

## 4 Incidencia de ondas planas sobre medios materiales

### 4.1 Introducción. Condiciones de contorno de las ecuaciones de Maxwell

Tal como se ha establecido en el capítulo precedente, las ondas planas son las soluciones naturales de las ecuaciones de Maxwell en un medio lineal, homogéneo e isótropo, cuando este medio es indefinido, es decir, cuando comprende todo el espacio y no contiene distribuciones de carga o de corriente. Es evidente que no todas estas condiciones definen un caso ideal: en realidad, aunque el medio cumpla las condiciones de linealidad, homogeneidad e isotropía, en algún lugar tiene que haber distribuciones de carga y de corriente que actúen como fuentes generadoras del campo electromagnético. Entonces, un posible procedimiento para resolver las ecuaciones de Maxwell consiste en dividir el espacio en dos regiones, de manera que todas las fuentes que generan el campo estén incluidas en una única región, a la que llamaremos región I (Fig. 4.1).

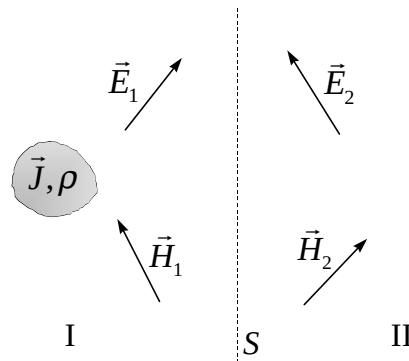


Fig. 4.1 Aplicación de las condiciones de contorno a la resolución de problemas dinámicos. Al no haber cargas ni corrientes en la región II, podemos expresar el campo en esta región como una combinación de ondas planas, cuya composición exacta viene determinada por las condiciones de contorno en la superficie de separación

En este caso, al no haber cargas ni corrientes en la región II, podemos suponer que el campo en esta región será una onda plana o bien una combinación de ondas planas. La solución exacta será la que cumpla las condiciones de contorno en la superficie de separación entre las dos regiones (ver sección 2.4), es decir

$$\hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \Big|_S = 0 \quad (4.1)$$

$$\hat{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \Big|_S = \sigma \quad (4.2)$$

$$\hat{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) \Big|_S = 0 \quad (4.3)$$

$$\hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \Big|_S = \vec{J}_S \quad (4.4)$$

donde  $S$  representa la superficie de separación y  $\hat{n}$  es un vector unitario perpendicular (normal) a ella y que aquí se ha tomado dirigido hacia el interior de la región II.

De hecho, se puede demostrar que en régimen senoidal permanente, únicamente dos de estas condiciones, las que afectan a las componentes tangenciales del campo (ecs. (4.1) y (4.4)), son necesarias para asegurar la validez de la solución, ya que, si se cumplen éstas, las condiciones que afectan a las componentes normales se verifican de forma automática (ecs. (4.2) y (4.3)).

Supongamos, pues, que de alguna forma hemos sido capaces de medir las componentes tangenciales del campo electromagnético generado por las fuentes situadas en la región I justo en la superficie  $S$  de separación entre las dos regiones. A partir de esta medida, podremos determinar exactamente qué ondas habrá en la región II, es decir, cuál será la dirección de propagación y la amplitud de las ondas. Más aún, podemos considerar que es el campo electromagnético en la superficie  $S$  el que excita una serie de ondas planas en la región II, cuya amplitud, frecuencia y dirección de propagación dependerá, lógicamente, de la variación temporal y espacial del campo que las ha excitado<sup>1</sup>.

Un ejemplo típico en el que podemos aplicar este principio es el que muestra la figura 4.2. En este caso tenemos dos regiones formadas por medios distintos que se encuentran en contacto. Si suponemos que el medio de la región I es un dieléctrico lineal, homogéneo e isótropo no conductor y estamos en régimen senoidal permanente, podemos considerar que el campo en esta región será una onda plana o, a lo sumo, una combinación de ondas planas, de manera que cada una de estas ondas deberá cumplir la ecuación de Helmholtz, es decir

---

<sup>1</sup> Como  $S$  puede ser una superficie cualquiera, esta afirmación se aplica a todos los puntos del espacio, lo que se conoce como principio de Huygens, ya que fue Christiaan Huygens quien la estableció allá por el año 1690.

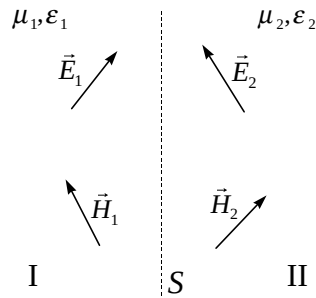


Fig. 4.2 Las condiciones de contorno nos permiten abordar los problemas derivados de un cambio de medio

$$\nabla^2 \vec{E}_1 + k_1^2 \vec{E}_1 = 0$$

e igualmente para el vector  $\vec{H}_1$  de intensidad de campo magnético, donde  $k_1 = \omega \sqrt{\mu_1 \epsilon_1}$  es la constante de propagación de las ondas en el medio. Si el medio que forma la región II también es un dieléctrico de las mismas características, pero de permitividad y permeabilidad distintas, las ondas excitadas en este segundo medio deberán cumplir la ecuación

$$\nabla^2 \vec{E}_2 + k_2^2 \vec{E}_2 = 0$$

Por lo tanto, podemos esperar que las soluciones serán ondas distintas en ambas regiones. Sin embargo, el hecho de que los campos  $\vec{E}_1$  y  $\vec{E}_2$  deban cumplir la condición (4.1) en la superficie de separación nos permite “conectar” el campo eléctrico que aparece en la región II con el campo eléctrico presente en la región I. Del mismo modo, la condición (4.4) nos permite la conexión entre los campos  $\vec{H}_1$  y  $\vec{H}_2$ . Como en el caso anterior, podemos entender que el campo electromagnético que aparece en la superficie S al incidir la onda u ondas que se propagan por la región I excita ondas secundarias en la región II.

En el presente capítulo nos hemos propuesto como objetivo establecer, mediante la aplicación sistemática de las condiciones de contorno, un conjunto de leyes generales que nos permitan relacionar el campo generado en la región II con el campo generado en la región I, en los casos en que dichas regiones están formadas por medios distintos (para simplificar, vamos a considerar que la superficie de separación es simplemente un plano). Las posibilidades a considerar serán, básicamente, las tres siguientes: una de ellas es la ya mencionada, en la que ambos medios son dieléctricos perfectos, lineales, homogéneos e

isótropos; una segunda posibilidad, en la que uno de los dos medios es un conductor perfecto; y finalmente, podemos considerar el caso intermedio en que por lo menos uno de los dos medios sea parcialmente conductor.

Por fortuna, las herramientas de cálculo necesarias para el estudio de las cuestiones relativas a la incidencia de ondas electromagnéticas sobre conductores y dieléctricos no resultan de una complejidad excesiva, lo que nos permitirá abordar con detalle los aspectos físicos de los fenómenos involucrados. La comprensión de estos fenómenos es de vital importancia para entender los principios en los que se basan un gran número de aplicaciones. Como ejemplos de especial relevancia, podemos citar la propagación guiada de las señales electromagnéticas, ya sea a través de fibra óptica o por guía de ondas, la emisión láser, basada en la resonancia electromagnética en cavidades cerradas, o algunos fenómenos relacionados con la propagación atmosférica, entre otros. La importancia que han adquirido estas tecnologías en la telecomunicación moderna y el papel todavía más importante que desempeñarán en un futuro inmediato hacen imprescindible el estudio de estos fenómenos, el cual abordaremos de forma sistemática en el próximo capítulo, aunque en este podremos avanzar ya algunos de sus aspectos más relevantes.

## **4.2 Incidencia normal sobre conductores perfectos**

### **4.2.1 Reflexión en la superficie de un conductor perfecto**

De los distintos casos de incidencia tratados en el presente capítulo, el más sencillo de analizar es el de incidencia normal sobre conductores perfectos. Es fácil demostrar, atendiendo a criterios de conservación de la energía, que la incidencia de una onda plana sobre la superficie de un conductor perfecto provoca la existencia de una onda reflejada de la misma frecuencia que la incidente, originada en la superficie del conductor.

Para analizar cualitativamente el fenómeno, nos podemos fijar en la figura 4.3a. Supongamos que sobre la superficie del conductor incide una onda plana, dirigida perpendicularmente hacia la superficie (caso de incidencia normal), tal como muestra la figura. Según vimos en el capítulo 1, un conductor perfecto se encuentra siempre en situación de equilibrio electrostático, por lo que no habrá campo en su interior, por muy alta que sea la frecuencia de la onda incidente (*i.e.* por muy rápidas que sean las variaciones temporales del campo en la superficie), ya que un conductor perfecto alcanza la situación de equilibrio de forma instantánea. En este caso, tendremos un flujo de potencia sobre la superficie del conductor, generado por la onda incidente, mientras que no se transmitirá potencia hacia el interior del conductor. Tal como muestra la figura 4.3b, si consideramos una sección cualquiera de la superficie del conductor, incluida dentro de la región limitada por las superficies  $S_1$  y  $S_2$ , el flujo de potencia entrante en esta región es

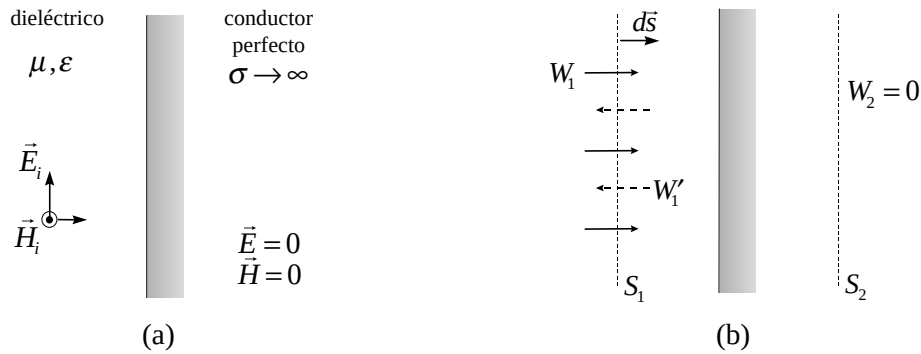


Fig. 4.3 (a) Incidencia normal (perpendicular) de una onda plana sobre un conductor perfecto. (b) El flujo de potencia asociado a la onda incidente debe ser contrarrestado de alguna forma, mediante la creación de un campo adicional (la onda reflejada)

$$W_1 = \int_{S_1} \vec{P}_i \cdot d\vec{s} > 0$$

donde  $\vec{P}_i$  representa el vector de Poynting asociado a la onda incidente. Evidentemente, no habrá flujo de potencia alguno a través de la superficie  $S_2$  (i.e.,  $\int_{S_2} \frac{1}{2} \text{Re}(\vec{E}_2 \times \vec{H}_2) \cdot d\vec{s} = 0$ ), ya que se encuentra en el interior del conductor perfecto, lo cual resulta en un flujo neto de potencia que entra en la región limitada por las superficies  $S_1$  y  $S_2$ .

Según el razonamiento anterior, deberíamos concluir que habrá una acumulación de energía en el interior de esta región, la cual debe disiparse de algún modo, ya que de lo contrario la energía total acumulada aumentaría hasta llegar a ser infinita, lo cual es absurdo. Sin embargo, sabemos que en el interior de un conductor perfecto no se produce disipación de potencia (ver sección 2.5.2). Del mismo modo, en un dieléctrico perfecto (es decir, sin pérdidas) tampoco se disipa potencia ninguna.

Por consiguiente, para evitar caer en esta contradicción, debemos asumir la existencia en la superficie  $S_1$  de un flujo de potencia saliente  $W_1'$  que contrarreste<sup>2</sup> el flujo entrante  $W_1$  (es decir,  $W_1 + W_1' = 0$ ), de manera que no pueda acumularse energía en el interior de la región delimitada por  $S_1$  y  $S_2$ . De aquí a suponer la existencia de una onda

<sup>2</sup> Este flujo será negativo, según hemos definido el vector  $d\vec{s}$  (Fig. 4.3b).

plana reflejada que se propaga en dirección opuesta a la de la onda incidente sólo hay un paso, ya que las ondas planas son las soluciones naturales de la ecuación de Helmholtz que rige el comportamiento del campo electromagnético en el dieléctrico<sup>3</sup>.

Pero, ¿cómo se puede originar esta onda reflejada? El razonamiento anterior no basta para explicar completamente la presencia de esta onda. Hay que responder además a esta cuestión que se nos plantea de forma inevitable. Para ello, nos fijamos las condiciones de contorno que afectan al campo electromagnético en la superficie de un conductor perfecto. En este caso, al no haber campo en el conductor (región II, según la figura 4.3a), las condiciones (4.1)-(4.4) se reducen a

$$\hat{n} \times \vec{E} \Big|_S = 0 \quad (4.5)$$

$$\hat{n} \cdot \vec{D} \Big|_S = \sigma \quad (4.6)$$

$$\hat{n} \cdot \vec{B} \Big|_S = 0 \quad (4.7)$$

$$\hat{n} \times \vec{H} \Big|_S = \vec{J}_S \quad (4.8)$$

para el campo electromagnético presente en el dieléctrico (tras haber redefinido el vector unitario  $\hat{n}$  de forma que quede orientado hacia el exterior del conductor -la región I, en este caso). Para que se cumplan estas condiciones, debe haber necesariamente cargas y corrientes en la superficie del conductor. Físicamente, lo que ocurre es que el campo de la onda incidente induce estas cargas y corrientes, las cuales variarán temporalmente con la misma frecuencia que el campo que las ha inducido<sup>4</sup>. Las distribuciones de carga o de corriente variables generan siempre, es decir, radían, campos electromagnéticos variables (ver capítulo 6). En este caso, el campo radiado sólo se puede propagar hacia el dieléctrico y sus componentes serán tales que cumplan las condiciones (4.5)-(4.7).

#### **Ejemplo 4.1:** *La telemetría láser y la teledetección*

Dos aplicaciones prácticas de este sencillo principio se hallan en la base de la telemetría láser y de la teledetección o radar (del inglés *radio detection and*

<sup>3</sup> Naturalmente, este planteamiento sólo es válido para el régimen estacionario. Durante el régimen transitorio será necesaria la absorción de una cierta cantidad de potencia para dar lugar a la formación de la onda reflejada.

