Apuntes de Física Moderna: Espacios 3D

1 3-Vectores

Para discutir vectores resulta conveniente partir por la introducción de una base. Supongamos que $\hat{x}_1$, $\hat{x}_2$ and $\hat{x}_3$ son los elementos de una base, completa y linealmente independiente. Luego, un vector arbitrario $\mathbf{v}$ puede ser expresado de la siguiente forma:

$$\mathbf{v} = v^1\hat{x}_1 + v^2\hat{x}_2 + v^3\hat{x}_3. \tag{1}$$

Las cantidades v^1, v^2 and v^3 son las componentes del vector $\mathbf{v}$ en la base $\{\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3\}$. Una forma conveniente de reescribir (1) es:

$$\mathbf{v} = v^i\hat{x}_i, \tag{2}$$

en donde estamos usando la llamada convención de Einstein sobre la suma de índices. Esta convención dicta que cada vez que hayan índices repetidos, uno arriba y otro abajo, asumimos la suma completa desde $i = 1$ hasta $i = 3$. Esta convención nos exime de usar el símbolo de suma Σ, que de otro modo aparecería en forma copiosa.

Recuerden que los vectores viven en espacios lineales, y por lo tanto pueden ser sumados y multiplicados por cantidades escalares, dando como resultado nuevos vectores. Es decir, si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores, y si a y b son escalares, entonces

$$\mathbf{w} = a\mathbf{u} + b\mathbf{v} \tag{3}$$

también es un vector.

1.1 Producto escalar

Es conveniente definir el concepto de producto escalar. Un producto escalar $g(,)$ es una función *bilineal* simétrica que, dado dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ arbitrarios, nos entrega de regreso un escalar (un número perteneciente a $\mathbb{R}$). Es decir

$$g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = g(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Que $g(,)$ sea una función bilineal, significa que

$$g(a\mathbf{u}, b\mathbf{v}) = ab\, g(\mathbf{u}, \mathbf{v}). \tag{5}$$

En ocasiones, para que g sea considerado un producto escalar respetable, se requiere la propiedad adicional de que si sus dos argumentos consisten en el mismo vector $\mathbf{v} \neq 0$, entonces el resultado debe ser estrictamente positivo:

$$g(\mathbf{v}, \mathbf{v}) > 0. \tag{6}$$

Una forma de darle sentido al producto escalar es conociendo cómo actúa sobre una base dada $\{\hat{x}_i\}$. Es decir, podemos escribir:

$$g(\hat{x}_i, \hat{x}_j) = g_{ij}. \tag{7}$$

Los coeficientes g_{ij} contienen toda la información necesaria para saber como está definido un producto escalar dada una base. A los símbolos g_{ij} colectivamente se le conocen como las componentes de la métrica. Si pensamos en la métrica como una matriz, entonces g_{ij} son los elementos de una matriz donde i y j indican filas y columnas respectivamente. Noten que si conocemos la forma exacta de la métrica, entonces podemos calcular cualquier producto escalar. Basta proceder de las siguiente forma:

$$g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = g(u^i \hat{x}_i, v^j \hat{x}_j) = u^i v^j g(\hat{x}_i, \hat{x}_j) = g_{ij} u^i v^j. \tag{8}$$

Noten que en la segunda igualdad usamos la propiedad expresada por la ecuación (5). En términos de componentes, la ecuación (6) se lee

$$g_{ij} v^i v^j > 0, \tag{9}$$

lo que significa que la métrica g_{ij} es positiva definida. Esto asegura que g_{ij} tenga inversa. A dicha inversa la denominamos g^{ij} y es tal que:

$$g^{ik} g_{kj} = \delta^i_j, \qquad g_{ik} g^{kj} = \delta^j_i, \tag{10}$$

Donde δ^j_i es la afamada delta de Kronecker, que viene definida por:

$$\delta^j_i = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq 0 \end{cases}. \tag{11}$$

Para simplificar el escribir un producto escalar, dadas las componentes v^i de vector $\mathbf{v}$, podemos definir componentes v_i con índices abajo mediante el uso de la métrica:

$$v_i \equiv g_{ij} v^j. \tag{12}$$

Esta notación es conveniente, ya que nos podemos ahorrar la aparición explícita de la métrica, y simplemente escribir el producto escalar entre dos vectores como:

$$g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u_i v^i = u^i v_i. \tag{13}$$

Observen que estamos usando la métrica g_{ij} para hacer descender el índice de v^i. Dado que g^{ij} es la inversa de g_{ij}, y por lo tanto satisface la expresión (10), entonces podemos usar g^{ij} para subir índices. Es decir:

$$v^i = g^{ij} v_j. \tag{14}$$

Esta notación también es útil para subir los índices a las bases:

$$\hat{x}^i \equiv g^{ij} \hat{x}_j. \tag{15}$$

De este modo un vector puede ser expresado en forma equivalente como $\mathbf{v} = v^i \hat{x}_i = v_i \hat{x}^i$.

1.2 Cambios de base y transformaciones lineales

Supongamos que contamos con una base arbitraria $\{\hat{x}_i\}$. Si lo deseamos podemos definir una nueva base $\{\hat{x}_{i'}\}$ mediante una transformación lineal L de la siguiente forma:

$$\hat{x}_{i'} = \hat{x}_j L^j{}_{i'}. \tag{16}$$

Los coeficientes $L^j{}_{i'}$ caracterizan la nueva base $\{\hat{x}_{i'}\}$ en términos de la base original $\{\hat{x}_i\}$. Para que la base $\{\hat{x}_{i'}\}$ sea completa y linealmente independiente, es necesario que los coeficientes $L^j{}_{i'}$ sean elementos de una matriz invertible (donde j e i' corresponden a filas y columnas respectivamente). Por lo tanto es posible escribir una ecuación análoga a (16) pero expresando la relación inversa:

$$\hat{x}_i = \hat{x}_{j'} L^{j'}{}_i. \tag{17}$$

Noten que si insertamos (17) de vuelta en (16) obtenemos:

$$\hat{x}_{i'} = \hat{x}_j L^j{}_{i'} = \hat{x}_{k'} L^{k'}{}_j L^j{}_{i'}. \tag{18}$$

Para que dicha relación sea consistente, las componentes $L^j{}_{i'}$ contraídas con $L^{k'}{}_j$ necesariamente deben cumplir:

$$L^{k'}{}_j L^j{}_{i'} = \delta^{k'}{}_{i'}. \tag{19}$$

En forma análoga, si hubiésemos insertado (16) en (17) habríamos obtenido

$$L^k{}_{j'} L^{j'}{}_i = \delta^k{}_i. \tag{20}$$

Observen que si interpretaramos estas relaciones en términos de la multiplicación de matrices, serían equivalentes a $L^{-1}L = LL^{-1} = I$.

Veamos ahora como luce un vector $\mathbf{v} = v^i \hat{x}_i$ cuando es expresado con respecto a la nueva base $\{\hat{x}_{i'}\}$. Insertando la expresión (17) en $\mathbf{v} = v^i \hat{x}_i$ obtenemos:

$$\mathbf{v} = v^i \hat{x}_i = v^i (\hat{x}_{j'} L^{j'}{}_i) = L^{j'}{}_i v^i \hat{x}_{j'}. \tag{21}$$

Es importante notar que hemos cambiado la base, pero no el vector. El vector sigue siendo el mismo, pero expresado en una nueva base. Esto quiere decir que en la nueva base el vector tiene componentes distintas, pero que pueden ser relacionadas con las componentes que el vector tenía en la base original. Es decir, en la nueva base $\{\hat{x}_{i'}\}$ podemos escribir:

$$\mathbf{v} = v^{i'} x_{i'}, \tag{22}$$

donde $v^{i'}$ son las componentes del mismo vector original pero en la nueva base. Comparando con (21), vemos que las componentes $v^{i'}$ pueden ser expresadas en términos de las antiguas en la forma siguiente:

$$v^{i'} = L^{i'}{}_j v^i. \tag{23}$$

Más aun, podemos contraer la expresión (23) con los elementos $L^{i}{}_{j'}$ que corresponden a la inversa de $L^{i'}{}_{j}$. En dicho caso obtenemos:

$$v^{i} = L^{i}{}_{j'} v^{j'}. \tag{24}$$

Noten que la diferencia entre $L^{i'}{}_{j}$ y $L^{i}{}_{j'}$ está en la posición de las primas (arriba a la izquierda o abajo a la derecha). Esta notación *democrática* enfatiza que ambas expresiones (23) y (24) son equivalentes, y no favorece una base sobre la otra.

1.3 Bases ortonormales

Dado que g_{ij} es positiva definida, entonces siempre podemos encontrar una base para la cual g_{ij} es igual a la unidad. Para ver esto en forma explícita, consideremos una base $\{\hat{x}_i\}$ arbitraria sobre la cual actúa una transformación lineal L apropiada. El producto escalar entre elementos de la nueva base es:

$$g_{i'j'} = g(x_{i'}, x_{j'}) = g(x_i L^{i}{}_{i'}, x_j L^{j}{}_{j'}) = g_{ij} L^{i}{}_{i'} L^{j}{}_{j'} = g_{ij} L^{i}{}_{i'} L^{j}{}_{j'}. \tag{25}$$

Luego, si escogemos los coeficientes $L^{i}{}_{j'}$ en forma apropiada, podemos imponer que la nueva base cumpla

$$g_{i'j'} = \delta_{i'j'}, \tag{26}$$

donde $\delta_{i'j'}$ es la delta de Kronecker pero con sus dos índices abajo. Dicha base tiene la propiedad de ser ortonormal, dado que el producto escalar entre sus elementos cumple:

$$g(\hat{x}_{i'}, \hat{x}_{j'}) = \delta_{i'j'} = \begin{cases} 1 \text{ si } i' = j' \\ 0 \text{ si } i' \neq j' \end{cases}. \tag{27}$$

También resulta inmediato que en dicha base la inversa es simplemente $g^{i'j'} = \delta^{i'j'}$, es decir la delta de Kronecker pero con índices arriba. En este curso trabajaremos con bases ortonormales, por lo que muchas de las expresiones formales son realmente sencillas. Por ejemplo, la relación entre componentes con índices arriba y abajo es simplemente

$$v^{i} = \delta^{ij} v_j = v_i. \tag{28}$$

Un ejemplo cotidiano de bases ortonormales 3-dimensionales son las bases empleadas para expresar vectores en coordenadas Cartesianas.

