Apuntes de Física Moderna: Espacios 3D

1 3-Vectores

Para discutir vectores resulta conveniente partir por la introducción de una base. Supongamos que $\hat{x}_1$, $\hat{x}_2$ and $\hat{x}_3$ son los elementos de una base, completa y linealmente independiente. Luego, un vector arbitrario $\mathbf{v}$ puede ser expresado de la siguiente forma:

$$\mathbf{v} = v^1 \hat{x}_1 + v^2 \hat{x}_2 + v^3 \hat{x}_3. \tag{1}$$

Las cantidades v^1, v^2 and v^3 son las componentes del vector $\mathbf{v}$ en la base $\{\hat{x}_1, \hat{x}_2, \hat{x}_3\}$. Una forma conveniente de reescribir (1) es:

$$\mathbf{v} = v^i \hat{x}_i, \tag{2}$$

en donde estamos usando la llamada convención de Einstein sobre la suma de índices. Esta convención dicta que cada vez que hayan índices repetidos, uno arriba y otro abajo, asumimos la suma completa desde $i = 1$ hasta $i = 3$. Esta convención nos exime de usar el símbolo de suma Σ, que de otro modo aparecería en forma copiosa.

Recuerden que los vectores viven en espacios lineales, y por lo tanto pueden ser sumados y multiplicados por cantidades escalares, dando como resultado nuevos vectores. Es decir, si $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ son vectores, y si a y b son escalares, entonces

$$\mathbf{w} = a\mathbf{u} + b\mathbf{v} \tag{3}$$

también es un vector.

1.1 Producto escalar

Es conveniente definir el concepto de producto escalar. Un producto escalar $g(,)$ es una función *bilineal* simétrica que, dado dos vectores $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ arbitrarios, nos entrega de regreso un escalar (un número perteneciente a $\mathbb{R}$). Es decir

$$g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = g(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Que $g(,)$ sea una función bilineal, significa que

$$g(a\mathbf{u}, b\mathbf{v}) = ab\, g(\mathbf{u}, \mathbf{v}). \tag{5}$$

En ocasiones, para que g sea considerado un producto escalar respetable, se requiere la propiedad adicional de que si sus dos argumentos consisten en el mismo vector $\mathbf{v} \neq 0$, entonces el resultado debe ser estrictamente positivo:

$$g(\mathbf{v}, \mathbf{v}) > 0. \tag{6}$$

Una forma de darle sentido al producto escalar es conociendo cómo actúa sobre una base dada $\{\hat{x}_i\}$. Es decir, podemos escribir:

$$g(\hat{x}_i, \hat{x}_j) = g_{ij}. \tag{7}$$

Los coeficientes g_{ij} contienen toda la información necesaria para saber como está definido un producto escalar dada una base. A los símbolos g_{ij} colectivamente se le conocen como las componentes de la métrica. Si pensamos en la métrica como una matriz, entonces g_{ij} son los elementos de una matriz donde i y j indican filas y columnas respectivamente. Noten que si conocemos la forma exacta de la métrica, entonces podemos calcular cualquier producto escalar. Basta proceder de las siguiente forma:

$$g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = g(u^i \hat{x}_i, v^j \hat{x}_j) = u^i v^j g(\hat{x}_i, \hat{x}_j) = g_{ij} u^i v^j. \tag{8}$$

Noten que en la segunda igualdad usamos la propiedad expresada por la ecuación (5). En términos de componentes, la ecuación (6) se lee

$$g_{ij} v^i v^j > 0, \tag{9}$$

lo que significa que la métrica g_{ij} es positiva definida. Esto asegura que g_{ij} tenga inversa. A dicha inversa la denominamos g^{ij} y es tal que:

$$g^{ik} g_{kj} = \delta^i_j, \qquad g_{ik} g^{kj} = \delta_i^j, \tag{10}$$

Donde δ_i^j es la afamada delta de Kronecker, que viene definida por:

$$\delta_i^j = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ si } i \neq 0 \end{cases}. \tag{11}$$