<sup>4</sup> De hecho, en el caso de incidencia normal sólo se inducen corrientes, al ser el campo eléctrico de la onda incidente tangente a la superficie del conductor. Sin embargo, tal como veremos más adelante, en el caso de incidencia oblicua aparecen también distribuciones superficiales de carga, inducidas por la componente del campo normal a la superficie.

ranging). El telemetro láser actúa mediante la emisión de un rayo desde un extremo de la distancia que se quiere medir, apuntando hacia un blanco situado en el extremo opuesto (ver figura 4.4a). Aunque en la práctica se utilizan varios esquemas de diseño y diferentes principios de funcionamiento (tiempo de vuelo, triangulación, diferencia de fases, etc.), todos ellos deben analizar alguna característica de la onda devuelta por el blanco. Cuando la aplicación lo permite, se utilizan blancos cooperativos, que devuelven toda la potencia emitida. El blanco cooperativo más sencillo es un conductor perfecto. Más adelante veremos que, no obstante, los dieléctricos también generan ondas reflejadas, aunque en menor proporción. Del mismo modo, la teledetección o radar nos permite determinar la distancia a la que se encuentra un objeto reflector cualquiera, ya sea fijo o móvil (Fig. 4.4b), aunque en este caso se trabaja con señales de microondas.

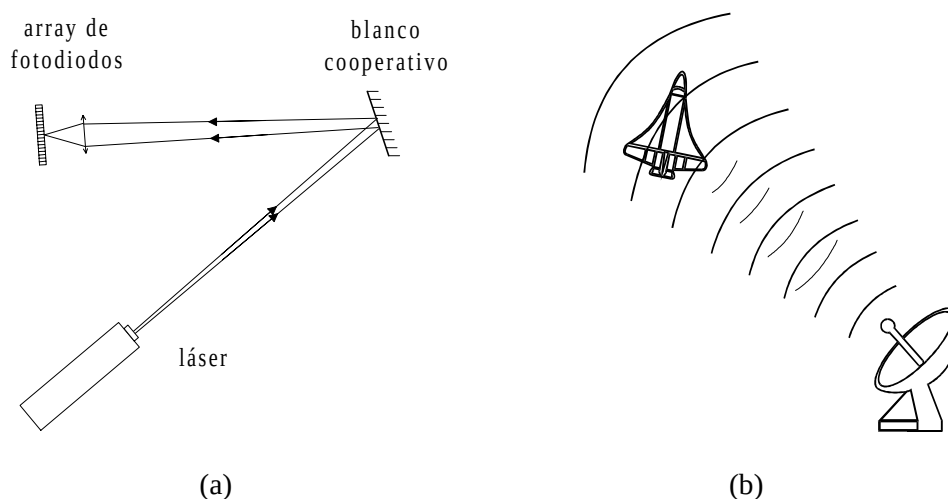


Fig. 4.4 Dos aplicaciones prácticas del fenómeno de la reflexión en conductores: (a) telémetro láser; (b) radar

#### (a) Onda incidente con polarización lineal

Ahora que ya hemos sido capaces de comprender los principios en los que se basa el fenómeno de la reflexión de las ondas en las superficies conductoras, procedamos a abordar el problema de forma cuantitativa. Al no haber campo en el interior del conductor, la aplicación de las condiciones se simplifica enormemente. De hecho, bastará con imponer la condición (4.5), según la cual las componentes del campo eléctrico tangentes a la superficie del conductor deben anularse en esta superficie, a las soluciones de la ecuación  $\nabla^2 \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0$  para que el campo electromagnético presente en el dieléctrico que constituye la región I quede completamente determinado. Aplicando luego las condiciones

(4.6) y (4.8), podemos obtener las cargas y corrientes inducidas en la superficie del conductor, mientras que la condición (4.7) se verificará de forma automática. El primer paso a realizar, pues, consiste en identificar las componentes tangentes del campo  $\vec{E}$  y comprobar que se cumple la condición (4.5).

Tomemos como punto de partida la expresión genérica de la onda incidente. Al tratarse de una onda plana en régimen senoidal permanente, el campo fasorial asociado a la onda será de la forma

$$\begin{aligned}\vec{E}_i(\vec{r}) &= \vec{E}_{0i} e^{-j\vec{k}_i \cdot \vec{r}} \\ \vec{H}_i(\vec{r}) &= \frac{1}{\eta} \hat{k}_i \times \vec{E}_i(\vec{r})\end{aligned}$$

donde  $\vec{k}_i \equiv k\hat{k}_i$  es el vector de propagación de la onda.  $\eta \equiv \sqrt{\mu/\epsilon}$  y  $k \equiv \omega\sqrt{\mu\epsilon}$  representan, respectivamente, la impedancia intrínseca y la constante de propagación del dieléctrico. En principio, el campo  $\vec{E}_i$  puede tener una polarización cualquiera. De momento y para simplificar el cálculo, consideraremos que la onda incidente está polarizada linealmente<sup>5</sup>. En este caso, podemos fijar los ejes de coordenadas como se indica en la figura 4.5, de manera que uno de ellos (por ejemplo, el eje  $Z$ ) sea perpendicular a la superficie del conductor, con lo que coincidirá con la dirección de propagación de la onda (es decir,  $\hat{k}_i = \hat{z}$ ), mientras que otro (el eje  $Y$ ) coincida con la dirección del campo eléctrico. Bajo estas condiciones, la onda incidente toma la forma

$$\vec{E}_i(\vec{r}) = E_{0i} \hat{y} e^{-jkz} \quad (4.9)$$

$$\vec{H}_i(\vec{r}) = \frac{1}{\eta} \hat{z} \times \hat{y} E_{0i} e^{-jkz} = -\frac{E_{0i}}{\eta} \hat{x} e^{-jkz} \quad (4.10)$$

Tal como hemos visto, la presencia del conductor nos obliga a asumir la existencia de una onda reflejada. Para simplificar el cálculo, vamos a suponer que la onda reflejada se propaga en dirección opuesta a la de la onda incidente (es decir  $\hat{k}_r = -\hat{z}$ ), con lo cual tenemos<sup>6</sup>

<sup>5</sup> Recuérdese que una onda con una polarización cualquiera puede descomponerse como combinación de dos ondas polarizadas linealmente en direcciones ortogonales.

<sup>6</sup> Esta es la hipótesis más simple, fácilmente justificable bajo consideraciones de simetría: en este caso, tanto el medio como el campo de excitación (la onda incidente) presentan únicamente variaciones en la dirección normal a la superficie del conductor, por lo que podemos esperar que la respuesta obtenida (la onda reflejada) presente características similares. También podríamos partir de una expresión más general para el campo de la onda reflejada, pero el resultado final sería el mismo.



$$\vec{E}_r(\vec{r}) = \vec{E}_{0r} e^{jkz} \quad (4.11)$$

$$\vec{H}_r(\vec{r}) = -\frac{1}{\eta} \hat{z} \times \vec{E}_r(\vec{r}) \quad (4.12)$$

para el campo asociado.

Finalmente, podemos situar la superficie de separación entre el dieléctrico y el conductor de manera que coincida con el plano  $z = 0$  (Fig. 4.5). En este caso y teniendo en cuenta que el campo total en el dieléctrico es el resultado de la superposición del campo eléctrico de la onda incidente y el de la onda reflejada (i.e.,  $\vec{E} = \vec{E}_i + \vec{E}_r$ ), podemos descomponer la condición (4.5) para las componentes tangenciales del campo eléctrico de la forma

$$(E_{ix} + E_{rx})|_{z=0} = 0 \quad (4.13)$$

$$(E_{iy} + E_{ry})|_{z=0} = 0 \quad (4.14)$$

Al haber impuesto que el campo eléctrico de la onda incidente sólo tenga componente en la dirección del eje Y (expresión (4.9)), tenemos  $E_{ix} = 0$ , por lo que a la fuerza debe ser  $E_{rx} = 0$  en la superficie del conductor. En consecuencia, en el campo eléctrico de la onda reflejada sólo aparece la componente en la dirección del eje Y, es decir <sup>7</sup>

$$\vec{E}_r(\vec{r}) = E_{0r} \hat{y} e^{jkz}$$

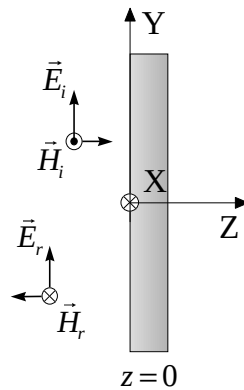


Fig. 4.5 Sistema de coordenadas empleado para la resolución del problema

<sup>7</sup> Recordemos que para que un fasor se anule en un punto cualquiera, su amplitud debe valer cero en ese punto. Al ser  $E_{rx}$  una magnitud fasorial de amplitud constante, sólo puede anularse en un punto concreto si se anula simultáneamente en todos los puntos del espacio.

debiendo ser, además,  $E_{0r} = -E_{0i}$ , de acuerdo con (4.14), con lo que nos queda

$$\vec{E}_r(\vec{r}) = -E_{0i} \hat{y} e^{jkz} \quad (4.15)$$

para la onda reflejada. En otras palabras: para que se cumpla la condición de contorno (4.5) en la superficie del conductor, la amplitud y la polarización del campo eléctrico deben ser las mismas en las ondas incidente y reflejada. Por otro lado, el signo “-” que aparece en la expresión (4.15) nos introduce un desfase  $\Delta\phi = \pi$  en el campo instantáneo de la onda reflejada con respecto al de la onda incidente. En cuanto al campo magnético, nos queda

$$\vec{H}_r(\vec{r}) = -\frac{1}{\eta} \hat{z} \times (-\hat{y}) E_{0i} e^{jkz} = -\frac{E_{0i}}{\eta} \hat{x} e^{jkz} \quad (4.16)$$

#### *Cargas y corrientes inducidas en el conductor*

Pero, ¿qué ocurre con las condiciones de contorno restantes? Para estar completamente seguros de que, efectivamente, hemos dado con la solución del problema, es necesario comprobar que se cumplen las condiciones (4.6)-(4.8). Para ello debemos conocer los campos totales, eléctrico y magnético, presentes en el dieléctrico tras la reflexión. Sumando las expresiones (4.9) y (4.15), obtenemos la siguiente expresión fasorial

$$\vec{E}(z) = E_{0i} (e^{-jkz} - e^{jkz}) \hat{y} = -2jE_{0i} \hat{y} \sin kz \quad (4.17)$$

para el campo eléctrico total<sup>8</sup>.

Empecemos por la condición (4.6), la cual nos permitirá conocer la distribución de carga inducida en el conductor. En este caso, tal como hemos fijado los ejes de coordenadas en la figura 4.5, resulta

$$\sigma = (-\hat{z}) \cdot (\epsilon \vec{E}) \Big|_{z=0} = 0 \quad (4.18)$$

ya que, según (4.17), el campo  $\vec{E}$  no tiene componente en la dirección  $\hat{z}$ . Como habíamos anticipado al principio de esta sección, en este caso no se induce carga alguna en la superficie del conductor. Sin embargo, no debemos tomar este resultado como norma general, ya que más adelante veremos que en el caso de incidencia oblicua sí pueden aparecer cargas inducidas.

---

<sup>8</sup> Vemos que el campo total también es tangente a la superficie del conductor. Tal como pretendíamos,  $\vec{E}_y \Big|_{z=0} = 0$ , con lo que se verifica la condición (4.5).

Las condiciones (4.7) y (4.8) afectan a la intensidad de campo magnético total (fasorial, en este caso) la cual podemos expresar como superposición de los campos magnéticos asociados a las ondas incidente y reflejada. Entonces, sumando las expresiones correspondientes, (4.10) y (4.16), obtenemos

$$\vec{H}(z) = -\frac{E_{0i}}{\eta} \hat{x} (e^{-jkz} + e^{jkz}) = -2 \frac{E_{0i}}{\eta} \hat{x} \cos kz \quad (4.19)$$

para la intensidad total de campo magnético presente en el dieléctrico. Vemos que en este caso no aparece componente en la dirección  $\hat{z}$  (i.e., el campo magnético es tangente a la superficie del conductor), con lo que se verifica la condición (4.7), ya que, tras particularizarla para la situación de la figura 4.5, nos queda de la forma

$$(-\hat{z}) \cdot (\mu \vec{H}) \Big|_{z=0} = 0 \quad (4.20)$$

Finalmente, la condición (4.8) nos permite obtener la distribución de corriente inducida en la superficie del conductor por la onda incidente. Particularizándola para la situación de la figura 4.5 y sustituyendo según (4.19), obtenemos

$$\vec{J}_s = (-\hat{z}) \times \vec{H} \Big|_{z=0} = -\hat{z} \times \hat{x} (-2) \frac{E_{0i}}{\eta} \cos kz \Big|_{z=0} = 2 \frac{E_{0i}}{\eta} \hat{y} \quad (4.21)$$

Es decir, como consecuencia de la incidencia de una onda plana sobre un conductor perfecto, se induce una corriente superficial de tipo senoidal, cuyo fasor es constante, y que circula en la dirección del campo eléctrico de la onda incidente. En el capítulo 3 habíamos generado una onda plana a partir de una corriente uniforme, distribuida a lo largo y ancho de una superficie plana infinita; he aquí, pues, la causa que genera la onda plana reflejada, cuya existencia habíamos postulado al principio<sup>9</sup>.

<sup>9</sup> De hecho, un sistema formado por un dieléctrico limitado por un conductor perfecto sobre el que incide una onda plana uniforme es equivalente, en cuanto al comportamiento electromagnético, a la superposición de la onda incidente con las dos ondas, progresiva y regresiva, que generaría una lámina infinita por la que circulase una corriente de fasor constante, situada justo donde se encuentra la superficie del conductor (Fig. 4.6). Para que ambos sistemas sean totalmente equivalentes, el campo eléctrico de la onda incidente y el de la onda progresiva generada por la lámina de corriente deben tener la misma amplitud y estar en contrafase, de modo que se produzca una interferencia destructiva en la región del espacio que ocupaba el conductor. Según el resultado obtenido en el ejemplo 3.1, ello ocurrirá cuando se cumpla la relación (4.21) entre el fasor de densidad de corriente inducida y la amplitud de la onda incidente. En este caso, resulta evidente que la onda regresiva generada por la lámina (la onda reflejada) también tendrá la misma amplitud que la onda incidente y estará en oposición de fase con ella justo en la lámina, ya que, por razones de simetría, las ondas progresiva y regresiva deben ser idénticas, exceptuando el hecho de que se propagan en direcciones opuestas.

