

6 Radiación de antenas elementales

Hertz probó en 1888 que era posible emitir y recibir ondas electromagnéticas, dando la razón a James C. Maxwell, y en contra de la opinión de otros eminentes físicos de su época. Su experiencia fue el primer paso hacia la tecnología de las comunicaciones inalámbricas. Marconi, años más tarde, realizó la primera comunicación intercontinental. Pero lo realmente importante fue que la experiencia de Hertz sancionó de forma concluyente las ecuaciones de Maxwell como el resumen de toda la teoría electromagnética.

En este capítulo se estudian los fundamentos de la teoría de radiación. Se pretende relacionar las ondas electromagnéticas con las fuentes que las generan, que serán distribuciones de cargas y de corrientes con variación temporal. Se van a tratar casos sencillos, pero que resultan significativos, y permiten introducir los conceptos básicos de la teoría de antenas.

6.1 Fundamentos de la radiación electromagnética

Las ecuaciones de Maxwell predicen que campos eléctricos y magnéticos variables en el tiempo coexisten en el vacío (o en otro medio dieléctrico) de forma *interdependiente*. Entre los campos se establece una relación que es esencial a su naturaleza, de manera que no puede existir un campo eléctrico con variación temporal sin su campo magnético asociado, y viceversa. Esto es, en definitiva, lo que afirman las ecuaciones de Ampère-Maxwell y Faraday.

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} (+\vec{J}) \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Esas dos ecuaciones, que relacionan los rotacionales de los campos con las derivadas temporales, llevan a la *ecuación de onda*, tanto para el campo eléctrico como para el magnético. La ecuación de onda homogénea permite diferentes tipos de solución, que se deben elegir de acuerdo con la *geometría* de cada problema particular y de sus *condiciones de contorno*. Una solución adecuada puede construirse como un sumatorio de ondas planas, esféricas o cilíndricas, en los casos que pueden ser más habituales.

No obstante parece razonable afirmar que la primera condición de contorno para las ondas debería ser aquella que pone en relación directa al campo eléctrico y al campo magnético con las distribuciones de carga y corriente que los han generado. Ese es el tema que nos proponemos estudiar aquí.

Campos variables en el tiempo y ondas electromagnéticas

Los problemas de radiación son problemas *abiertos*. Eso significa que *los campos no están confinados en una región más o menos pequeña del espacio, sino que se extienden infinitamente*.

En la práctica muchas de las situaciones reales son geometrías abiertas. Sólo podemos considerar problemas cerrados aquellos en los que un conductor externo engloba en su interior a las fuentes (cargas y corrientes) y a los campos.

Una pregunta que podríamos plantearnos es: ¿por qué los conductores logran apantallar los campos?, o ¿por qué otros medios (los dieléctricos) no son capaces de hacer esa función?

La clave está en que los conductores poseen *cargas libres* y los dieléctricos no. Las cargas libres se mueven por acción de los campos eléctricos. Logran absorber parte de la energía de las ondas y la disipan en el propio material (por efecto Joule) o la reemiten hacia el dieléctrico del que venían, comportándose como emisores secundarios. La movilidad de los portadores es lo que permite reproducir en cada caso las condiciones de contorno que sean precisas para dar lugar a una situación global consistente. Por su parte, los medios dieléctricos están limitados en su respuesta a los campos externos: no pueden seguir incondicionalmente las ‘instrucciones’ de los campos, y, por tanto, tampoco hacerse cargo de la energía de las ondas. Como resultado son atravesados por ellas.

Desde ese punto de vista la mayor parte de los problemas son problemas de radiación, o, al menos, debe contarse con la posibilidad de que se produzca radiación de ondas. Geometrías estrictamente cerradas son, por ejemplo, la de un cable coaxial, o la de una guía de ondas rectangular, mientras que una línea bifilar o una línea *micro-strip* son geometrías abiertas.

No es fácil determinar a priori qué cantidad de energía quedará en el entorno próximo de nuestro sistema y qué cantidad será radiada al espacio en forma de ondas. En teoría de antenas se buscan aquellas geometrías en las que la radiación es máxima y dirigida en una dirección prevista de antemano, mientras que en otras situaciones, donde la radiación es accidental, la energía radiada es energía perdida o, peor aún, energía que puede provocar interferencias indeseadas con otros equipos.

6.1.1 Fuentes de radiación

Las cargas y las corrientes son las fuentes primeras de los campos eléctrico y magnético. Si la distribución de carga contenida en un cierto volumen varía en el tiempo entonces debe existir cierta densidad de corriente responsable de esa variación de carga. Eso es lo que afirma la ecuación de continuidad:

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (6.1)$$

En problemas de radiación las cargas y las corrientes vienen a representar una misma realidad física. El que interese fijarse más en una o en otra dependerá de cada problema particular.

Una densidad de corriente que *arrastra constantemente a su paso la misma cantidad de carga* se denomina *corriente estacionaria*. Sería, por ejemplo, el simple caso de una corriente continua que circula por un hilo conductor. Tales corrientes son solenoidales (su divergencia es nula) y las densidades de carga en las zonas atravesadas por esas corrientes no sufren cambios. En esas condiciones no existe variación temporal en el campo magnético (o eléctrico si lo hay) y *no pueden generarse ondas*, y el campo eléctrico y el magnético son independientes, de la misma forma que lo son las densidades de carga y corriente.

En el proceso de carga de un condensador, por avanzar un paso más, tenemos una situación diferente. En la figura 6.1 se muestra un condensador de placas paralelas conectado a una fuente de tensión que lo está cargando.

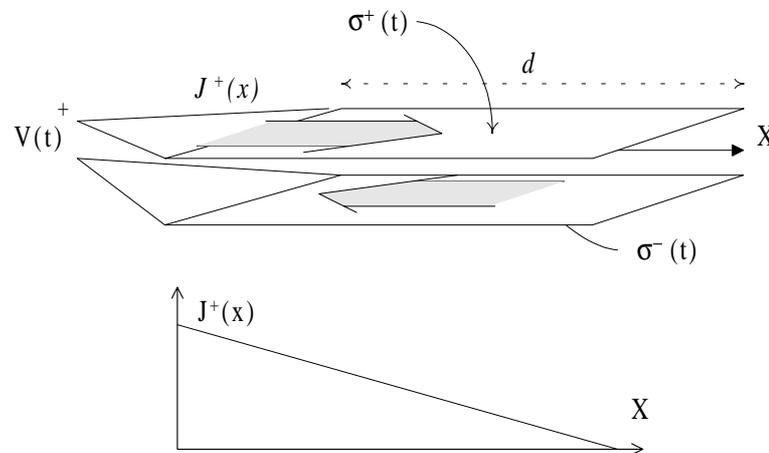


Fig. 6.1 Ejemplo de corriente no estacionaria y no radiativa

Existen dos densidades laminares de corriente que recorren las placas del condensador. Esas corrientes son de igual valor y distinto signo. Si la tensión $V(t)$ es linealmente creciente en el tiempo las densidades de corriente son constantes, pero no homogéneas: su valor disminuye espacialmente a medida que nos acercamos al extremo de la placa porque la carga se va depositando. La densidad de carga de cada placa aumenta en el tiempo, con signos opuestos en cada una de ellas.

Se puede comprobar que una solución coherente a este problema es:

$$V(t) = Kt; \quad J(x) = C(d - x); \quad \sigma(t) = St$$

donde K, C y S son constantes.

Si se calculasen los campos eléctrico y magnético obtendríamos que B no depende del tiempo, aunque E sí, ya que crece en proporción a la carga depositada en las armaduras. Por lo que a nosotros ahora nos interesa vemos que en esta situación no hay radiación de ondas al exterior del sistema: *si B no varía temporalmente entonces E no tiene más fuente que la densidad de carga superficial, porque $\nabla \times \vec{E} = 0$ y, consecuentemente, se comporta como un campo electrostático.* No puede abandonar el condensador sino que ha de permanecer ligado a las cargas. Este sería un ejemplo de corriente no estacionaria pero no radiativa. Por lo demás es un caso bastante particular. En general una corriente no estacionaria es una fuente de radiación.

6.1.2 Potenciales dinámicos

Estamos interesados en calcular los campos eléctrico y magnético que producen en el espacio distribuciones arbitrarias de carga y corriente. A partir de las ecuaciones de Maxwell se obtienen las ecuaciones de onda en la forma más general posible:

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \nabla \frac{\rho}{\epsilon} + \mu_0 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} \quad (6.2)$$

$$\nabla^2 \vec{H} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = -\nabla \times \vec{J} \quad (6.3)$$

sin embargo éste no resulta un punto de partida útil en la práctica para calcular los campos, porque al aplicarlas a cualquier situación realista tendremos un sistema de ecuaciones de gran complejidad.

Se utiliza como alternativa *el planteamiento de las ecuaciones para las funciones potenciales*. En lo sucesivo se supondrá que nuestro sistema radiante está en el vacío (o en el aire).

Las funciones potenciales que se utilizan son conocidas: el potencial escalar eléctrico y el potencial vector magnético.

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{B} = 0 &\quad \Rightarrow \quad \exists \vec{A} / \nabla \times \vec{A} = \vec{B} = \mu_0 \vec{H} \\ \vec{H} &= \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{A}\end{aligned}\quad (6.4)$$

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \vec{A}) \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \nabla \times \left(\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\right) &= 0 \quad \Rightarrow \quad \exists \phi / -\nabla \phi = \vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}\end{aligned}\quad (6.5)$$

El potencial vector es el mismo que en problemas estáticos, mientras que el potencial escalar ha tenido que redefinirse, puesto que ahora el campo eléctrico no es irrotacional en general, sino que *es el campo eléctrico más la derivada temporal del potencial vector* el que es irrotacional.

Si tomamos la ecuación de Ampère-Maxwell y sustituimos los campos por su expresión en función de los potenciales llegaremos a:

$$\nabla^2 \vec{A} - \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) = -\mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial(\nabla \phi)}{\partial t} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

mientras que si hacemos lo mismo en la ecuación de Gauss obtenemos:

$$\nabla^2 \phi + \frac{\partial(\nabla \cdot \vec{A})}{\partial t} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Estas ecuaciones significan un primer paso en el intento de alcanzar una base teórica útil para atacar problemas de radiación, aunque en esa forma todavía no resultan prácticas. El paso definitivo se consigue mediante la siguiente substitución:

$$\nabla \cdot \vec{A} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \phi}{\partial t}\quad (6.6)$$

Esa igualdad se conoce como *norma de Lorentz*, y constituye el complemento a la

definición de \vec{A} dada por su rotacional en la ecuación (6.4). Al sustituir en las ecuaciones de arriba se obtiene:

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{J} \\ \nabla^2 \phi - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \end{cases} \quad (6.7)$$

Éstas son las *ecuaciones de onda para los potenciales*. Resultan más sencillas que las precedentes porque se han separado ambos potenciales y los dos tipos de fuentes: las corrientes con el potencial vector y las cargas con el potencial escalar. Eso simplifica notablemente la resolución. No significa que ϕ y \vec{A} se hayan hecho independientes, puesto que la norma de Lorentz los relaciona estrechamente. Por su parte, la ecuación de continuidad establece la relación entre ρ y \vec{J} .

Las soluciones a las ecuaciones dadas en (6.7) son:

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{v'} \frac{\rho(\vec{r}', t - \sqrt{\mu_0\epsilon_0} |\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \\ A(\vec{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{v'} \frac{\vec{J}(\vec{r}', t - \sqrt{\mu_0\epsilon_0} |\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \end{aligned} \quad (6.8)$$

Estas expresiones reciben el nombre de *potenciales retardados*.

Debe observarse que de hecho las soluciones son formalmente las mismas que se obtuvieron en estática, con la peculiaridad de que, a la hora de realizar la integración de las contribuciones de cada diferencial, no se asigna a los potenciales la misma variación temporal de las fuentes, sino que se tiene en cuenta *el retardo que corresponde al trayecto desde el diferencial de fuente hasta el punto en el que se evalúa el potencial*:

$$t_0 = \frac{d}{v} = \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} = \sqrt{\mu_0\epsilon_0} |\vec{r} - \vec{r}'|$$

6.1.3 Ecuaciones de los potenciales en régimen senoidal permanente

Es habitual en la práctica trabajar con variaciones temporales de tipo senoidal. Muchas de las situaciones reales responden a ese modelo de forma bastante aproximada. No se trabaja con señales de una única frecuencia, pero sí con señales de banda estrecha. Es típico, por ejemplo, tener una señal portadora que esté modulada por una señal de frecuencia mucho menor. En otros casos en que lo anterior no sea cierto se procederá, mediante un análisis de Fourier, a sumar la contribución de cada componente espectral.

En régimen senoidal permanente (RSP) las fuentes se escriben como:

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho_0(\vec{r}) \cos(\omega t + \phi_\rho(\vec{r}))$$

$$J_i(\vec{r}, t) = J_{i0}(\vec{r}) \cos(\omega t + \phi_{J_i}(\vec{r}))$$

en la forma más general posible, donde la densidad de carga y cada una de las componentes de la densidad de corriente tienen amplitudes y fases como funciones únicamente de la posición.

Los campos tendrán una forma similar.

Utilizaremos la *notación fasorial*, en la que la dependencia temporal y la frecuencia se suponen conocidas y sólo se escriben amplitudes y fases. Los resultados de interés quedan de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{A} + \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J} \\ \nabla^2 \phi + \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \end{cases} \quad (6.9)$$

para las ecuaciones de onda de los potenciales.

$$\begin{aligned} \phi(\vec{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{v'} \frac{\rho(\vec{r}') \exp(-jk_0|\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \\ \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{v'} \frac{\vec{J}(\vec{r}') \exp(-jk_0|\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv' \end{aligned} \quad (6.10)$$

para las soluciones (potenciales retardados), y

$$\nabla \cdot \vec{A} = -j\omega \mu_0 \epsilon_0 \phi \quad (6.11)$$

es la nueva expresión de la norma de Lorentz. Todas estas expresiones se deducen si dificultad de las anteriores.

