**FI2002 - Electromagnetismo** **25 de octubre 2011**

# Auxiliar 2

Profesor: *Simón Casassus* Auxiliares: *Sebastián Derteano* y *Mauricio Morales*

P1. 1. *Suponga que dos cargas puntuales en el vacío, $-q$ y $q/2$, se sitúan en el origen y en el punto $(a, 0, 0)$, respectivamente, usando coordenadas cartesianas. ¿En qué punto del eje $x$ se anula el campo eléctrico?*

Para la resolución de la primera parte, se utiliza la ley de Gauss y luego se superponen los campos generados por cada carga para obtener el campo total.

Primero asumimos que el campo es radial, por tanto:

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_v}{\epsilon_0} \tag{1}$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} E(r)\hat{r} \cdot \hat{r} r^2 \operatorname{sen}\theta d\theta d\phi = \frac{-q}{\epsilon_0} \tag{2}$$

$$E(r)r^2 \int_0^{2\pi} \cos\theta \Big|_0^{\pi} d\phi = E(r)r^2 \int_0^{2\pi} (1+1)d\phi \tag{3}$$

$$2E(r)r^2 2\pi = \frac{-q}{\epsilon_0} \tag{4}$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 r^2}$$

Análogamente, para la carga $-q/2$ ubicada en el punto $(a, 0, 0)$ se tendrá:

$$\Rightarrow E(r') = \frac{q}{8\pi\epsilon_0 r'^2}$$

Finalmente, para encontrar el punto en el eje $x$ en el que se anula el campo generado por las dos cargas (que es la superposición de los campos generados por cada una de ellas de manera aislada) igualamos el módulo del campo a cero, usando coordenadas cartesianas para imponer la condición del eje $x$:

$$|\vec{E}(r)| = |\vec{E}(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})| = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0(x^2+y^2+z^2)} + \frac{q}{8\pi\epsilon_0((x-a)^2+y^2+z^2)}$$

En la ecuación anterior imponemos $y = 0$ y $z = 0$ para ubicarnos en el eje $x$ y además haciendo $|\vec{E}| = 0$ para la condición deseada del campo, obtenemos:

$$\Rightarrow |\vec{E}(x, y, z)| = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 x^2} + \frac{q}{8\pi\epsilon_0 (x-a)^2} = 0$$

Resolviendo esta última ecuación para $x$:

$$\Rightarrow \boxed{x = a(2 \pm \sqrt{2})}$$

2. *El campo eléctrico en la atmósfera sobre la superficie terrestre es aproximadamente 200* $[\frac{V}{m}]$ *dirigido hacia abajo. A 1400* $[m]$ *por encima de la superficie terrestre el campo eléctrico de la atmósfera es de sólo 20* $[\frac{V}{m}]$ *dirigido hacia abajo también. ¿Cuál es la densidad media de carga en la atmósfera por debajo de los 1400* $[m]$.

   Para resolver este problema usaremos la forma diferencial de la ecuación de Gauss: $\nabla \cdot E = \rho/\epsilon_0$, además considerando la simetría, asumiremos que el campo solo tiene componente vertical y tiene dependencia exclusivamente de la altura, esto es $\vec{E}(x,y,z) = E(z)\hat{k}$.

   Entonces tendremos:

$$\nabla \cdot E = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Leftrightarrow \frac{\partial - E(z)}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

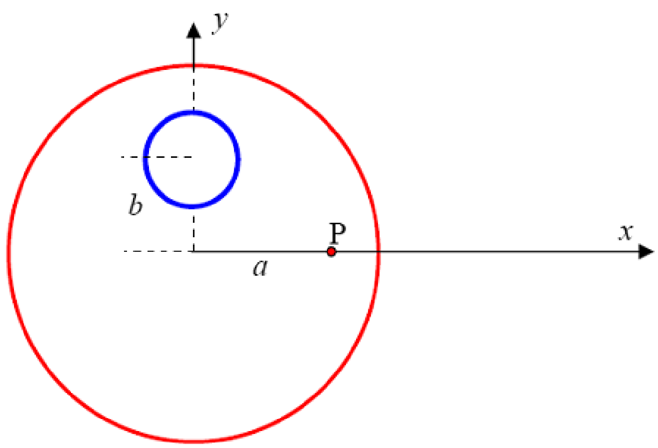
   Ahora integraremos la ecuación de Gauss con la altura, para poder realizar la integral asumiremos que la densidad de carga es constante en la atmósfera; ésto en la realidad no es cierto, pero es una simplificación que realizaremos para resolver el problema de manera aproximada. Así nos queda:

$$E(z) = -\int_0^z \frac{\rho}{\epsilon_0} dz = C - \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