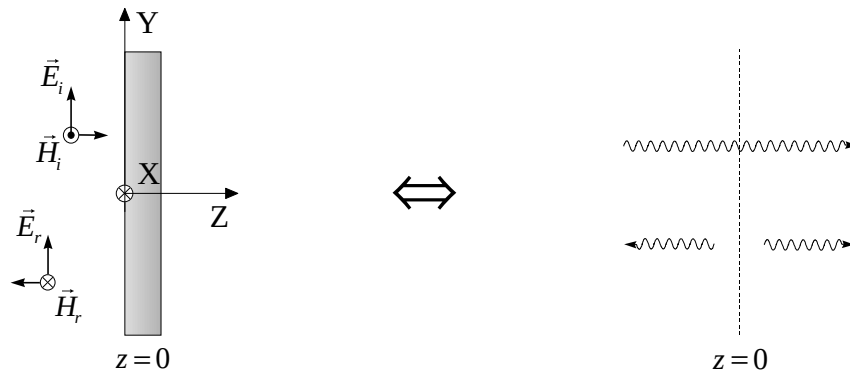


Fig. 4.6 La situación creada por una onda plana y las ondas progresiva y regresiva generadas por una lámina de corriente infinita y de fasor constante es equivalente a la creada por la unión de un dieléctrico y un conductor perfecto

(b) Onda incidente con una polarización cualquiera

Como resultado del análisis realizado, podemos concluir que el fenómeno de la reflexión de una onda polarizada linealmente que incide perpendicularmente sobre un conductor perfecto presenta las propiedades siguientes:

- Conservación de la polarización tras la reflexión.
- La onda reflejada y la onda incidente tienen la misma amplitud.
- Justo en la superficie del conductor, la onda reflejada se encuentra en oposición de fase con la onda incidente, hecho representado por un signo “-” en el fasor correspondiente (expresión (4.15)).

Antes de pasar a analizar qué consecuencias conllevan estas tres propiedades, podemos extenderlas fácilmente al caso más general de una onda incidente con una polarización cualquiera. El primer paso consiste en comprobar que el resultado obtenido no depende de la dirección del campo asociado a la onda incidente. Observemos, en primer lugar, la figura 4.7a, donde tenemos la misma situación que en la figura 4.5. En este caso se cumplirán las tres propiedades reseñadas. Pero, ¿y si giramos la orientación del campo  $90^\circ$  en sentido antihorario? O, lo que es lo mismo, ¿qué ocurre si giramos el conductor  $90^\circ$  en sentido contrario? Pues nada en particular, excepto que ahora la dirección del campo eléctrico de la onda incidente coincide con la del eje X (Fig. 4.7b). Ambas ondas observan exactamente lo mismo: un conductor perfecto cuya superficie se extiende hacia el infinito en todas direcciones (nuestro problema tiene simetría cilíndrica). Por lo tanto, todas las propiedades que se obtienen para el caso de la figura 4.7a se cumplen también para el caso

de la figura 4.7b, y en general, para cualquier onda polarizada linealmente, sea cuál sea la dirección del campo eléctrico.

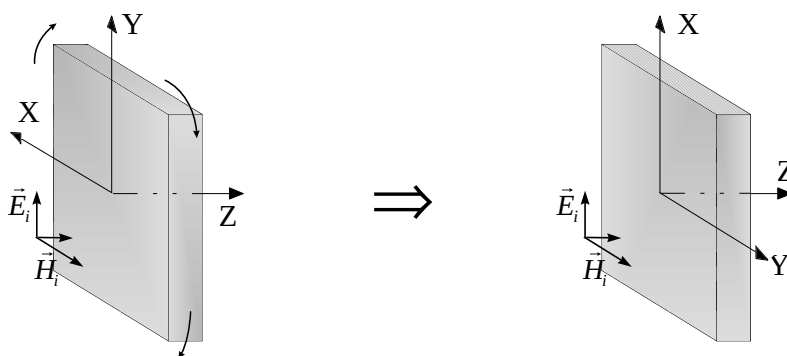


Fig. 4.7 Debido a la simetría que presenta la situación planteada, el resultado no depende de la orientación del campo eléctrico

Finalmente, ¿qué ocurre si la onda no tiene polarización lineal, sino que está polarizada circular o elípticamente? En este caso, según hemos comprobado en la sección 3.3.3, podemos descomponerla en dos ondas planas polarizadas linealmente en direcciones ortogonales. Como acabamos de ver, ambas componentes cumplirán las tres propiedades reseñadas, por lo que es fácil comprobar que también se cumplirán para el campo total de la onda incidente.

Hay que observar, sin embargo y contra lo que podría parecer, que la reflexión introduce un cambio en el sentido de giro del campo instantáneo con respecto al de la onda incidente, aunque ello es sólo consecuencia del convenio adoptado en la sección 3.3.1 para fijar el sentido de giro de una onda plana. Según dicho convenio, los vectores unitarios que definen el sentido de giro de las ondas incidente y reflejada quedarán como se indica en la figura 4.8. Como podemos ver, el convenio  $\hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = \hat{k}$  da lugar a un intercambio entre los vectores  $\hat{e}_1$  y  $\hat{e}_2$  en la onda reflejada con respecto a la onda incidente, como consecuencia del cambio producido en la dirección de propagación. No obstante, si observamos ambas ondas *desde un mismo punto*, por ejemplo desde la superficie del conductor, veremos cómo en los dos casos el campo instantáneo gira en el mismo sentido. Ello debe ser así para que las condiciones de contorno se cumplan en todo momento.

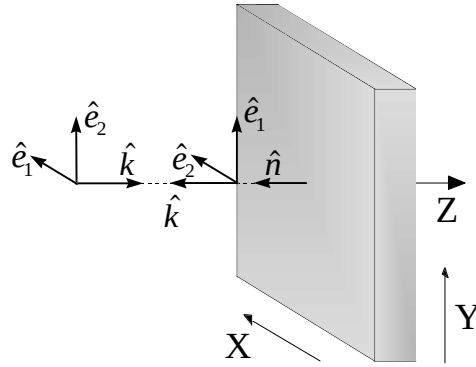


Fig. 4.8 Los vectores unitarios empleados para definir el sentido de giro del campo instantáneo se intercambian entre sí tras la reflexión

#### 4.2.2 Ondas estacionarias

En cuanto a las consecuencias que conllevan las tres propiedades reseñadas, cabe decir, en primer lugar, que los flujos de potencia asociados a las ondas incidente y reflejada se contrarrestan, tal como habíamos planteado al principio de la sección 4.2.1. Volviendo a la figura 4.3a, podemos calcular el flujo de potencia  $W_1$  entrante a través de la superficie  $S_1$  y el flujo saliente  $W_1'$  integrando los vectores de Poynting asociados a las ondas incidente y reflejada, lo que nos da

$$W_1 = \int_{S_1} \vec{P}_i \cdot d\vec{s} = \int_{S_1} \frac{|E_{0i}|^2}{2\eta} \hat{z} \cdot d\vec{s} = \frac{|E_{0i}|^2}{2\eta} S_1$$

$$W_1' = \int_{S_1} \vec{P}_r \cdot d\vec{s} = \int_{S_1} \frac{|E_{0r}|^2}{2\eta} (-\hat{z}) \cdot d\vec{s} = -\frac{|E_{0i}|^2}{2\eta} S_1$$

donde hemos tenido en cuenta la relación (4.15). Vemos que ahora sí se cumple la condición  $W_1 + W_1' = 0$ , necesaria para que no se acumule potencia indefinidamente en la región delimitada por las superficies  $S_1$  y  $S_2$ .

La segunda consecuencia consiste en la formación de una *onda estacionaria* en el dieléctrico, como resultado de la superposición de las ondas incidente y reflejada. Las ondas estacionarias, a diferencia de las ondas planas, no se propagan a través del espacio, con lo que no permiten la transmisión de potencia (ni de ningún tipo de información) de un punto a otro. Sin embargo, presentan otras propiedades que son de enorme utilidad práctica. El

estudio de estas propiedades, así como de algunas de sus aplicaciones más comunes, es el objetivo que nos hemos planteado en esta sección.

Empecemos por ver qué es una onda estacionaria. Para ello, retomamos la expresión fasorial (4.17), obtenida en la sección 4.2.1 para el campo total presente en el dieléctrico tras la reflexión de la onda incidente

$$\vec{E}(z) = -2jE_{0i}\hat{y}\sin kz \quad (4.22)$$

Fijando el origen de tiempos de manera que la amplitud  $E_{0i}$  sea un número real, se obtiene la siguiente expresión para el campo instantáneo<sup>10</sup>:

$$\vec{\mathcal{E}}(z, t) = \text{Re}\left[\vec{E}(\vec{r})e^{j\omega t}\right] = 2E_{0i}\hat{y}\sin kz \sin \omega t \quad (4.23)$$

A diferencia de lo que ocurre con una onda plana, el campo representado por la expresión (4.23) es una función que no se desplaza con el tiempo, sino que permanece estacionaria (de ahí su nombre), tal como podemos ver en la figura 4.9. El comportamiento que se obtiene se asemeja al de una cuerda vibrante, sujeta por un extremo. Para entender lo que ocurre, podemos considerar el término  $E_{0i}\sin \omega t$  como una amplitud instantánea que multiplica a la función  $\sin kz$ . En este caso,  $\vec{\mathcal{E}}(z, t)$  es una función senoidal de la forma

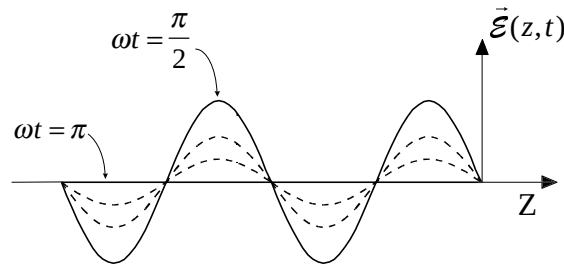


Fig. 4.9 Representación espacial del campo eléctrico instantáneo correspondiente a una onda estacionaria

<sup>10</sup> En general, el término de amplitud es un fasor del tipo  $E_{0i} = |E_{0i}|e^{j\varphi_{0i}}$ , donde el término  $\varphi_{0i}$  representa la fase inicial de la onda. En este caso, la expresión (4.23) toma la forma

$$\vec{\mathcal{E}}(z, t) = 2E_{0i}\hat{y}\sin kz \sin(\omega t + \varphi_{0i})$$

Es fácil comprobar que el valor concreto de la fase inicial  $\varphi_{0i}$  no afecta al comportamiento genérico de la función, por lo que podemos simplificarla, fijando  $\varphi_{0i} = 0$ .

$$\vec{\mathcal{E}}(z, t) \equiv \mathcal{E}_o(t) \sin kz \hat{y}$$

cuya amplitud  $\mathcal{E}_o(t) \equiv 2E_{0i} \sin \omega t$  toma valores diferentes para distintos instantes de tiempo, siendo máxima para valores  $\omega t = \pi/2, 3\pi/2$ , etc. y mínima para valores  $\omega t = 0, \pi, 2\pi$ , etc. (ver Fig. 4.9).

Por otro lado, existen una serie de puntos en los que el campo es nulo para todo instante de tiempo. Estos puntos reciben el nombre de *nodos* (los puntos en los que el campo se hace máximo reciben el nombre de *vientres*). En el caso considerado, estos nodos están situados a distancias

$$z_m = m \frac{\pi}{k} = m \frac{\lambda}{2} \quad m = 0, 1, \dots \quad (4.24)$$

del conductor, obtenidas imponiendo la condición  $\sin kz|_{z=z_m} = 0$  en la expresión (4.23). Según (4.24), la distancia  $l$  entre dos nodos consecutivos corresponde a una semilongitud de onda en el dieléctrico.

Igualmente, si calculamos el campo  $\vec{\mathcal{H}}$  instantáneo, a partir de la expresión (4.19), obtenemos

$$\vec{\mathcal{H}}(\vec{r}, t) = \text{Re}[\vec{H}(\vec{r})e^{j\omega t}] = -2\hat{x} \frac{E_{0i}}{\eta} \cos kz \cos \omega t \quad (4.25)$$

El comportamiento que se obtiene es análogo al del campo eléctrico instantáneo, exceptuando el hecho que ahora el campo no se anula en la pared conductora.

Finalmente, podemos comprobar, calculando el vector de Poynting medio, que se verifica

$$\vec{P}_m = \frac{1}{2} \text{Re}[\vec{E} \times \vec{H}^*] = \frac{1}{2} \text{Re}[4j|E_{0i}|^2 (\hat{y} \times \hat{x}) \sin kz \cos kz] = 0 \quad (4.26)$$

esto es, que una onda estacionaria *no permite el transporte de potencia ni, por consiguiente, de información alguna a través del espacio*. Este hecho es el resultado de la superposición de dos flujos de potencia, asociados a las ondas incidente y reflejada, de igual intensidad y dirección opuesta, tal como hemos visto al principio de esta sección.