6.2 Dipolo eléctrico oscilante

6.2.1 Densidad de carga y corriente en el dipolo eléctrico oscilante

Consideremos un dipolo eléctrico oscilante formado por dos cargas puntuales de valores $+q$ y $-q$, separadas una distancia h , y situadas sobre el eje Z equidistantes del origen. La magnitud de las cargas varía senoidalmente en el tiempo con frecuencia ω .

Podemos escribir:

$$\rho(\vec{r}, t) = q [\delta(\vec{r} - \frac{1}{2}h\hat{z}) - \delta(\vec{r} + \frac{1}{2}h\hat{z})] \cos\omega t \quad (6.12)$$

donde la delta de Dirac es la función que se utiliza para describir singularidades físicas (temporales, frecuenciales o espaciales, como en este caso) de un modo matemático-formal. (vease anexo D).

La ecuación (6.12) puede escribirse de forma más explícita como:

$$\rho(\vec{r}, t) = q \delta(x) \delta(y) [\delta(z - \frac{1}{2}h) - \delta(z + \frac{1}{2}h)] \cos\omega t \quad (6.13)$$

Tomamos esa forma y aplicamos la ecuación de continuidad. Suponemos que la densidad de corriente sólo tiene componente Z , en la dirección que une las cargas:

$$\nabla \cdot \vec{J} = \frac{\partial J_z}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}, t) = -q \delta(x) \delta(y) [\delta(z - \frac{1}{2}h) - \delta(z + \frac{1}{2}h)] (-\omega \sin\omega t)$$

y tratamos de encontrar el valor de la densidad de corriente:

$$J_z(\vec{r}, t) = +\omega q \delta(x) \delta(y) [U(z - \frac{h}{2}) - U(z + \frac{h}{2})] \sin\omega t$$

donde la función U es la función escalón (o de Heaviside), que toma el valor cero hasta el punto donde el argumento es nulo y el valor uno a partir de él:

$$U(z - z_0) = \begin{cases} 0 & \text{si } z < z_0 \\ 1 & \text{si } z > z_0 \end{cases}$$

La variación espacial de las densidades de carga y corriente del dipolo eléctrico, para un instante dado, se muestran en la figura 6.3.

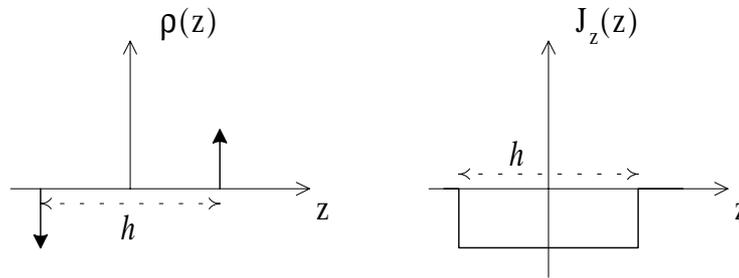


Fig. 6.3 Densidades de carga y corriente del dipolo

Obsérvese que el resultado es perfectamente lógico: en un dipolo oscilante las cargas van alternando periódicamente su valor, desde $+q$ hasta $-q$, y viceversa, pero esto no es posible, según la ecuación de continuidad, si no existe una densidad de corriente que va transportando esa carga de uno a otro extremo a la misma frecuencia.

Podemos escribir la densidad de corriente en su forma completa:

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = -\omega q \hat{z} [U(z + h/2) - U(z - h/2)] \delta(x) \delta(y) \sin \omega t$$

y también su forma fasorial:

$$\vec{J}(\vec{r}) = j\omega q \hat{z} [U(z + h/2) - U(z - h/2)] \delta(x) \delta(y) \quad (6.14)$$

La corriente se obtiene integrando esa expresión en la sección diferencial de un hilo muy delgado:

$$I = j\omega q \quad \text{entre } z = -h/2 \text{ y } z = +h/2 \quad (6.15)$$

6.2.2 Potencial vector generado por el dipolo eléctrico

En la figura 6.4 se muestra un hilo corto recorrido por una corriente *homogénea* I_0 , con variación temporal de tipo senoidal. Haremos el análisis con el dipolo centrado en el origen de coordenadas.

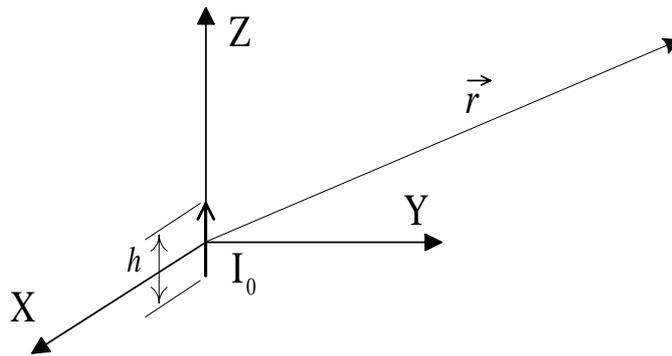


Fig. 6.4 Dipolo eléctrico oscilante

Aparentemente es una corriente contradictoria con la ecuación de continuidad, porque el hilo se interrumpe abruptamente en ambos extremos (la corriente es uniforme). Sin embargo, es posible considerarla así por la suposición hecha de que la carga acumulada en cada extremo en un periodo temporal es una carga puntual, de densidad infinita. Ese es el motivo por el que recibe el nombre de dipolo eléctrico.

El primer paso para el cálculo de los campos es obtener el potencial vector. Su expresión es:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C \frac{I(\vec{r}') d\vec{l}' \exp(-jk|\vec{r} - \vec{r}'|)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (6.16)$$

donde \vec{r} es el punto en el que calculamos el potencial y $\vec{r}' = z' \hat{z}$ es el radiovector que va recorriendo los diferenciales de corriente:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_0 \hat{z} \int_C \frac{\exp(-jk[r^2 + z'^2 - 2rz' \cos\theta]^{1/2})}{[r^2 + z'^2 - 2rz' \cos\theta]^{1/2}} dz'$$

donde se ha escrito: $|\vec{r} - \vec{r}'| = [r^2 + z'^2 - 2rz' \cos\theta]^{1/2}$.

Haremos dos aproximaciones para poder calcular esa integral:

$$\begin{aligned} \text{i) } r \gg r' &\Rightarrow r \gg h; \\ \text{ii) } \lambda \gg h & \end{aligned} \quad (6.17)$$

La primera aproximación indica que vamos a calcular el potencial (y los campos) a cierta distancia del dipolo; la segunda, que se trata de un dipolo corto, en términos de la

longitud de onda. Sin duda estamos admitiendo limitaciones que restan generalidad al problema, pero de hecho estamos obligados a hacerlo si queremos avanzar en el cálculo de la integral (6.16). Más adelante se verá que los resultados son significativos, y que sirven de punto de partida para atacar otros problemas más generales.

La primera de las aproximaciones nos permite simplificar el denominador del integrando, que aproximaremos sencillamente por r .

La fase requiere algo más de cuidado:

$$[r^2 + z'^2 - 2rz' \cos\theta]^{1/2} = r \left[1 + \frac{z'^2}{r^2} - 2 \frac{z'}{r} \cos\theta \right]^{1/2}$$

Ocurre, y esto es básico en problemas de radiación, que los diferentes términos de orden creciente en un desarrollo en serie de la fase *sólo pueden eliminarse cuando además de ser mucho menores que los términos precedentes, sean mucho menores que π* . De otro modo se estarían cometiendo errores importantes, al ignorar términos que sí tienen relevancia.

En nuestro caso la fase podemos desarrollarla como:

$$k |\vec{r} - \vec{r}'| \approx k r \left[1 - 2 \frac{z'}{r} \cos\theta + \frac{z'^2}{r^2} \right]^{1/2} \approx \frac{2\pi}{\lambda} r \left(1 - \frac{z'}{r} \cos\theta + \frac{1}{2} \frac{z'^2}{r^2} \right)$$

donde admitimos que se cumplen las dos desigualdades siguientes:

$$\frac{2\pi}{\lambda} z' \leq \frac{2\pi}{\lambda} h \ll \pi \quad \text{y} \quad \frac{2\pi}{\lambda} \frac{1}{2} \frac{h^2}{r} \ll \pi$$

que pueden escribirse también como:

$$h \ll \frac{\lambda}{2} \quad \text{y} \quad h^2 \ll \lambda r \quad (6.18)$$

La primera condición es, de hecho, equivalente a $h \ll \lambda$. La segunda se desprende necesariamente de la primera y de $r \gg h$. Con esas suposiciones el potencial vector queda finalmente:

$$\vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} I_0 \hat{z} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{1}{r} \exp(-jkr) dz' = \frac{\mu_0}{4\pi} I_0 h \hat{z} \frac{\exp(-jkr)}{r} \quad (6.19)$$

6.2.3 Cálculo de los campos \vec{E} y \vec{H}

A partir del potencial vector podemos obtener todas las magnitudes de interés del problema. La secuencia de cálculo más inmediata sería:

$$\vec{A} \rightarrow (\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{A}) \rightarrow \vec{H} \rightarrow (\vec{E} = \frac{1}{j\omega \epsilon_0} \nabla \times \vec{H}) \rightarrow \vec{E}$$

y de allí puede procederse a calcular el vector de Poynting y la potencia radiada.

También se puede trabajar con el potencial escalar, calculado mediante la norma de Lorentz, y obtener el campo eléctrico a partir de los dos potenciales.

Habitualmente trabajaremos en coordenadas esféricas, que se adaptan mejor a las características del problema.

Partimos de:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_0 h \frac{\exp(-jkr)}{r} (\hat{r} \cos\theta - \hat{\theta} \sin\theta) \quad (6.20)$$

El campo magnético se obtiene a partir del rotacional de (6.20):

$$\vec{H}(\vec{r}) = \hat{\phi} \frac{I_0}{4\pi} h k^2 \left(j \frac{1}{kr} + \frac{1}{k^2 r^2} \right) \exp(-jkr) \sin\theta \quad (6.21)$$

y el campo eléctrico resulta finalmente de la forma:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_r(r, \theta) \hat{r} + E_\theta(r, \theta) \hat{\theta}$$

donde

$$\begin{aligned} E_r &= \eta_0 \frac{I_0 h}{4\pi} 2 \left(1 - j \frac{1}{kr} \right) \cos\theta \frac{\exp(-jkr)}{r^2} \\ E_\theta &= \eta_0 k \frac{I_0 h}{4\pi} \left(1 + \frac{1}{kr} - j \frac{1}{k^2 r^2} \right) \sin\theta \frac{\exp(-jkr)}{r} \end{aligned} \quad (6.22)$$

Las ecuaciones (6.21) y (6.22) son el final de esta primera parte del problema. Obsérvese que los campos producidos por el dipolo tienen la forma de una *onda esférica*, es decir, que los lugares geométricos de los puntos del espacio donde las componentes de los campos tienen la misma fase son superficies esféricas centradas en el dipolo.

A diferencia de la onda plana la onda esférica de las ecuaciones (6.21) y (6.22) tiene una forma matemática complicada. En los apartados siguientes examinaremos la forma de los campos a diferentes distancias del dipolo para obtener algo más de información.

6.2.4 Campos radiados

Se denominan *campos radiados* aquellos que se obtienen con la aproximación de *campo lejano*: campos medidos a gran distancia de la antena emisora. La importancia de esa aproximación es bastante clara. Se trata de obtener las características de los campos que realmente van a recibir otras antenas, que normalmente estarán alejadas del lugar de emisión.

Hasta ahora hemos estado suponiendo que el punto en el que evaluamos el campo está situado a cierta distancia del dipolo ($r \gg h$). Ahora además vamos a particularizar al caso en que esa distancia es grande también comparada con la longitud de onda:

$$r \gg \lambda \quad \Rightarrow \quad r/\lambda \gg 1 \quad \Rightarrow \quad kr \gg 1 \quad (6.23)$$

Con esa condición algunos de los términos de las diferentes componentes de los campos pueden ignorarse. En particular, ocurre: $E_r \ll E_\theta$ y los campos resultan:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{rad}(\vec{r}) &= jk\eta_0 \frac{I_0 h}{4\pi} \sin\theta \frac{\exp(-jkr)}{r} \hat{\theta} \\ \vec{H}_{rad}(\vec{r}) &= jk \frac{I_0 h}{4\pi} \sin\theta \frac{\exp(-jkr)}{r} \hat{\phi} \end{aligned} \quad (6.24)$$

que son las expresiones utilizadas habitualmente para el dipolo radiante.

Los campos radiados son los que tienen interés en la práctica, porque son los campos que realmente llegan a las antenas receptoras cuando se utilizan frecuencias de emisión no excesivamente bajas.

La onda esférica en campo lejano representada por los campos de las ecuaciones (6.24) tiene algunas particularidades notables que deben reseñarse:

- los campos eléctrico y magnético están en fase;
- la relación entre sus amplitudes coincide con la impedancia intrínseca del medio;
- sus direcciones de oscilación son perpendiculares entre sí, y perpendiculares a la dirección de propagación.

Es debido a esas características que la onda puede considerarse como una onda plana o, por mejor decir, como una *onda localmente plana*.

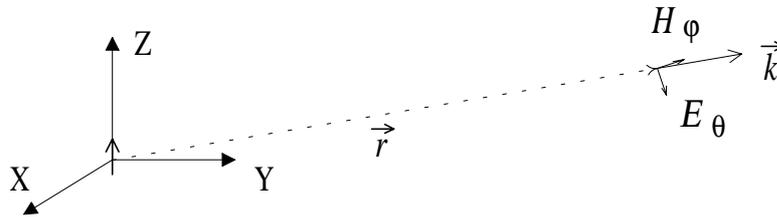


Fig. 6.5 La onda emitida por el dipolo es similar, en campo lejano, a una onda plana

6.2.5 Características de radiación del dipolo eléctrico

Existen varios parámetros que informan de las características de radiación de una antena o de un sistema radiante. Tales parámetros son:

- la resistencia de radiación,
- el diagrama de radiación,
- la ganancia directiva y la directividad.