   Para determinar la constante de integración $C$ evaluaremos el campo en los puntos conocidos, según el enunciado tenemos $E(0) = 200[V/m]$ y $E(1400) = 20[V/m]$

$$\Rightarrow \boxed{\rho = \frac{18\epsilon_0}{140}}$$

$\boxed{\text{P2.}}$ *Una esfera de radio $R$ tiene una densidad de carga $\rho$ uniforme y simétrica. La esfera tiene un agujero esférico de radio $R/5$ cuyo centro está a una distancia vertical $b$ justo sobre el centro de la esfera mayor. Determine el campo eléctrico en todo el espacio y argumente que ocurriría si ahora la esfera fuese un conductor perfecto.*



Antes de comenzar a resolver este ejercicio vale la pena recordar que es útil utilizar la ley de Gauss siempre y cuando exista una cierta simetría en el problema que se pueda utilizar para "sacar" de la integral el campo eléctrico, utilizando un sistema de referencia y coordenadas adecuadas. En este caso claramente usaremos coordenadas esféricas y la forma integral de la ley de Gauss.

Cabe notar que no podemos aplicar la ley de Gauss directamente en el problema, ya que no posee una simetría esférica debido a la oquedad que posee la esfera, por ello utilizaremos el principio de *superposición*, calculando el campo generado por la esfera completa (sin considerar que posee un hueco) y luego le restaremos el campo producido por el hueco. Procederemos entonces a calcular el campo generado por la esfera a secas:

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

Como tenemos la densidad de carga de la esfera, hacemos una integral de volumen de todo el cuerpo de la esfera para obtener la carga total $Q$ de la expresión de Gauss, además primero haremos el caso en que estamos ubicados dentro de la esfera, esto es la posición $r$ es menor que el radio de la esfera $R$, en este caso la superficie que abarca flujo es un casquete esférico de radio $r$, lo mismo ocurre para la carga $Q$ encerrada, ya que sólo nos interesa la que queda dentro del volumen delimitado por el radio $r$ en lugar de $R$.

$$\int_S E(r)\hat{r} \cdot \hat{r} r^2 \operatorname{sen}^2 \theta d\theta d\phi = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho r^2 \operatorname{sen}^2 \theta dr d\theta d\phi$$

Debido a que la densidad de carga es constante, en la integral del lado derecho $\rho$ sale y nos queda simplemente el volumen de la esfera, $\frac{4r^3}{3}$, luego:

$$E(r) r^2 \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen} \theta d\theta d\phi = \frac{4\pi r^3 \rho}{3\epsilon_0}$$

$$E(r) r^2 \int_0^{2\pi} (1 - -1) d\phi = \frac{4\pi r^3 \rho}{3\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{4\pi r^3 \rho}{4\pi r^2 3\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \vec{E}(r) = \frac{r\rho}{3\epsilon_0} \hat{r}$$

Ahora nos falta el caso en que estemos afuera de la esfera, o sea $r > R$, la diferencia de este caso con el previo es que ahora al integrar la carga no lo hacemos hasta una distancia $r$, sino solamente hasta el radio de la esfera $R$, ya que a partir de ahí la densidad de carga es cero (porque se acaba la esfera), los cálculos son análogos a la sección anterior, sólo que ahora no se simplifican los radios:

$$\Rightarrow E'(r) = \frac{4\pi R^3 \rho}{4\pi r^2 3\epsilon_0}$$

$$\Rightarrow \vec{E}'(r) = \frac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2}\hat{r}$$

Tendremos entonces la expresión del campo generado por la esfera en todo el espacio:

$$\vec{E}_1(r) = \begin{cases} \dfrac{\rho r}{3\epsilon_0}\hat{r} \quad \left[\dfrac{V}{m}\right] \quad si\ 0 \leq r \leq R \\ \dfrac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2}\hat{r} \quad \left[\dfrac{V}{m}\right] \quad si\ r > R \end{cases}$$