1.4 Rotaciones

Supongamos que la base original es ortonormal (tal como nos gusta), y por lo tanto se cumple que $g(\hat{x}_i, \hat{x}_j) = \delta_{ij}$. Luego, un cambio de base representado por la transformación

$L^i{}_{j'}$ da como resultado:

$$g_{i'j'} = g(x_{i'}, x_{j'}) = g(x_i L^i{}_{i'}, x_j L^j{}_{j'}) = g_{ij} L^i{}_{i'} L^j{}_{j'} = \delta_{ij} L^i{}_{i'} L^j{}_{j'}. \tag{29}$$

Esto quiere decir que un cambio de base con $L^i{}_{j'}$ arbitrario no necesariamente nos entregará de vuelta $g_{i'j'} = \delta_{i'j'}$. Sólo una clase especial de transformaciones logra que la nueva base sea ortogonal (es decir, que en la nueva base se siga cumpliendo $g_{i'j'} = \delta_{i'j'}$). A dichas transformaciones se les llama rotaciones, y designaremos a sus elementos de la siguiente forma: $R^i{}_{j'}$. La condición de que las bases permanezcan ortonormales bajo este tipo de transformaciones es equivalente a exigir que $g_{i'j'} = \delta_{i'j'}$. En otras palabras:

$$\delta_{ij} R^i{}_{i'} R^j{}_{j'} = \delta_{i'j'}. \tag{30}$$

Por supuesto, una relación análoga debe cumplirse para los coeficientes $R^{i'}{}_j$ de la rotación inversa:

$$\delta_{i'j'} R^{i'}{}_i R^{j'}{}_j = \delta_{ij}. \tag{31}$$

Notemos que si contraemos (30) con $v^{i'}$ y $v^{j'}$ obtenemos:

$$\delta_{ij} R^i{}_{i'} R^j{}_{j'} v^{i'} v^{j'} = \delta_{i'j'} v^{i'} v^{j'}. \tag{32}$$

Pero dado que $v^i = R^i{}_{i'} v^{i'}$ entonces podemos escribir:

$$v^i v_i = v^{i'} v_{i'}, \tag{33}$$

donde $u_i = \delta_{ij} u^j = u^i$ y $v_{i'} = \delta_{i'j'} v^{j'} = vi'$. En forma explícita, la ecuación (33) corresponde a:

$$(v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2 = (v^{1'})^2 + (v^{2'})^2 + (v^{3'})^2. \tag{34}$$

Lo que nos dice que el módulo de un vector no cambia bajo rotaciones.

Las ecuación (30) permite encontrar una relación lineal entre una rotación dada y su inversa: En efecto, contrayendo en forma apropiada (30) una vez con las componentes inversas $R^{i'}{}_j$ podemos derivar el siguiente resultado:

$$R^{i'}{}_j = \delta_{jk} R^k{}_{l'} \delta^{l'i'}. \tag{35}$$

En forma explícita, esta relación se lee de la siguiente forma:

$$R^{1'}{}_1 = R^1{}_{1'} \quad R^{1'}{}_2 = R^2{}_{1'} \quad R^{1'}{}_3 = R^3{}_{1'} \tag{36}$$
$$R^{2'}{}_1 = R^1{}_{2'} \quad R^{2'}{}_2 = R^2{}_{2'} \quad R^{2'}{}_3 = R^3{}_{2'} \tag{37}$$
$$R^{3'}{}_1 = R^1{}_{3'} \quad R^{3'}{}_2 = R^2{}_{3'} \quad R^{3'}{}_3 = R^3{}_{3'}. \tag{38}$$

Una forma de interpretar esta relación es poniendo atención a la posición de los índices en términos de filas y columnas. Para ser concretos, supongamos como ejemplo una rotación R cuyos elementos $R^i{}_{m'}$ vienen dados por:

$$R^i{}_{m'} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{39}$$

Entonces, la inversa R^{-1} tendrá elementos $R^{m'}{}_i$ dados por

$$R^{1'}{}_1 = R^1{}_{1'} = \cos\theta, \tag{40}$$
$$R^{1'}{}_2 = R^2{}_{1'} = \sin\theta, \tag{41}$$
$$R^{2'}{}_1 = R^1{}_{2'} = -\sin\theta, \tag{42}$$
$$R^{2'}{}_2 = R^2{}_{2'} = \cos\theta, \tag{43}$$

que si ordenamos en filas y columnas viene a ser

$$R^{m'}{}_i = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{44}$$

En lenguaje matricial, esto quiere decir que R^{-1} corresponde a la traspuesta de R:

$$R^{-1} = R^t. \tag{45}$$

Veamos además cómo actúa sobre las componentes v^i de un vector $\{\mathbf{v}\}$. De acuerdo a la expresión (23) con $L = R$, se tiene

$$v^i = R^i{}_{j'} v^{j'}. \tag{46}$$

De donde tenemos que:

$$v^{1'} = R^{1'}{}_j v^j = R^{1'}{}_1 v^1 + R^{1'}{}_2 v^2 = \cos\theta v^1 + \sin\theta v^2, \tag{47}$$
$$v^{2'} = R^{2'}{}_j v^j = R^{2'}{}_1 v^1 + R^{2'}{}_2 v^2 = -\sin\theta v^1 + \cos\theta v^2, \tag{48}$$
$$v^{3'} = R^{3'}{}_j v^j = R^{3'}{}_3 v^3 = v^3. \tag{49}$$

Revisemos también como transforman las componentes v_i con índices abajo:

$$v_{1'} = R^j{}_{1'} v_j = R^1{}_{1'} v_1 + R^2{}_{1'} v_2 = \cos\theta v_1 + \sin\theta v_2, \tag{50}$$
$$v_{2'} = R^j{}_{2'} v_j = R^1{}_{2'} v_1 + R^2{}_{2'} v_2 = -\sin\theta v_1 + \cos\theta v_2, \tag{51}$$
$$v_{3'} = R^j{}_{3'} v_j = R^3{}_{3'} v_3 = v^3. \tag{52}$$

Y por lo tanto vemos que en efecto se cumple que:

$$v_{i'} = \delta_{i'j'} v^{j'}. \tag{53}$$

1.5 Coordenadas Cartesianas

Consideremos un sistema de coordenadas Cartesianas $\{x, y, z\}$. Para simplificar la discusión, usaremos la notación $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$. Resulta natural definir una base vectorial en la cual los vectores unitarios $\{\hat{x}^i\}$ apuntan en la direcciones asociadas a las coordenadas $\{x^i\}$. La Figura 1 muestra esta situación. Esto quiere decir que un cambio

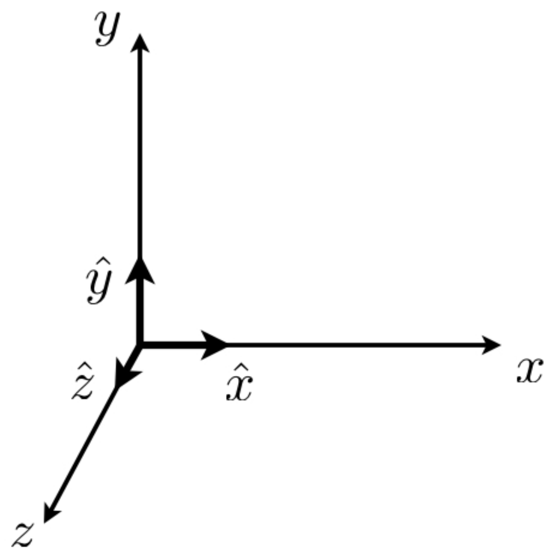

Figure 1: Los vectores unitarios $\{\hat{x}^i\}$ están orientados en las direcciones asociadas a las coordenadas $\{x^i\}$.

de coordenadas consistente en una rotación necesariamente afectará la orientación de los vectores unitarios. Veamos esto en algún detalle: Supongamos un punto P en el espacio 3D que tiene por coordenadas los valores x^i_P. Podemos asignar a este punto un vector $\mathbf{x}_P$ que va desde el origen del sistema hasta el punto P. Dicho vector será:

$$\mathbf{x}_P = x^i_P \hat{x}_i. \tag{54}$$

Al haber una rotación del sistema de coordenadas, cambiarán la orientación de las bases $\hat{x}_i$, y los valores de las componentes x^i_P pero no cambiará la ubicación del punto P. Es decir, el punto P seguirá en la misma posición independiente de las coordenadas que escojamos para describirlo. Ahora, como ya hemos visto, una rotación afectará a las bases de acuerdo a la relación:

$$\hat{x}_{j'} = \hat{x}_i R^i{}_{j'}, \tag{55}$$

mientras que la relación inversa será:

$$\hat{x}_i = \hat{x}_{j'} R^{j'}{}_i. \tag{56}$$

Reemplazando esta última relación en la ecuación (54) obtenemos:

$$\mathbf{x}_P = x^i_P \hat{x}_{j'} R^{j'}{}_i = (R^{j'}{}_i x^i_P)\hat{x}_{j'}. \tag{57}$$

Podemos identificar la expresión en paréntesis como las componentes de $\vec{x}_P$ en el nuevo sistema de coordenadas, de modo que podemos escribir:

$$\mathbf{x}_P = x^{i'}_P \hat{x}_{i'}, \qquad \text{donde} \qquad x^{i'}_P = R^{i'}{}_j x^j_P. \tag{58}$$

En otras palabras, bajo una rotación de las coordenadas, las bases $\hat{x}_i$ transforman con la ayuda de los coeficientes $R^i{}_{j'}$, mientras que las componentes x^i transforman con la ayuda de los coeficientes $R^{i'}{}_j$ pertenecientes a la rotación inversa. Para apreciar esto veamos un ejemplo concreto. Consideremos la rotación del ejemplo (39). Entonces, las nuevas bases $\hat{x}_{i'}$ estarán dadas por:

$$\hat{x}' = \hat{x}\cos\theta + \hat{y}\sin\theta, \qquad \hat{y}' = -\hat{x}\sin\theta + \hat{y}\cos\theta, \qquad \hat{z}' = \hat{z}, \tag{59}$$

mientras que las nuevas coordenadas $x^{i'}_P$ del punto P estarán dadas por:

$$x'_P = \cos\theta x_P + \sin\theta y_P, \qquad y'_P = -\sin\theta x_P + \cos\theta y_P, \qquad z'_P = z_P. \tag{60}$$

La Figura 2 muestra este ejemplo particular. En el ejemplo, el punto P no ha cambiado de ubicación. En su lugar, ha cambiado la forma de describir su ubicación con respecto al punto de vista representado por la elección de coordenadas empleada.

