dicha cantidad pueda ser aprovechada como fuente de energía. En particular, en procesos inelásticos, dicha cantidad puede ser extremadamente relevante. Consideremos el caso de una partícula inestable a de masa M_a que puede decaer en dos sub-partículas idénticas b de masa m_b. Haciendo el cálculo en el sistema de centro de momentum, en donde el momentum de la partícula inicial es $p = 0$, vemos que la conservación de energía requiere:

$$M_a = 2\sqrt{m_b^2 + p_b^2}. \tag{7.30}$$

Esto implica que el momentum p_b con que emerge cada partícula b viene dado por:

$$p_b = \sqrt{\frac{M_a^2}{4} - m_b^2}. \tag{7.31}$$

Vemos pues que si $2m_b \leq M_a$, entonces parte de la masa de la partícula a es transferida al movimiento de las partículas resultantes.