Los veremos particularizados al caso del dipolo eléctrico. Como todos esos parámetros se relacionan con la potencia radiada por la antena es lo que calcularemos en primer lugar.

El vector de Poynting medio en campo lejano es:

$$\vec{P}_m = \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E}_{rad} \times \vec{H}_{rad}^*) = \frac{1}{2} \left(\frac{I_0 h}{4\pi} \right)^2 k^2 \eta_0 \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \hat{r} \quad (6.25)$$

y la potencia radiada debe coincidir con el flujo del vector de Poynting a través de una superficie cerrada que englobe al dipolo (una esfera de radio r por sencillez).

$$P_{rad} = \frac{1}{2} \left(\frac{I_0 h}{4\pi} \right)^2 k^2 \eta_0 \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^2 \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \sin \theta \, d\theta \, d\varphi = \frac{1}{3} \frac{1}{4\pi} (I_0 h)^2 k^2 \eta_0 \quad (W) \quad (6.26)$$

Resistencia de radiación

El dipolo podría esquematizarse en cualquiera de las dos formas que se muestran en la figura:

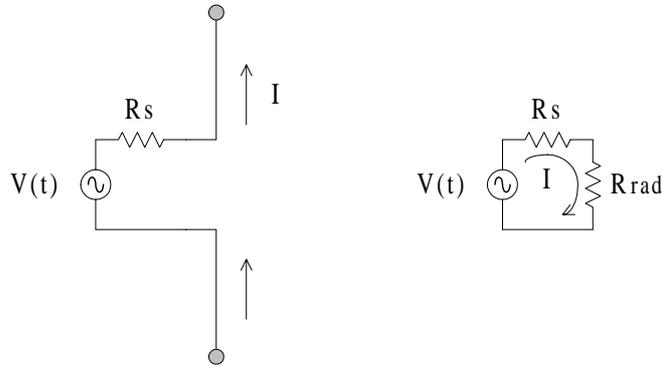


Fig. 6.5 Resistencia de radiación

Parte de la potencia suministrada por la fuente de tensión es radiada al espacio y el resto se disipará en la resistencia interna de la fuente y en la resistencia óhmica del dipolo. Se simula el efecto de radiación, desde el punto de vista de la fuente, *como una resistencia que disipa una parte de la potencia igual a la potencia radiada*. Es importante entonces que la potencia radiada sea lo mayor posible, y por tanto: $R_{rad} \gg R_s$.

Se define la resistencia de radiación simplemente como:

$$R_{rad} = \frac{P_{rad}}{I_{eff}^2} = (RSP) 2 \frac{P_{rad}}{I_0^2} \quad (\Omega) \quad (6.27)$$

y para el dipolo eléctrico resulta:

$$R_{rad} = \frac{2}{3} \frac{1}{4\pi} \eta_0 h^2 k^2 = 80\pi^2 \left(\frac{h}{\lambda} \right)^2 \quad \Omega \quad (6.28)$$

En realidad lo interesante de una antena es que tenga una elevada resistencia de radiación y, sin embargo, en el caso del dipolo eléctrico corto esto no se cumple en absoluto. Obsérvese que precisamente se asumió que su longitud es mucho menor que la longitud de onda ($h \ll \lambda$). La conclusión es que *el dipolo corto no es una antena eficiente*: debe hacerse circular una intensidad de corriente elevada para radie de forma apreciable.

Diagrama de radiación

Cuando tratamos con una antena no estamos interesados en conocer únicamente qué cantidad de potencia radia, sino también en cómo se distribuye esa potencia en el espacio. Se denomina *antena isotrópica* a aquella que radia uniformemente en todo el espacio, como si se tratase de una fuente esférica perfecta; antenas *omnidireccionales* son aquellas que radian apreciablemente en un abanico completo de direcciones, con cierto grado de simetría esférica; antenas *direccionales* son, por último, las que concentran la radiación en un cono, de mayor o menor amplitud, alrededor de una dirección privilegiada.

El *diagrama de radiación* permite apreciar de un golpe de vista la distribución espacial de la potencia radiada por la antena. Es la representación gráfica tridimensional del vector de Poynting, normalizado a la unidad, y se define:

$$t(\theta, \varphi) = \frac{|\vec{P}(r, \theta, \varphi)|}{|\vec{P}(r, \theta, \varphi)|_{MAX}} \quad (6.29)$$

El diagrama de radiación del dipolo eléctrico es:

$$t(\theta, \varphi) = \sin^2 \theta \quad (6.30)$$

La representación gráfica se realiza como la de un diagrama polar en tres dimensiones, asignando al módulo r de cada punto representado el valor que le corresponde de t según su dirección (θ, φ) :

$$r = t(\theta, \varphi) \quad \text{para cada punto } (r, \theta, \varphi)$$

En la figura 6.6 se muestran dos cortes según los ejes del diagrama de radiación del dipolo. Tiene simetría azimutal como cabía esperar de la geometría cilíndrica de la corriente.

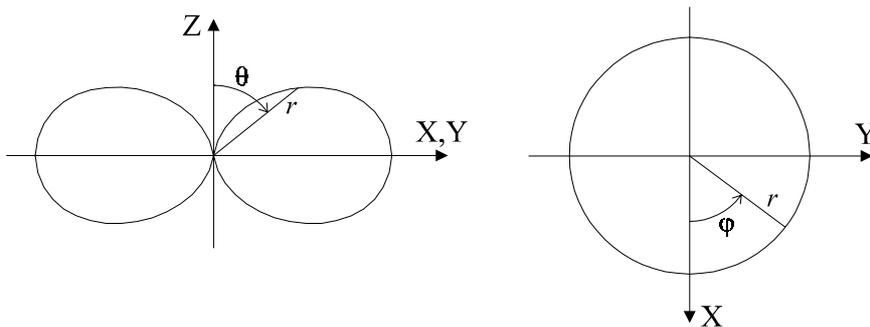


Fig. 6.6 Dos secciones del diagrama de radiación del dipolo

Ganancia directiva y directividad

La ganancia directiva no es, en realidad, algo distinto del diagrama de radiación. La única diferencia es que ahora no se normaliza a la unidad, sino que se toma como referencia una antena que radie, de forma isotrópica, la misma cantidad de potencia que la considerada. Matemáticamente:

$$D(\theta, \varphi) = \frac{|\vec{P}(r, \theta, \varphi)|}{|\vec{P}(r)|_{ISOTR.}} = \frac{|\vec{P}(r, \theta, \varphi)|}{\frac{P_{rad}}{4\pi r^2}} \quad (6.31)$$

Para el caso del dipolo resulta:

$$D(\theta, \varphi) = \frac{3}{2} \text{sen}^2 \theta \quad (6.32)$$

La *directividad* es el valor máximo de la ganancia directiva. Para el caso del dipolo toma el valor de 1,5. La directividad de una antena isotrópica es la unidad, ya que es la de referencia, y la directividad de cualquier otra antena es siempre mayor que uno.

$$D_0 = \max[D(\theta, \varphi)] \quad (6.33)$$

Usualmente se da la directividad en dB ($10 \log D_0$).

6.2.6 Campos inducidos

Después de ver los campos a grandes distancias conviene examinar cómo son cerca de la antena. Esto tiene interés teórico para clarificar algunos conceptos, y también repercusiones prácticas, aunque no las trataremos aquí.

Se denominan campos inducidos a los campos presentes en la inmediaciones de la antena. Tal proximidad se juzga en función de la longitud de onda, y no de las dimensiones de la propia antena.

Los campos que obtuvimos para el dipolo (Ecs. (6.21) y (6.22)) son válidos en la suposición de que $r \gg h$. Ahora añadiremos la condición de que $r \ll \lambda$. Esto es posible porque también asumíamos que la longitud del dipolo era mucho menor que la longitud de onda (dipolo corto).

Los términos dominantes en las expresiones de los campos son diferentes, puesto que

$$r \ll \lambda \quad \Rightarrow \quad kr \ll 1$$

Al aproximar en las expresiones (6.21) y (6.22) tenemos:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{ind}(\vec{r}) &\approx -j\eta_0 \frac{I_0 h}{4\pi k} \frac{2\hat{r} \cos\theta + \hat{\theta} \sin\theta}{r^3} \\ \vec{H}_{ind}(\vec{r}) &\approx \frac{I_0 h}{4\pi} \frac{\sin\theta}{r^2} \hat{\phi} \end{aligned} \quad (6.34)$$

donde incluso la exponencial de fase, que es quien da el carácter de onda viajera, ha sido ignorada. Es interesante comprobar que los campos inducidos en la proximidad de la antena no se diferencian apreciablemente de los que podríamos obtener con aproximaciones estáticas. En el caso del campo eléctrico bastará con hacer algunas sustituciones y utilizar la ecuación (6.15) para llegar a la expresión:

$$\vec{E}_{ind}(\vec{r}) \approx \frac{qh}{4\pi \epsilon_0} \frac{2\hat{r} \cos\theta + \hat{\theta} \sin\theta}{r^3} \quad (6.35)$$

que coincide con la expresión conocida del campo creado por un dipolo eléctrico. La variación temporal será la misma que la de las cargas, sin incluir ningún retardo. Ocurre que estamos calculando los campos en puntos *a los que las ondas llegan casi de forma instantánea, en comparación con el periodo propio de las señales*, y en esa situación utilizar la ecuación de los potenciales retardados no tiene objeto.

Trate de hacer el cálculo del campo magnético por los procedimientos usuales de Magnetostática y compruebe que obtiene la aproximación dada en (6.34) para ese campo.

6.3 Radiación simultánea de dos dipolos

En este apartado veremos cómo son los campos producidos por un sistema de dos dipolos. El interés de agrupar elementos sencillos para construir un sistema radiante radica en que pueden mejorarse algunas características de radiación respecto a las del elemento aislado. En particular esto es cierto para la directividad.

6.3.1 Campo radiado

Considérese un sistema formado por dos dipolos orientados en la misma dirección y separados una distancia $2d$, tal como se muestra en la figura 6.7.

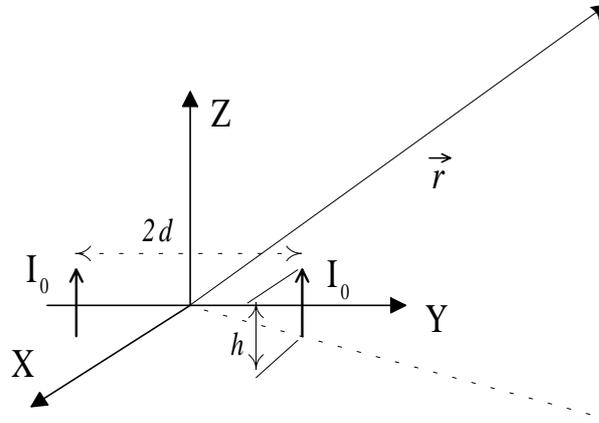


Fig. 6.7 Sistema radiante formado por dos dipolos idénticos

Podemos evaluar el campo radiado (campo lejano) producido por ambos dipolos mediante la superposición de los campos individuales. Previamente debemos reescribir el campo radiado por un único dipolo cuando está desplazado respecto al origen de coordenadas.

$$\vec{E}_{rad}(\vec{r}) = jk\eta_0 \frac{I_0 h}{4\pi} \text{sen } \theta_1 \frac{\exp(-jk|\vec{r} - \vec{r}_1|)}{|\vec{r} - \vec{r}_1|} \hat{\theta}_1$$

\vec{r}_1 es el radiovector de posición del dipolo, y además se han escrito el ángulo θ_1 y el vector unitario correspondiente medidos desde el dipolo, porque en rigor serían diferentes a los trazados desde el origen. Sin embargo, el tener que hacer esta última distinción complicaría enormemente el problema. Asumamos que la separación entre los dipolos no es

excesivamente grande en comparación con la longitud de onda, lo cuál es razonable. Entonces tenemos $d \approx \lambda \ll r$, y podemos escribir $\theta_1 \approx \theta$ y $\hat{\theta}_1 \approx \hat{\theta}$.

La distancia entre el dipolo y el punto donde vemos el campo es:

$$|\vec{r} - \vec{r}_{1,2}| = |(x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z} - (\pm d)\hat{y})| = (r^2 - 2y(\pm d) + d^2)^{1/2}$$

para cada uno de los dipolos.