### Cavidades resonantes

Una consecuencia interesante y de gran interés práctico de la formación de ondas estacionarias por la reflexión de ondas planas en conductores, la encontramos en el fenómeno de la resonancia en cavidades. Aunque en la sección 5.4 se estudiará con más



profundidad el comportamiento de las cavidades resonantes, podemos entenderlo, a grandes rasgos, del modo siguiente:

Imaginemos que disponemos dos paredes conductoras, situadas una frente a otra y separadas por una distancia  $d$ , tal como muestra la figura 4.10a. Supongamos que hemos conseguido excitar una onda plana en el interior de la cavidad, en la dirección perpendicular a la superficie de las paredes y con el campo eléctrico polarizado linealmente según el eje  $Y$ . Tras incidir en una de ellas, por ejemplo en la situada en  $z = 0$ , y como consecuencia de la reflexión producida, se genera una onda estacionaria en el interior de la cavidad. Como hemos visto, la condición de contorno  $\vec{E}_{tan}|_{z=0} = 0$  impone que el fasor del campo eléctrico asociado a la onda estacionaria sea de la forma indicada por la expresión (4.17). Hasta aquí el problema es idéntico al de la figura 4.3a. Sin embargo, la presencia de la segunda pared nos impone la condición adicional

$$\vec{E}_{tan}|_{z=-d} = 0$$

Luego, en la posición  $z = -d$  debemos tener un nodo de la onda estacionaria para que se verifique esta última condición, por lo que se debe cumplir

$$d = m \frac{\lambda}{2} \quad m=0,1,\dots \quad (4.27)$$

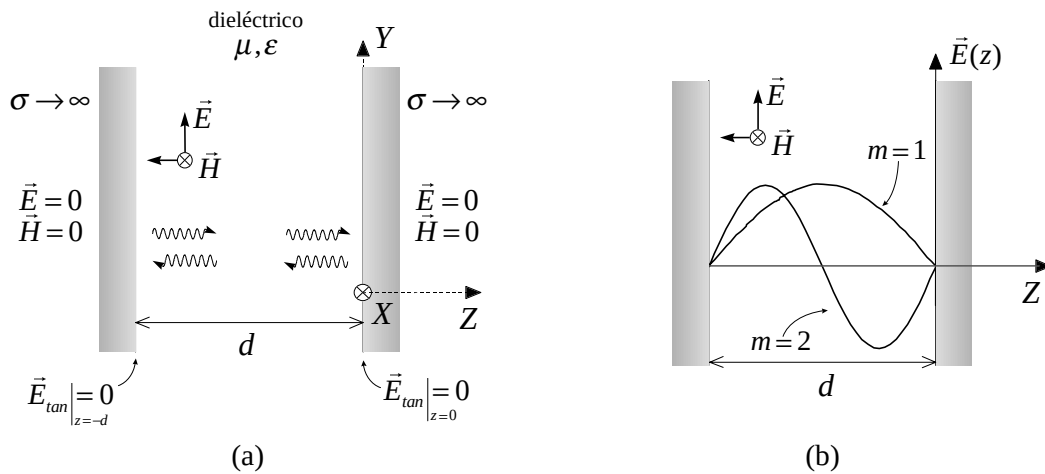


Fig. 4.10 (a) Cavidad resonante formada por dos paredes conductoras separadas por un medio dieléctrico. (b) Modos de vibración de la cavidad

o, lo que es lo mismo,  $kd = \frac{2\pi}{\lambda}d = m\pi$ <sup>11</sup>. Es decir, en el interior de la cavidad sólo se pueden generar un número limitado de ondas estacionarias, las cuales reciben el nombre de *modos de vibración* de la cavidad y se identifican según el valor de  $m$ . En la figura 4.10b aparecen representados los modos correspondientes a  $m=1$  y  $m=2$ . Las *frecuencias de resonancia* correspondientes son  $f = v/2d$  y  $f = v/d$ , respectivamente, donde  $v$  es la velocidad de propagación de las ondas planas en el dieléctrico. La frecuencia de resonancia para un modo  $m$  cualquiera es  $f = m \frac{v}{2d}$ .

#### **Ejemplo 4.2:** Cavidades láser

Una aplicación del fenómeno de la resonancia se encuentra en las cavidades láser. Aunque existen muchos tipos de láser distintos, uno de los más corrientes es el láser de He-Ne, en el que un gas formado por una mezcla de helio y neón se encuentra encerrado en el interior de una cavidad cilíndrica, limitada en sus extremos por dos espejos metálicos, uno de los cuales es un reflector perfecto, mientras que el otro sólo refleja parte de la onda incidente y deja pasar el resto. La onda estacionaria se genera en el interior de la cavidad mediante el proceso conocido con el nombre de *emisión estimulada*, tras la excitación de los átomos del gas por medio de un campo externo, de manera que el número de átomos excitados supera al de átomos no excitados (lo que se conoce como *inversión de población*). La descripción exacta del fenómeno escapa al propósito de este libro, ya que no puede ser explicado mediante la teoría clásica de campos y es necesario recurrir a la mecánica cuántica. Sin embargo, podemos entender el fenómeno a grandes rasgos del modo siguiente: el paso de una onda elemental o fotón cerca de un átomo excitado provoca su desexcitación. Para que la desexcitación se produzca, la energía del fotón debe coincidir con la energía de excitación del átomo. En este caso, al desexcitarse, el átomo emite una onda de características (frecuencia y fase) idénticas a las de la onda incidente, a la que cede la energía que había adquirido al ser excitado por el campo externo. Cuando existe inversión de población, la emisión estimulada se reproduce en cascada, ya que los dos fotones resultantes pueden desexcitar, a su vez, más átomos, y así sucesivamente. La presencia de los espejos

<sup>11</sup> También podemos entender el fenómeno del modo siguiente: una onda plana excitada en el punto  $z = 0$ , tras ser reflejada en la pared situada en  $z = -d$ , regresa al punto de partida, donde se superpone a la onda inicial, y así sucesivamente. Si el desfase  $e^{-jk2d}$  acumulado por las ondas secundarias generadas tras cada ida y vuelta es un múltiplo de  $2\pi$ , todas las ondas llegarán al punto  $z = 0$  con la misma fase y se reforzarán entre sí (*interferencia constructiva*). Por el contrario, si la frecuencia de la onda inicial es tal que no se cumple la condición  $2kd = m2\pi$ , las ondas llegarán con fases distintas, dando lugar a contribuciones positivas y negativas para el campo eléctrico total en la cavidad. Repitiendo el proceso hasta el infinito, se puede comprobar que las distintas contribuciones se contrarrestan completamente (*interferencia destructiva*).

reflectores en los extremos de la cavidad provoca que únicamente las ondas cuya frecuencia coincida con una de las frecuencias de resonancia de la cavidad darán lugar a interferencias constructivas. Las ondas restantes interferirán destructivamente entre ellas (de ahí el carácter monocromático de la luz láser).

Por lo tanto, en una cavidad resonante con un medio activo (la mezcla de He-Ne u otro), existen dos condicionantes para la frecuencia de emisión: el primero viene dado por las diferencias energéticas de los niveles atómicos implicados en el proceso (según la conocida relación  $E = hf$ , en la que  $E$  representa dicha diferencia de energía,  $f$  es la frecuencia de la onda emitida y  $h$  es una constante universal, conocida como *constante de Planck*) y el segundo por las frecuencias propias de la cavidad. De ambas condiciones la segunda es, en la práctica, la más restrictiva.

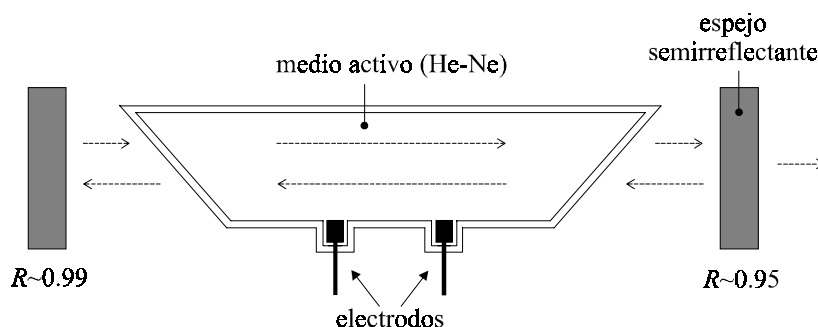


Fig. 4.11 Resonancia en una cavidad láser

### 4.3 Incidencia normal sobre medios dieléctricos

#### 4.3.1 Reflexión y transmisión en la superficie de un medio dieléctrico

Consideremos ahora el caso en que el medio sobre el que incide la onda es un material dieléctrico no conductor. ¿Qué fenómenos podemos esperar que se produzcan ahora como consecuencia de la incidencia de una onda plana sobre la superficie de separación? Para empezar, podemos suponer que, como ocurría con los conductores perfectos, aparecerá una onda reflejada en el primer medio. La novedad se encuentra en el hecho que ahora el campo no tiene porqué ser nulo en el segundo medio, al tratarse de un dieléctrico no conductor, por lo que debemos asumir la existencia de, por lo menos, una onda transmitida<sup>12</sup>, tal como indica la figura 4.12a.

<sup>12</sup> Como principio de actuación, debemos optar siempre por la hipótesis más sencilla posible. Si luego no logramos que se cumplan las condiciones de contorno, siempre estaremos a tiempo de añadir elementos adicionales.

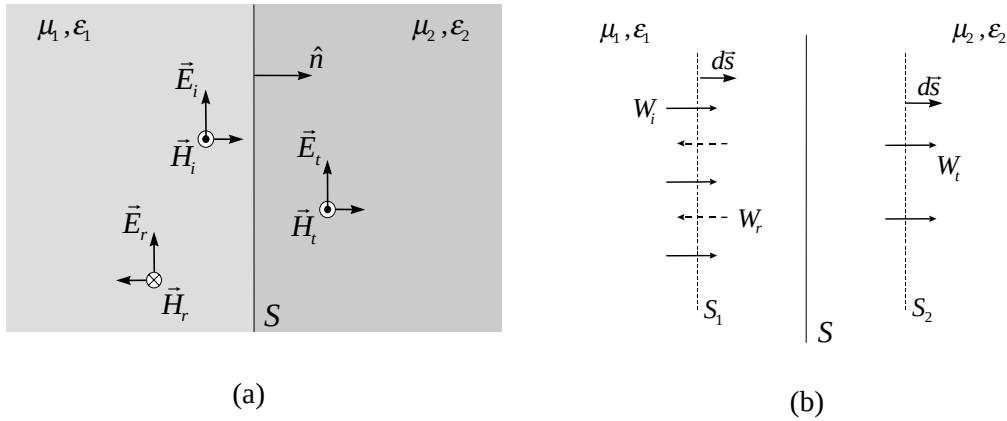


Fig. 4.12 (a) Incidencia normal de una onda plana sobre un medio dieléctrico no conductor. En este caso el campo no ha de ser nulo necesariamente en la región II y debemos asumir la existencia de una onda transmitida. (b) Flujo de potencia asociado a las ondas incidente, reflejada y transmitida

Tal como vimos en la sección precedente, si no existen pérdidas en ninguno de los dos medios, cuando estamos en régimen senoidal permanente el flujo medio de potencia que incide en la superficie de separación debe equilibrarse con el flujo que sale de ella (Fig. 4.12b). Es decir, debe cumplirse la relación

$$W_i + W_r = W_t$$

donde  $W_i$  y  $W_r$  representan el flujo medio de potencia a través de  $S_1$  asociado a las ondas incidente y reflejada, respectivamente, mientras que  $W_t$  corresponde al flujo de potencia a través de  $S_2$  asociado a la onda transmitida. Dicho de otro modo

$$\int_{S_1} \vec{P}_i \cdot d\vec{s}_1 + \int_{S_1} \vec{P}_r \cdot d\vec{s}_1 = \int_{S_2} \vec{P}_t \cdot d\vec{s}_2 \quad (4.28)$$

donde  $\vec{P}_i$ ,  $\vec{P}_r$  y  $\vec{P}_t$  son los vectores de Poynting correspondientes<sup>13</sup>.

<sup>13</sup> Nótese que el término  $W_r = \int_{S_1} \vec{P}_r \cdot d\vec{s}_1$ , correspondiente a la onda reflejada, da lugar a una contribución negativa, puesto que  $\vec{P}_r$  y  $d\vec{s}_1$  tienen sentidos opuestos.

Por otro lado, el campo electromagnético resultante debe satisfacer las condiciones de contorno (4.1)-(4.4). Suponiendo que no hay cargas ni corrientes de portadores libres en ninguno de los dos medios<sup>14</sup>, las condiciones que afectan a las componentes tangenciales del campo toman la forma<sup>15</sup>

$$\hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \Big|_S = 0 \quad (4.29)$$

$$\hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \Big|_S = 0 \quad (4.30)$$

Ahora bien, si no hay cargas ni corrientes de portadores libres, ¿cómo se generan en este caso las ondas reflejada y transmitida? La causa habrá que buscarla ahora en las cargas (y corrientes) ligadas al medio. Tal como vimos en el capítulo 2, éstas se encuentran formando dipolos, los cuales se orientan según el campo electromagnético presente en el medio. Si este campo es variable en el tiempo, como es el caso de una onda plana uniforme que incide sobre su superficie, se producirá una reorientación de los dipolos acorde con la variación del campo, lo que modificará la posición de las cargas ligadas, así como la dirección e intensidad de las corrientes. Luego, estas variaciones serán las que originarán las ondas reflejada y transmitida.

Una vez aclarado su origen, pasemos a determinar el campo que resulta de la reflexión y transmisión en la superficie de separación, mediante el procedimiento empleado en la sección 4.2.1 para la incidencia normal sobre conductores perfectos, es decir, consideraremos, de momento y para simplificar el cálculo, que la onda incidente tiene polarización lineal, para más adelante extender el resultado obtenido a ondas con polarización circular y elíptica.

Tal como muestra la figura 4.12a, fijamos los ejes de coordenadas de manera que el eje Z coincida con la dirección de propagación de la onda incidente y el eje Y coincida con la dirección de polarización del campo eléctrico asociado. En este caso, los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  de la onda incidente de nuevo vendrán dados por las expresiones (4.9) y (4.10), es decir

$$\vec{E}_i(\vec{r}) = E_{0i} \hat{y} e^{-jk_1 z} \quad (4.31)$$

$$\vec{H}_i(\vec{r}) = -\frac{E_{0i}}{\eta_1} \hat{x} e^{-jk_1 z} \quad (4.32)$$

<sup>14</sup> A diferencia de lo que ocurre en un conductor, en un dieléctrico no conductor sólo puede haber portadores de carga libres si son introducidos por medio de algún mecanismo externo.

<sup>15</sup> Recordemos, una vez más, que en régimen senoidal permanente, si se cumplen éstas, las condiciones que afectan a las componentes normales se verifican de forma automática.

donde  $\eta_1 \equiv \sqrt{\mu_1 / \epsilon_1}$  y  $k_1 \equiv \omega \sqrt{\mu_1 \epsilon_1}$  son, respectivamente, la impedancia intrínseca y la constante de propagación del dieléctrico que forma la región I.

