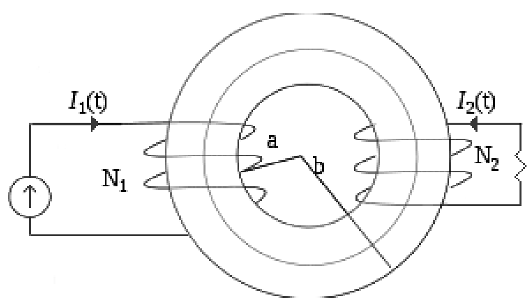
FI2002 - Electromagnetismo **16 de enero de 2012**

Pauta pregunta 3 control 2

Profesor: *Simón Casassus* Auxiliares: *Sebastián Derteano* y *Mauricio Morales*

P1. Transformador de corriente

Se tiene un transformador toroidal formado por dos bobinas de N_1 y N_2 vueltas respectivamente,dispuestas como se ilustra en la figura. La bobina del lado izquierdo tiene conectada una fuente de corriente que impone una corriente alterna $i_1(t) = I\,\text{sen}(\omega t)$, mientras la bobina del lado derecho sólo tiene conectada una resistencia de valor R. El núcleo del transformador es de material ferromagnético con permeabilidad μ. Estudiaremos la relación entre i_2 e i_1, aproximando el campo magnético en todo el toroide por el que hay en el punto medio del mismo.



1. (`+0.5pt`) Explique porqué el núcleo "conduce" el campo magnético, i.e. explique porqué es aproximadamente constante en azimuth.
2. (`3.0pt`) Calcule la corriente $i_2(t)$ que circula por la bobina del lado derecho, considere que la fuente de corriente del lado izquierdo fue conectada hace mucho tiempo (ayuda: use la Leu de Ampère para escribir la ecuación diferencial que rige $i_2(t)$ para todo t).
3. (`1.5pt`) Calcule las inductancias propias de cada bobina, L_1 y L_2, además de la inductancia mutua M entre ellas (ayuda: $V_2 = -M di/dt$). Encuentre también el coeficiente de acoplamiento $k = M/\sqrt{L_1 L_2}$, ¿qué fenómeno físico cuantifica este coeficiente?, ¿cómo cambia k si se utiliza un material diamagnético en el núcleo?.
4. (`1.5pt`) Describa el fenómeno de histéresis magnética, y explique porqué se calienta el transformador.

1. El núcleo "conduce" el campo magnético porque está hecho de material ferromagnético, que tiene una permeabilidad μ mucho mayor que la del aire circundante, por tanto las líneas de campo magnético tienden a agruparse por el interior del núcleo, además la magnitud es constante en azimuth porque como μ del núcleo es mucho mayor que la del exterior (material ferromagnético), $\vec{B}$ es tangencial a la interfaz entre los medios, circulando la totalidad del campo magnético por el interior del núcleo.
2. Para calcular la corriente i_2 usaremos la ley de Ampère y posteriormente la ley de inducción para encontrar la f.e.m. inducida en la segunda bobina. De esta manera tenemos:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{enc}$$

Luego, aproximando el campo en todo el toroide por el que hay en el punto medio del mismo:

$$\Rightarrow H2\pi\frac{a+b}{2} = N_1 i_1 - N_2 i_2$$

$$\therefore \boxed{\vec{H} = \frac{N_1 i_1 - N_2 i_2}{\pi(a+b)}(-\hat{\theta})}$$

De esta manera hemos obtenido el campo magnético circulante en el núcleo debido a las dos bobinas, ya que la primera crea un campo por la corriente que le provee la fuente y la segunda por la corriente inducida que posee. Ahora usaremos la ley de inducción para calcular la corriente en la segunda bobina. Utilizando primero la ley de Ohm.

$$\epsilon_2 = Ri_2 \Rightarrow i_2 = \frac{1}{R}\frac{d\phi}{dt} = \frac{1}{R}\frac{d}{dt}\left(\cancel{\pi}\left(\frac{(b-a)^2}{2}\right)\frac{N_1 i_1 - N_2 i_2}{\mu\cancel{\pi}(a+b)}\right)$$

$$\Leftrightarrow i_2 = \cancelto{1/C}{\frac{\mu(b-a)^2}{4R(a+b)}}\left[N_1 I\omega\cos(\omega t) - N_2\frac{di_2}{dt}\right]$$

Reemplazando la expresión para i_1 y ordenando términos llegamos a la siguiente EDO:

$$Ci_2 + N_2\frac{di_2}{dt} = N_1 I\omega\cos(\omega t)$$

Considerando que la fuente de corriente fue conectada hace mucho tiempo, la solución homogénea de forma exponencial decreciente ya se atenuó, por lo que basta con encontrar la solución particular de la ecuación *Nota: se dieron puntos extra por encontrar la solución homogénea también.*