El denominador lo aproximaremos sencillamente por r . En la fase debemos ser más cuidadosos:

$$k|\vec{r} - \vec{r}_{1,2}| = kr \left(1 - 2y \frac{(\pm d)}{r^2} + \frac{d^2}{r^2}\right)^{1/2} \approx kr \left(1 \mp y \frac{d}{r^2}\right) = kr \mp kd \sin\theta \sin\varphi$$

lo que será válido siempre que el término eliminado sea pequeño:

$$k \frac{d^2}{2r} = \frac{\pi d^2}{\lambda r} \ll \pi \Rightarrow d^2 \ll \lambda r \quad (6.36)$$

El campo radiado queda finalmente en la forma:

$$\vec{E}_{rad}(\vec{r}) = 2jk\eta_0 \frac{I_0 h}{4\pi} \sin\theta \frac{\cos[kd \sin\theta \sin\varphi]}{r} \hat{\theta} \quad (6.37)$$

Para calcular el campo magnético no es necesario volver a la ecuación de Ampère-Maxwell, debido a que la onda radiada es localmente plana. Podría utilizarse la relación conocida:

$$\vec{H}_{rad} = \frac{1}{\eta_0} \hat{k} \times \vec{E}_{rad} \quad (\hat{k} = \hat{r})$$

6.3.2 Resistencia de radiación y ganancia directiva

Para analizar las características de la radiación del sistema obtenemos del vector de Poynting

$$\vec{P}_m = \frac{1}{2\eta_0} |\vec{E}_{rad}|^2 \hat{k} = 2k^2 \eta_0 \left(\frac{I_0 h}{4\pi}\right)^2 \frac{\sin^2\theta \cos^2[kd \sin\theta \sin\varphi]}{r^2} \hat{r} \quad (6.38)$$

La dependencia del flujo de potencia con los ángulos esféricos tiene una forma peculiar. El *diagrama de radiación* depende de la separación entre los dipolos medida en longitudes de onda (kd). Tenemos:

$$t(\theta, \varphi) = \sin^2\theta \cos^2[kd \sin\theta \sin\varphi] \quad (6.39)$$

El cálculo de la potencia no puede realizarse analíticamente. Escribiremos:

$$P_{rad} = \oint_S \vec{P}_m \cdot d\vec{s} = C I_0^2 I(kd) \quad (6.40)$$

donde

$$C = 2k^2 \eta_0 \left(\frac{h}{4\pi} \right)^2 \quad \text{y} \quad I(kd) = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin^3 \theta \cos^2[kd \sin \theta \sin \varphi] d\theta d\varphi$$

El valor de la integral $I(kd)$ se ha calculado numéricamente y se muestra en la figura 6.8:

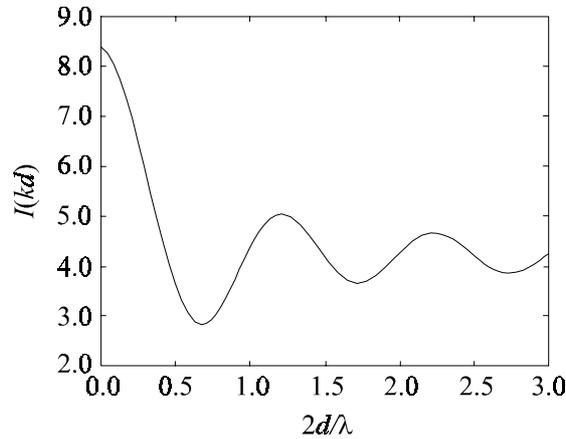


Fig. 6.8 Integral normalizada del flujo de potencia para dos dipolos en el plano

La resistencia de radiación es:

$$R_{rad} = \frac{P_{rad}}{I_{eff}^2} = 2 \frac{P_{rad}}{I_0^2} = 2 C I(kd) \quad (\Omega) \quad (6.41)$$

Esos resultados merecen ser analizados con algo más de detenimiento para comprender el comportamiento del sistema radiante.

Una primera cuestión que se pone de manifiesto es que tanto la *potencia total radiada* como la *resistencia de radiación* no guardan relación directa con las de un dipolo aislado: la forma de la integral $I(kd)$ hace que dependan algo caprichosamente de la separación entre los dos dipolos.

Ese hecho podría resultar sorprendente a primera vista, pero si se razona despacio se llega a comprender que no es un resultado ilógico.

En primer lugar, y desde el punto de vista de los campos radiados al espacio, es claro que *el principio de superposición se aplica al campo (eléctrico o magnético), pero no a la densidad de potencia ni a la potencia*. Al calcular el vector de Poynting como el cuadrado de la suma de campos el resultado es diferente a la suma de los cuadrados.

Por tanto dos dipolos no radian, en general, la potencia suma de las potencias que radiarían individualmente cada uno.

Desde el punto de vista del generador el problema es, quizá, menos claro, ya que habíamos convenido en que un dipolo podía simularse como una resistencia. Ahora parece, sin embargo, que no podemos mantener la analogía y utilizar dos resistencias (en paralelo o en serie) para representar al conjunto de los dos dipolos. Y es cierto. Podríamos en todo caso, tal como se ha hecho, calcular la nueva resistencia de radiación equivalente *a posteriori*, después que el problema electromagnético ha sido resuelto, pero el problema no tiene solución en el terreno puramente circuital.

En realidad lo que está sucediendo es que las antenas representan, de cara al generador, una impedancia compleja, con parte real (resistencia de radiación) y parte imaginaria (reactancia de la antena). *La reactancia se relaciona con la energía almacenada en los campos que circundan la antena.* Obsérvese que en todo momento nos hemos limitado a calcular el vector de Poynting en la zona de radiación, a grandes distancias del dipolo, pero si hubiéramos hecho el cálculo con las expresiones completas de los campos habríamos obtenido otra componente del flujo de potencia: en particular una componente P_{θ} en el caso del dipolo. Eso indica que *existe energía electromagnética que no es radiada, sino que permanece indefinidamente en las inmediaciones del dipolo.* Esa energía presente, pero no radiada, se simula, una vez calculada, mediante elementos no resistivos. Sin embargo el cálculo de la reactancia, como parte esencial de la impedancia de entrada de la antena vista desde el generador, sobrepasa el propósito de este libro. Se verá con detalle en la asignatura de Antenas.

Por último es interesante comprobar la variación del diagrama de radiación en función de la separación entre los dipolos. En la figura 6.9 se ha representado la sección del diagrama en el plano X-Y ($\theta = \pi/2$, ϕ variable) para diferentes valores de d .

El primero corresponde al caso trivial en que ambos dipolos no se separen apreciablemente, en términos de longitud de onda, y no se diferencia del de un único dipolo. El segundo corresponde a una separación entre los dipolos de media longitud de onda. Obsérvese que la radiación según la dirección que une los dipolos (eje Y) se cancela, mientras que se refuerza en la dirección perpendicular. Por último, para una separación de una longitud de onda, aparecen dos máximos en direcciones perpendiculares. Se obtendrían diagramas con un número creciente de lóbulos de radiación si siguiésemos incrementando la separación entre ambos dipolos.

A pesar de que los diagramas se han obtenido después de un cálculo sistemático no está de más comprobar que responden perfectamente a la física del problema.

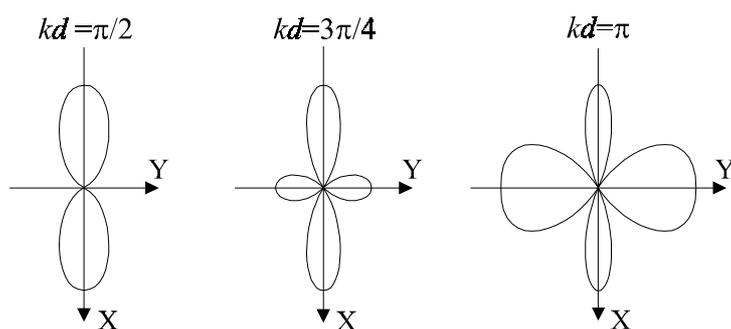


Fig. 6.9 Cortes de la ganancia directiva del sistema de dos dipolos en el plano X-Y

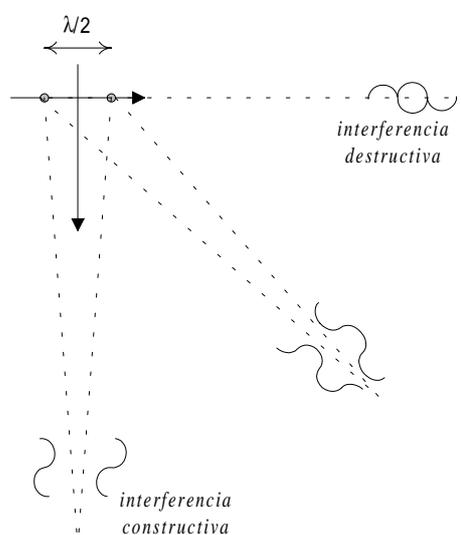


Fig. 6.10 El análisis cualitativo de las interferencias producidas a grandes distancias permite prever la forma del diagrama de radiación, al menos en algunas direcciones particulares (caso $k2d=\pi$)

En la figura 6.10 se muestra que el valor del diagrama en algunas direcciones eran previsibles por simple inspección de la geometría del sistema.

6.4 Radiación de una antena larga de tipo dipolo

Una antena larga es aquella cuyas dimensiones son del orden de la longitud de onda de emisión.

Podemos aprovechar los resultados precedentes para realizar el estudio de la radiación de este tipo de antenas. Para ello se realiza *una partición de la longitud de la antena larga en una sucesión de dipolos elementales*, y el campo eléctrico total se obtiene como la suma de los campos producidos por cada uno de ellos.

El campo creado por un dipolo corto que ha sido desplazado respecto del origen es:

$$\vec{E}_{rad}(\vec{r}) \approx \frac{1}{4\pi} jI_0 h k \eta_0 \frac{\exp(-jk|\vec{r} - \vec{r}_0|)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \sin\theta \hat{\theta} \quad (6.42)$$

con el dipolo orientado en la dirección Z y donde \vec{r}_0 es el vector de posición del dipolo.

En la aproximación de campo lejano ($r \gg \lambda$) y con $|\vec{r}_0| \ll r$ se obtiene la expresión:

$$\vec{E}_{rad}(\vec{r}) \approx \frac{1}{4\pi} jI_0 h k \eta_0 \frac{\exp(-jkr)}{r} \exp(+jk\hat{r} \cdot \vec{r}_0) \sin\theta \hat{\theta} \quad (6.43)$$

La distribución de corrientes en la antena tiene forma senoidal, con valor nulo en los extremos, tal como se muestra en la figura 6.11.

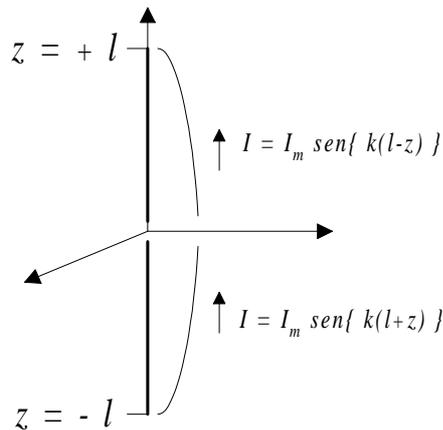


Fig. 6.11 Dipolo largo de $\lambda/2$

La forma senoidal obedece a que realizamos el análisis en régimen senoidal permanente (en tiempo), lo que fuerza una onda estacionaria de corriente de este tipo también espacialmente. Ahora sí imponemos la condición de contorno de corriente nula en los extremos, y por tanto prescindimos de la idealización que suponía admitir una concentración de carga infinita (carga puntual) en los extremos del dipolo.

El diferencial de campo radiado producido por cada diferencial de hilo es:

$$d\vec{E}_{rad}(\vec{r}) \approx \frac{1}{4\pi} j I_m \operatorname{sen}\{k(l \mp z')\} dz' k \eta_0 \frac{\exp(-jkr)}{r} \exp(-jkz' \cos\theta) \operatorname{sen}\theta \hat{\theta}$$

que se obtiene haciendo las substituciones adecuadas en la ecuación anterior. La integral entre los extremos del dipolo permite una expresión analítica para el campo eléctrico, y a partir de él se calcula el campo magnético. El resultado final es:

$$\begin{aligned} \vec{E}_{rad}(\vec{r}) &= \frac{1}{2\pi} j \frac{I_m \eta}{r} \frac{\cos(kl \cos\theta) - \cos kl}{\operatorname{sen}\theta} e^{-jkr} \hat{\theta} \\ \vec{H}_{rad}(\vec{r}) &= \frac{1}{2\pi} j \frac{I_m}{r} \frac{\cos(kl \cos\theta) - \cos kl}{\operatorname{sen}\theta} e^{-jkr} \hat{\phi} \end{aligned} \quad (6.44)$$

La antena de este tipo más popular es el dipolo de media longitud de onda, donde se elige

$$2l = \lambda/2$$

El vector de Poynting medio para ese caso es:

$$\vec{P}_m = \frac{1}{8\pi^2} \eta_0 \frac{|I_m|^2}{r^2} \frac{\cos^2(\pi/2 \cos\theta)}{\operatorname{sen}^2\theta} \hat{r} \quad (6.45)$$

La integral del vector de Poynting a través de una superficie esférica no tiene solución analítica, y por tanto la potencia radiada, la ganancia directiva y la resistencia de radiación deben obtenerse mediante cálculo numérico. Se comprueba que la resistencia de radiación del dipolo en $\lambda/2$ es de 73Ω , por lo que es mucho más eficiente que el dipolo corto.

El diagrama de radiación sí puede obtenerse a partir de (6.45). En la figura 6.12 se muestra una sección del diagrama en un plano vertical.

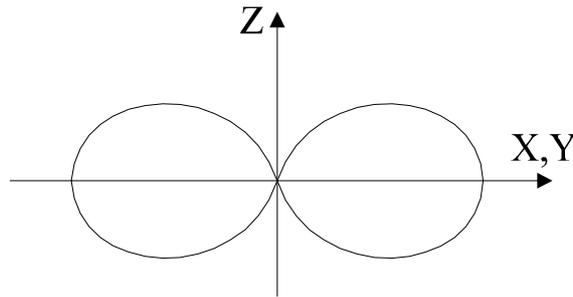


Fig. 6.12 Diagrama de radiación del dipolo en $\lambda/2$

6.5 Emisión en campo lejano: generalización

La onda emitida por un sistema radiante a distancias mucho mayores que sus propias dimensiones y que la longitud de onda de emisión es similar a una onda plana, tal como se ha visto en el caso del dipolo.

Este hecho permite realizar aproximaciones de partida que simplifican notablemente los cálculos. Lo veremos desde un punto de vista totalmente general.

El campo eléctrico se escribe en función de los potenciales en la forma:

$$\vec{E} = -\nabla\phi - j\omega \vec{A} \quad (6.46)$$

y mediante la relación que establece la norma de Lorentz puede expresarse en función del potencial vector:

$$\vec{E} = -j\omega \vec{A} - j\frac{1}{\omega\mu_0\epsilon_0}\nabla(\nabla\cdot\vec{A}) \quad (6.47)$$

Estamos interesados en el cálculo del campo a grandes distancias, por lo que basta con considerar los términos del potencial vector que varíen con r^{-1} . Escribimos:

$$\vec{A}_{rad}(r, \theta, \varphi) \approx \frac{\exp(-jkr)}{kr} (A'_r(\theta, \varphi)\hat{r} + A'_\theta(\theta, \varphi)\hat{\theta} + A'_\varphi(\theta, \varphi)\hat{\varphi}) \quad (6.48)$$

y trataremos de obtener la forma del campo eléctrico a través de la Ec. (6.47).