Para la onda reflejada supondremos que se propaga en dirección opuesta a la de la onda incidente ( $-\hat{z}$ , según la figura 4.12a) y que conserva la misma polarización (tal como habíamos hecho en la sección 4.2.1 para la incidencia sobre conductores<sup>16</sup>), es decir

$$\vec{E}_r(\vec{r}) = E_{0r} \hat{y} e^{jk_z z} \quad (4.33)$$

$$\vec{H}_r(\vec{r}) = -\frac{1}{\eta_1} \hat{z} \times \vec{E}_r(\vec{r}) = \frac{E_{0r}}{\eta_1} \hat{x} e^{jk_1 z} \quad (4.34)$$

Finalmente, suponiendo que la onda transmitida hacia la región II también conserva la polarización y se propaga en la misma dirección que la onda incidente, obtenemos

$$\vec{E}_t(\vec{r}) = E_{0t} \hat{y} e^{-jk_2 z} \quad (4.35)$$

$$\vec{H}_t(\vec{r}) = -\frac{E_{0t}}{\eta_2} \hat{x} e^{-jk_2 z} \quad (4.36)$$

donde  $\eta_2 \equiv \sqrt{\mu_2 / \epsilon_2}$  es la impedancia intrínseca y  $k_2 \equiv \omega \sqrt{\mu_2 \epsilon_2}$  la constante de propagación del dieléctrico que forma la región II.

Apliquemos a continuación la condición de contorno (4.29) al campo eléctrico en la superficie de separación entre los dos medios (plano  $z = 0$  en la figura 4.12a). Al no haber campo eléctrico en la dirección del eje  $X$ , la única componente tangencial afectada por dicha condición es la componente en la dirección del eje  $Y$ , es decir

$$(E_{iy} + E_{ry})|_{z=0} = E_{ty}|_{z=0}$$

Sustituyendo las expresiones de los campos, (4.31), (4.33) y (4.35), obtenemos

$$E_{0i} e^{-jk_1 z}|_{z=0} + E_{0r} e^{jk_1 z}|_{z=0} = E_{0t} e^{-jk_2 z}|_{z=0}$$

de donde resulta la siguiente relación de amplitudes

$$E_{0i} + E_{0r} = E_{0t} \quad (4.37)$$

---

<sup>16</sup> De no hacer esta suposición, la resolución del problema sería bastante más laboriosa, para llegar al final al mismo resultado.

En el caso de incidencia normal sobre un conductor perfecto, la relación obtenida era, simplemente,  $E_{0i} + E_{0r} = 0$  (o, lo que es lo mismo,  $E_{0r} = -E_{0i}$ ), con lo que el problema quedaba resuelto en este punto. Como consecuencia de la presencia de la onda transmitida, tenemos ahora una incógnita más, por lo que se hace necesario obtener una relación adicional para determinar las amplitudes de las ondas reflejada y transmitida. Esta relación la obtendremos aplicando la condición (4.30) a la componente tangencial del campo magnético, es decir

$$(H_{ix} + H_{rx})|_{z=0} = H_{tx}|_{z=0}$$

y sustituyendo en ella las expresiones de los campos correspondientes, (4.32), (4.34) y (4.36), resulta

$$-\frac{E_{0i}}{\eta_1} + \frac{E_{0r}}{\eta_1} = -\frac{E_{0t}}{\eta_2} \quad (4.38)$$

La resolución del sistema de ecuaciones formado por (4.37) y (4.38) nos permite relacionar las amplitudes de las ondas generadas con la de la onda incidente. Estas relaciones suelen expresarse comúnmente de la forma

$$E_{0r} = \rho E_{0i} \quad (4.39)$$

$$E_{0t} = \tau E_{0i} \quad (4.40)$$

donde los símbolos  $\rho$  y  $\tau$  representan los llamados *coeficientes de reflexión y transmisión* en la superficie, los cuales se definen, respectivamente, como la relación de amplitudes entre la onda reflejada y la onda incidente, por un lado, y entre las ondas transmitida e incidente, por el otro. El uso de los estos coeficientes nos permite expresar las ecuaciones (4.37) y (4.38) de forma más compacta

$$1 + \rho = \tau \quad (4.41)$$

$$1 - \rho = \tau \frac{\eta_2}{\eta_1} \quad (4.42)$$

Resolviendo este sistema, obtenemos las siguientes expresiones genéricas para los coeficientes  $\rho$  y  $\tau$

$$\rho = \frac{\eta_2 - \eta_1}{\eta_2 + \eta_1} \quad (4.43)$$

$$\tau = \frac{2\eta_2}{\eta_2 + \eta_1} \quad (4.44)$$

Este es el resultado principal del problema planteado, según el cual la resolución de un problema de incidencia normal sobre medios dieléctricos de una onda plana, polarizada linealmente, se reduce al cálculo de los coeficientes de reflexión y transmisión en la

superficie, mediante las expresiones (4.43) y (4.44), en las que intervienen únicamente las impedancias intrínsecas de los medios involucrados. Estas expresiones pueden combinarse, además, con las relaciones (4.41) y (4.42), según convenga.

En el caso de medios no magnéticos, es más frecuente expresar los coeficientes de reflexión y transmisión en función de los llamados *índices de refracción* de los medios I y II. En general, se define el índice de refracción de un medio dieléctrico como la relación entre las velocidades de propagación de la luz en el espacio libre y en el medio en cuestión, es decir

$$n \equiv \frac{c}{v} = \frac{k}{k_0} \quad (4.45)$$

donde  $k$  y  $k_0$  representan, respectivamente, las constantes de propagación de la luz en el dieléctrico y en el espacio libre. Si el dieléctrico es, además un medio no magnético (*i. e.*,  $\mu = 1$ , lo cual, por otro lado, es bastante frecuente), se verifica

$$n = \sqrt{\epsilon_r} \quad (4.46)$$

lo que nos permite expresar la impedancia intrínseca  $\eta$  del medio de la forma

$$\eta = \frac{\eta_0}{n} \quad (4.47)$$

donde  $\eta_0 \equiv 120\pi \Omega$  corresponde a la del espacio libre. Según esta última relación, las expresiones (4.43) y (4.44) de los coeficientes de reflexión y transmisión para dieléctricos no magnéticos se reducen a

$$\rho = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \quad (4.48)$$

$$\tau = \frac{2n_1}{n_1 + n_2} \quad (4.49)$$

donde  $n_1$  y  $n_2$  son, respectivamente, los índices de reflexión en las regiones I y II.

### 4.3.2 Ondas parcialmente estacionarias

Una vez obtenidos los coeficientes de reflexión y transmisión, podemos comprobar que en la superficie de separación se cumple el balance de flujos de potencia que habíamos expresado mediante la relación (4.28), en la que el término de la onda reflejada daba lugar a una contribución negativa. Por este motivo, es más frecuente presentar este balance de la siguiente forma, mucho más intuitiva



$$R + T = 1 \quad (4.50)$$

donde  $R$  y  $T$  representan la *reflectividad* y la *transmitividad* en la superficie, las cuales se definen, respectivamente, como las fracciones de potencia reflejada y transmitida y se obtienen a partir de la relación entre los flujos de potencia en la dirección normal asociados a las ondas reflejada e incidente, por un lado, y entre los correspondientes a las ondas transmitida e incidente, por el otro. En el caso de incidencia normal, estas relaciones se obtienen a partir de los vectores de Poynting respectivos, es decir

$$R \equiv \frac{|\vec{P}_r|}{|\vec{P}_i|} = \frac{\frac{|E_{0r}|^2}{2\eta_1}}{\frac{|E_{0i}|^2}{2\eta_1}} = |\rho|^2 \quad T \equiv \frac{|\vec{P}_t|}{|\vec{P}_i|} = \frac{\frac{|E_{0t}|^2}{2\eta_2}}{\frac{|E_{0i}|^2}{2\eta_1}} = |\tau|^2 \frac{\eta_1}{\eta_2} \quad (4.51)-(4.52)$$

Luego, el balance de potencias anterior se cumple si se verifica la relación

$$|\rho|^2 + |\tau|^2 \frac{\eta_1}{\eta_2} = 1 \quad (4.53)$$

lo que podemos comprobar fácilmente, sustituyendo los coeficientes  $\rho$  y  $\tau$  por sus expresiones correspondientes, (4.43) y (4.44). Por otro lado, al ser  $R$  y  $T$ , por definición, cantidades positivas, se debe cumplir, además, la propiedad

$$0 \leq R, T \leq 1 \quad (4.54)$$

De lo contrario, se violaría el principio de conservación de la energía.

Podemos comprobar, también, de forma inmediata que, cuando existe adaptación de impedancias (es decir,  $\eta_2 = \eta_1$ ), se obtiene  $\rho = 0$  y  $\tau = 1$ , por lo que no habrá reflexión en la superficie y toda la potencia incidente será transmitida a la región II. Este resultado puede parecer de perogrullo, ya que se puede considerar que, de hecho, no hay cambio de medio alguno en ese caso. Sin embargo, el concepto de adaptación de impedancias, análogo al empleado en teoría de circuitos, es mucho más potente de lo que parece, tal como veremos en la sección 4.7.

La situación opuesta, en la que toda la potencia incidente se refleja y no se transmite potencia a la región II, es justamente la obtenida en el caso de incidencia sobre conductores perfectos. En este caso, la reflexión producida en la superficie daba lugar a la formación de una onda estacionaria en el dieléctrico de la región I. Si entendemos el fenómeno de la reflexión en conductores como un caso particular de incidencia en el que se cumple  $R = 1$  y

$T = 0$ <sup>17</sup>, nos podemos preguntar ahora si obtendremos un comportamiento similar en el caso general. Para responder a esta pregunta, debemos sumar de nuevo los campos eléctricos asociados a las ondas incidente y reflejada, para obtener la siguiente expresión fasorial para el campo total presente en la región I

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_i + \vec{E}_r = E_{0i} e^{-jk_1 z} \hat{y} + \rho E_{0i} e^{jk_1 z} \hat{y}$$

Manipulándola convenientemente, obtenemos

$$\begin{aligned} \vec{E}_1 &= (1 + \rho) E_{0i} e^{-jk_1 z} \hat{y} + \rho E_{0i} (e^{jk_1 z} - e^{-jk_1 z}) \hat{y} = \\ &= \tau E_{0i} e^{-jk_1 z} \hat{y} + 2j\rho E_{0i} \hat{y} \sin k_1 z \end{aligned} \quad (4.55)$$

donde hemos hecho uso de la relación (4.41). El primer término de la expresión final corresponde a una onda plana que se desplaza en la dirección de la onda incidente, mientras que el segundo término es análogo al de la expresión (4.22), correspondiente a una onda estacionaria, resultante de la interferencia de la onda incidente con la onda reflejada. En el caso particular  $\rho \rightarrow -1$ ,  $\tau \rightarrow 0$ , ambas expresiones son idénticas. En el caso general, la presencia de la onda progresiva en la expresión (4.55) se debe a que ahora no toda la potencia se refleja. Por este motivo, una onda como la representada por dicha expresión recibe el nombre de *onda parcialmente estacionaria*.

Las ondas de este tipo se pueden caracterizar mediante la denominada *relación de onda estacionaria*  $S$ <sup>18</sup>, la cual se define como la relación entre los valores máximo y mínimo que toma el campo instantáneo en el medio de la región I, es decir

$$S = \frac{\mathcal{E}_{1max.}}{\mathcal{E}_{1min.}} \quad (4.56)$$

Teniendo en cuenta que una onda parcialmente estacionaria es el resultado de la superposición de una onda incidente y una onda reflejada, la amplitud del campo total será máxima en aquellos puntos en los que ambas ondas tengan la misma fase y mínima en los puntos en los que las ondas estén en contrafase, es decir

<sup>17</sup> Es interesante comprobar que en el caso límite  $\eta_2 \rightarrow 0$ , según las expresiones (4.43) y (4.44), se obtiene  $\rho \rightarrow -1$  y  $\tau \rightarrow 0$ . Desde este punto de vista, podemos considerar un conductor perfecto como un dieléctrico de impedancia nula. En este caso, utilizando la terminología de circuitos, podemos considerar que hemos “cortocircuitado” el dieléctrico de la región I colocando un conductor perfecto en su extremo.

<sup>18</sup> Se denomina también con las iniciales, ROE (o SWR, del inglés *standing wave ratio*).

$$S = \frac{(1+|\rho|)E_{0i}}{(1-|\rho|)E_{0i}} = \frac{1+|\rho|}{1-|\rho|} \quad (4.57)$$

En la figura 4.13 hemos representado la envolvente del campo para un valor de  $\rho > 0$ <sup>19</sup>. En este caso, la amplitud de oscilación del campo instantáneo alcanza los valores extremos

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &\equiv \mathcal{E}_{\max} = 1+|\rho| & \text{si} & \quad z = m \frac{\lambda}{2} \\ \mathcal{E} &\equiv \mathcal{E}_{\min} = 1-|\rho| & \text{si} & \quad z = (2m+1) \frac{\lambda}{4} \end{aligned}$$

Si el medio de la región II fuera un conductor perfecto, tendríamos  $|\rho|=1$ , con lo que los mínimos de oscilación serían puntos de oscilación nula o nodos de la función, es decir, la onda sería una onda estacionaria pura, tal como vimos en la sección 4.2.2.

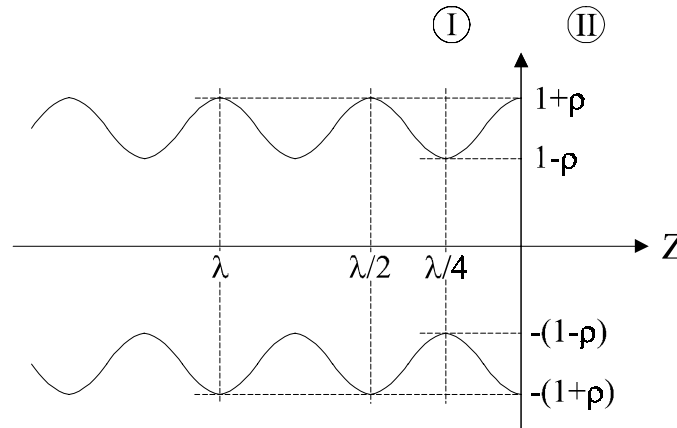


Fig. 4.13 Envolvente del campo instantáneo en una onda parcialmente estacionaria

<sup>19</sup> La envolvente del campo instantáneo representa la amplitud de la oscilación temporal del mismo. Para obtenerla basta hallar los valores extremos de la función del campo instantáneo normalizado (*i.e.* considerando  $E_{0i} = 1$  para la onda incidente). La función correspondiente al campo dado por la expresión (4.55) es de la forma  $f(z,t) = (1+\rho)\cos\omega t \cos k_1 z + (1-\rho)\sin\omega t \sin k_1 z$  cuyos valores extremos son  $f_{\text{ext}} = \pm(1+\rho^2 + 2\rho \cos 2k_1 z)^{1/2}$  los cuales se obtienen fácilmente a partir de la derivada temporal de  $f(z,t)$ .