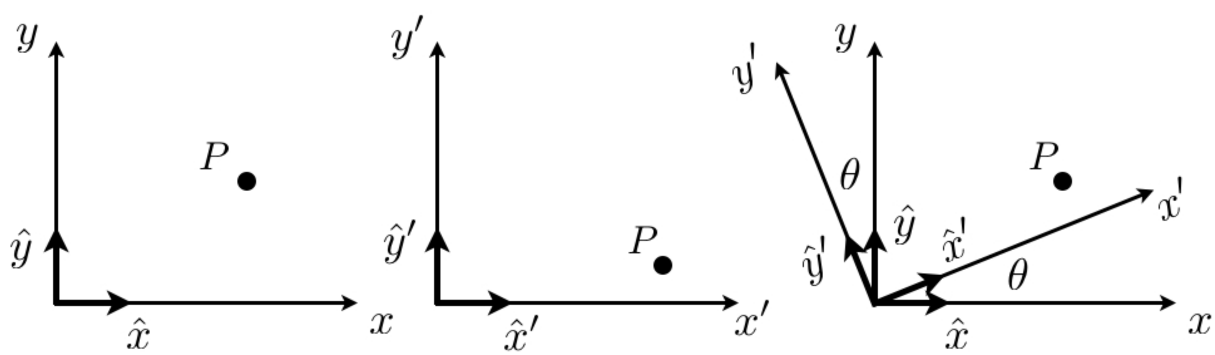

Figure 2: Ejemplo de una rotación sobre las coordenadas cartesianas.

1.6 Derivadas parciales

Recordemos que muchas veces deseamos hablar de todos los puntos del espacio a la vez (en lugar de un punto P en particular). En tal caso, no necesitamos especificar la etiqueta

P en la coordenada y simplemente escribimos

$$\mathbf{x} = x^i \hat{x}_i. \tag{61}$$

De esta forma, una cambio de coordenadas correspondientes a una rotación implica las siguientes relaciones invertibles entre los sistemas de coordenadas x^i y $x^{i'}$:

$$x^{i'} = R^{i'}{}_j x^j, \qquad x^i = R^i{}_{j'} x^{j'}. \tag{62}$$

Luego, tomando derivadas parciales de estas relaciones, podemos inferir las relaciones:

$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} = R^{i'}{}_j, \qquad \frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}} = R^i{}_{j'}. \tag{63}$$

Estas expresiones permiten relacionar derivadas parciales de dos sistemas de coordenadas rotadas. Para ello basta usar la regla de la cadena:

$$\partial_i = \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} \partial_{j'} = R^{j'}{}_i \partial_{j'}, \qquad \partial_{i'} = \frac{\partial x^j}{\partial x^{i'}} \partial_j = R^j{}_{i'} \partial_j. \tag{64}$$

Noten que las derivadas parciales ∂_i transforman de la misma forma que las bases $\hat{x}_i$.

1.7 Inversiones

Un tipo de cambios de coordenadas particularmente importante son las inversiones. Una inversión corresponde a invertir la orientación de un número impar de bases. En el caso particular de 3-dimensiones, esto quiere decir cambiar la dirección de una base, o de todas. La figura 3 muestra una inversión en donde se han invertido la orientación de todas las bases. Si se considera un cambio de coordenadas en donde solo se invierten un número par de bases, entonces el cambio de coordenadas es necesariamente equivalente a una rotación. El ejemplo de la figura 4 ilustra esta situación. Por dicho motivo, se dice que las bases en general pueden tener dos orientaciones posibles. Estas dos familias de orientaciones están conectadas por una inversión. En este caso, tenemos una base en tres dimensiones (una triada), en donde es relativamente fácil apreciar esta propiedad.

En este curso consideraremos un tipo particular de inversión llamada paridad. Una transformación de paridad $L = P$ es simplemente una inversión donde los tres ejes son invertidos. Es decir, corresponde al caso en que:

$$P^{i'}{}_j = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{65}$$

Esto quiere decir que bajo esta transformación las bases transforman de acuerdo a:

$$\hat{x}_i \to \hat{x}_{i'} = -\delta^i_{i'} \hat{x}_i. \tag{66}$$

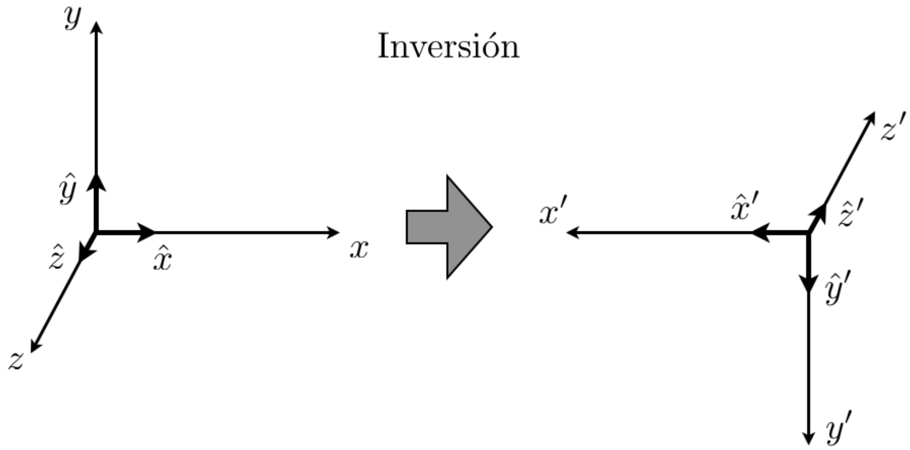

Figure 3: Ejemplo de una inversión. Se requiere un número impar de bases invertidas.

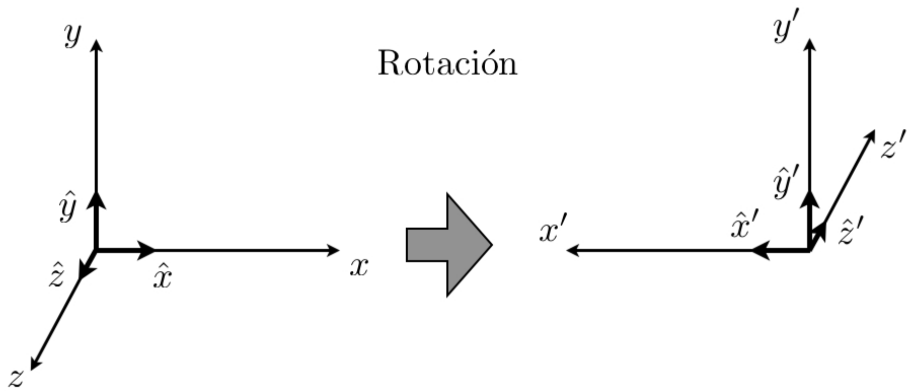

Figure 4: Si el número de bases invertidas es par, entonces es equivalente a una rotación.

En esta expresión hemos insistido en usar el símbolo $\delta^i_{i'}$ para no mezclar índices con primas ($'$) a un lado con índices sin primas al otro lado. La inversa de dicha transformación es trivial, y puede ser expresada como:

$$P^i{}_{j'} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{67}$$

Si consideramos que un vector $\mathbf{v}$ no cambia aun cuando hayamos cambiado las coordenadas, entonces las coordenadas del vector necesariamente cambian bajo paridad:

$$v^{i'} = P^{i'}{}_j v^j = -\delta^{i'}_j v^j. \tag{68}$$

Es decir, al considerar una transformación de paridad, las componentes del vector cambian su signo. La Figura 5 ilustra esta situación en forma explícita. Para finalizar, notemos

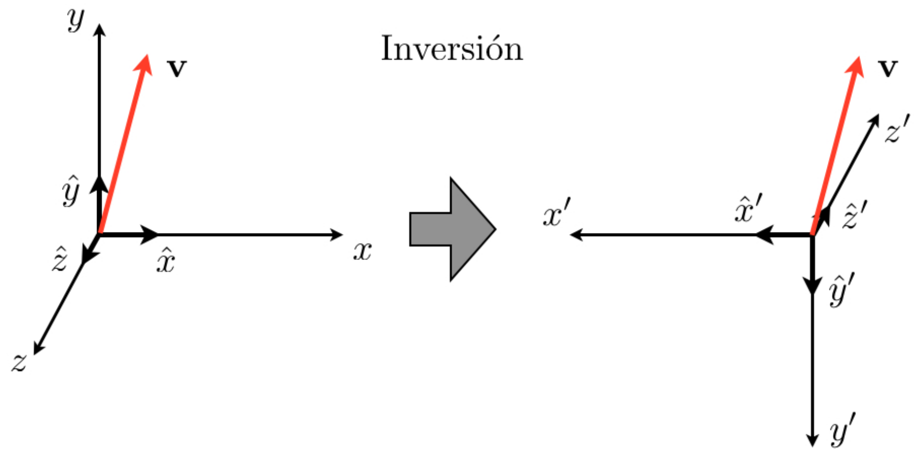

Figure 5: Bajo una transformación de paridad el vector no cambia, pero sí sus componentes (que son relativas al sistema de referencia).

que al igual que una rotación, una inversión también satisface la relación:

$$\delta_{ij} P^i{}_{i'} P^j{}_{j'} = \delta_{i'j'}, \tag{69}$$

o en notación matricial:

$$P^t P = P P^t = 1. \tag{70}$$

Tanto las rotaciones como las inversiones son transformaciones ortogonales (es decir, que no cambian la ortonormalidad de las bases). Una transformación ortogonal L arbitraria siempre puede ser escrita de la forma

$$L = RP. \tag{71}$$

Es decir, una inversión seguida de una rotación. Obviamente también se puede escribir como una rotación seguida de una rotación. De hecho, como veremos en más detalle en la Sección 1.11, el determinante de toda transformación ortogonal satisface

$$\det L = \pm 1. \tag{72}$$

De modo que si L es una rotación pura, entonces $\det L = +1$, pero si contiene una inversión, entonces $\det L = -1$.

