Física Moderna FI-3102
Tarea 1: Rotaciones y tensores en 3D

Prof. Gonzalo Palma. - Aux. Sebastián Céspedes.
Fecha: Jueves 27 de Octubre 2010

INDICACIONES: Fecha de Entrega: Miércoles 2 de Noviembre. No se aceptarán tareas entregadas después.

PREGUNTA 1:

Dos observadores $\mathcal{O}$ y $\mathcal{O}'$ registran eventos con respecto a sus sistemas de coordenadas Cartesianas definidas mediantes las bases $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$ y $\{\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}'\}$ respectivamente. El primer observador $\mathcal{O}$ ve dos partículas desplazándose con velocidades $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ respectivamente, dadas por:

$$\mathbf{u} = \frac{u}{\sqrt{2}}(\hat{x} + \hat{z}), \qquad \text{y} \qquad \mathbf{v} = \frac{v}{\sqrt{2}}(\hat{x} + \hat{y}). \tag{0.1}$$

Por su parte, $\mathcal{O}'$ observa que estas mismas partículas se desplazan con velocidades:

$$\mathbf{u} = \frac{u}{2\sqrt{2}}(\hat{x}' - \hat{y}') + \frac{\sqrt{3}u}{2}\hat{z}', \qquad \text{y} \qquad \mathbf{v} = \frac{v}{\sqrt{2}}(\hat{x}' - \hat{y}'). \tag{0.2}$$

Determine la orientación de la base $\{\hat{x}', \hat{y}', \hat{z}'\}$ con respecto a la base $\{\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\}$. Es decir, determine en forma explícita los coeficientes $R^j{}_{i'}$ de la rotación $\hat{x}_{i'} = \hat{x}_j R^j{}_{i'}$ ligando ambos sistemas de referencia.

PREGUNTA 2:

Dadas las componentes T_{ij} de un tensor arbitrario, se define la parte simétrica de tal tensor como $T_{(ij)} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji})$ y la parte anti-simétrica como $T_{[ij]} = \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji})$. Estos nuevos tensores satisfacen $T_{(ij)} = -T_{(ji)}$ y $T_{[ij]} = T_{[ji]}$. Considere las siguientes componentes de vectores y tensores:

$$v^i = (1, 0, 1), \qquad u^i = (1, 0, -2), \qquad T_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{0.3}$$

(a) Calcule las siguientes cantidades:

$$v^i v_i, \qquad v^i u_i, \qquad T^i{}_i, \qquad \delta^{ij} T_{[ij]}, \qquad T_{(ij)} u^i v^j. \tag{0.4}$$

(b) Considere ahora la siguiente rotación:

$$R^{i'}{}_{j} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \tag{0.5}$$

Calcule las siguientes cantidades:

$$v_{i'}, \qquad T_{(i'j')}, \qquad T^{i'}{}_{i'}, \qquad T_{i'j'}u^{i'}u^{j'}, \qquad T_{[i'j']}u^{i'}u^{j'}. \tag{0.6}$$

PREGUNTA 3:

(a) Considere un tensor antisimétrico F_{ij} arbitrario. Sin perdida de generalidad, este tensor puede escribirse como $F_{ij} = \epsilon_{ijk}B^k$, donde B^k consiste en tres coeficientes determinando los valores del tensor. En notación matricial, se tiene:

$$F_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & B^3 & -B^2 \\ -B^3 & 0 & B^1 \\ B^2 & -B^1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{0.7}$$

Demuestre que, dado que F_{ij} es un tensor, entonces bajo una rotación arbitraria R, los coeficientes B^k transforman como un vector:

$$B^{k'} = R^{k'}{}_{j}B^j. \tag{0.8}$$

Es decir, bajo rotaciones los coeficientes B^k transforman como las componentes de un vector.

(b) En lugar de una rotación, considere ahora un cambio de coordenadas correspondiente a una inversión P, con componentes $P^{i'}{}_{j} = -\delta^{i'}_{j}$. ¿Cómo transforman las componentes B^i?