## 4.4 Incidencia oblicua sobre conductores perfectos

### 4.4.1 Planteamiento del problema

Hasta ahora nos hemos limitado al estudio de la incidencia normal de ondas planas, tanto sobre conductores como sobre dieléctricos. El análisis de estos casos sencillos nos ha permitido profundizar en lo que podríamos llamar la “física del problema”. Por otro lado, podemos extrapolar sin dificultad muchas de las conclusiones obtenidas a casos más generales.

Abordemos, por ejemplo, el problema general de la incidencia de ondas planas sobre conductores perfectos, ahora con un ángulo cualquiera. Como ocurría en incidencia normal, debemos asumir la existencia de una onda reflejada, originada a partir de la interacción entre el campo de la onda incidente y los portadores de carga libre presentes en el conductor. Esta onda reflejada será la encargada de extraer la potencia electromagnética aportada por la onda incidente. Lógicamente, para que el balance energético sea nulo, las dos ondas deben tener la misma amplitud, resultado que ya habíamos obtenido para incidencia normal. De hecho, podemos adelantar que se cumplirán las tres propiedades observadas (conservación de la polarización y de la amplitud y desfase  $\Delta\phi = \pi$  entre las ondas incidente y reflejada) en este último caso.

¿Qué diferencia habrá, pues? En el caso de incidencia normal habíamos supuesto que la onda reflejada se propagaba en la misma dirección y en sentido opuesto al de la onda incidente, lo cual se ajustaba perfectamente a nuestra intuición, aunque no lo hubiéramos demostrado explícitamente. Sin embargo, el hecho de las expresiones obtenidas para el campo total cumplieran las condiciones de contorno era una demostración *a posteriori* de que habíamos dado con la solución del problema (según reza el teorema de unicidad de las soluciones de las ecuaciones de Maxwell). En el caso de incidencia oblicua podríamos efectuar el mismo razonamiento: suponer que las ondas incidente y reflejada tienen la misma dirección y sentido opuesto y verificar que se cumplan las condiciones de contorno en la superficie del conductor. El resultado sería, no obstante, negativo, por lo que no vamos a perder más tiempo en este asunto, ya que ello no nos llevaría a ninguna parte.

Por lo tanto, esta vez, partiremos de la hipótesis opuesta, es decir, supondremos que la onda reflejada se propaga en una dirección distinta de la de la onda incidente cuando ésta no incide normalmente sobre el conductor. El problema se hace ahora matemáticamente más complicado, por lo que vale la pena pensar un poco antes de empezar a resolverlo. La primera medida que se debe tomar consiste en fijar los ejes de coordenadas estratégicamente, con el fin de eliminar componentes en los vectores. Para ello, se define el *plano de incidencia* de la forma siguiente: supongamos que tenemos una onda plana polarizada linealmente que incide sobre un conductor plano, desviada un cierto ángulo  $\theta_i$  respecto a la dirección normal (Fig. 4.14a). Llamamos plano de incidencia al *plano formado por el vector de propagación de la onda incidente  $\vec{k}_i$  y el vector  $\hat{n}$ , normal a la superficie* (y dirigido

hacia el exterior del conductor, tal como habíamos convenido en la sección 4.2.1), mientras que  $\theta_i$  recibe el nombre de *ángulo de incidencia*. Por el hecho de contener el vector  $\hat{n}$ , el plano de incidencia es perpendicular a la superficie del conductor.

Una vez definido el plano de incidencia, podemos fijar los ejes de coordenadas manteniendo el criterio adoptado para incidencia normal, de manera que el eje  $Z$  sea perpendicular a la superficie del conductor y los ejes  $X$  e  $Y$  estén contenidos en ella. Como tenemos varias posibilidades para éstos últimos, lo más adecuado será imponer que uno de ellos, por ejemplo el eje  $Y$ , esté contenido además en el plano de incidencia, tal como indica la figura 4.14. De este modo, el vector de propagación  $\vec{k}_i$  sólo tendrá dos componentes no nulos,  $k_{iy}$  y  $k_{iz}$ . Luego, podemos expresar dicho vector, en función del ángulo de incidencia, de la forma

$$\vec{k}_i = k\hat{k}_i = k(\sin\theta_i \hat{y} + \cos\theta_i \hat{z}) \quad (4.58)$$

donde  $k$  es la constante de propagación de la onda en el dieléctrico.

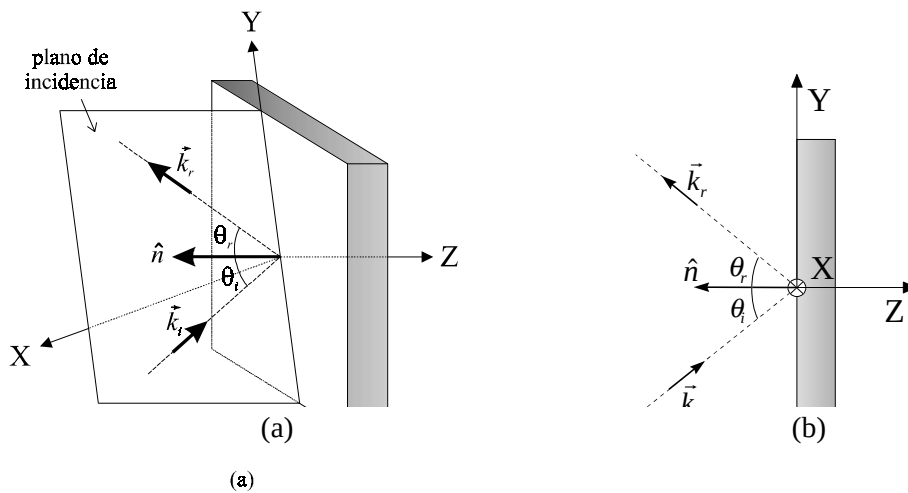


Fig. 4.14 (a) Los vectores  $\vec{k}_i$  y  $\hat{n}$  definen el plano de incidencia (plano YZ, según se han fijado los ejes en este caso). El vector de propagación  $\vec{k}_r$  está incluido también en el plano de incidencia. (b) Vista de perfil de la situación anterior, desde un punto situado sobre el eje  $X$ . El ángulo de reflexión se define de forma similar a la del ángulo de incidencia

Vamos a aceptar ahora que el vector de propagación  $\vec{k}_r$  de la onda reflejada está contenido también en el plano de incidencia<sup>20</sup>. Definiendo el *ángulo de reflexión*  $\theta_r$  como el *ángulo formado por el vector  $\vec{k}_r$  con la recta normal a la superficie* (Fig. 4.14b), podemos expresar dicho vector de la forma

$$\vec{k}_r = k\hat{k}_r = k(\sin\theta_r \hat{y} - \cos\theta_r \hat{z}) \quad (4.59)$$

En cuanto a los campos eléctricos asociados a las ondas incidente y reflejada, serán fasores del tipo

$$\vec{E}_i(\vec{r}) = \vec{E}_{0i} e^{-j\vec{k}_i \cdot \vec{r}} = \vec{E}_{0i} e^{-jk(\sin\theta_i \hat{y} + \cos\theta_i \hat{z})} \quad (4.60)$$

$$\vec{E}_r(\vec{r}) = \vec{E}_{0r} e^{-j\vec{k}_r \cdot \vec{r}} = \vec{E}_{0r} e^{-jk(\sin\theta_r \hat{y} - \cos\theta_r \hat{z})} \quad (4.61)$$

### *Descomposición de la onda incidente en dos ondas polarizadas linealmente*

Como empieza a ser habitual, nuestro caballo de batalla será la aplicación de las condiciones de contorno para el campo total en la superficie de separación. Si consideramos que la onda incidente está polarizada en una dirección cualquiera, tendremos, a lo sumo, dos componentes del campo eléctrico tangenciales a la superficie, y lo mismo ocurrirá para la onda reflejada. Por consiguiente, podemos descomponer la condición (4.5) de la forma

$$(E_{ix} + E_{rx})|_{z=0} = 0 \quad (4.62)$$

$$(E_{iy} + E_{ry})|_{z=0} = 0 \quad (4.63)$$

En este punto, el concepto de plano de incidencia se nos revela de una gran utilidad, ya que nos permitirá la simplificación del proceso, mediante el siguiente procedimiento: descomponemos la onda incidente, cuya polarización, en el caso más general, será elíptica, en dos ondas planas con el campo eléctrico polarizado linealmente en direcciones ortogonales<sup>21</sup>, como se indica en la figura 4.15, de modo que en una de ellas el fasor de campo eléctrico es paralelo al plano de incidencia, mientras que en la otra es perpendicular a él, lo que podemos expresar matemáticamente de la forma siguiente:

$$\vec{E}_i = \vec{E}_{i\parallel} + \vec{E}_{i\perp} \quad (4.64)$$

$$\vec{H}_i = \vec{H}_{i\parallel} + \vec{H}_{i\perp} \quad (4.65)$$

<sup>20</sup>La demostración de este supuesto la dejamos para más adelante.

<sup>21</sup> Ver sección 3.3.1.

donde los campos  $\vec{H}_{i\parallel}$  y  $\vec{H}_{i\perp}$  están relacionados, respectivamente, con  $\vec{E}_{i\parallel}$  y  $\vec{E}_{i\perp}$  por la condición  $\vec{H} = \frac{1}{\eta} \hat{k} \times \vec{E}$ .

De este modo, conseguimos reducir el problema general en dos casos más sencillos, esto es, el de una onda con el campo eléctrico polarizado linealmente según el plano de incidencia y el de una onda con el campo eléctrico polarizado perpendicularmente. Las expresiones que obtengamos en ambos casos para el campo total en el dieléctrico pueden ser utilizadas luego para ondas con una polarización cualquiera, por medio de las relaciones (4.64) y (4.65).

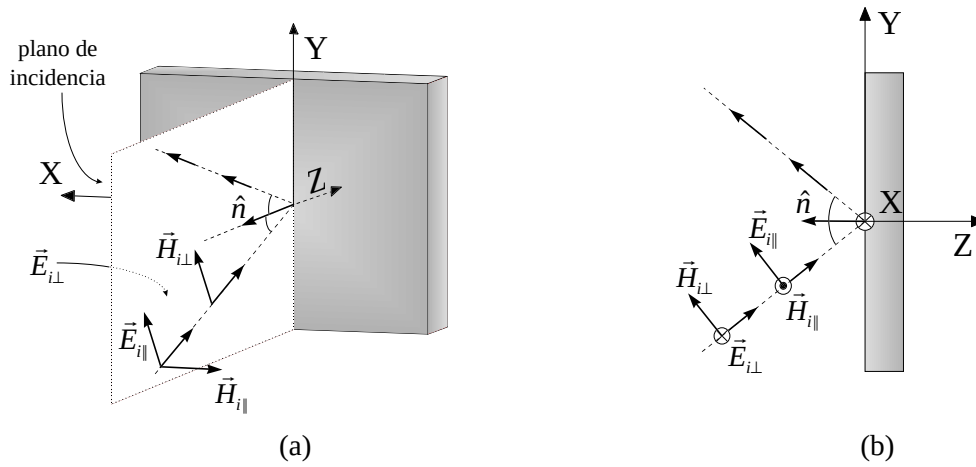


Fig. 4.15 (a) Descomposición de la onda incidente en dos ondas polarizadas linealmente. (b) Representación esquemática (de perfil) de la situación anterior

(a) Onda incidente con polarización lineal perpendicular al plano de incidencia

Según hemos fijado los ejes de coordenadas en la figura 4.15, la dirección perpendicular al plano de incidencia coincide con la del eje X. Luego, si imponemos que el campo eléctrico de la onda incidente esté polarizado linealmente según esta dirección, la componente en la dirección del eje Y debe anularse (i.e.,  $E_{iy} = 0$ ), con lo que, por fuerza, deberá ser también  $E_{ry} = 0$ , para que se verifique la condición (4.63). Por consiguiente, las expresiones vectoriales (4.60) y (4.61) se reducen a

$$\vec{E}_{i\perp}(\vec{r}) = E_{0i\perp} \hat{x} e^{-jk(\sin\theta_i y + \cos\theta_i z)} \quad (4.66)$$

$$\vec{E}_{r\perp}(\vec{r}) = E_{0r\perp} \hat{x} e^{-jk(\sin\theta_r y - \cos\theta_r z)} \quad (4.67)$$

Tal como ocurría en el caso de incidencia normal, el estado de polarización de la onda incidente se mantiene intacto tras la reflexión (Fig. 4.16). Por otro lado, sustituyendo (4.66) y (4.67) en (4.62), obtenemos

$$E_{0i\perp} e^{-jk(\sin\theta_i y + \cos\theta_i z)} \Big|_{z=0} + E_{0r\perp} e^{-jk(\sin\theta_r y - \cos\theta_r z)} \Big|_{z=0} = 0 \quad (4.68)$$

Es decir, se debe cumplir

$$E_{0i\perp} e^{-jk \sin\theta_i y} + E_{0r\perp} e^{-jk \sin\theta_r y} = 0 \quad (4.69)$$

o, lo que es lo mismo,

$$\frac{E_{0r\perp}}{E_{0i\perp}} = -e^{-jk(\sin\theta_i - \sin\theta_r)y} \quad (4.70)$$

para que la condición (4.62) se satisfaga.