Aplicamos: $\nabla\cdot(f\vec{F}) = \nabla f\cdot\vec{F} + f\nabla\cdot\vec{F}$ a (6.44), y resulta:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{A}(\vec{r}) &= \nabla \left(\frac{\exp(-jkr)}{kr} \right) \cdot \vec{A}'(\theta, \varphi) + \frac{\exp(-jkr)}{kr} \nabla \cdot \vec{A}' \approx \\ &\approx k \frac{1+jkr}{(kr)^2} \exp(-jkr) A'_r + \frac{1}{r^2} (\dots) + \frac{1}{r^3} (\dots) +\end{aligned}$$

porque del segundo término no saldrá ningún sumando con dependencia más lenta que r^{-2} , con lo que no tiene relevancia para el campo radiado.

Calculamos el gradiente de la expresión anterior seleccionando los términos de interés:

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) \approx -\frac{k}{r} A'_r \exp(-jkr) + \frac{1}{r^2} (\dots) +$$

Y se obtiene finalmente:

$$-j \frac{1}{\omega \mu_0 \varepsilon_0} \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) \approx j \frac{k^2}{\omega \mu_0 \varepsilon_0} \frac{1}{kr} A'_r \exp(-jkr) = j\omega A_r$$

El campo eléctrico radiado se escribe entonces simplemente como:

$$\vec{E}_{rad}(\vec{r}) \approx -j\omega (A_\theta \hat{\theta} + A_\varphi \hat{\varphi}) \quad (6.49)$$

Compruebe en los dos casos estudiados anteriormente que se satisface esa relación.

De forma similar se comprueba que tampoco el campo magnético tiene componente radial a grandes distancias. Se obtiene:

$$\vec{H}_{rad}(\vec{r}) \approx -j \frac{\omega}{\eta_0} \hat{r} \times (A_\theta \hat{\theta} + A_\varphi \hat{\varphi}) \quad (6.50)$$

PROBLEMAS - CAPÍTULO 6

1. Dos dipolos eléctricos cortos están situados sobre el eje Z y orientados en la misma dirección. Las corrientes que recorren ambos dipolos tienen igual amplitud y fase (RSP). La distancia que los separa es $2d$ y la longitud de cada dipolo h (Fig. 1).

- a) Compruebe que el campo radiado (a grandes distancias) por el conjunto de ambos dipolos es:

$$\vec{E}_{rad}(\vec{r}) = k_0 \eta_0 \frac{I_0 h}{4\pi r} \sin^2 \theta \cos(kd \cos \theta) e^{-jkr} \hat{\theta}$$

y escriba las aproximaciones que ha realizado para llegar a esa expresión.

- b) Calcule el campo magnético radiado.
 c) Calcule la densidad de potencia media y la potencia radiada por el sistema.
 d) Dibuje el diagrama de radiación en un plano vertical para $kh = 0$, $kh = \pi/2$ y $kh = \pi$.

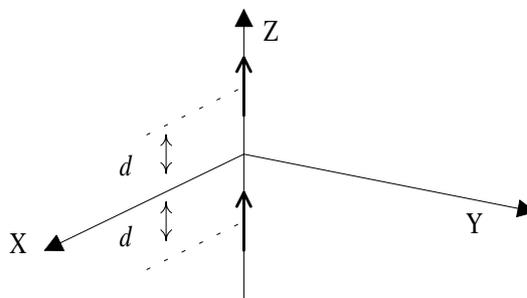


Fig. 1

2. Una cierta distribución de corriente de una antena, en RSP, produce un potencial vector en todo el espacio de la forma:

$$\vec{A}(\vec{r}) = C \frac{e^{-jkr}}{r} \left(j + \frac{1}{kr} \right) \sin \theta \hat{\phi}$$

donde C es una constante.

- a) Calcule los campos eléctrico y magnético a grandes distancias.
 b) Calcule el vector de Poynting medio y la potencia radiada.
 c) Obtenga el diagrama de radiación de la antena.

3. El potencial vector de un dipolo elemental en campo lejano viene dado por la expresión:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_0 h \frac{e^{-jkr}}{r} e^{jk\hat{r} \cdot \vec{r}_0} \hat{u}$$

donde h es su longitud, I_0 es el fasor de la corriente (homogénea) que lo recorre, y los vectores \hat{u} y \vec{r}_0 señalan la orientación y la posición del dipolo, respectivamente y \hat{r} es el vector unitario desde el origen de coordenadas. Se han realizado las aproximaciones: $r \gg \lambda$ y $r \gg h^2 / \lambda$.

Considérese la agrupación de tres dipolos idénticos como la mostrada en la figura 2. Las corrientes que recorren cada uno de ellos son iguales.

- Determine las expresiones del campo eléctrico radiado y del vector de Poynting medio en el plano XY.
- Si la frecuencia es de 200 MHz ¿cuál es el valor mínimo de d , separación entre los dipolos, para el que no se radia potencia en la dirección Y?
- Para el valor de d obtenido en el apartado anterior determine las demás direcciones de radiación nula en el plano XY.
- ¿En qué dirección del espacio la agrupación radia la máxima potencia?

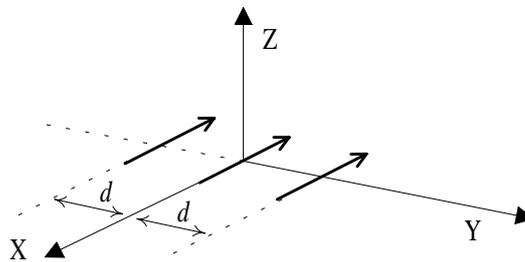


Fig.2

4.- Dos dipolos cortos están orientados en la dirección Z, separados una distancia $2d$, y situados a un lado y otro del origen, sobre el eje X, tal como muestra la figura 3. Las corrientes de cada dipolo son I_1 e I_2 , con la relación:

$$I_2 = I_1 e^{j\psi}$$

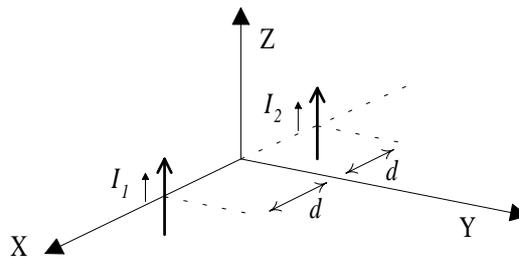


Fig. 3

- Compruebe que, si $d \ll r$, se puede escribir: $r_1 \approx r - d \cos \varphi$ y $r_2 \approx r + d \cos \varphi$, donde r es la distancia del origen de coordenadas al punto considerado en el plano XY, y r_1 y r_2 son las distancias al punto desde cada uno de los dipolos.

- b) Compruebe que el campo radiado en el plano XY debe ser proporcional a $\cos(kd \cos \varphi - \frac{\psi}{2})$.
- c) Determine el valor del desfase entre las corrientes, ψ , que se precisa si se desea tener un máximo de radiación para $\varphi = 45^\circ$, en el caso $d = \lambda/4$.
- d) Obtenga los ceros del diagrama de radiación en el plano XY y dibújelo.

5.- Dos dipolos están situados sobre el origen de coordenadas, uno de ellos con orientación en Z y el otro dispuesto oblicuamente, en el plano YZ, formando un ángulo α respecto al eje Z (fig. 4).

El potencial vector creado en todo el espacio por un dipolo centrado en el origen y orientado en la dirección de un cierto vector unitario \hat{u} es:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I_i h \frac{e^{-jkr}}{r} \hat{u}$$

- a) Calcule el campo radiado por el conjunto de ambos dipolos a grandes distancias.
- b) Particularice la expresión anterior para puntos del plano XY, y obtenga la polarización de la ondas emitidas en las direcciones X e Y,
- b1) si las corrientes de ambos dipolos son idénticas;
- b2) si las corrientes son de la misma amplitud pero las están en cuadratura.
- c) ¿En alguno de los casos anteriores podría obtenerse una polarización circular?

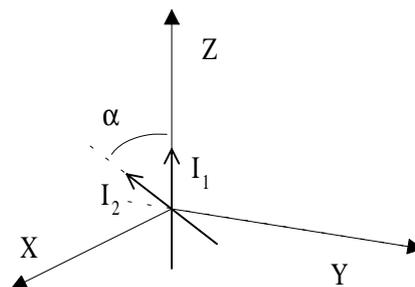


Fig. 4

6.- Calcule el potencial vector producido a grandes distancias por una espira de corriente de radio a centrada en el origen de coordenadas y paralela al plano XY (fig. 5). La corriente que la recorre es uniforme y de frecuencia ω .

Utilice el hecho de que la distancia entre un diferencial cualquiera de espira, situado en \vec{r}' , y un punto arbitrario del espacio, \vec{r} , puede aproximarse en la forma:

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = r - a \text{ sen } \theta \cos(\varphi - \varphi') \quad \text{si } r' \ll r$$

y aproxime el término de fase asumiendo que $\lambda \gg a$.

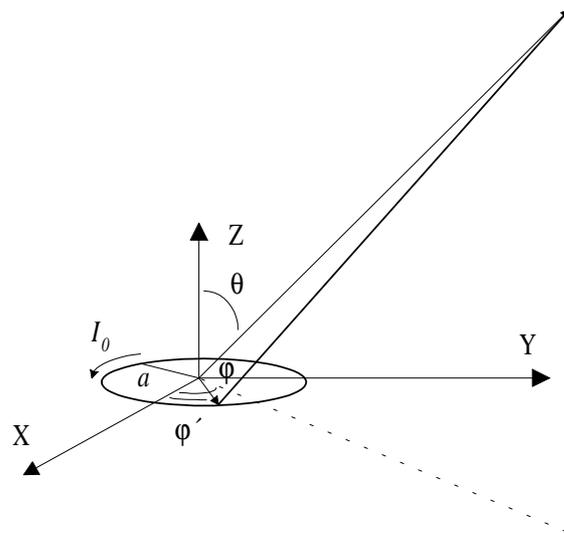
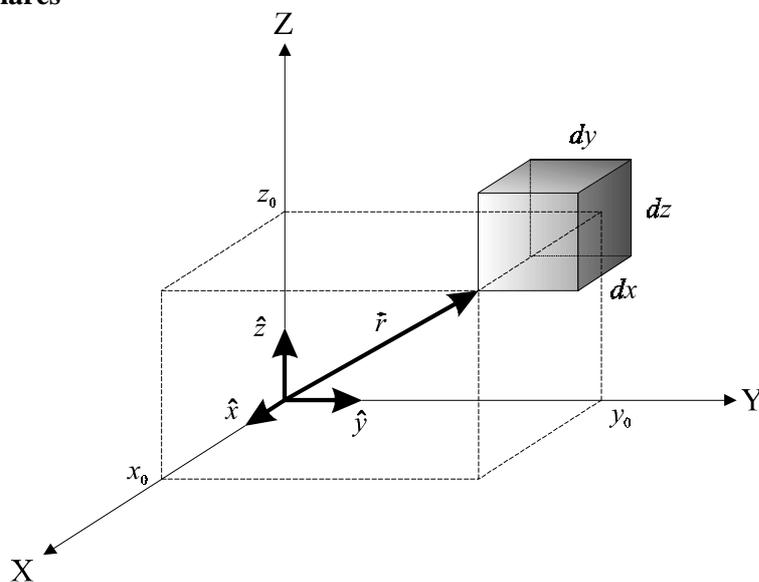


Fig. 5 Dipolo magnético oscilante

Anexo A: Sistemas de coordenadas

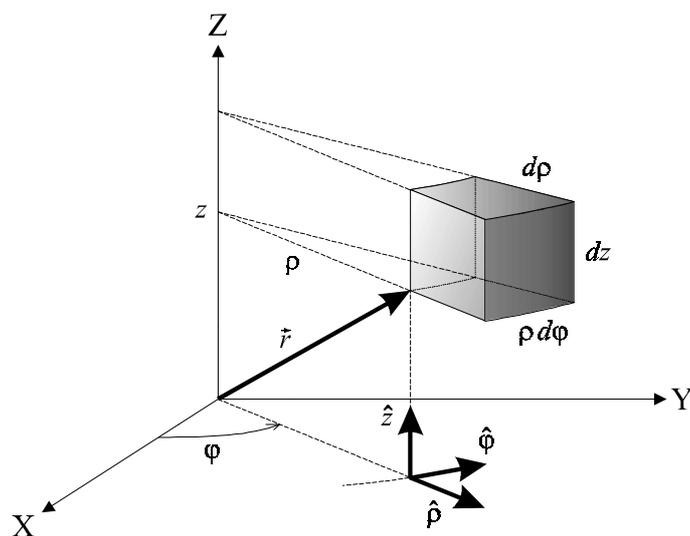
Coordenadas rectangulares



- radiovector desde el origen: $\vec{r} = x_0\hat{x} + y_0\hat{y} + z_0\hat{z}$
- diferencial de longitud genérico: $d\vec{l} = dx\hat{x} + dy\hat{y} + dz\hat{z}$
- diferenciales de superficie principales: $d\vec{s} = dx\,dy\,\hat{z}, dx\,dz\,\hat{y}, dy\,dz\,\hat{x}$
- diferencial de volumen: $dv = dx\,dy\,dz$
- vector genérico: $\vec{A} = A_x\hat{x} + A_y\hat{y} + A_z\hat{z}$
- vector unitario genérico: $\hat{r} = \frac{x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

Los vectores unitarios principales son \hat{x} , \hat{y} , \hat{z} con las relaciones:
 $\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$, $\hat{z} \times \hat{x} = \hat{y}$, $\hat{y} \times \hat{z} = \hat{x}$.