Para simplificar el escribir un producto escalar, dadas las componentes v^i de vector $\mathbf{v}$, podemos definir componentes v_i con índices abajo mediante el uso de la métrica:

$$v_i \equiv g_{ij} v^j. \tag{12}$$

Esta notación es conveniente, ya que nos podemos ahorrar la aparición explícita de la métrica, y simplemente escribir el producto escalar entre dos vectores como:

$$g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = u_i v^i = u^i v_i. \tag{13}$$

Observen que estamos usando la métrica g_{ij} para hacer descender el índice de v^i. Dado que g^{ij} es la inversa de g_{ij}, y por lo tanto satisface la expresión (10), entonces podemos usar g^{ij} para subir índices. Es decir:

$$v^i = g^{ij} v_j. \tag{14}$$

Esta notación también es útil para subir los índices a las bases:

$$\hat{x}^i \equiv g^{ij} \hat{x}_j. \tag{15}$$

De este modo un vector puede ser expresado en forma equivalente como $\mathbf{v} = v^i \hat{x}_i = v_i \hat{x}^i$.

1.2 Cambios de base y transformaciones lineales

Supongamos que contamos con una base arbitraria $\{\hat{x}_i\}$. Si lo deseamos podemos definir una nueva base $\{\hat{x}_{i'}\}$ mediante una transformación lineal L de la siguiente forma:

$$\hat{x}_{i'} = \hat{x}_j L^j{}_{i'}. \tag{16}$$

Los coeficientes $L^j{}_{i'}$ caracterizan la nueva base $\{\hat{x}_{i'}\}$ en términos de la base original $\{\hat{x}_i\}$. Para que la base $\{\hat{x}_{i'}\}$ sea completa y linealmente independiente, es necesario que los coeficientes $L^j{}_{i'}$ sean elementos de una matriz invertible (donde j e i' corresponden a filas y columnas respectivamente). Por lo tanto es posible escribir una ecuación análoga a (16) pero expresando la relación inversa:

$$\hat{x}_i = \hat{x}_{j'} L^{j'}{}_i. \tag{17}$$

Noten que si insertamos (17) de vuelta en (16) obtenemos:

$$\hat{x}_{i'} = \hat{x}_j L^j{}_{i'} = \hat{x}_{k'} L^{k'}{}_j L^j{}_{i'}. \tag{18}$$

Para que dicha relación sea consistente, las componentes $L^j{}_{i'}$ contraídas con $L^j{}_{i'}$ necesariamente deben cumplir:

$$L^{k'}{}_j L^j{}_{i'} = \delta^{k'}{}_{i'}. \tag{19}$$

En forma análoga, si hubiésemos insertado (16) en (17) habríamos obtenido

$$L^k{}_{j'} L^{j'}{}_i = \delta^k{}_i. \tag{20}$$

Observen que si interpretamos estas relaciones en términos de la multiplicación de matrices, son son análogas a $L^{-1}L = LL^{-1} = I$.

Veamos ahora como luce un vector $\mathbf{v} = v^i \hat{x}_i$ cuando es expresado con respecto a la nueva base $\{\hat{x}_{i'}\}$. Insertando la expresión (17) en $\mathbf{v} = v^i \hat{x}_i$ obtenemos:

$$\mathbf{v} = v^i \hat{x}_i = v^i (\hat{x}_{j'} L^{j'}{}_i) = L^{j'}{}_i v^i \hat{x}_{j'}. \tag{21}$$

Es importante notar que hemos cambiado la base, pero no el vector. El vector sigue siendo el mismo, pero expresado en una nueva base. Esto quiere decir que en la nueva base el vector tiene componentes distintas, pero que pueden ser relacionadas con las componentes que el vector tenía en la base original. Es decir, en la nueva base $\{\hat{x}_{i'}\}$ podemos escribir:

$$\mathbf{v} = v^{i'} x_{i'}, \tag{22}$$

donde $v^{i'}$ son las componentes del mismo vector original pero en la nueva base. Comparando con (21), vemos que las componentes $v^{i'}$ pueden ser expresadas en términos de las antiguas en la forma siguiente:

$$v^{i'} = L^{i'}{}_j v^i. \tag{23}$$

Más aun, podemos contraer la expresión (23) con los elementos $L^i{}_{j'}$ que corresponden a la inversa de $L^{i'}{}_j$. En dicho caso obtenemos:

$$v^i = L^i{}_{j'} v^{j'}. \tag{24}$$

Noten que la diferencia entre $L^{i'}{}_j$ y $L^i{}_{j'}$ está en la posición de las primas (arriba a la izquierda o abajo a la derecha). Esta notación *democrática* enfatiza que ambas expresiones (23) y (24) son equivalentes, y no favorece una base sobre la otra.

1.3 Bases ortonormales

Dado que g_{ij} es positiva definida, entonces siempre podemos encontrar una base para la cual g_{ij} es igual a la unidad. Para ver esto en forma explícita, consideremos una base $\{\hat{x}_i\}$ arbitraria sobre la cual actúa una transformación lineal L apropiada. El producto escalar entre elementos de la nueva base es:

$$g_{i'j'} = g(x_{i'}, x_{j'}) = g(x_i L^i{}_{i'}, x_j L^j{}_{j'}) = g_{ij} L^i{}_{i'} L^j{}_{j'} = g_{ij} L^i{}_{i'} L^j{}_{j'}. \tag{25}$$

Luego, si escogemos los coeficientes $L^i{}_{j'}$ en forma apropiada, podemos imponer que la nueva base cumpla

$$g_{i'j'} = \delta_{i'j'}, \tag{26}$$

donde $\delta_{i'j'}$ es la delta de Kronecker pero con sus dos índices abajo. Dicha base tiene la propiedad de ser ortonormal, dado que el producto escalar entre sus elementos cumple:

$$g(\hat{x}_{i'}, \hat{x}_{j'}) = \delta_{i'j'} = \begin{cases} 1 \text{ si } i' = j' \\ 0 \text{ si } i' \neq j' \end{cases}. \tag{27}$$

También resulta inmediato que en dicha base la inversa es simplemente $g^{i'j'} = \delta^{ij}$, es decir la delta de Kronecker pero con índices arriba. En este curso trabajaremos con bases ortonormales, por lo que muchas de las expresiones formales son realmente sencillas. Por ejemplo, la relación entre componentes con índices arriba y abajo es simplemente

$$v^i = \delta^{ij} v_j = v_i. \tag{28}$$

Un ejemplo cotidiano de bases ortonormales 3-dimensionales son las bases empleadas para expresar vectores en coordenadas Cartesianas.

1.4 Rotaciones

Supongamos que la base original es ortonormal (tal como nos gusta), y por lo tanto se cumple que $g(\hat{x}_i, \hat{x}_j) = \delta_{ij}$. Luego, un cambio de base representado por la transformación

$L^i{}_{j'}$ da como resultado:

$$g_{i'j'} = g(x_{i'}, x_{j'}) = g(x_i L^i{}_{i'}, x_j L^j{}_{j'}) = g_{ij} L^i{}_{i'} L^j{}_{j'} = \delta_{ij} L^i{}_{i'} L^j{}_{j'}. \tag{29}$$

Esto quiere decir que un cambio de base con $L^i{}_{j'}$ arbitrario no necesariamente nos entregará de vuelta $g_{i'j'} = \delta_{i'j'}$. Sólo una clase especial de transformaciones logra que la nueva base sea ortogonal (es decir, que en la nueva base se siga cumpliendo $g_{i'j'} = \delta_{i'j'}$). A dichas transformaciones se les llama rotaciones, y designaremos a sus elementos de la siguiente forma: $R^i{}_{j'}$. La condición de que las bases permanezcan ortonormales bajo este tipo de transformaciones es equivalente a exigir que $g_{i'j'} = \delta_{i'j'}$. En otras palabras:

$$\delta_{ij} R^i{}_{i'} R^j{}_{j'} = \delta_{i'j'}. \tag{30}$$

Por supuesto, una relación análoga debe cumplirse para los coeficientes $R^{i'}{}_j$ de la rotación inversa:

$$\delta_{i'j'} R^{i'}{}_i R^{j'}{}_j = \delta_{ij}. \tag{31}$$

Notemos que si contraemos (30) con $v^{i'}$ y $v^{j'}$ obtenemos:

$$\delta_{ij} R^i{}_{i'} R^j{}_{j'} v^{i'} v^{j'} = \delta_{i'j'} v^{i'} v^{j'}. \tag{32}$$