1.8 3-Tensores

Ahora que entendemos como lidiar con vectores y la rotación de sistemas de coordenadas, estamos en posición de definir objetos más generales. Un 3-tensor $\mathbf{T}$ de rango N es un objeto lineal que puede ser escrito de la siguiente forma

$$\mathbf{T} = T^{ij\cdots k} \underbrace{\hat{x}_i \otimes \hat{x}_j \otimes \cdots \otimes \hat{x}_k}_{N \text{ times}}, \tag{73}$$

donde los coefficients $T^{ij\cdots k}$ se llaman las components del tensor $\mathbf{T}$. En la expresión anterior, $\hat{x}_i \otimes \hat{x}_j \otimes \cdots \otimes \hat{x}_k$ corresponde a un producto directo de las bases individuales $\hat{x}_i$, y por lo tanto constituyen también una base para expresar tensores. Es decir, consideramos que $x^i \otimes \hat{x}^j$ es differente a $x^j \otimes \hat{x}^i$ cuando $i \neq j$. Un tensor de rango 2 conocido es el tensor de stress F_{ij} en mecánica, que nos da información sobre la intensidad de la fuerza interna F_i actuando sobre una superficie infinitesimal dS_j, en algún elemento de volumen dado. Otro tensor ejemplar es el tensor de inercia.

Los tensors constituyen una generalización natural del concepto de vector. Si consideramos una transformación de las coordenadas (un cambia en nuestro punt de vista), al reorientar las bases $\hat{x}_i$, el tensor $\mathbf{T}$ seguirá siendo el mismo, pero sus componentes $T^{ij\cdots k}$ relativas a la base $\hat{x}_i \otimes \hat{x}_j \otimes \cdots \otimes \hat{x}_k$ necesariamente cambiaran. Es directo constatar (compruébelo usted mismo) que si hay un cambio de coordenadas del tipo:

$$\hat{x}_{i'} = \hat{x}_i L^{i'}{}_i, \tag{74}$$

entonces las componentes transformarán de acuerdo a la siguiente regla

$$T^{i'j'\cdots k'} = L^{i'}{}_i L^{j'}{}_j \cdots L^{k'}{}_k T^{ij\cdots k}. \tag{75}$$

En el caso particular de las rotaciones, simplemente consideramos $L = R$ y obtenemos:

$$T^{i'j'\cdots k'} = R^{i'}{}_i R^{j'}{}_j \cdots R^{k'}{}_k T^{ij\cdots k}.. \tag{76}$$

Si el tensor es de rango 2, con componentes T_{ij} tenemos:

$$T_{i'j'} = R_{i'}{}^i R_{j'}{}^j T_{ij} = R_{i'}{}^i T_{ij} R^j{}_{j'}, \tag{77}$$

que, en notación matricial, puede ser interpretado simbólicamente de la siguiente forma:

$$T' = RTR^T. \tag{78}$$

Consideremos por un instante el caso particular en que $\mathbf{T}$ tiene por componentes a la delta de Kronecker. Es decir $T_{ij} = \delta_{ij}$. Entonces, gracias a la definición de rotaciones expresada por la ecuación (30) vemos que se cumple

$$T_{i'j'} = R_{i'}{}^i R_{j'}{}^j \delta_{ij} = \delta_{i'j'}. \tag{79}$$

En consecuencia la delta de Kronecker corresponde a un tensor invariante bajo rotaciones (*i.e.* que preserva su forma en cualquier sistema de referencia rotado). De hecho, los elementos de la delta de Kronecker son las componentes del *tensor métrico* g_{ij} en una base ortonormal, que en efecto transforma de acuerdo a la regla (75) en general, o de acuerdo a la regla (76) en el caso particular de rotaciones.

1.9 El símbolo de Levi-Civita

El símbolo de Levi-Civita viene definido de la siguiente forma:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{si } ijk \text{ es permutación par de } 123 \\ -1 & \text{si } ijk \text{ es permutación impar de } 123 \\ 0 & \text{de cualquier otro caso} \end{cases} \tag{80}$$

El símbolo de Levi-Civita presenta una propiedad interesante. Al ser completamente antisimétrico bajo el intercambio de sus índices, es un objeto muy restringido. En particular, si uno tiene una matriz de 3×3 con componentes $M^i{}_j$ (i siendo filas y j siendo columnas), entonces se puede verificar la siguiente propiedad:

$$\epsilon_{ijk} M^i{}_m M^j{}_n M^k{}_l = \det M \, \epsilon_{mnl}. \tag{81}$$

Esta propiedad es puramente algebraica y, si se quiere, constituye una definición del determinante de una matriz. Es importante que el estudiante se familiarice con esta expresión y se convenza de su validez. (Sugerencia: Para verificar que la identidad (81) es correcta, reemplaze $m = 1$, $n = 2$, y $l = 3$ y analice que tipo de términos aparecen sumados en la izquierda).

1.10 El símbolo de Levi-Civita y cambio de coordenadas

Ahora, supongamos que existe un tensor A_{ijk} que en cierto sistema de coordenadas Cartesianas tiene por componentes al símbolo de Levi-Civita. Es decir, tenemos:

$$A_{ijk} = \epsilon_{ijk}. \tag{82}$$

Si A_{ijk} es un tensor, entonces bajo un cambio de coordenadas sus nuevas componentes $A_{i'j'k'}$ estarán relacionadas con aquellas originales A_{ijk} de acuerdo a la regla

$$A_{i'j'k'} = L_{i'}{}^i L_{j'}{}^j L_{k'}{}^k A_{ijk}. \tag{83}$$

Pero dado que A_{ijk} tiene por coordenadas al símbolo de Levi-Civita, entonces tendremos que:

$$\begin{aligned} A_{i'j'k'} &= L_{i'}{}^i L_{j'}{}^j L_{k'}{}^k \epsilon_{ijk} \\ &= \det L \, \epsilon_{i'j'k'}, \end{aligned} \tag{84}$$

donde $\epsilon_{i'j'k'}$ es el mismo símbolo de Levi-Civita, pero ahora expresado en términos de los índices i', j' y k'. En el caso particular de una rotación tenemos $\det R = 1$, y por lo tanto $A_{i'j'k'}$ tiene exactamente la misma forma que tenía en el sistema de coordenadas originales. Por dicho motivo, se dice que el símbolo de Levi-Civita es un tensor invariante bajo rotaciones. Sin embargo, no es un tensor invariante bajo inversión de las coordenadas. Supongamos que L representa una transformación de paridad (recordar la discusión de la sección 1.7) en donde el cambio de coordenadas es tal que las nuevas coordenadas Cartesianas x', y', z' son relacionadas con las antiguas x, y, z de acuerdo a la transformación:

$$x \to x' = -x, \qquad y \to y' = -y, \qquad z \to z' = -z. \tag{85}$$

En dicho caso, $L = P$ tiene por componentes

$$P^{i'}{}_{j} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{86}$$

(o simplemente $P^{i'}{}_{j} = \delta^{i'}{}_{j}$) de donde se desprende que $\det P = -1$. Bajo este cambio de coordenadas uno tiene:

$$\begin{aligned} A_{i'j'k'} &= -A_{ijk}\delta^{i}{}_{i'}\delta^{j}{}_{j'}\delta^{k}{}_{k'} \\ &= -\epsilon_{ijk}\delta^{i}{}_{i'}\delta^{j}{}_{j'}\delta^{k}{}_{k'} \\ &= -\epsilon_{i'j'k'}. \end{aligned} \tag{87}$$

Es decir, A_{ijk} no preserva su forma bajo inversión de todas las coordenadas (paridad). Por dicho motivo en general no se habla de tensor de Levi-Civita, y se insiste con el término *símbolo*. El símbolo de Levi-Civita está definido en (80) independiente del sistema de coordenadas, y si un tensor genuino tiene por componentes al símbolo, entonces dicho tensor es invariante bajo rotaciones pero no bajo inversiones espaciales.