Coordenadas cilíndricas



- radiovector desde el origen: $\vec{r} = \hat{x} \rho \cos \varphi + \hat{y} \rho \sin \varphi + \hat{z} z$
- diferencial de longitud genérico: $d\vec{l} = d\rho \hat{\rho} + \rho d\varphi \hat{\phi} + dz \hat{z}$
- diferenciales de superficie principales: $d\vec{s} = \rho d\rho d\varphi \hat{z}, d\rho dz \hat{\phi}, \rho d\varphi dz \hat{\rho}$
- diferencial de volumen: $dv = \rho d\varphi d\rho dz$
- vector genérico: $\vec{A} = A_\rho \hat{\rho} + A_\varphi \hat{\phi} + A_z \hat{z}$
- vector unitario genérico: $\hat{r} = \frac{\hat{x} \rho \cos \varphi + \hat{y} \rho \sin \varphi + \hat{z} z}{\sqrt{\rho^2 + z^2}}$

Los vectores unitarios principales son $\hat{\rho}$, $\hat{\phi}$, \hat{z} ($\hat{\rho}$ y $\hat{\phi}$ dependen de la posición del punto considerado) con las relaciones: $\hat{\rho} \times \hat{\phi} = \hat{z}$, $\hat{z} \times \hat{\rho} = \hat{\phi}$, $\hat{\phi} \times \hat{z} = \hat{\rho}$.

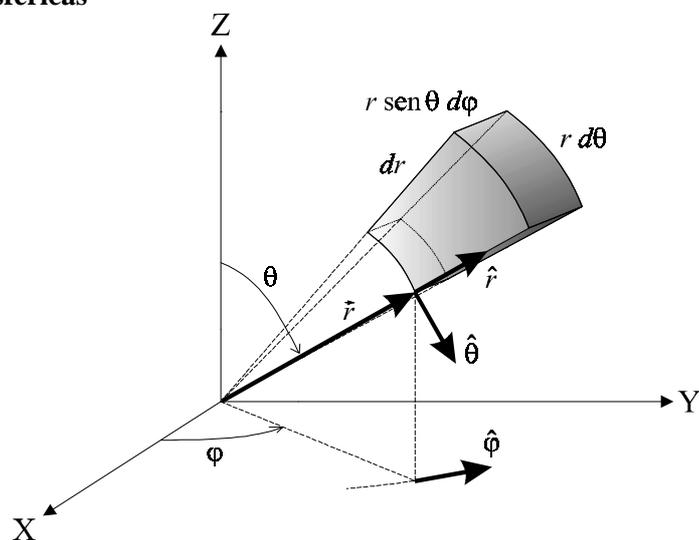
Cambio de sistema de coordenadas: de cilíndricas a cartesianas:

$$\begin{aligned}\hat{\rho} &= \hat{x} \cos \varphi + \hat{y} \sin \varphi \\ \hat{\phi} &= -\hat{x} \sin \varphi + \hat{y} \cos \varphi \\ \hat{z} &= \hat{z}\end{aligned}$$

de cartesianas a cilíndricas:

$$\begin{aligned}\hat{x} &= \hat{\rho} \cos \varphi - \hat{\phi} \sin \varphi \\ \hat{y} &= \hat{\rho} \sin \varphi + \hat{\phi} \cos \varphi \\ \hat{z} &= \hat{z}\end{aligned}$$

Coordenadas esféricas



- radiovector desde el origen: $\vec{r} = \hat{x}r \sin \theta \cos \varphi + \hat{y}r \sin \theta \sin \varphi + \hat{z}r \cos \theta$
- diferencial de longitud genérico: $d\hat{l} = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin \theta d\varphi \hat{\phi}$
- diferenciales de superficie principales: $d\hat{s} = dr r d\theta \hat{\phi}$, $dr r \sin \theta d\varphi \hat{\theta}$, $r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \hat{r}$
- diferencial de volumen: $dv = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$
- vector genérico: $\vec{A} = A_r \hat{r} + A_\theta \hat{\theta} + A_\varphi \hat{\phi}$

- vector unitario genérico: $\hat{r} = \frac{r \operatorname{sen} \theta \cos \varphi \hat{x} + r \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi \hat{y} + r \cos \theta \hat{z}}{r}$

Los vectores unitarios principales son \hat{r} , $\hat{\theta}$, $\hat{\varphi}$ (todos ellos dependientes de la posición del punto en que se consideran) con las relaciones:

$$\hat{r} \times \hat{\theta} = \hat{\varphi}, \quad \hat{\varphi} \times \hat{r} = \hat{\theta}, \quad \hat{\theta} \times \hat{\varphi} = \hat{r}$$

Cambio de sistema de coordenadas: de esféricas a cartesianas

$$\begin{aligned}\hat{r} &= \hat{x} \operatorname{sen} \theta \cos \varphi + \hat{y} \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi + \hat{z} \cos \theta \\ \hat{\theta} &= \hat{x} \cos \theta \cos \varphi + \hat{y} \cos \theta \operatorname{sen} \varphi - \hat{z} \operatorname{sen} \theta \\ \hat{\varphi} &= -\hat{x} \operatorname{sen} \varphi + \hat{y} \cos \varphi\end{aligned}$$

de cartesianas a esféricas:

$$\begin{aligned}\hat{x} &= \hat{r} \operatorname{sen} \theta \cos \varphi + \hat{\theta} \cos \theta \cos \varphi - \hat{\varphi} \operatorname{sen} \varphi \\ \hat{y} &= \hat{r} \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi + \hat{\theta} \cos \theta \operatorname{sen} \varphi + \hat{\varphi} \cos \varphi \\ \hat{z} &= \hat{r} \cos \theta - \hat{\theta} \operatorname{sen} \theta\end{aligned}$$

Anexo B: Fórmulas de análisis vectorial

Operadores

Coordenadas rectangulares

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{x} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{y} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$$

$$\nabla \cdot A = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times A = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \hat{x} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \hat{y} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \hat{z}$$

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 A = \nabla^2 A_x \hat{x} + \nabla^2 A_y \hat{y} + \nabla^2 A_z \hat{z} = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla \times (\nabla \times A)$$

Coordenadas cilíndricas

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \hat{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}$$

$$\nabla \cdot A = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times A = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial A_z}{\partial \phi} - \frac{\partial A_\phi}{\partial z} \right) \hat{\rho} + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) \hat{\phi} + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho A_\phi) - \frac{\partial A_\rho}{\partial \phi} \right] \hat{z}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 A = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla \times (\nabla \times A)$$

Coordenadas esféricas

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \hat{\phi}$$

$$\nabla \cdot A = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\nabla \times A = \frac{1}{r \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\varphi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right] \hat{r} + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r A_\varphi)}{\partial r} \right) \hat{\theta} + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \hat{\phi}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

$$\nabla^2 A = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla \times \nabla \times A$$

Identidades

$$(A \times B) \cdot C = A \cdot (B \times C)$$

$$A \times (B \times C) = B(A \cdot C) - C(A \cdot B)$$

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$$

$$\nabla(a/b) = (1/b)\nabla a - (a/b^2)\nabla b$$

$$\nabla(A \cdot B) = (B \cdot \nabla)A + (A \cdot \nabla)B + B \times (\nabla \times A) + A \times (\nabla \times B)$$

$$\nabla \cdot (fA) = (\nabla f) \cdot A + f(\nabla \cdot A)$$

$$\nabla \cdot (A \times B) = B \cdot (\nabla \times A) - A \cdot (\nabla \times B)$$

$$(\nabla \cdot \nabla)f = \nabla^2 f$$

$$\nabla \times (\nabla f) = 0$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times A) = 0$$

$$\nabla \times (fA) = (\nabla f) \times A + f(\nabla \times A)$$

$$\nabla \times (A \times B) = (B \cdot \nabla)A - (A \cdot \nabla)B + (\nabla \cdot B)A - (\nabla \cdot A)B$$

$$\nabla \times (\nabla \times A) = \nabla(\nabla \cdot A) - \nabla^2 A$$

Anexo C: Funciones de Bessel

La ecuación diferencial de Bessel tiene la forma:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - n^2) = 0$$

y la solución general es:

$$y = A J_n(x) + B N_n(x)$$

donde:

$J_n(x)$ es la función de Bessel de primera especie y orden n , y

$N_n(x)$ es la función de Bessel de segunda especie y orden n .

Las soluciones de primera especie convergen para cualquier valor finito de x , y su expresión detallada es:

$$J_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p}{p!(p+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2p}$$

Para pequeños valores de x puede ser suficiente la aproximación: $J_n(x) \approx \left(\frac{x}{2}\right)^n$.

Las funciones de segunda especie, o funciones de Neuman, no convergen para valores pequeños de x , ya que todas ellas presentan una singularidad en $x=0$. Su expresión es:

$$N_n(x) = \frac{J_n(x) \cos n\pi - J_{-n}(x)}{\operatorname{sen} n\pi}$$

En las figuras C.1 y C.2 se representan, respectivamente, ambas funciones para diversos órdenes. En el capítulo 5 (sección 5.3) se mostraron los primeros ceros de algunas de las funciones de primera especie y de su derivada primera.

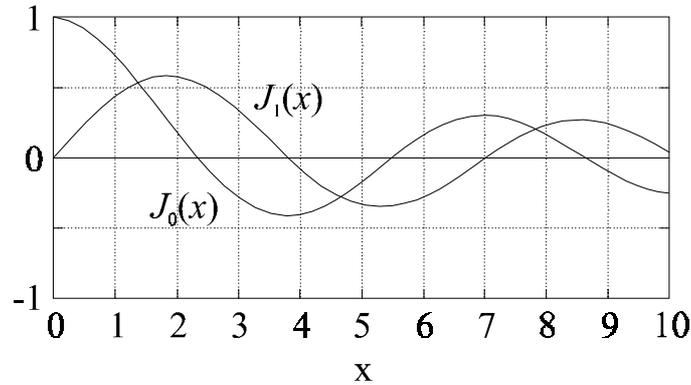


Figura C.1 *Funciones de Bessel*

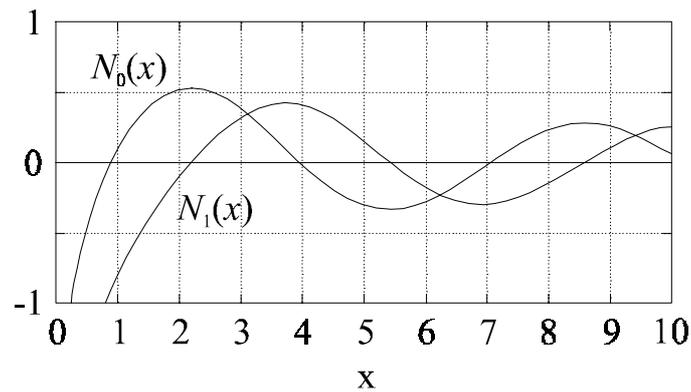


Figura C.2 *Funciones de Neumann*

Las expresiones asintóticas de las funciones para el caso $x \gg n$ son:

$$J_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$N_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \operatorname{sen}\left(x - n\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

Las funciones de Bessel de primera especie están relacionadas con las funciones trigonométricas mediante *la integral de Sommerfeld*:

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \operatorname{sen} \varphi - n\varphi) d\varphi$$

Las funciones de Hankel también son soluciones de la ecuación diferencial de Bessel, y se definen en la forma:

$$H_n^1(x) = J_n(x) + jN_n(x)$$

$$H_n^2(x) = J_n(x) - jN_n(x)$$

La *ecuación modificada de Bessel* se obtiene mediante un cambio en la variable, sustituyendo x por jx . Resulta:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - (x^2 + n^2) = 0$$

Existen soluciones de esta ecuación, convergentes para $x \gg n$ (o $x \rightarrow \infty$), que pueden obtenerse a partir de las funciones de Hankel:

$$K_n(x) = \frac{\pi}{2} j^{n+1} [J_n(jx) + jN_n(jx)]$$

La forma asintótica para $x \gg n$ (o $x \rightarrow \infty$), es:

$$K_n(x) \approx \left(\frac{\pi}{2x}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-x}$$

Para x pequeño y $n > 1$:

$$K_n(x) \approx \frac{1}{2} (n-1)! \left(\frac{2}{x}\right)^n$$

y para x pequeño y $n = 0$:

$$K_0(x) \approx -(\ln \frac{x}{2} + 0,5772)$$

Las relaciones de recurrencia son:

$$J_{n+1}(x) = \frac{n}{x} J_n(x) - \frac{d}{dx} J_n(x)$$

$$J_{n-1}(x) = \frac{n}{x} J_n(x) + \frac{d}{dx} J_n(x)$$

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

y:

$$K_{n+1}(x) = \frac{n}{x} K_n(x) - \frac{d}{dx} K_n(x)$$

$$K_{n-1}(x) = -\frac{n}{x} K_n(x) - \frac{d}{dx} K_n(x)$$

$$K_{-n}(x) = K_n(x)$$

Anexo D: Función delta de Dirac

La función delta de Dirac se utilizó primeramente en teoría de la probabilidad y, más adelante, ha pasado a otros campos de la ciencia, por su idoneidad para describir singularidades físicas.

Se define de la siguiente forma:

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq x_0 \\ \infty & \text{si } x = x_0 \end{cases} \quad (\text{D.1})$$

donde, además, deben satisfacerse:

$$\int_{C/x_0 \in C} \delta(x - x_0) dx = 1, \quad (\text{D.2})$$

y:

$$\int_{C/x_0 \in C} f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0). \quad (\text{D.3})$$

El hecho de tomar un valor no acotado en un punto singular nos indica, usualmente, que estamos refiriéndonos a una densidad (sea de probabilidad o de alguna magnitud física en casos idealizados). En teoría electromagnética se utiliza fundamentalmente para describir densidades infinitas de carga eléctrica, o bien de potencia o de energía electromagnética. Su utilidad radica en que permite tratar casos particulares ideales con las ecuaciones generales y, por tanto, sin necesidad de formularlos de una manera peculiar.

También se utiliza para representar la amplitud de las ondas (sea del campo eléctrico, del campo magnético, del voltaje o de la corriente) en problemas con espectros híbridos (en parte discretos y en parte continuos), como es el caso en el que se considera una portadora ideal con la señal modulada, o cuando se trabaja con modos guiados (discretos) junto con modos radiados (espectro continuo) en guías de onda, etc...

Usualmente las magnitudes que se formalizan mediante deltas de Dirac han de experimentar un proceso de integración matemática, para pasar a cantidades físicas medibles.