Pero dado que $v^i = R^i{}_{i'} v^{i'}$ entonces podemos escribir:

$$v^i v_i = v^{i'} v_{i'}, \tag{33}$$

donde $u_i = \delta_{ij} u^j = u^i$ y $v_{i'} = \delta_{i'j'} v^{j'} = vi'$. En forma explícita, la ecuación (33) corresponde a:

$$(v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2 = (v^{1'})^2 + (v^{2'})^2 + (v^{3'})^2. \tag{34}$$

Lo que nos dice que el módulo de un vector no cambia bajo rotaciones.

Las ecuación (30) permite encontrar una relación lineal entre una rotación dada y su inversa: En efecto, contrayendo en forma apropiada (30) una vez con las componentes inversas $R^{i'}{}_j$ podemos derivar el siguiente resultado:

$$R^{i'}{}_j = \delta_{jk} R^k{}_{l'} \delta^{l'i'}. \tag{35}$$

En forma explícita, esta relación se lee de la siguiente forma:

$$R^{1'}{}_1 = R^1{}_{1'} \quad R^{1'}{}_2 = R^2{}_{1'} \quad R^{1'}{}_3 = R^3{}_{1'} \tag{36}$$
$$R^{2'}{}_1 = R^1{}_{2'} \quad R^{2'}{}_2 = R^2{}_{2'} \quad R^{2'}{}_3 = R^3{}_{2'} \tag{37}$$
$$R^{3'}{}_1 = R^1{}_{3'} \quad R^{3'}{}_2 = R^2{}_{3'} \quad R^{3'}{}_3 = R^3{}_{3'}. \tag{38}$$

Una forma de interpretar esta relación es poniendo atención a la posición de los índices en términos de filas y columnas. Para ser concretos, supongamos como ejemplo una rotación R cuyos elementos $R^i{}_{m'}$ vienen dados por:

$$R^i{}_{m'} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{39}$$

Entonces, la inversa R^{-1} tendrá elementos $R^{m'}{}_i$ dados por

$$R^{1'}{}_1 = R^1{}_{1'} = \cos\theta, \tag{40}$$
$$R^{1'}{}_2 = R^2{}_{1'} = \sin\theta, \tag{41}$$
$$R^{2'}{}_1 = R^1{}_{2'} = -\sin\theta, \tag{42}$$
$$R^{2'}{}_2 = R^2{}_{2'} = \cos\theta, \tag{43}$$

que si ordenamos en filas y columnas viene a ser

$$R^{m'}{}_i = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{44}$$

En lenguaje matricial, esto quiere decir que R^{-1} corresponde a la traspuesta de R:

$$R^{-1} = R^t. \tag{45}$$

Veamos además cómo actúa sobre las componentes v^i de un vector $\{\mathbf{v}\}$. De acuerdo a la expresión (23) con $L = R$, se tiene

$$v^i = R^i{}_{j'} v^{j'}. \tag{46}$$

De donde tenemos que:

$$v^{1'} = R^{1'}{}_j v^j = R^{1'}{}_1 v^1 + R^{1'}{}_2 v^2 = \cos\theta v^1 + \sin\theta v^2, \tag{47}$$
$$v^{2'} = R^{2'}{}_j v^j = R^{2'}{}_1 v^1 + R^{2'}{}_2 v^2 = -\sin\theta v^1 + \cos\theta v^2, \tag{48}$$
$$v^{3'} = R^{3'}{}_j v^j = R^{3'}{}_3 v^3 = v^3. \tag{49}$$