Veamos un ejemplo no trivial de su uso. Supongamos que contamos con un tensor antisimétrico A_{ij} arbitrario. Sin pérdida de generalidad, es posible escribirlo de la siguiente forma:

$$A_{ij} = \epsilon_{ijk}V^{k}. \tag{88}$$

En notación matricial, esto corresponde a:

$$A_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & V^3 & -V^2 \\ -V^3 & 0 & V^1 \\ V^2 & -V^1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{89}$$

Nos gustaría saber que tipo de objeto es V^k que, de acuerdo a la notación que estamos empleando, parece ser un vector. Pero debemos ser cuidadosos: Dado que nuestro punto de partida es aceptar que A_{ij} es un tensor, entonces estamos obligados a aceptar que bajo un cambio de bases $\hat{x}_{i'} = L^j{}_{i'} x_j$ este transforma de acuerdo a la siguiente regla:

$$A_{i'j'} = L_{i'}{}^i L_{j'}{}^j A_{ij}. \tag{90}$$

Si procedemos a insertar (89) en (90), vemos que:

$$\begin{aligned} A_{i'j'} &= L_{i'}{}^i L_{j'}{}^j \epsilon_{ijk} V^k & (91)\\ &= L_{i'}{}^i L_{j'}{}^j L_{k'}{}^k \epsilon_{ijk} L_m{}^{k'} V^m & (92)\\ &= \det L\, \epsilon_{i'j'k'} L^{k'}{}_m V^m & (93) \end{aligned}$$

Dado que $A_{i'j'}$ también es anti-simétrico, para ser coherentes con la notación (88) podemos escribir:

$$A_{i'j'} = \epsilon_{i'j'k'} V^{k'}. \tag{94}$$

Esto quiere decir que las componentes V^m transforman de acuerdo a la regla:

$$V^m \to V^{m'} = \det L\, L^{m'}{}_m V^m, \tag{95}$$

lo que impide que sea reconocido como un vector, que necesariamente transforma de acuerdo a la regla (23). Si L es una rotación, entonces $\det L = 1$ y vemos que en efecto V^m transforma como un vector. Sin embargo, si $L = P$ corresponde a una transformación de paridad, tal como en (86), entonces vemos que las componentes no cambian

$$V^m \to V^{m'} = \delta^{m'}_m V^m, \tag{96}$$

al contrario que un vector. Para no enredar las cosas, se dice que V^m son las componentes de un pseudo-vector (o un vector axial), para distinguirlo de un vector genuino. Estrictamente hablando, un pseudo-vector aparece en la definición de un tensor antisimétrico, tal como lo hemos introducido aquí, pero la práctica usual es olvidar (o desconocer) este hecho y derechamente pensar en V^m como un objeto en si mismo. De hecho, ya estamos acostumbrados a trabajar con pseudo-vectores! Dos ejemplos notables son el campo magnético B^i y el momento angular L^i:

$$B_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & B^3 & -B^2 \\ -B^3 & 0 & B^1 \\ B^2 & -B^1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad L_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & L^3 & -L^2 \\ -L^3 & 0 & L^1 \\ L^2 & -L^1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{97}$$

Es realmente importante convencerse de que el campo magnético y el momento angular son en realidad componentes de tensores y no vectores. Se sugiere que el estudiante le dedique tiempo a pensar en estas cantidades físicas y analizar que ocurre con ellas cuando hay una inversión de las coordenadas. La figura 6 ilustra el efecto de una inversión sobre las componentes de un pseudo vector (un verdadero vector seguiría siendo el mismo objeto bajo un cambio de coordenadas).

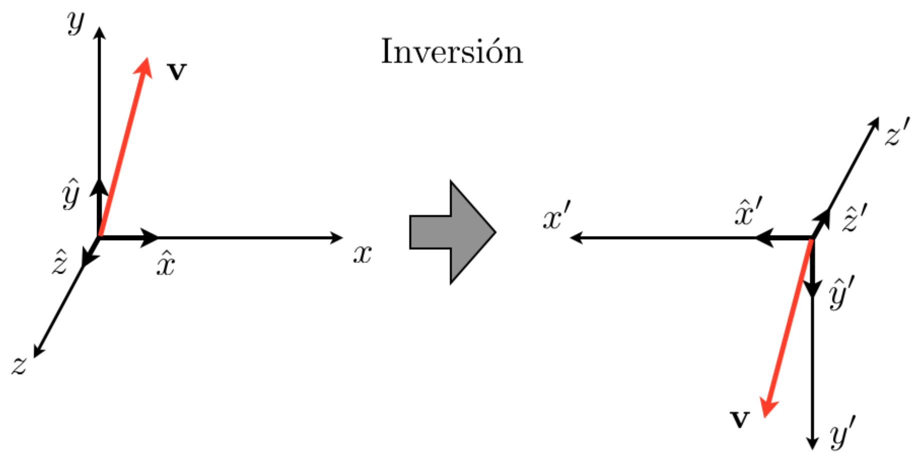

Figure 6: Bajo una transformación de paridad el pseudo vector cambia, pero no sus componentes.

1.11 Propiedades generales de las rotaciones

Una transformación ortogonal arbitraria L satisface la siguiente la siguiente propiedad definitoria:

$$L^t L = L L^t = 1. \tag{98}$$

El determinante de dicha expresión da:

$$\det(L L^t) = \det L \det L^t = (\det L)^2 = 1. \tag{99}$$

Esto quiere decir que

$$\det L = \pm 1. \tag{100}$$

Si $\det L = +1$ entonces estamos en presencia de una rotación, mientras que si $\det L = -1$ necesariamente hay una inversión forzando el signo negativo. Apreciaremos esto con más detalles dentro de un momento. Por ahora apeguémonos al signo positivo, y constatemos que

$$\det R = +1. \tag{101}$$

Para continuar, notemos que dada una rotación R, podemos plantearnos el resolver el problema de autovalores

$$R\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}, \tag{102}$$

donde $\mathbf{v}$ es un vector real. Calculando el modulo al cuadrado de ambos lados de la expresión, encontramos que:

$$\lambda^2 \vec{v}^t \vec{v} = \vec{v}^t R^t R \vec{v} = \vec{v}^t \vec{v}. \tag{103}$$

Esto implica que $\lambda = \pm 1$. Es evidente que si $\lambda = -1$ entonces estamos en presencia de una inversión, por lo que una rotación necesariamente debe cumplir $\lambda = +1$. Esto quiere decir que en general una matriz de rotación tiene por lo menos un autovalor real igual a $+1$. Los otros autovalores pueden ser imaginarios, y tendrán asociados autovectores imaginarios (aunque analizar esto aquí nos desviaría del propósito de estos apuntes). Por comodidad, consideremos autovectores normalizados a la unidad en (102) y designémoslos $\hat{\gamma}$. Es decir, tenemos:

$$R\hat{\gamma} = \hat{\gamma}. \tag{104}$$

Donde la notación $\hat{\gamma}$ enfatiza que se habla de un vector unitario. Claramente (104) nos dice que R no afecta al vector $\hat{\gamma}$. Esto significa que la rotación ocurre precisamente en torno al eje $\hat{\gamma}$. Es crucial notar que para definir la dirección $\hat{\gamma}$, en torno al cual esta rotación ocurre, se requieren solamente dos parámetros. Si se quiere, estos corresponden a los ángulos θ y ϕ, típicos de coordenadas esféricas.

Para continuar con la discusión, supongamos por un momento que hemos escogido un sistema de coordenadas Cartesianas $\hat{x}_1$, $\hat{x}_2$ y $\hat{x}_3$ de tal modo que el eje $\hat{x}_3$ de la nueva base coincide con el eje $\hat{\gamma}$ definiendo a la rotación R. En dicha base, la rotación R tendrá los siguientes componentes

$$R \to \begin{pmatrix} R^{(2)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{105}$$

donde $R^{(2)}$ es una matriz de 2×2 que solo es capaz de afectar a los vectores $\hat{x}_1$ and $\hat{x}_2$. Obviamente $R^{(2)}$ es una rotación en dos dimensiones, ya que necesariamente satisface $\det R^{(2)} = +1$ (de otro modo la matriz completa no lograría satisfacer la propiedad $\det R = +1$). Esta condición, junto con $R^{(2)} R^{(2)t} = 1$ implica que $R^{(2)}$ tiene la forma general

$$R^{(2)} \to \begin{pmatrix} \cos\gamma & -\sin\gamma \\ \sin\gamma & \cos\gamma \end{pmatrix}, \tag{106}$$

donde γ es el ángulo de rotación. En otras palabras, una rotación general depende de 3 parámetros: Los dos ángulos θ y ϕ que definen la dirección del vector unitario $\hat{\gamma}$ en torno al cual ocurre la rotación, y el ángulo γ determinando cuanta rotación hay en torno a $\hat{\gamma}$. Es conveniente recolectar los tres parámetros en un sólo vector $\vec{\gamma}$ de la forma:

$$\vec{\gamma} = \gamma\hat{\gamma}. \tag{107}$$

De modo sue $R(\vec{\gamma})$ representa una rotación γ en torno a $\hat{\gamma}$. Notemos que el rango de parámetros necesario para definir una rotación arbitraria viene dado por:

$$\phi \in [0, 2\pi)\,, \quad \theta \in [0, \pi]\,, \quad \gamma \in [0, \pi]\,. \tag{108}$$

El echo de sue γ vaya desde 0 a π y no desde 0 a 2π se desprende del hecho que una rotación en torno $\hat{\gamma}$ por un ángulo $\gamma \in [\pi, 2\pi]$ es lo mismo que una rotación en torno a $-\hat{\gamma}$

en un ángulo $\gamma - \pi$, que pertenece al rango $[0, \pi]$. Existe precisamente una sola rotación por cada valor de los parámetros θ, ϕ y γ dentro de este rango. El conjunto de todas las rotaciones se llama $SO(3)$, que es una forma sofisticada de decir el conjunto de matrices ortonormales de dimensión 3. Este conjunto tiene una estructura de grupo, que significa que: **(a)** existe un elemento unidad, que en este caso es la identidad $R_e = I$. **(b)** la multiplicación de dos rotaciones arbitrarias entregan una nueva rotación. **(c)** por cada rotación existe una única rotación inversa.