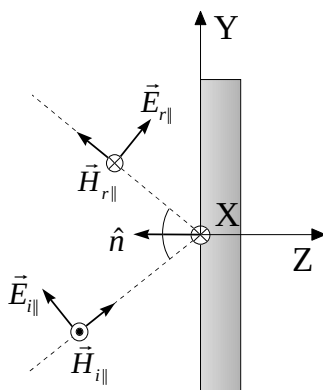


Fig. 4.16 Reflexión de una onda plana uniforme con el campo eléctrico polarizado linealmente en la dirección perpendicular al plano de incidencia. El estado de polarización se mantiene tras la reflexión en la superficie del conductor

Por tratarse de ondas planas y uniformes, los términos de amplitud  $E_{0i\perp}$  y  $E_{0r\perp}$  son constantes. Por lo tanto, si el término de la izquierda de la igualdad (4.70) es una constante, el término de la derecha también debe serlo. La única posibilidad de que ello ocurra es que sea  $\sin\theta_r = \sin\theta_i$  o, lo que es lo mismo,



$$\theta_r = \theta_i \quad (4.71)$$

(ya que  $0 \leq \theta_i, \theta_r \leq \pi/2$ ), para que desaparezca la dependencia en  $y$ . Tenemos, pues, como primera conclusión, que para que se verifique la condición de contorno (4.5) para las componentes tangenciales del campo eléctrico en la superficie del conductor, *el ángulo de reflexión debe ser igual al ángulo de incidencia*. En este caso, la relación (4.70) entre las amplitudes de las ondas incidente y reflejada se reduce a

$$\frac{E_{0r\perp}}{E_{0i\perp}} = -1 \quad (4.72)$$

que es la misma que habíamos obtenido en el caso de incidencia normal. Es decir, de nuevo obtenemos que la amplitud de la onda incidente debe conservarse tras la reflexión para que el campo total en el dieléctrico pueda satisfacer las condiciones de contorno justo en la superficie de separación con el conductor, mientras que aparece un desfase  $\Delta\varphi = \pi$  entre las ondas incidente y reflejada, representado por el signo “-” en la expresión (4.72). Según este resultado, el campo eléctrico de la onda reflejada queda de la forma

$$\vec{E}_{r\perp}(\vec{r}) = -E_{0i\perp} \hat{x} e^{-jk(\sin\theta_i y - \cos\theta_i z)} \quad (4.73)$$

Antes de proseguir, recordemos que hemos aceptado como supuesto la pertenencia a un mismo plano, perpendicular a la superficie del conductor y al que hemos convenido en llamar plano de incidencia, de las direcciones de propagación de las ondas incidente y reflejada. Podemos utilizar ahora un razonamiento similar al efectuado para obtener la relación (4.71) entre los ángulos de incidencia y de reflexión para comprobar que ello, efectivamente, es así.

Tomemos como punto de partida la hipótesis contraria, es decir, supongamos que el vector de propagación  $\vec{k}_r$  de la onda reflejada no está contenido en el plano de incidencia<sup>22</sup>. Tal como hemos fijado los ejes en la figura 4.14, dicho plano corresponde con el plano YZ, por lo que, en este caso, el vector  $\vec{k}_r$  deberá tener una componente no nula en la dirección del eje X, a la que llamaremos  $k_{rx}$ . Por consiguiente, deberemos reescribir la expresión (4.59) de la forma

$$\vec{k}_r = k_{rx} \hat{x} + k(\sin\theta_r \hat{y} - \cos\theta_r \hat{z})$$

sin que resulte alterada la expresión (4.58) para el vector  $\vec{k}_i$  de la onda incidente.

---

<sup>22</sup> Recordemos que, según hemos definido el plano de incidencia, el vector de propagación  $\vec{k}_i$  debe estar contenido forzosamente en él.

Nuestro objetivo consiste en demostrar que la componente  $k_{rx}$  debe anularse para que se verifiquen las condiciones de contorno en la superficie del conductor. Consideremos, por ejemplo, la condición (4.68) para una de las dos componentes tangenciales del campo eléctrico, de donde habíamos obtenido las relaciones (4.69) y (4.70). En este caso, deberíamos reescribirlas de la forma

$$\begin{aligned} E_{0i\perp} e^{-jk \sin \theta_i y} + E_{0r\perp} e^{-j(k_{rx} x + k \sin \theta_r y)} &= 0 \\ \frac{E_{0r\perp}}{E_{0i\perp}} &= -e^{jk_{rx} x} e^{-jk(\sin \theta_i - \sin \theta_r) y} \end{aligned}$$

Como ya hemos visto anteriormente, para que se cumpla esta última igualdad, el término de la derecha debe ser constante. Luego, además de la condición  $\theta_r = \theta_i$ , debe cumplirse

$$k_{rx} = 0$$

tal como queríamos demostrar.

*(b) Onda incidente con polarización lineal paralela al plano de incidencia*

Según la figura 4.17, en este caso el campo eléctrico de la onda incidente carece de la componente en la dirección del eje  $X$   $E_{ix} = 0$ . En cuanto a las otras dos componentes, se cumple

$$\vec{E}_{i\parallel}(\vec{r}) = E_{0i\parallel}(\cos \theta_i \hat{y} - \sin \theta_i \hat{z}) e^{-jk(\sin \theta_i y + \cos \theta_i z)} \quad (4.74)$$

De la condición (4.62) obtenemos que la onda reflejada tampoco tendrá componente en dicha dirección. Teniendo en cuenta que se debe cumplir, además,  $\vec{E}_{r\parallel} \perp \vec{k}_r$ , por tratarse de una onda plana, el campo eléctrico de la onda reflejada nos quedará como se indica en la figura. Matemáticamente, podemos expresarlo de la forma

$$\vec{E}_{r\parallel}(\vec{r}) = E_{0r\parallel}(\cos \theta_r \hat{y} + \sin \theta_r \hat{z}) e^{-jk(\sin \theta_r y - \cos \theta_r z)} \quad (4.75)$$

Luego, nos queda la componente en la dirección  $Y$  como única componente tangente a la superficie del conductor. Aplicando la condición de contorno correspondiente (4.63), obtenemos

$$E_{0i\parallel} \cos \theta_i e^{-jk \sin \theta_i y} + E_{0r\parallel} \cos \theta_r e^{-jk \sin \theta_r y} = 0$$

y de aquí,

$$\frac{E_{0r\parallel}}{E_{0i\parallel}} = -\frac{\cos \theta_i}{\cos \theta_r} e^{-jk(\sin \theta_i - \sin \theta_r) y}$$

Por consiguiente, de nuevo debe cumplirse

$$\theta_r = \theta_i \quad \frac{E_{0r\parallel}}{E_{0i\parallel}} = -1 \quad (4.76)$$

para satisfacer las condiciones de contorno, con lo que nos queda, para la onda reflejada

$$\vec{E}_{r\parallel}(\vec{r}) = -E_{0i\parallel}(\cos\theta_i \hat{y} + \sin\theta_i \hat{z}) e^{-jk(\sin\theta_i y - \cos\theta_i z)} \quad (4.77)$$

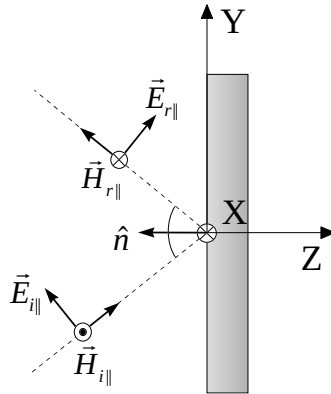


Fig. 4.17 Reflexión de una onda plana uniforme con el campo eléctrico polarizado linealmente en la dirección paralela al plano de incidencia. Como en el caso anterior, el estado de polarización se mantiene tras la reflexión en la superficie del conductor

#### 4.4.2 Ondas estacionarias mixtas

Tal como hicimos en el caso de incidencia normal, una vez obtenidas las expresiones generales para el campo eléctrico de la onda reflejada, podemos estudiar el comportamiento del campo total resultante de la superposición en el dieléctrico de las ondas incidente y reflejada. Recordemos que, en el caso de incidencia normal, el campo total presente en el dieléctrico tras la reflexión quedaba determinado por una función periódica que dependía únicamente de la distancia al conductor, función que habíamos convenido en llamar onda estacionaria, ya que no se producía propagación de señal ni transmisión de potencia alguna.

Por otro lado, podemos considerar el caso de incidencia normal como un caso particular de incidencia, en el que se cumple  $\theta_i = 0$ . En el caso general,  $\theta_i \neq 0$ , podemos

prever un comportamiento más complejo para el campo total presente en el dieléctrico. En concreto y tal como hemos fijado los ejes de coordenadas, nos aparecerá una doble dependencia, tanto de la coordenada  $Z$  como de la coordenada  $Y$ , para el campo total. Veamos a continuación cómo resulta ser esta dependencia en los dos casos estudiados en la sección 4.4.1:

*(a) Onda incidente con polarización lineal perpendicular al plano de incidencia*

Sumando las expresiones (4.66) y (4.73), correspondientes, respectivamente, a las ondas incidente y reflejada, obtenemos la siguiente expresión fasorial para el campo eléctrico total:

$$\begin{aligned}\vec{E}_{\perp}(\vec{r}) &= E_{0i\perp} \hat{x} e^{-jk \sin \theta_i y} (e^{-jk \cos \theta_i z} - e^{jk \cos \theta_i z}) = \\ &= -2jE_{0i\perp} \hat{x} \sin(k \cos \theta_i z) e^{-jk \sin \theta_i y}\end{aligned}\quad (4.78)$$

En cuanto al campo magnético, tenemos, para las ondas incidente y reflejada

$$\begin{aligned}\vec{H}_{i\perp}(\vec{r}) &= \frac{1}{\eta} \hat{k}_i \times \vec{E}_{i\perp} = \frac{1}{\eta} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & \sin \theta_i & \cos \theta_i \\ E_{0i\perp} & 0 & 0 \end{vmatrix} e^{-j\vec{k}_i \cdot \vec{r}} = \\ &= \frac{E_{0i\perp}}{\eta} (\cos \theta_i \hat{y} - \sin \theta_i \hat{z}) e^{-jk(\sin \theta_i y + \cos \theta_i z)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{H}_{r\perp}(\vec{r}) &= \frac{1}{\eta} \hat{k}_r \times \vec{E}_{r\perp} = \frac{1}{\eta} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 0 & \sin \theta_i & -\cos \theta_i \\ -E_{0i\perp} & 0 & 0 \end{vmatrix} e^{-j\vec{k}_r \cdot \vec{r}} = \\ &= \frac{E_{0i\perp}}{\eta} (\cos \theta_i \hat{y} + \sin \theta_i \hat{z}) e^{-jk(\sin \theta_i y - \cos \theta_i z)}\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}\vec{H}_{\perp}(\vec{r}) &= \vec{H}_{i\perp}(\vec{r}) + \vec{H}_{r\perp}(\vec{r}) = \\ &= 2 \frac{E_{0i\perp}}{\eta} [\cos \theta_i \cos(k \cos \theta_i z) \hat{y} + j \sin \theta_i \sin(k \cos \theta_i z) \hat{z}] e^{-jk \sin \theta_i y}\end{aligned}\quad (4.79)$$

para la intensidad de campo magnético total.

## (b) Onda incidente con polarización lineal paralela al plano de incidencia

Para el campo eléctrico total obtenemos, sumando las expresiones (4.74) y (4.77), correspondientes a las ondas incidente y reflejada

$$\vec{E}_{\parallel}(\vec{r}) = -2E_{0i\parallel} [j \cos \theta_i \sin(k \cos \theta_i z) \hat{y} + j \sin \theta_i \cos(k \cos \theta_i z) \hat{z}] e^{-jk \sin \theta_i y} \quad (4.80)$$

Para el campo magnético, obtenemos

$$\begin{aligned} \vec{H}_{i\parallel}(\vec{r}) &= \frac{1}{\eta} \hat{k}_i \times \vec{E}_{i\parallel} = -\frac{E_{0i\parallel}}{\eta} \hat{x} e^{-jk(\sin \theta_i y + \cos \theta_i z)} \\ \vec{H}_{r\parallel}(\vec{r}) &= \frac{1}{\eta} \hat{k}_r \times \vec{E}_{r\parallel} = -\frac{E_{0i\parallel}}{\eta} \hat{x} e^{-jk(\sin \theta_i y - \cos \theta_i z)} \\ \vec{H}_{\parallel}(\vec{r}) &= \vec{H}_{i\parallel}(\vec{r}) + \vec{H}_{r\parallel}(\vec{r}) = -2 \frac{E_{0i\parallel}}{\eta} \hat{x} \cos(k \cos \theta_i z) e^{-jk \sin \theta_i y} \end{aligned} \quad (4.81)$$

Es inmediato comprobar que en el caso particular  $\theta_i = 0$  recuperamos las expresiones obtenidas en la sección 4.2.1 para incidencia normal. Para valores de  $\theta_i \neq 0$ , el campo total en el dieléctrico presenta, como hemos dicho, una doble dependencia, en  $Y$  y en  $Z$ . Para analizar este comportamiento consideremos, por ejemplo, la expresión (4.78), que representa la función del campo eléctrico total en el caso de polarización perpendicular. Podemos identificar los términos  $k \sin \theta_i$  y  $k \cos \theta_i$  con las componentes en las direcciones  $\hat{y}$  y  $\hat{z}$ , respectivamente, del vector de propagación de la onda incidente, el cual, según (4.58), era de la forma

$$\vec{k}_i = k(\sin \theta_i \hat{y} + \cos \theta_i \hat{z})$$

Por consiguiente, podemos reescribir la expresión (4.78) como sigue

$$\vec{E}_{\perp}(\vec{r}) = -2jE_{0i\perp} \hat{x} \sin(k_{iz}z) e^{-jk_{iy}y} \quad (4.82)$$

donde  $k_{iy} \equiv k \sin \theta_i$  y  $k_{iz} \equiv k \cos \theta_i$ . Imponiendo, para simplificar, que el fasor de amplitud  $E_{0i\perp}$  sea una magnitud real (o, lo que es lo mismo, que la fase inicial de la onda incidente sea nula), el campo instantáneo resulta ser de la forma

$$\vec{\mathcal{E}}_{\perp}(\vec{r}, t) = -2E_{0i\perp} \hat{x} \sin(k_{iz}z) \sin(\omega t - k_{iy}y) \quad (4.83)$$

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{H}}_{\perp}(\vec{r}, t) = & 2\hat{y} \frac{E_{0i\perp}}{\eta} \cos\theta_i \cos(k_{iz}z) \cos(\omega t - k_{iy}y) \\ & + 2\hat{z} \frac{E_{0i\perp}}{\eta} \sin\theta_i \sin(k_{iz}z) \sin(\omega t - k_{iy}y)\end{aligned}\quad (4.84)$$

Según este resultado, si nos fijamos en un punto del eje Y y nos desplazamos a lo largo del eje Z, esto es, perpendicularmente a la superficie del conductor, el término  $\sin(\omega t - k_{iy}y)$  del campo eléctrico permanece constante, con lo que se obtiene un comportamiento análogo al de la onda estacionaria de la expresión (4.23). La única diferencia respecto a ésta última estriba en las posiciones  $z_m$  de los nodos de la función (Fig. 4.18), las cuales vienen dadas ahora por

$$k_{iz}z_m = m\pi \quad (4.85)$$

donde  $m$  representa el número de orden del nodo, con lo que la distancia entre dos nodos consecutivos vale

$$\Delta z = \frac{\pi}{k_{iz}} = \frac{\pi}{k \cos\theta_i} = \frac{\lambda}{2 \cos\theta_i} \quad (4.86)$$

es decir, aumenta con el ángulo de incidencia.