Como se vio en auxiliar, en una edo la solución particular es de la misma naturaleza que la función forzante. En este caso como tenemos una edo de primer orden un buen candidato es la solución $i_2 = A\,\text{sen}(\omega t) + B\cos(\omega t)$, luego reemplazamos:

$$C\left(A\,\text{sen}(\omega t) + B\cos(\omega t)\right) + N_2\omega\left(A\cos(\omega t) - B\,\text{sen}(\omega t)\right) = N_1 I\omega\cos(\omega t)$$

Como al lado derecho no hay términos $\text{sen}(\omega t)$, necesitamos que

$$CA\cancel{\text{sen}(\omega t)} - N_2\omega B\cancel{\text{sen}(\omega t)} = 0 \quad \Rightarrow B = \frac{C}{N_2\omega}A$$

Tendremos entonces:

$$CB\cancel{\cos(\omega t)} + N_2\omega A\cancel{\cos(\omega t)} = N_1 I\omega\cancel{\cos(\omega t)}$$

$$\Rightarrow \frac{C^2 A}{N_2\omega} + N_2\omega A = N_1 I\omega$$

$$\Rightarrow A = \frac{N_1 N_2 I\omega^2}{C^2 + (N_2\omega)^2} \qquad B = \frac{N_1 I\omega}{C^2 + (N_2\omega)^2}$$

$$\Rightarrow i_2(t) = \frac{N_1 N_2 I\omega^2}{C^2 + (N_2\omega)^2}\operatorname{sen}(\omega t) + \frac{N_1 I\omega C}{C^2 + (N_2\omega)^2}\cos(\omega t)$$

$$\therefore \boxed{i_2(t) = \frac{N_1 I\omega}{C^2 + (N_2\omega)^2}\left[N_2\omega\operatorname{sen}(\omega t) + C\cos(\omega t)\right] \quad [A]}$$

3. Para calcular las inductancias procederemos de la forma usual, usando que $L = \phi/i$, pero teniendo cuidado con el flujo y la corriente utilizada, primero para el caso de las inductancias propias solo debe considerarse el flujo generado por la misma bobina y su corriente, de esta forma:

$$H_1 = \frac{N_1 i_1}{\pi(a+b)} \qquad \Rightarrow \phi_1 = \frac{\mu N_1 i_1}{\cancel{\pi}(a+b)}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \cancel{\pi}$$

Como este flujo es enlazado N_1 veces, la expresión para la inductancia propia de la bobina 1 queda:

$$\Rightarrow \boxed{L_1 = \frac{\mu N_1^2}{(a+b)}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \quad [H]}$$

Análogamente,

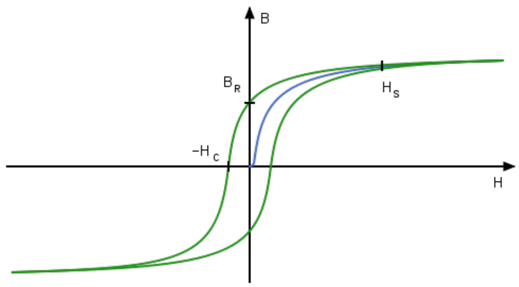
$$\boxed{L_2 = \frac{\mu N_2^2}{(a+b)}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \quad [H]}$$

De manera similar, como el campo magnético en su totalidad circula por el núcleo ferromagnético, si calculamos la inductancia mutua usando $M = \phi_{21}/i_1$, tendremos que $\phi_{21} = \phi_1$, pero ahora la bobina 2 enlaza este flujo N_2 veces, por lo que obtendremos:

$$\boxed{M = \frac{\mu N_1 N_2}{(a+b)}\left(\frac{b-a}{2}\right)^2 \quad [H]}$$

De esta manera el coeficiente de acoplamiento k es 1, ya que todo el flujo producido por la primera bobina es enlazado por la segunda y viceversa. Este coeficiente cuantifica cuan "acopadas" están las bobinas, siendo más pequeño mientras mas porción de flujo de una bobina no sea enlazado por la otra.

4. La histéresis magnética es un fenómeno que se presenta en la materia cuando le es aplica un campo magnético, este fenómeno se caracteriza por el hecho de que si se va aumentando la magnitud del campo aplicado hasta cierto valor y luego se disminuye paulatinamente, la trayectoria de "vuelta" será en general distinta a la de ida, como puede apreciarse en la figura.



Este fenómeno tiene el gran inconveniente de disipar energía, ya que como es sabido la energía magnética es de la forma $\delta W = \vec{H} \cdot d\vec{B}$, si observamos la curva de histéresis notamos de inmediato que el área de ida es distinta al área de regreso, siendo la diferencia entre estas áreas la energía disipada, esta área puede visualizarse como la que queda dentro de la curva de histéresis.

Sebastián Derteano Herrera, 16 de enero de 2012