La delta de Dirac es una función peculiar, igualmente, *porque su argumento no es adimensional*, sino que tiene unidades (en los casos más usuales, de longitud, de tiempo o de frecuencia). Como que la ecuación D.2 debe llevar a un resultado unidad adimensional, entonces a la propia función también se le asignan unidades: la inversa de su argumento.

Dos ejemplos típicos son:

$$\rho(\vec{r}) = q_0 \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0) \quad (C/m^3)$$

que representa una carga puntual de valor q_0 en el punto (x_0, y_0, z_0) , y:

$$S(f) = A^2 (\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)) \quad (W/Hz)$$

que es el espectro de potencia de una función coseno de frecuencia f_0 (infinitamente extendida en el tiempo, es decir, ideal).

La primera expresión mostrada suele escribirse más abreviadamente:

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \delta(x - x_0) \delta(y - y_0) \delta(z - z_0) \quad (D.4a)$$

En coordenadas esféricas sería:

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \delta(r - r_0) \delta(\theta - \theta_0) \delta(\varphi - \varphi_0) \quad (D.4b)$$

Es importante insistir en el hecho de que la delta deberá ser integrada antes de concluir el problema en el que interviene, o, de otro modo, es probable que se estén cometiendo errores en su manejo.

Las propiedades de la delta de Dirac son:

$$i) \quad \delta(-x) = \delta(x) \quad (D.5)$$

$$ii) \quad \delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x) \quad \text{o, en general:} \quad \delta[g(x)] = \sum_i \frac{1}{|g'(x_i)|} \delta(x - x_i) \quad (D.6)$$

$$iii) \quad g(x) \delta(x - x_0) = g(x_0) \delta(x - x_0) \quad (D.7)$$

$$iv) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - y) \delta(x - z) dx = \delta(y - z) \quad (D.8)$$

En la ecuación (D.6) los valores x_i son los ceros de la función $g(x)$ (que no deben anular, sin embargo, su derivada).

Relaciones de derivación e integración típicas son:

$$\frac{dU(x-x_0)}{dx} = \delta(x-x_0) \quad \leftrightarrow \quad \int \delta(x-x_0) dx = U(x-x_0) + C \quad (\text{D.9})$$

$$\int x \delta(x-x_0) dx = x_0 U(x-x_0) + C \quad (\text{D.10})$$

$$\int x^2 \delta(x-x_0) dx = x_0^2 U(x-x_0) + C \quad (\text{D.11})$$

donde $U(x)$ es la función escalón unidad, o, también llamada, de Heaviside, y:

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = -4\pi \delta(r) \quad (\text{D.12})$$

donde ∇^2 es la laplaciana.

La delta de Dirac aparece como el límite ideal de situaciones realistas. Puede probarse que los límites de algunas funciones usuales dan lugar a la función delta. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \Pi\left(\frac{x-x_0}{a}\right) &= \delta(x-x_0) \\ \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\text{sen} \frac{2\pi}{\lambda} (x-x_0)}{\pi(x-x_0)} &= \delta(x-x_0) \\ \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\text{sen} \frac{2\pi a}{\lambda} (x-x_0)}{\pi(x-x_0)} &= \delta(x-x_0) \quad \forall a > 0 \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon\sqrt{\pi}} e^{-\frac{x^2}{\varepsilon^2}} &= \delta(x) \end{aligned} \quad (\text{D.13})$$

Otras relaciones de interés cuando se trabaja con espectros de frecuencia (temporal o espacial) son:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{jk(x-x_0)} dk = \delta(x-x_0) \quad (\text{D.14})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos kx \cos k'x dk = \pi [\delta(k-k') + \delta(k+k')] \quad (\text{D.15})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sin kx \sin k'x dk = j\pi [\delta(k-k') - \delta(k+k')] \quad (\text{D.16})$$

Por último, cabe añadir que en procesado digital de señales se utiliza frecuentemente *la secuencia delta*, pero no debe confundirse con la delta de Dirac, ya que, en este caso, no tiene el mismo significado. La secuencia delta se define sencillamente como:

$$\delta[n-n_0] = \begin{cases} 0 & n \neq n_0 \\ 1 & n = n_0 \end{cases}$$

Soluciones a los problemas

Capítulo 1: Campos eléctricos y magnéticos en condiciones estáticas

Campos electrostáticos

1. a) De la atmósfera hacia la Tierra; b) $-1,77 \times 10^{-9} \text{ C/m}^2$; c) $7,97 \times 10^{-13} \text{ C/m}^3$; d) $2,2 \times 10^5 \text{ V}$.

2. a) El átomo es neutro; b) $K = q(4\pi\epsilon_0)^{-1}$; c) $\vec{E}(\vec{r}) = K \frac{\exp(-r/a)}{r} (a^{-1} + r^{-1}) \hat{r}$.

3. a) $\sigma(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi} \frac{-2d}{(d^2 + y^2 + z^2)}$; b) $-q$; c) $F = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{4d^2}$.

4. a) $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{r} - (d + \frac{1}{2})\hat{z}}{|\vec{r} - (d + \frac{1}{2})\hat{z}|^3} - \frac{\vec{r} - (d - \frac{1}{2})\hat{z}}{|\vec{r} - (d - \frac{1}{2})\hat{z}|^3} + \frac{\vec{r} + (d - \frac{1}{2})\hat{z}}{|\vec{r} + (d - \frac{1}{2})\hat{z}|^3} - \frac{\vec{r} + (d + \frac{1}{2})\hat{z}}{|\vec{r} + (d + \frac{1}{2})\hat{z}|^3} \right)$;

b) $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{3(p_0\hat{z} \cdot \frac{\vec{r}-d\hat{z}}{|\vec{r}-d\hat{z}|}) \frac{\vec{r}-d\hat{z}}{|\vec{r}-d\hat{z}|} - p_0\hat{z}}{|\vec{r}-d\hat{z}|^3} + \frac{3(p_0\hat{z} \cdot \frac{\vec{r}+d\hat{z}}{|\vec{r}+d\hat{z}|}) \frac{\vec{r}+d\hat{z}}{|\vec{r}+d\hat{z}|} - p_0\hat{z}}{|\vec{r}+d\hat{z}|^3} \right)$.

5. a) $\rho_b = -3 \frac{P_0}{a}$, $\sigma_b(r=a) = -P_0$, $\sigma_b(r=2a) = 2P_0$; b) $\vec{E}(\vec{r}) = 0$ en la cavidad interior

y fuera del dieléctrico; $\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{P_0}{\epsilon_0} \frac{r}{a} \hat{r}$ en $a < r < 2a$; c) $\Delta\phi = \frac{3P_0}{2\epsilon_0} a$.

6. a) $\rho_b = 0$, $\sigma_b(r=R) = P_0 \cos\theta$;

b) nulo en ambos casos;

c) la primera expresión es la apropiada para el exterior de la esfera, para el interior es la segunda;

$$d) \quad E_{\text{int tang}} = E_{\text{ext tang}} \Big|_{r=R} \quad D_{\text{ext normal}} - D_{\text{int normal}} \Big|_{r=R} = \sigma_{\text{libre}} = 0;$$

$$e) \quad \vec{E}_{\text{int}} = -\frac{P_0}{3\epsilon_0} \hat{z} \quad \vec{E}_{\text{ext}} = \frac{P_0 R^3}{3\epsilon_0} \frac{1}{r^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta});$$

$$f) \quad \vec{p} = \frac{4}{3} \pi R^3 P_0 \hat{z} .$$

$$7. \quad F = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{V_0^2}{d^2} .$$

8. a) Deben ser iguales;

$$b) \quad \vec{E} = \frac{A}{r^2} \hat{r} \quad \text{con} \quad A = V(a^{-1} + c^{-1} - b^{-1} - d^{-1})^{-1} \quad \text{en el dielectrico;} \quad \vec{E} = 0 \quad \text{en el resto;}$$

$$c) \quad \sigma(r=a) = \epsilon_0 \frac{1}{a^2} A, \quad \sigma(r=d) = -\epsilon_0 \frac{1}{d^2} A; \quad d) \quad C = \frac{4\pi \epsilon_0}{a^{-1} + c^{-1} - b^{-1} - d^{-1}} .$$

$$9. \quad a) \quad \phi(\vec{r}) = \phi(\rho) = V \frac{\ln(\frac{\rho}{b})}{\ln(\frac{a}{b})}; \quad b) \quad \vec{E}(\rho) = \frac{V}{\ln(\frac{b}{a})} \frac{1}{\rho} \hat{\rho}; \quad c) \quad C = \frac{\pi}{\ln(\frac{b}{a})} (\epsilon_0 + \epsilon_1)$$

10. a) Debe comprobarse si su laplaciana es nula y si satisface las condiciones de potencial constante en el plano de tierra y en el conductor;

$$b) \quad \sigma(y=0) = -\frac{V\epsilon_0}{\ln(\frac{h+D}{h-D})} \frac{4D}{x^2 + D^2}; \quad c) \quad C = \frac{4\pi \epsilon_0}{\ln(\frac{h+D}{h-D})} .$$

$$11. \quad a) \quad D_\rho = \frac{b}{4\rho} \sigma_0; \quad b) \quad E_\rho = \frac{1}{6\epsilon_0} \frac{b\sigma_0}{b+\rho}; \quad c) \quad C = 3\pi \epsilon_0 \frac{1}{\ln(\frac{8}{5})}; \quad d) \quad U_e = \frac{1}{2} CV^2 .$$

$$12. \quad a) \quad C = \frac{S \epsilon_0}{d_1}; \quad b1) \quad Q = V_1 S \epsilon_0 \frac{1}{d_1}; \quad b2) \quad V_2 = V_1 \frac{d_2}{d_1}; \quad b3) \quad U = \frac{1}{2} S \epsilon_0 \frac{V_1^2}{d_1} (1 - \frac{d_1}{d_2});$$

$$c) \quad Q_2 = V_1 S \epsilon_0 \frac{d_2}{d_1} .$$

Campos magnetostáticos

13. a) $B = 0$ encima y debajo de ambas láminas, $B = \mu_0 J_0$ entre ambas, dirigido perpendicularmente a las corrientes; b) $F = \frac{1}{2} \mu_0 J_0^2$ de repulsión.

$$14. \vec{B}(z) = \frac{\mu_0}{2} \frac{NI}{h} \left(\frac{z + h/2}{(a^2 + (z + h/2)^2)^{3/2}} - \frac{z - h/2}{(a^2 + (z - h/2)^2)^{3/2}} \right) \hat{z}$$

$$15. a) \vec{B}(z=0) = \frac{\mu_0}{2} \frac{NI}{(a^2 + h^2/4)^{1/2}} \hat{z}; \quad b) B = \mu_0 \frac{NI}{h} \text{ (Ampère)}; \quad c) \frac{h}{a} = 10.$$

$$16. R = \frac{mv_0}{qB}, \quad \omega = \frac{qB}{m}.$$

$$17. b) R = \frac{v_0}{qB} m \sin \alpha; \quad c) v = v_0, \quad \omega = \frac{qB}{m}; \quad d) T = \frac{2\pi}{qB} m; \quad e) d = v_0 T \cos \alpha.$$

18. a) Si tomamos E en la dirección Z y B en la dirección $-Y$ resulta:

$$x(t) = \frac{v_0}{\omega} (1 - \cos \omega t) + \frac{a_0}{\omega^2} (\omega t - \sin \omega t) \quad z(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t + \frac{a_0}{\omega^2} (1 - \cos \omega t)$$

Sólo hay desplazamiento neto según la dirección X . (En general en la dirección de $\vec{E} \times \vec{B}$)

$$19. V_H = \frac{1}{Nq} \frac{I}{a} B$$

20. a) $I = 1 \text{ A}; \quad b) I = 1,07 \times 10^3 \text{ A (!)}$

21. b) 3,14 Kg.

$$23. L = \mu \frac{1}{2\pi} \ln \frac{b}{a}.$$

$$24. L = \frac{\mu}{\pi} \ln\left(\frac{d-a}{a}\right).$$

Capítulo 2: Ecuaciones de Maxwell

$$1. f.e.m. = -B_0 av.$$

$$2. \vec{J}_v = \frac{1}{\mu} [y(1-y)\hat{y} + z(1-2y)\hat{z}] \quad , \quad \vec{J}_v = H_0 \frac{e^{-\frac{\rho}{a}}}{\rho} \hat{z}.$$

$$3. a) \vec{E} = \omega B_0 \frac{z^2}{2} \text{sen } \omega t \hat{x}; \quad b) \vec{B} = -\epsilon_0 \mu_0 \omega^2 B_0 \frac{z^3}{6} \text{cos } \omega t \hat{y};$$

$$c) \vec{J} = \left(\frac{1}{\mu_0} - \epsilon_0 \omega^2 \frac{z^2}{2} \right) B_0 \text{cos } \omega t \hat{x}.$$

$$4. \sigma_b|_{r=a} = \frac{\lambda}{2\pi a} \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \right), \quad \sigma_b|_{r=b} = \frac{\lambda}{2\pi b} \left(\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r} \right), \quad Q_t|_{r=a} = Q_f|_{r=a} + Q_b|_{r=a} = \frac{\lambda l}{\epsilon_r}.$$

$$5. \epsilon_r = \frac{4}{3}.$$

$$6. a) \beta = \frac{\pi}{2} \text{ m}^{-1}, \quad \alpha = 0,549 \text{ m}^{-1}.$$

$$b) \sigma = \frac{2\alpha\beta}{\omega\mu} \quad (\text{donde se ha considerado que la conductividad es una magnitud real}) \quad \vec{J} = \sigma \vec{E}.$$

$$7. \text{Densidad de potencia media que actúa sobre las cargas: } \frac{1}{2} \Re\{\vec{J} \cdot \vec{E}^*\}.$$

Capítulo 3: Ondas planas

1. $\hat{k} = \hat{z}$. a) 212 MHz; b) Polarización circular a izquierdas; d) $2,65 \text{ nW} / \text{m}^2$.

2. a) 300 MHz; b) $\hat{k} = \frac{1}{2}\hat{x} + \frac{1}{2}\hat{y} + \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{z}$; c) Polarización circular a izquierdas.