Revisemos también como transforman las componentes v_i con índices abajo:

$$v_{1'} = R^j{}_{1'} v_j = R^1{}_{1'} v_1 + R^2{}_{1'} v_2 = \cos\theta v_1 + \sin\theta v_2, \tag{50}$$
$$v_{2'} = R^j{}_{2'} v_j = R^1{}_{2'} v_1 + R^2{}_{2'} v_2 = -\sin\theta v_1 + \cos\theta v_2, \tag{51}$$
$$v_{3'} = R^j{}_{3'} v_j = R^3{}_{3'} v_3 = v^3. \tag{52}$$

Y por lo tanto vemos que en efecto se cumple que:

$$v_{i'} = \delta_{i'j'} v^{j'}. \tag{53}$$

1.5 Coordenadas Cartesianas

Consideremos un sistema de coordenadas Cartesianas $\{x, y, z\}$. Para simplificar la discusión, usaremos la notación $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$. Resulta natural definir una base vectorial en la cual los vectores unitarios $\{\hat{x}^i\}$ apuntan en la direcciones asociadas a las coordenadas $\{x^i\}$. La Figura 1 muestra esta situación. Esto quiere decir que un cambio

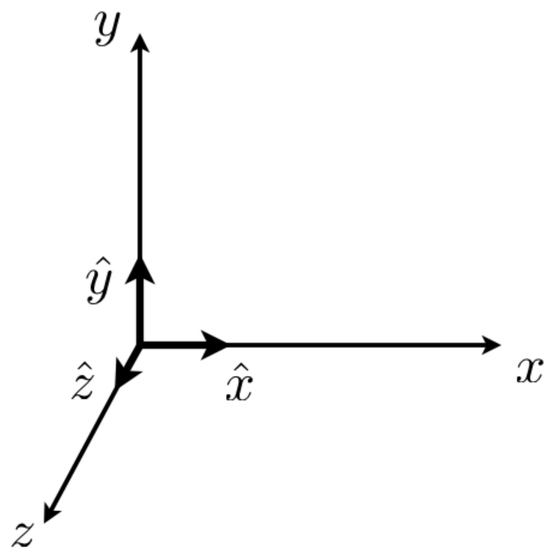

Figure 1: Los vectores unitarios $\{\hat{x}^i\}$ están orientados en las direcciones asociadas a las coordenadas $\{x^i\}$.

de coordenadas consistente en una rotación necesariamente afectará la orientación de los vectores unitarios. Veamos esto en algún detalle: Supongamos un punto P en el espacio 3D que tiene por coordenadas los valores x^i_P. Podemos asignar a este punto un vector $\mathbf{x}_P$ que va desde el origen del sistema hasta el punto P. Dicho vector será:

$$\mathbf{x}_P = x^i_P \hat{x}_i. \tag{54}$$

Al haber una rotación del sistema de coordenadas, cambiarán la orientación de las bases $\hat{x}_i$, y los valores de las componentes x^i_P pero no cambiará la ubicación del punto P. Es decir, el punto P seguirá en la misma posición independiente de las coordenadas que escojamos para describirlo. Ahora, como ya hemos visto, una rotación afectará a las bases de acuerdo a la relación:

$$\hat{x}_{i'} = \hat{x}_j R^j{}_{i'}, \tag{55}$$

mientras que la relación inversa será:

$$\hat{x}_i = \hat{x}_{j'} R^{j'}{}_i. \tag{56}$$

Reemplazando esta última relación en la ecuación (54) obtenemos:

$$\mathbf{x}_P = x^i_P \hat{x}_{j'} R^{j'}{}_i = (R^{j'}{}_i x^i_P)\hat{x}_{j'}. \tag{57}$$

Podemos identificar la expresión en paréntesis como las componentes de $\vec{x}_P$ en el nuevo sistema de coordenadas, de modo que podemos escribir:

$$\mathbf{x}_P = x^{i'}_P \hat{x}_{i'}, \qquad \text{donde} \qquad x^{i'}_P = R^{i'}{}_j x^j_P. \tag{58}$$