Verifiquemos rápidamente que la propiedad **(b)** se cumple: Si $R(\vec{\alpha})$ y $R(\vec{\beta})$ son rotaciones, entonces $R(\vec{\gamma}) = R(\vec{\beta})R(\vec{\alpha})$ también es una rotación. En efecto, se puede verificar que $R(\vec{\gamma})$ satisface:

$$\begin{aligned} R(\vec{\gamma})R^T(\vec{\gamma}) &= R(\vec{\beta})R(\vec{\alpha})\left[R(\vec{\beta})R(\vec{\alpha})\right]^T \\ &= R(\vec{\beta})R(\vec{\alpha})R^T(\vec{\alpha})R^T(\vec{\beta}) \\ &= 1, \end{aligned} \tag{109}$$

y por lo tanto $R(\vec{\gamma})$ es una rotación. Sin embargo, en general dos rotaciones no conmutan, lo que quiere decir que $R(\vec{\beta})R(\vec{\alpha}) \neq R(\vec{\alpha})R(\vec{\beta})$. Con un poco de trabajo, siempre es posible determinar $\vec{\gamma}$ a partir de $\vec{\alpha}$ y $\vec{\beta}$.

1.12 La topología de $SO(3)$ (Tópico avanzado)

Ahora que tenemos una forma de parametrizar una rotación arbitraria, podemos estudiar la *topología* del espacio de parámetros determinando las posibles rotaciones. Notemos que los ángulos ϕ y θ son los ángulos usuales de las coordenadas esféricas, por lo que son fáciles de visualizar. Consideremos una esfera sólida de radio π. Dicha esfera contiene todos los posibles valores de los parámetros θ, ϕ y γ, donde γ corresponde a la distancia desde el origen de la esfera hasta el punto descrito por el vector $\vec{\gamma}$. (En otras palabras γ representa al radio del vector $\vec{\gamma}$). Cualquier punto dentro de esta esfera sólida corresponderá a una y solo una rotación. Lo interesante sobre esta esfera es que su superficie ($\gamma = \pi$) está identificada de una forma especial. Es posible apreciar que una rotación correspondiente a $\gamma = \pi$ en torno a la dirección $\hat{\gamma}$

$$\vec{\gamma} = \pi\hat{\gamma}, \tag{110}$$

es idéntica a una rotación $\gamma = \pi$ pero en torno a $-\hat{\gamma}$. Esto significa que los puntos $\pi\hat{\gamma}$ pertenecientes a la superficie de la esfera están identificados con sus respectivos puntos antipodales $-\pi\hat{\gamma}$. Si uno intenta atravesar la superficie desde el interior de la esfera hacia afuera, inevitablemente vuelva a entrar a la esfera por el lado contrario. En realidad la superficie no existe, y solo es nuestra forma de visualizar la esfera. En este espacio no hay un espacio exterior a la esfera, y solo existen los puntos que conforman la esfera, sin que haya una frontera. A este espacio geométrico se le conoce como $SO(3)$, ya que es equivalente al conjunto completo de las rotaciones en 3-dimensiones.

La discusión anterior revela que la esfera tiene una topología no trivial. Veamos esto en más detalle: Consideremos una curva cerrada cualquiera en este espacio de parámetros. Es posible constatar que en general existen dos clases de curvas cerradas. Aquellas que, por medio de una deformación continua, pueden ser reducidas (contraídas) a un punto, y aquellas que simplemente no pueden ser contraídas. Una forma de identificar a qué clase pertenece una curva cerrada arbitraria, es contando el número de veces que dicha curva cruza la superficie $\gamma = \pi$. Si la curva cruza dicha superficie un número par de veces, entonces puede ser contraída a un punto, pero si cruza dicha superficie un número impar de veces, entonces no puede ser contraída. La figura 1.12 muestra ambas clases de curvas. La topología del espacio de parámetros del grupo de rotations se dice *doblemente conexo*.

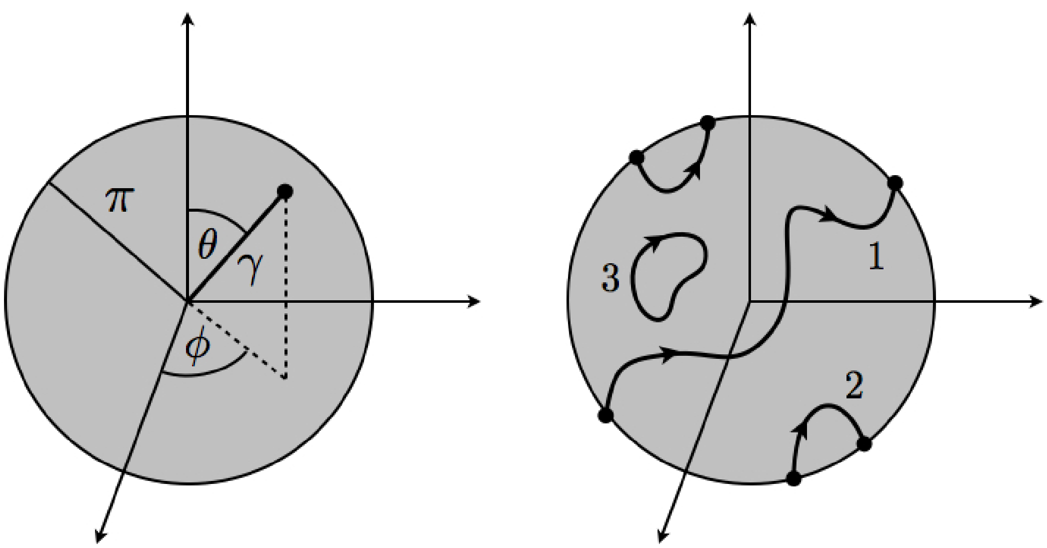

Figure 7: La figura muestra el espacio de parámetros del las rotaciones. Puntos opuestos en la superficie de radio $\gamma = \pi$ son identificados. La figura de la derecha muestra tres ejemplos de curvas cerradas en este espacio. La curva 1 cruza la superficie $\gamma = \pi$ solo una vez, por lo que no puede ser deformada en forma continua hasta contraerla a un solo punto. Por otra parte, las curvas 2 y 3 pueden ser reducidas a un punto.

Esta topología tiene algunas consecuencias fascinantes para la física! Para apreciar esto, consideremos una rotación del sistema de coordenadas hecha en forma continua, en torno al eje $\hat{\gamma} = \hat{\zeta}$, a partir de un estado no rotado $\gamma = 0$. A medida que consideramos valores $\gamma \neq 0$ la posición $\mathbf{x}_P$ de cualquier punto P en el espacio no cambia, pero sí el valor de las coordinadas x^i_P. Cada etapa de esta rotación puede ser representada por un punto en la esfera sólida. Más aun, la sucesión completa de rotaciones es representada por una curva en el interior de la esfera sólida (ver Figura 1.12). De este modo, una vez que se ha completado una vuelta $\gamma = 2\pi$, se ha logrado una curva cerrada en la esfera sólida. Obviamente, una vez que se ha alcanzado $\gamma = 2\pi$, las coordenadas x_P^i caracterizando la

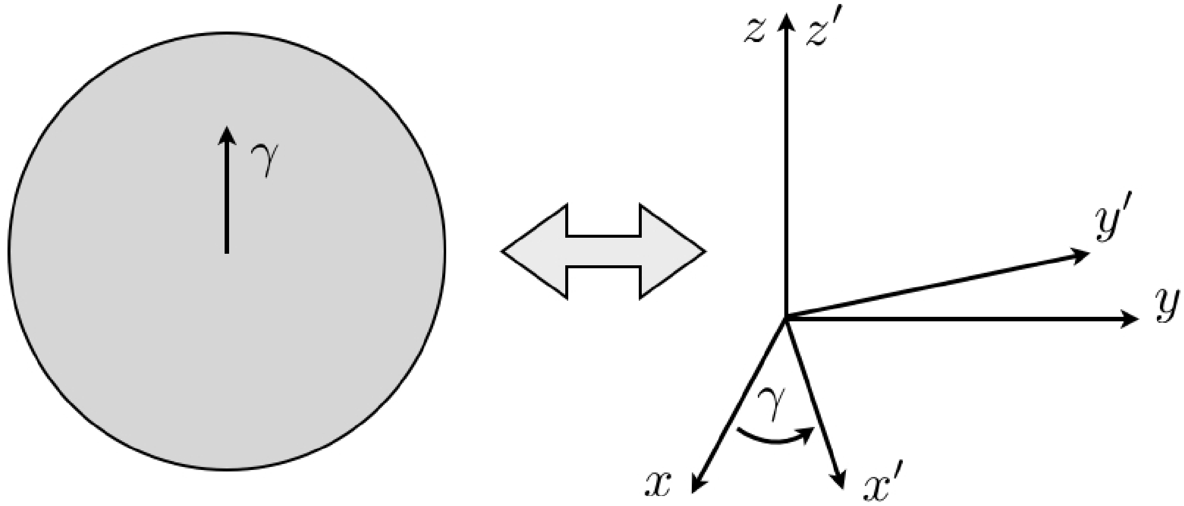

Figure 8: Podemos trazar la historia de una rotación mediante una sucesión continua de rotaciones que corresponde a una trayectoria en el interior de la esfera sólida.

ubicación de cualquier punto P en el espacio 3-D coinciden con aquellas que se tenían al principio $\gamma = 0$. Sin embargo, la curva descrita en el interior de la esfera corresponde a una curva cerrada que cruza la superficie $\gamma = \pi$ una sola vez, y por lo tanto no puede ser reducida en forma continua a una situación en la cual no haya habido rotación alguna! La única forma en que se puede volver a una situación equivalente a que no haya habido una rotación es mediante una rotación adicional en 2π. De esta forma volvemos a cruzar la superficie $\gamma = \pi$ y generamos una curva cerrada que en total cruza la superficie en dos oportunidades. Es decir, se requirió de una vuelta en 4π para que el sistema de coordenadas realmente regrese a su configuración original (en el sentido descrito por el uso de la esfera).

Por supuesto, no podríamos aseverar esto si no hubiésemos seguido la historia de la rotación, ya que al término de la rotación en 2π, las coordenadas $x^{i'}$ coinciden con las originales x^i. Sin embargo, es posible concebir que existan objetos físicos que, al cabo de dicha rotación en 2π, sí registren esta diferencia en su configuración (tal como queda de manifiesto con la esfera sólida). Un ejemplo de esto lo constituyen los espinores, que discutimos a continuación.