También podemos proceder de manera análoga para el hueco que posee la esfera (recordemos que al campo calculado previamente debemos restarle el campo producido por el hueco usando el principio de superposición). Momentaneamente usaremos otro sistema de referencia, con origen en el centro del hueco, de esta manera, siendo $\vec{E}_2(r')$ el campo "producido" por el hueco, recordemos que el hueco es una pequeña esfera de radio $R/5$:

$$\vec{E}_2(r') = \begin{cases} \dfrac{\rho r'}{3\epsilon_0}\hat{r}' \quad \left[\dfrac{V}{m}\right] \quad si\ 0 \leq r' \leq R/5 \\ \dfrac{\rho (R/5)^3}{3\epsilon_0 r'^2}\hat{r}' \quad \left[\dfrac{V}{m}\right] \quad si\ r' > R/5 \end{cases}$$

Ya tenemos las expresiones para ambos campos, por lo que podemos escribir una expresión para el campo en cualquier punto del espacio utilizando el principio de superposición, pero antes debemos trasladar el origen del sistema de referencia momentáneo que hemos utilizado para expresar el campo de la esfera pequeña (hueco), ésto es simple si consideramos que si la posición del origen del sistema de referencia momentaneo es el vector $\vec{b} = (0, b, 0)$, entonces un punto $r'$ de este sistema de referencia puede expresarse en el sistema de referencia original según el vector $r$, que cumple $\vec{r} = \vec{b} + \vec{r}'$, entonces reemplazamos en la expresión de $\vec{E}_2$ $r' = ||\vec{r} - \vec{b}||$ y $\hat{r}' = \frac{\vec{r}-\vec{b}}{||\vec{r}-\vec{b}||}$, se tendrá entonces :

$$\vec{E}_2(r') = \begin{cases} \dfrac{\rho(\vec{r} - \vec{b})}{3\epsilon_0} \quad \left[\dfrac{V}{m}\right] \quad si\ 0 \leq ||\vec{r} - \vec{b}|| \leq R/5 \\ \dfrac{\rho (R/5)^3}{3\epsilon_0 ||\vec{r} - \vec{b}||^3}(\vec{r} - \vec{b}) \quad \left[\dfrac{V}{m}\right] \quad si\ ||\vec{r} - \vec{b}|| > R/5 \end{cases}$$

Finalmente sumamos los campos, notar que tenemos tres casos:

1. Estamos dentro del hueco, en este caso el campo de la esfera será con $r < R$ y el del hueco con $r' < R/5$
2. Estamos en la esfera, pero fuera del hueco, acá el campo de la esfera también será con $r < R$, pero el del hueco con $r' > R/5$
3. Fuera de la esfera, acá $r > R$ y $r' > R/5$.

$$\vec{E}(r) = \begin{cases} \dfrac{\rho r}{3\epsilon_0}\hat{r} - \dfrac{\rho(\vec{r}-\vec{b})}{3\epsilon_0} \qquad \left[\dfrac{V}{m}\right] \qquad si\ 0 \leq r \leq R\ \wedge\ ||\vec{r}-\vec{b}|| < R/5 \\ \dfrac{\rho r}{3\epsilon_0}\hat{r} - \dfrac{\rho(R/5)^3}{3\epsilon_0||\vec{r}-\vec{b}||^3}(\vec{r}-\vec{b}) \qquad \left[\dfrac{V}{m}\right] \qquad si\ r > R\ \wedge ||\vec{r}-\vec{b}|| > R/5 \\ \dfrac{\rho R^3}{3\epsilon_0 r^2}\hat{r} - \dfrac{\rho(R/5)^3}{3\epsilon_0||\vec{r}-\vec{b}||^3}(\vec{r}-\vec{b}) \qquad \left[\dfrac{V}{m}\right] \qquad si\ r > R \wedge ||\vec{r}-\vec{b}|| > R/5 \end{cases}$$

$\boxed{\text{P3.}}$ *Dos placas infinitas paralelas y conductoras están separadas por una distancia d. Si las placas tienen densidades de carga uniformes $\sigma$ y $-\sigma$ respectivamente sobre sus superficies interiores, se pide obtener una expresión para el campo eléctrico entre las placas y fuera de éstas.*

Propuesto (si quieren lo hacemos en la aux. del lunes)