En otras palabras, bajo una rotación de las coordenadas, las bases $\hat{x}_i$ transforman con la ayuda de los coeficientes $R^i_{j'}$, mientras que las componentes x^i transforman con la ayuda de los coeficientes $R^{i'}_j$ pertenecientes a la rotación inversa. Para apreciar esto veamos un ejemplo concreto. Consideremos la rotación del ejemplo (39). Entonces, las nuevas bases $\hat{x}_{i'}$ estarán dadas por:

$$\hat{x}' = \hat{x}\cos\theta + \hat{y}\sin\theta, \qquad \hat{y}' = -\hat{x}\sin\theta + \hat{y}\cos\theta, \qquad \hat{z}' = \hat{z}, \tag{59}$$

mientras que las nuevas coordenadas $x^{i'}_P$ del punto P estarán dadas por:

$$x'_P = \cos\theta x_P + \sin\theta y_P, \qquad y'_P = -\sin\theta x_P + \cos\theta y_P, \qquad z'_P = z_P. \tag{60}$$

La Figura 2 muestra este ejemplo particular. En el ejemplo, el punto P no ha cambiado de ubicación. En su lugar, ha cambiado la forma de describir su ubicación con respecto al punto de vista representado por la elección de coordenadas empleada.

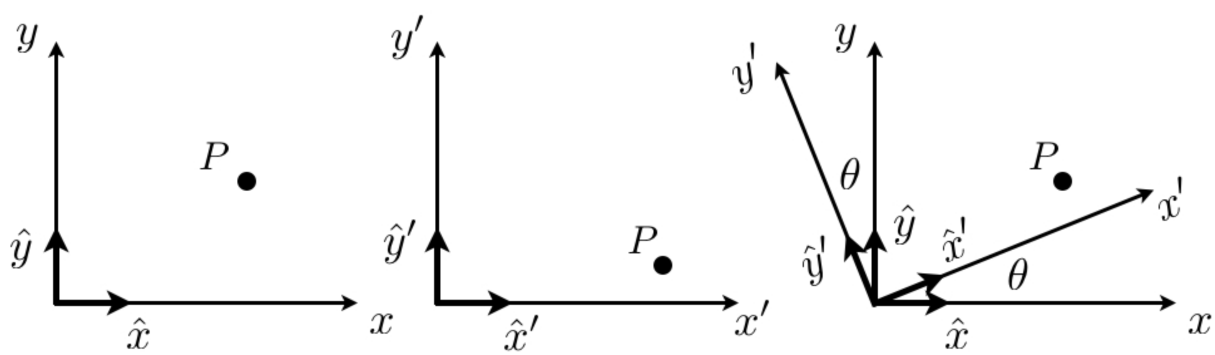

Figure 2: Ejemplo de una rotación sobre las coordenadas cartesianas.

1.6 Derivadas parciales

Recordemos que muchas veces deseamos hablar de todos los puntos del espacio a la vez (en lugar de un punto P en particular). En tal caso, no necesitamos especificar la etiqueta

P en la coordenada y simplemente escribimos

$$\mathbf{x} = x^i \hat{x}_i. \tag{61}$$

De esta forma, una cambio de coordenadas correspondientes a una rotación implica las siguientes relaciones entre los sistemas de coordenadas x^i y $x^{i'}$:

$$x^{i'} = R^{i'}{}_{j} x^j, \qquad x^i = R^{i}{}_{j'} x^{j'}. \tag{62}$$

Luego, tomando derivadas parciales de estas relaciones, podemos inferir las relaciones:

$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^j} = R^{i'}{}_{j}, \qquad \frac{\partial x^{i}}{\partial x^{j'}} = R^{i}{}_{j'}. \tag{63}$$

Estas expresiones permiten relacionar derivadas parciales de dos sistemas de coordenadas rotadas. Para ello basta usar la regla de la cadena:

$$\partial_i = \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^i} \partial_{j'} = R^{j'}{}_{i} \partial_{j'}, \qquad \partial_{i'} = \frac{\partial x^{j}}{\partial x^{i'}} \partial_{j} = R^{j}{}_{i'} \partial_{j}. \tag{64}$$

Noten que las derivadas parciales ∂_i transforman de la misma forma que las bases $\hat{x}_i$.