1.13 Espinores (Tópico avanzado)

A continuación introducimos el concepto de espinor. Comencemos por definir las siguientes matrices:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{111}$$

Estas matrices son colectivamente conocidas como las matrices de Pauli. Observen que, junto con la unidad, estas matrices constituyen una base completa de matrices hermíticas de 2×2. Es decir, cualquier matriz hermítica de 2×2 puede ser escrita como una combinación lineal de estas matrices (más la unidad). También pueden ser usadas para construir una representación alternativa de un vector. Por ejemplo, dado un vector $\mathbf{v}$ arbitrario, podemos construir una matriz $\mathbf{V}$ que le representa en el espacio de matrices de la siguiente forma:

$$\mathbf{V} = v^i \sigma_i = \begin{pmatrix} +v^3 & v^1 - iv^2 \\ v^1 + iv^2 & -v^3 \end{pmatrix}. \tag{112}$$

Para ver que en efecto (112) ofrece una forma alternativa para representar 3-vectores, consideremos una rotación especificada por el vector $\vec{\gamma} = \gamma\hat{\gamma}$. A partir de este vector podemos construir la siguiente matriz, también haciendo uso de las matrices de Pauli:

$$\Sigma(\gamma\hat{\gamma}) = e^{-i\,\gamma^i \sigma_i/2}. \tag{113}$$

Notemos que (113) contiene una exponencial que tiene por argumento la siguiente matriz:

$$-i\gamma^i \sigma_i = \begin{pmatrix} -i\gamma^3 & -i\gamma^1 - \gamma^2 \\ -i\gamma^1 + \gamma^2 & i\gamma^3 \end{pmatrix} \tag{114}$$

En general, cuando se cuenta con una expresión del tipo e^M, donde M es una matriz cuadrada, se quiere decir:

$$e^M = 1 + M + \frac{1}{2}M^2 + \frac{1}{3!}M^3 + \cdots \tag{115}$$

Es decir, corresponde a la expansión de Taylor de la exponencial con la matriz M como argumento. Afortunadamente las matrices σ_i son sencillas de manipular, y es un ejercicio relativamente sencillo verificar que (113) puede ser simplificado a (hágalo usted mismo):

$$\Sigma(\gamma\hat{\gamma}) = \cos(\gamma/2)\sigma_0 - i\sin(\gamma/2)\,\hat{\gamma}\cdot\vec{\sigma} \tag{116}$$

donde $\hat{\gamma}$ es el vector unitario:

$$\hat{\gamma} \to \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix}. \tag{117}$$

O en forma aún más explícita, podemos escribir $\Sigma(\gamma\hat{\gamma})$ en la siguiente forma:

$$\Sigma(\gamma\hat{\gamma}) = \begin{pmatrix} \cos(\gamma/2) - i\sin(\gamma/2)\cos\theta & -i\sin(\gamma/2)\sin\theta e^{-i\phi} \\ -i\sin(\gamma/2)\sin\theta e^{i\phi} & \cos(\gamma/2) + i\sin(\gamma/2)\cos\theta \end{pmatrix}. \tag{118}$$

Esta matriz puede ser usada para efectuar rotaciones sobre nuestra nueva forma (112) de representar vectores. En efecto, si definimos una rotación mediante la siguiente regla

$$\mathbf{V}' = \Sigma(\gamma\hat{\gamma})\,\mathbf{V}\,\Sigma^{\dagger}(\gamma\hat{\gamma}), \tag{119}$$

entonces es directo constatar las componentes $v^{i'}$ de $\mathbf{V}'$ están relacionadas con las componentes v^i de $\mathbf{V}$ mediante la siguiente regla

$$v^{i'} = R^{i'}{}_{i} v^{i}, \tag{120}$$

donde $R^{i'}{}_{i}$ corresponden a las componentes de la rotación $R(\vec{\gamma})$. Por lo tanto $\Sigma(\gamma\hat{\gamma})$ es una nueva forma de efectuar rotaciones en este espacio abstracto. De hecho, es directo verificar que

$$\Sigma(\gamma\hat{\gamma})\Sigma^{\dagger}(\gamma\hat{\gamma}) = \Sigma^{\dagger}(\gamma\hat{\gamma})\Sigma(\gamma\hat{\gamma}) = I, \tag{121}$$

que vendría a ser un análogo a $R^t R = R R^t = 1$.

Lo interesante de esta nueva forma de pensar en vectores y rotaciones es que, si bien $\Sigma(\theta\hat{\theta})$ induce una rotación habitual sobre las componentes v^i, satisface la siguiente propiedad curiosa:

$$\Sigma((\gamma + 2\pi)\hat{\gamma}) = -\Sigma(\gamma\hat{\gamma}), \tag{122}$$

de donde vemos que, para Σ una rotación en 2π no corresponde a la unidad. Por el contrario, se puede ver que una rotación en 2π es igual a

$$\Sigma(2\pi\hat{\gamma}) = -I. \tag{123}$$

La razón por la cual el signo negativo no es transferido a v^i es que una rotación en este nuevo lenguaje requiere que usemos Σ dos veces en (119). Sin embargo el espacio lineal sobre el cual las matrices $\Sigma(\gamma\hat{\gamma})$ actúan sí siente este cambio de signo. Para ser más precisos, podemos definir el concepto de espinor, como aquellos objetos que habitan el espacio vectorial complejo de dimensión 2 sobre el cual las matrices $\Sigma(\gamma\hat{\gamma})$ actúan. Un espinor ξ tiene la forma:

$$\xi = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \tag{124}$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Entonces, una rotación actuando sobre un espinor ξ se lee:

$$\xi' = \Sigma(\gamma\hat{\gamma})\xi, \tag{125}$$

que, escrita en forma explícita, viene a ser:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \alpha' \\ \beta' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(\gamma/2) - i\sin(\gamma/2)\cos\theta & -i\sin(\gamma/2)\sin\theta e^{-i\phi} \\ -i\sin(\gamma/2)\sin\theta e^{i\phi} & \cos(\gamma/2) + i\sin(\gamma/2)\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (\cos(\gamma/2) - i\sin(\gamma/2)\cos\theta)\alpha - i\sin(\gamma/2)\sin\theta e^{-i\phi}\beta \\ -i\sin(\gamma/2)\sin\theta e^{i\phi}\alpha + (\cos(\gamma/2) + i\sin(\gamma/2)\cos\theta)\beta \end{pmatrix}. \qquad (126)
\end{aligned}$$

Dado que $\Sigma(2\pi\hat{\gamma}) = -I$ es posible ver que las componentes α y β de un espinor cambia de signo cuando se realiza una rotación 2π del sistema de coordenadas. Tal como se han expuesto aquí, los espinores parecen ser objetos tremendamente abstractos. Sin embargo, hoy en día sabemos de la existencia tanto campos como partículas que comparten esta estructura, y que deben ser descritos en términos de espinores. Un ejemplo conocido son los electrones, que tienen la propiedad conocida como spin-1/2. Es necesario girar el sistema de referencia dos veces ($\gamma = 4\pi$) para que en el nuevo sistema de referencia estas se *vean* iguales a como se veían en el sistema original.

1.14 $SU(2)$, cubrimiento de $SO(3)$ (Tópico avanzado)

Para completar la discusión anterior, es necesario ser un poco más preciso con respecto al espacio habitado por las matrices $\Sigma(\gamma\hat{\gamma})$. Partamos por recordar que cada punto $\gamma\hat{\gamma}$ de la esfera $SO(3)$ introducida en la Sección 1.12 corresponde a una rotación única $R(\gamma\hat{\gamma})$. Dicha esfera tiene la propiedad de que puntos antipodales $\pi\hat{\gamma}$ y $-\pi\hat{\gamma}$ sobre la superficie están identificados, de modo que $R(\pi\hat{\gamma}) = R(-\pi\hat{\gamma})$. Sin embargo, hemos visto que las transformaciones $\Sigma(\pi\hat{\gamma})$, que también son capaces de representar rotaciones, cumplen una propiedad distinta: Puntos antipodales sobre la superficie dan matrices distintas, que difieren en su signo:

$$\Sigma(\pi\hat{\gamma}) = -\Sigma(-\pi\hat{\gamma}). \qquad (127)$$

En cierto sentido, el signo que aparece en Σ al atravesar la superficie, constituye una etiqueta que nos indica si la rotación está descrita por una curva que ha atravesado la superficie $\gamma = \pi$ de la esfera un número par o impar de veces. Es decir, Σ es una transformación con información adicional a las rotaciones usuales. De hecho, es posible ver que el espacio de parámetros para las transformaciones Σ consiste en los vectores $\vec{\gamma} = \gamma\hat{\gamma}$ con parámetros θ, ϕ y γ en los rangos (comparar con el caso descrito por (108)):

$$\phi \in [0, 2\pi)\,, \quad \theta \in [0, \pi]\,, \quad \gamma \in [0, 2\pi]\,. \qquad (128)$$

Más aun, es fácil comprobar que $\gamma = 2\pi$ corresponde a un sólo punto (y no una superficie) ya que independientemente de $\hat{\gamma}$, se tiene que $\Sigma(2\pi\hat{\gamma}) = -1$. Este espacio topológico corresponde a un casquete esférico de dimensión 3 embedado en 4 dimensiones (esto es difícil de visualizar para nosotros, que estamos acostumbrados a visualizar superficies de 2 dimensiones embedadas en 3 dimensiones). Otra forma de pensar en este mismo espacio topoógico es en dos esferas sólidas con sus superficies identificadas, tal como lo muestra la figura 1.14. Luego el espacio de las transformaciones Σ tiene el doble de puntos que el espacio $SO(3)$ de las matrices ortogonales. A este nuevo espacio se le llama $SU(2)$, que es una forma sofisticada de decir el espacio de todas las matrices unitarias de 2×2 con determinante igual a 1. Es posible apreciar que $SU(2)$ es simplemente conexo, es decir, que toda curva cerrada puede ser contraída a un punto.