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} E_o \{ [-\sqrt{2} \cos[\omega t - \pi(x + y + \sqrt{2}z)] + \text{sen}[\omega t - \pi(x + y + \sqrt{2}z)]] \hat{x} + \\ [\sqrt{2} \cos[\omega t - \pi(x + y + \sqrt{2}z)] + \text{sen}[\omega t - \pi(x + y + \sqrt{2}z)]] \hat{y} - \sqrt{2} \text{sen}[\omega t - \pi(x + y + \sqrt{2}z)] \hat{z} \}$$

$$\vec{\mathcal{H}}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\eta} E_o \{ -[\cos[\omega t - \pi(x + y + \sqrt{2}z)] + \sqrt{2} \text{sen}[\omega t - \pi(x + y + \sqrt{2}z)]] \hat{x} + \\ [\sqrt{2} \text{sen}[\omega t - \pi(x + y + \sqrt{2}z)] - \cos[\omega t - \pi(x + y + \sqrt{2}z)]] \hat{y} + \sqrt{2} \cos[\omega t - \pi(x + y + \sqrt{2}z)] \hat{z} \}$$

e) $E_o = 194,1 \text{ mV} / \text{m}$

3.

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{2} E \{ \cos[\omega t - 10\pi(x + y + \sqrt{2}z)] \hat{x} + \cos[\omega t - 10\pi(x + y + \sqrt{2}z)] \hat{y} - \\ \sqrt{2} \cos[\omega t - 10\pi(x + y + \sqrt{2}z)] \hat{z} \}$$

$$\vec{\mathcal{H}}(\vec{r}, t) = \frac{\sqrt{2}}{2\eta} E \{ \cos[\omega t - 10\pi(x + y + \sqrt{2}z)] \hat{x} - \cos[\omega t - 10\pi(x + y + \sqrt{2}z)] \hat{y} \}$$

4. a) $\vec{k} = 2\pi(\sqrt{2}\hat{x} + \hat{y} + \hat{z})$; b) $\hat{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\hat{x} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\hat{y}$;

$$\vec{H} = \frac{5,15 \times 10^{-4}}{\sqrt{3}} \left[\left(1 - j\frac{\sqrt{2}}{2} \right) \hat{x} - \left(\sqrt{2} + j\frac{1}{2} \right) \hat{y} + j\frac{3}{2}\hat{z} \right] e^{-j2\pi(\sqrt{2}x+y+z)} \text{ A} / \text{m};$$

$$\vec{E} = \frac{9,71 \times 10^{-2}}{\sqrt{3}} \left[-(\sqrt{2} + j2)\hat{x} - (1 - j2\sqrt{2})\hat{y} + 3\hat{z} \right] e^{-j2\pi(\sqrt{2}x+y+z)} \text{ V} / \text{m}$$

5. a) $\vec{E} = (\hat{x} - j0,71\hat{y})e^{-j6\pi z}$, $\vec{H} = \frac{1}{\eta}(\hat{y} + j0,71\hat{x})e^{-j6\pi z}$; b) $t = 278 \text{ ps}$; c) $R = 1,41$; $R_{dB} = 3 \text{ dB}$.

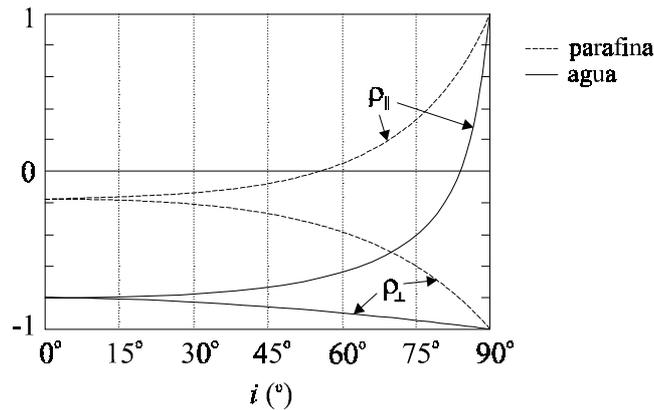
6. a) $\vec{E}_D = E_o(\hat{x} - j\hat{y})e^{-jkz}$, $\vec{E}_I = jE_o(\hat{x} + j\hat{y})e^{-jkz}$; b) $\vec{E} = \vec{E}_D + \vec{E}_I = E_o(1 + j)(\hat{x} - \hat{y})e^{-jkz}$;

$$\text{c) } \vec{P} = \frac{2}{\eta_o} E_o^2 \hat{z} \text{ W} / \text{m}^2;$$

- d) El fasor de la fuerza electromotriz inducida es $V = 4ajE_o(1+j)\text{sen}ka \text{ V}$; e) $f = \frac{c}{4a}$.
7. a) La onda se propaga según \hat{z} ; b) La onda está polarizada linealmente, con \vec{E} según \hat{y} ;
 c) $\vec{H} = -\frac{E_o}{\eta} e^{-jkz} \hat{x}$; d) $k = 6,28 \text{ m}^{-1}$, $E_o = 500 \mu\text{V/m}$; e) $V = j0,314 e^{-j3,14 \times 10^{-2}} \mu\text{V}$.
8. a) La onda se propaga según \hat{y} , $\lambda = 30 \text{ cm}$, $k = 20,94 \text{ m}^{-1}$;
 b) $\vec{E}(\vec{r}) = E_o \left[(1+j)\hat{z} - j\sqrt{2} e^{j\pi/4} \hat{x} \right] e^{-jk y}$; c) La polarización es circular a derechas;
 d) $\vec{P} = \frac{2E_o^2}{\eta_o} \hat{y}$.
9. a) $\vec{H}(\vec{r}) = -jH_o e^{-j\frac{1}{2}(x+y+\sqrt{2}z)} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \hat{x} - \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{y} \right) \text{ A/m}$;
 b) $\hat{k} = \frac{1}{2} \hat{x} + \frac{1}{2} \hat{y} + \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{z}$. Se comprueba que $\hat{k} \cdot \vec{H}(\vec{r}) = 0$, luego el campo corresponde efectivamente al de una onda plana uniforme; c) $f = 47,74 \text{ MHz}$;
 d) $\vec{E}(\vec{r}) = -j\eta H_o e^{-j\frac{1}{2}(x+y+\sqrt{2}z)} \left(-\frac{1}{2} \hat{x} - \frac{1}{2} \hat{y} + \frac{\sqrt{2}}{2} \hat{z} \right) \text{ V/m}$; e) $\vec{P} = 9,97 \times 10^{-4} \hat{k} \text{ W/m}^2$.
10. a) Sí; b) Sí; c) Sí; d) No.

Capítulo 4: Incidencia de ondas planas

1. a) Dirección de propagación: \hat{z} ; polarización circular a izquierdas; b) $|\vec{P}_m| = \frac{1}{120\pi} \text{ W/m}^2$;
 c) $\vec{E}_r(\vec{r}) = -E_o (\hat{z} + j\hat{y}) e^{-jk_0 z}$, con polarización circular a derechas; e) $\vec{P}_m = \frac{E_o^2}{\eta_o} (\hat{x} + \hat{z})$, es paralelo al plano conductor; f) $f = 212 \text{ MHz}$.
2. Las curvas son las siguientes:



3. Puede hacerse mediante cualquiera de las dos caracterizaciones del ángulo de Brewster.
4. a) $\theta_i = 26,57^\circ$, $\theta_t = 63,43^\circ$; b) $\vec{k}_i = 2\pi \frac{1}{\sqrt{5}} (\hat{x} + 2\hat{z})$, $\vec{k}_r = 2\pi \frac{1}{\sqrt{5}} (\hat{x} - 2\hat{z})$, $\vec{k}_t = \pi \frac{1}{\sqrt{5}} (2\hat{x} + \hat{z})$;
 c) polarización elíptica; d) $\theta_B = 26,56^\circ$; e) $\rho_\perp = \frac{3}{5}$, $\rho_\parallel = 0$, $\tau_\perp = \frac{8}{5}$, $\tau_\parallel = 2$;
 d) $\vec{E}_t = 4\sqrt{5}E_{0i} \left(\frac{\hat{x} - 2\hat{z}}{\sqrt{5}} + j\hat{y} \right) \exp\left(-j\pi \frac{1}{\sqrt{5}}(2x + z)\right)$; g) la onda reflejada está polarizada linealmente y la onda transmitida tiene polarización circular (helicoidal negativa); h) $\theta_C = 30^\circ$.
5. a) paralela al plano de incidencia; c) $n = 1,4142$; d) $\theta_i = 50,77^\circ$.
6. a) $\theta_i = 77,24^\circ$; b) $|\vec{P}_{mr}| = 0,192 \frac{\mu W}{m^2}$, $|\vec{P}_{mt}| = 0$;
 c) $\vec{E}_t(\vec{r}) = \hat{x}E_{0i} 2 \cos(k_0 n_2 z \cos i + \frac{\varphi_\perp}{2}) e^{-jk_0 n_2 y \sin i} e^{j\frac{\varphi_\perp}{2}}$; d) hay ondas estacionarias en la dirección z, y la distancia entre mínimos es: $\Delta z = 1,561$ m.
7. a) $p = \frac{2n}{1+n^2}$, $\Delta\varphi = -\frac{\pi}{2}$; b) la onda está centrada según esos mismos ejes; c) $n = 3,7$.
8. c) La situación se puede describir con cuatro ondas; d) aparecen ondas estacionarias en la dirección de incidencia y en la de reflexión; e) no varía.
9. a) $d = m \frac{\lambda_0}{2n}$, m entero; b) $n = 2$.

Capítulo 5: Guías de onda

2. $a \geq 5 \text{ cm}$

3. a) $a \geq 7,5 \text{ cm}$ $b \leq 3,75 \text{ cm}$; b) $f \leq 6 \text{ GHz}$

4. a) $A = 0$; $k_x = m\pi/a$; $\beta = \sqrt{k_0^2 - (m\pi/a)^2}$

b) $\vec{H}(\vec{r}) = \frac{E_0}{\omega \mu_0} (-\hat{x}\beta \sin k_x x + \hat{z} j k_x \cos k_x x) e^{-j\beta z}$; c) Solamente es posible el modo TE₁₀;

d) $P = \frac{1}{4} \frac{\beta}{\omega \mu_0} |E_0|^2 ab$ (W); e) $\vec{E}_{total}(\vec{r}) = -2j \hat{y} E_0 \sin k_x x e^{-j\beta z} \sin \beta(z - z_0)$.

6. $f_{min} = 8,476 \text{ GHz}$. $f_{max} = 9,128 \text{ GHz}$

7. d) Se refleja el 13% y se transmite el 87%.

8. a) un único modo: TE₁₀; b) tres modos: TE₁₀, TE₂₀ y TE₃₀. El TE₄₀ está justo en corte, al igual que el TE₀₁; c) $\alpha_1 = 2\pi/3 \times 10^2$, $\alpha_2 = 2\pi \times 10^2$;

$$d) \begin{cases} B = 0, & A \sin \alpha_1 d = C \sin \alpha_2 d + D \cos \alpha_2 d, \\ \alpha_1 A \cos \alpha_1 d = \alpha_2 (C \cos \alpha_2 d - D \sin \alpha_2 d), & C \sin \alpha_2 a + D \cos \alpha_2 a = 0; \end{cases}$$

e) $\text{tg } \alpha_1 d = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \text{tg } \alpha_2 (d - a)$; f) Esos valores de d son los grosores mínimos de la zona de

dieléctrico para los que pueden existir los modos TE₂₀ y TE₃₀, respectivamente, puesto que estamos tomando los valores de α_1 y α_2 que hacen $\beta=0$ en ambos casos.

9. a) $L=1,5 \text{ m}$; c) $W = \epsilon_0 A^2 \pi \frac{\lambda}{4} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$; d) $\vec{J}_s = -\hat{z} j \frac{k}{\omega \mu_0} \frac{A}{b} \cos kz$. Debe hacerse la ranura en la

dirección de las corrientes para no interrumpirlas, porque de lo contrario quedarían afectados los campos en el interior del cable.

Capítulo 6: Radiación de antenas elementales

1. b) $\vec{H}_{rad}(\vec{r}) = 2jk_0 \frac{I_0 h}{4\pi r} \sin \theta \cos(kd \cos \theta) e^{-jk_0 r} \hat{\phi}$; c) $\vec{P}_m = \frac{1}{8} \eta_0 \left(\frac{k_0 I_0 h}{\pi r} \right)^2 \sin^2 \theta \cos(kh \cos \theta) \hat{r}$,

$$W = \pi \eta_0 I_0^2 \left(\frac{h}{\lambda} \right)^2 \left[\frac{2}{3} - \frac{\cos 2kd}{2(kd)^2} + \frac{\sin 2kd}{4(kd)^3} \right].$$

2. a) $\vec{E}_{rad}(\vec{r}) = \omega C \frac{e^{-jkr}}{r} \sin \theta \hat{\phi}$, $\vec{H}_{rad}(\vec{r}) = -\frac{\omega C}{\eta_0} \frac{e^{-jkr}}{r} \sin \theta \hat{\theta}$; b) $W = \frac{4}{3} \pi \frac{(\omega C)^2}{\eta_0}$; c) resulta igual al del dipolo eléctrico.

3. a) $\vec{E}_{rad}(\vec{r}) = -j\omega \frac{\mu_0}{4\pi} I_0 h \frac{e^{-jkr}}{r} (1 + 2 \cos(kd \sin \varphi)) \sin \varphi \hat{\phi}$; b) $d = 0,5$ m; c) los nulos están únicamente en la dirección X y en la dirección Y; d) en la dirección Z.

4. c) $\psi = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$; d) los ceros están en $\varphi = \pm 107,03^\circ$.

5. b1) polarización lineal en ambas direcciones; b2) polarización elíptica en la dirección X y lineal en la dirección Y; c) tendremos polarización circular si $\alpha=90^\circ$, en la dirección X.

6. $\vec{A}(\vec{r}) \approx \frac{\mu_0}{4\pi} I_0 \pi a^2 \left(jk + \frac{1}{r} \right) \frac{e^{-jkr}}{r} \sin \theta \hat{\phi}$.