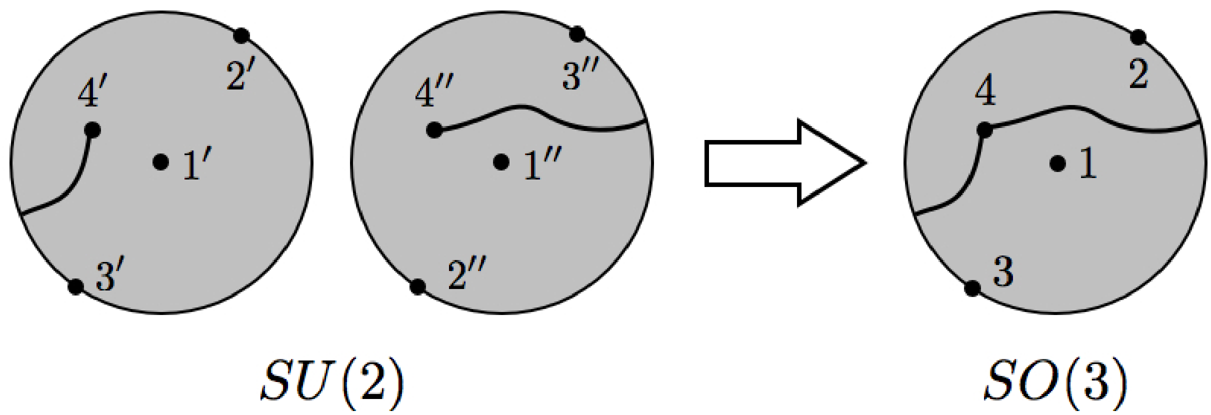

Figure 9: La figura compara las topologías de $SU(2)$ y $SO(3)$. El espacio de parámetros de $SU(2)$ tiene el doble de puntos que el espacio de parámetros de $SO(3)$. Por ejemplo, tanto $1'$ como $1''$ en $SU(2)$ son identificados con la identidad $R = I$ en $SO(3)$. Sin embargo, en $SU(2)$ solo $1'$ corresponde a la identidad (ninguna rotación), mientras que $1''$ corresponde a haber hecho una rotación en 2π, que a nuestro entender, no es necesariamente equivalente a no haber hecho rotación alguna. En forma similar, $2' = 2''$ y $2' = 3''$ en $SU(2)$. Sin embargo estos dos puntos son identificados en $SO(3)$, de modo que $2 = 3$.

Para resumir, $SU(2)$ y $SO(3)$ son completamente equivalente siempre y cuando se haga un seguimiento de la historia de las rotaciones. En cierto sentido $SU(2)$ contiene dos copias de $SO(3)$ de tal forma que en $SU(2)$ ya no hay curvas cerradas que no pueden ser deformadas a un punto. Por dicho motivo, a $SU(2)$ se le llama espacio de cubrimiento de $SO(3)$.

1.15 Rotaciones activas

Hasta el momento solo hemos considerado rotaciones pasivas, que corresponden a cambios de coordenadas. Por lo mismo, los objetos descritos con la ayuda de estos sistemas de coordenadas, tales como vectores y tensores, no sufren cambios. Por otro lado, también podemos considerar rotaciones activas, que en lugar de cambiar el sistema de coordenadas, corresponden a intervenir los objetos. Por ejemplo, una rotación activa sobre un vector **v** corresponde a una transformación lineal de la forma:

$$\mathbf{v} \to \mathbf{v}' = R\,\mathbf{v}. \tag{129}$$

Para describir este tipo de rotación, podemos cuantificar el efecto de la rotación R sobre los la base empleada para describir R. En otras palabras, podemos escribir:

$$\hat{x}_i \to \hat{x}'_j = R\,\hat{x}_j = \hat{x}_i R^i{}_j, \tag{130}$$

donde $R^i{}_j$ corresponden a las componentes de R. Es importante notar que no estamos cambiando las bases $\hat{x}_i$ asociadas al sistema Cartesiano, dado que no estamos realizando un cambio de coordenadas. En su lugar, estamos expresando el efecto de R sobre la base pero siempre usando el mismo sistema de coordenadas. Por dicho motivo no usamos la prima $'$ sobre los índices. Luego, usando (130) vemos que:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}' &= R\,\mathbf{v} \\ &= R\,(v^j \hat{x}_j) \\ &= v^j R\,\hat{x}_j \\ &= v^j \hat{x}_i R^i{}_j \\ &= (R^i{}_j v^j)\hat{x}_i \\ &= (v')^i \hat{x}_i. \end{aligned} \tag{131}$$

Esto quiere decir que las componentes de $\mathbf{v}'$ en la misma base original (que no estamos modificando) están dados por

$$(v')^i = R^i{}_j v^j, \tag{132}$$

donde $R^i{}_j$ son las componentes que definen la rotación de las bases. Para comparar este tipo de rotación con las rotaciones pasivas analizadas en las secciones anteriores, es importante enfatizar que las componentes $R^i{}_j$ que aparecen en (132) toman los mismos valores que las componentes $R^i{}_{j'}$ de la ecuación (55) al igualar filas con columnas (pero no son las mismas componentes $R^{i'}{}_j$ que aparecen en (46)). La Figura (1.15) ilustra la diferencia entre ambos tipos de rotación.

1.16 Sobre la existencia de configuraciones físicas

Para finalizar, estableceremos un principio fundamental que conecta simetrías con configuraciones físicas. Como hemos visto, las rotaciones pasivas corresponden a modificar nuestro punto de vista: En efecto, dada una configuración específica (una colección de vectores, tensores y espinores orientados en cierta forma) registrado por un observador $\mathcal{O}$,

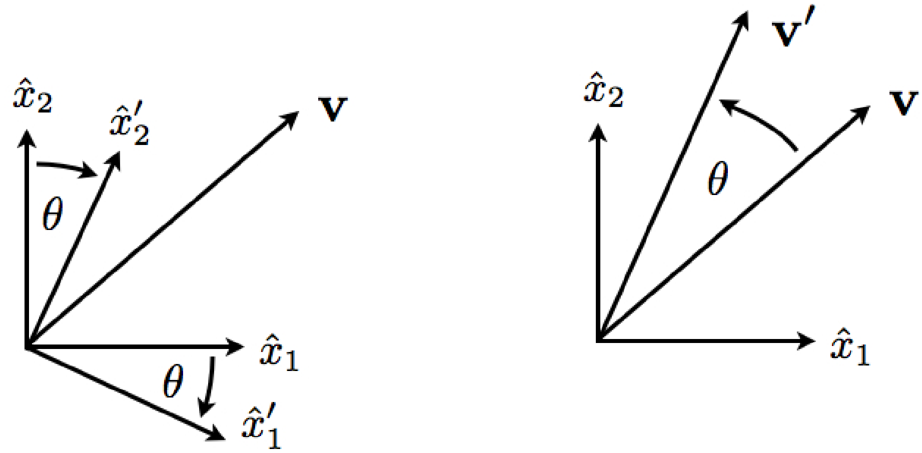

Figure 10: Las dos figuras muestran la diferencia entre rotaciones pasivas y activas. En la izquierda, una rotación pasiva cambia nuestro punto de vista con respecto al cual un vector es expresado. En el lado derecho, una rotación activa cambia al vector, pero mantiene el sistema de referencia fijo. Noten que $\mathbf{v}'$ (en la derecha) tiene las mismas componentes con respecto a la base $\hat{x}_i$ que $\mathbf{v}$ (en la izquierda) tiene con respecto a $\hat{x}'_i$.

entonces un segundo observador $\mathcal{O}'$ rotado con respecto al primero, observará el mismo sistema pero registrado con una notación distinta. Por supuesto, estas bases están relacionadas mediante una rotación pasiva de la forma (55).

Por otro lado, si realizamos una rotación activa sobre la configuración observada por $\mathcal{O}$, entonces la rotación activa hará que $\mathcal{O}$ registre exactamente lo mismo que $\mathcal{O}'$ hubiese registrado si esta fuese una rotación pasiva (como la del caso anterior). Esto quiere decir que una rotación pasiva es equivalente a una rotación activa, con la distinción de que una rotación pasiva requiere de dos observadores $\mathcal{O}$ y $\mathcal{O}'$ para comparar los sistemas rotados y no rotados, mientras que una rotación activa requiere de un solo observador $\mathcal{O}$ que compare las configuraciones antes y después de que la rotación haya sido realizada.

Ahora podemos dar un paso de carácter filosófico: Dada una configuración física registrada por cierto observador, entonces las leyes de la física deben ser tales que admiten otra configuración física obtenida a partir de la primera, mediante una rotación activa. Por ejemplo, si un observador constata una partícula moviéndose a una velocidad $\mathbf{v}$, entonces las leyes de la física también admiten la existencia de partículas (del mismo tipo) con velocidades $\mathbf{v}' = R\mathbf{v}$. De otro modo, habría una dirección privilegiada en la naturaleza! Este principio establece una conexión no trivial entre rotaciones activas y pasivas. Si cierto observador $\mathcal{O}$ observa una configuración física, y un segundo observador $\mathcal{O}'$ observa la misma situación pero rotada con respecto a la primera (rotación pasiva), entonces las leyes de la física deben ser tales que admita la existencia de una configuración física en la cual el primer observador $\mathcal{O}$ vea lo mismo que $\mathcal{O}'$ en la situación anterior.

Este principio resulta particularmente práctico al momento de trabajar con el principio de mínima acción, en donde se puede exigir que la acción sea *invariante* bajo la rotación de las coordenadas. Esto automáticamente asegura que las leyes de la física serán invariantes bajo rotaciones, asegurando la existencia de configuraciones físicas obtenidas a partir de rotaciones activas.