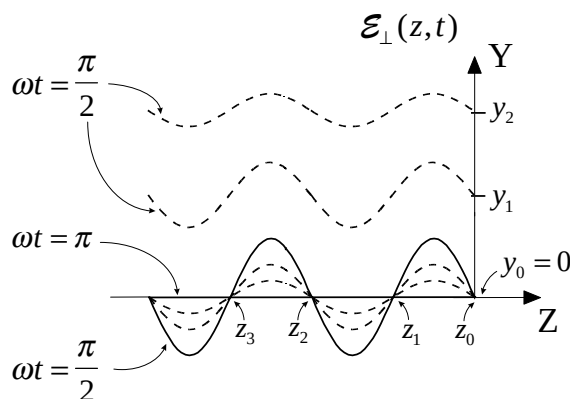


Fig. 4.18 Dependencia espacio-temporal de la función (4.83). Para un valor de  $y$  fijo, el comportamiento es análogo al obtenido en la figura 4.7 para una onda estacionaria pura

Por otro lado, si nos fijamos en un punto cualquiera del eje Z y nos desplazamos a lo largo del eje Y (esto es, paralelamente a la superficie del conductor y al plano de incidencia),

el término  $k_{iz}z$  de la expresión (4.83) permanece ahora constante, con lo que la función resultante corresponde a la de una onda plana cuya fase se propaga en esta misma dirección con una velocidad

$$v = \frac{\omega}{k_{iy}} = \frac{\omega}{k \sin \theta_i} \quad (4.87)$$

Finalmente, si nos fijamos en la expresión (4.84), obtenida para la función de intensidad de campo magnético instantáneo, observamos exactamente el mismo comportamiento en ambas componentes. Debido a este doble comportamiento, representado en la figura 4.18, de onda estacionaria en la dirección perpendicular al conductor y de onda viajera en la dirección paralela, las funciones de campo (4.83) y (4.84) reciben el nombre de *onda estacionaria mixta*.

Habida cuenta de las características que acabamos de observar para una onda estacionaria mixta, podemos prever que no habrá flujo neto de potencia alguno en la dirección perpendicular a la superficie del conductor y sí en la dirección paralela a la superficie y al plano de incidencia. Para comprobar que, efectivamente, ello es así, basta con obtener el vector de Poynting medio correspondiente. En el caso de polarización perpendicular, comparando las expresiones (4.78) y (4.79), vemos que la componente del campo magnético tangente a la superficie del conductor se encuentra en cuadratura de fase con el campo eléctrico, por lo que no contribuye al transporte de potencia, ya que el producto entre ambos da como resultado un término imaginario puro. Por el contrario, la componente normal del campo magnético se encuentra en fase con el campo eléctrico, y da lugar a una contribución real. La expresión resultante para el vector de Poynting medio es

$$\begin{aligned} \vec{P}_m &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\vec{E}_\perp \times \vec{H}_\perp^*] = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ -2jE_{0i\perp} \sin(k_{iz}z) e^{-jk_{iy}y} \hat{x} \times (-2j) \frac{(E_{0i\perp})^*}{\eta} \sin \theta_i \sin(k_{iz}z) e^{-jk_{iy}y} \hat{z} \right] = \\ &= 2 \frac{|E_{0i\perp}|^2}{\eta} \sin \theta_i \sin^2(k_{iz}z) \hat{y} \end{aligned} \quad (4.88)$$

donde esta vez hemos considerado también la posibilidad de una amplitud  $E_{0i}$  compleja.

Por otro lado, si observamos las expresiones (4.80) y (4.81), obtenidas para los campos eléctrico y magnético totales en el caso de polarización paralela, vemos que su comportamiento es totalmente análogo al obtenido en el caso de polarización perpendicular, pues se forma también una onda estacionaria mixta que se propaga a lo largo del plano de incidencia y de la superficie del conductor. La expresión que se obtiene en este caso para la densidad media de flujo de potencia es

$$\vec{P}_m = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ \vec{E}_{\parallel} \times \vec{H}_{\parallel}^* \right] = 2 \frac{|E_{0\parallel}|^2}{\eta} \sin \theta_i \cos^2(k_{iz} z) \hat{y} \quad (4.89)$$

Por consiguiente, existe una transmisión neta de potencia en la dirección de propagación de la onda. Podemos afirmar, pues, como conclusión, que el campo presente en un dieléctrico limitado por un conductor perfecto tras la reflexión de una onda plana permite la transmisión de señal en la dirección paralela a la superficie del conductor y al plano de incidencia.

### **Ejemplo 4.3:** *Guías de onda de paredes conductoras*

El fenómeno de formación de ondas estacionarias mixtas tras la incidencia oblicua de una onda plana sobre un conductor perfecto encuentra una aplicación práctica de gran transcendencia en las llamadas guías de onda de paredes conductoras, a cuyo estudio dedicaremos buena parte del capítulo siguiente. A grandes rasgos, podemos entender su funcionamiento mediante un razonamiento similar al efectuado en la sección 4.2.2 para ilustrar el comportamiento de una cavidad resonante.

Como en este último caso, imaginemos que disponemos dos paredes conductoras una frente a otra y separadas por una distancia  $d$ , tal como muestra la figura 4.19a. Supongamos que hemos excitado una onda plana en la región situada entre ambas, formada por un medio dieléctrico cualquiera, de modo que incida oblicuamente sobre una de ellas, por ejemplo, en la que aparece situada en el plano  $z = 0$  en la figura. Según hemos visto, la superposición de esta onda con la onda reflejada en la pared dará lugar a la formación de una onda estacionaria mixta. Por otro lado, y debido a la presencia de la segunda pared, situada en el plano  $z = -d$ , el campo total en el dieléctrico debe satisfacer la siguiente condición adicional:

$$\vec{E}_{tan} \Big|_{z=-d} = 0$$

Comparando las figuras 4.18 y 4.19a, resulta evidente que en régimen permanente sólo puede aparecer un campo estable si se cumple la condición

$$k_{iz} = m \frac{\pi}{d} \quad (4.90)$$

con  $m$  entero, necesaria para que uno de los nodos de la función del campo total esté situado justo en  $z = -d$  (Fig. 4.19b). Luego, con  $k_{iz} \equiv k \cos \theta_i$ , sólo podemos excitar en el interior de la guía, en régimen permanente, ondas planas con un ángulo



$$\cos \theta_i = m \frac{\pi}{kd}$$

De no cumplirse esta condición, las múltiples reflexiones producidas en ambas paredes dan lugar a interferencias destructivas. Únicamente cuando se cumple la condición anterior, las distintas reflexiones interfieren constructivamente, y se forma una onda estacionaria mixta estable, la cual se propaga a lo largo de la guía. Esta onda recibe el nombre de *modo de propagación* o *modo propio de la guía*. Por lo tanto, en una guía como la de la figura 4.19 sólo pueden excitarse tantos modos como valores posibles de  $m$  tengamos. La velocidad de fase con que se propagan estos modos viene dada por

$$v = \frac{\omega}{k_{iy}} = \frac{\omega}{k\sqrt{1 - \cos^2 \theta_i}} = \frac{\omega}{\sqrt{k^2 - \left(m \frac{\pi}{kd}\right)^2}} \quad (4.91)$$

Evidentemente, la velocidad  $v$  sólo puede tomar valores reales, por lo que debe cumplirse, además, la condición

$$k > m \frac{\pi}{d}$$

o, lo que es lo mismo,

$$m < \frac{kd}{\pi} = \frac{2d}{\lambda} \quad (4.92)$$

para que el modo en cuestión se propague por el interior de la guía. Es decir, en una guía formada por dos paredes conductoras sólo podemos excitar un cierto número de modos, limitado por la longitud de onda de la onda incidente y por la separación entre las paredes. Cada uno de estos modos se caracteriza por el valor de  $m$  correspondiente, denominado *número de orden* o, simplemente, *orden* del modo en cuestión. El valor tiene su reflejo en el número de nodos que presenta la función del campo a lo largo del plano transversal de la guía (Fig. 4.19b). Por otro lado, para cada valor de  $m$  tenemos dos tipos de excitación posibles: mediante ondas con polarización perpendicular al plano de incidencia y mediante ondas con polarización paralela. En el primer caso, según la expresión (4.78), se generan modos propios con el campo eléctrico paralelo al plano transversal de la guía, los cuales se denominan *modos transversales eléctricos*, o simplemente *modos TE*. En el segundo caso, se generan *modos transversales magnéticos* o *modos TM*, ya que, según las expresiones (4.80) y (4.81), el campo magnético es transversal, mientras que el campo eléctrico presenta una componente en la dirección longitudinal.

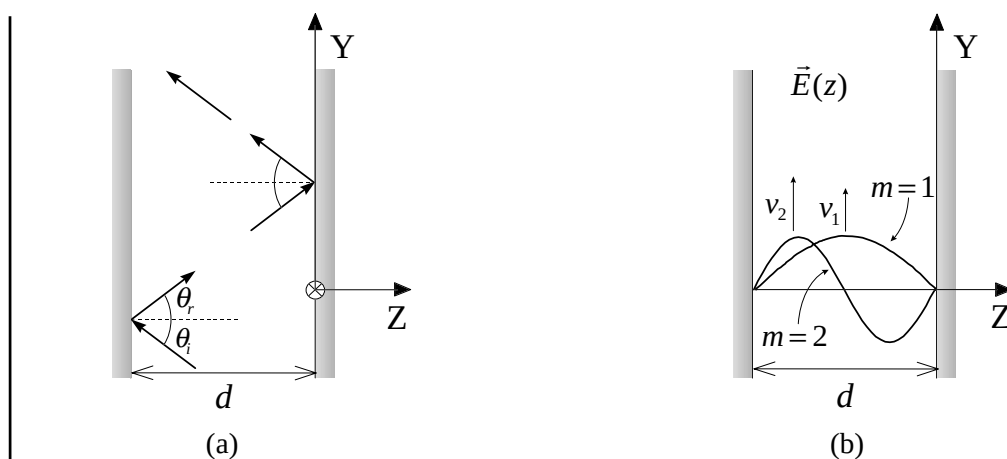


Fig. 4.19 (a) Guía de onda formada por dos paredes conductoras, separadas por un medio dieléctrico de grosor  $d$ . La reflexión de una onda plana en una de las paredes dará lugar a la formación de una onda plana mixta. (b) En régimen permanente sólo existirán ondas que cumplan las condiciones de contorno en ambas paredes, denominadas modos propios de la guía

#### Cargas y corrientes inducidas en la superficie del conductor

Según la expresión (4.78), cuando el campo eléctrico de la onda incidente presenta polarización perpendicular al plano de incidencia, el campo eléctrico total que se forma en el dieléctrico es tangente a la superficie del conductor. Por este motivo, no se induce carga alguna, al igual que ocurría en el caso de incidencia normal. Por el contrario, cuando la polarización del campo incidente es paralela al plano de incidencia, sí que se induce una distribución superficial de carga en el conductor, al presentar el campo eléctrico total una componente normal a la superficie del mismo. Aplicando la condición de contorno (4.6) a la expresión (4.80), obtenemos el siguiente fasor de densidad de carga inducida

$$\sigma = (-\hat{z}) \cdot (\epsilon \vec{E}) \Big|_{z=0} = 2\epsilon E_{0i\parallel} \sin \theta_i e^{-jk_{iy}y} \quad (4.93)$$

En cuanto a la corriente inducida, obtenemos, aplicando la condición de contorno (4.8)

$$\vec{J}_s = (-\hat{z}) \times \vec{H}_{\perp} \Big|_{z=0} = 2 \frac{E_{0i\perp}}{\eta} \hat{x} \cos \theta_i e^{-jk_{iy}y} \quad (4.94)$$

para el caso de incidencia con polarización perpendicular y

$$\vec{J}_S = (-\hat{z}) \times \vec{H}_{\parallel} \Big|_{z=0} = 2 \frac{E_{0i\parallel}}{\eta} \hat{y} e^{-jk_{iy}y} \quad (4.95)$$

para el caso de incidencia con polarización paralela.

#### 4.5 Incidencia oblicua sobre dieléctricos

El estudio de casos de incidencia sencillos, tanto sobre medios dieléctricos como sobre conductores, nos ha permitido ofrecer con cierto detalle una visión de los fenómenos físicos involucrados. Ahora podemos abordar el problema general de la incidencia sobre medios dieléctricos de forma sistemática, partiendo de la base de que los fenómenos que aparezcan serán básicamente los mismos que los observados en el caso de incidencia normal, sin que dependan en esencia de la dirección de la onda incidente. Las consideraciones de partida serán, pues, las siguientes:

- Los medios dieléctricos son lineales, isotrópicos, homogéneos y no conductores.
- No hay aportación externa de cargas libres, con lo que sólo pueden aparecer distribuciones de carga y de corriente de portadores ligados al medio.
- Como resultado de la interacción entre la onda plana incidente y las cargas ligadas al medio de la región II, se formará una onda reflejada, dirigida hacia la región I, y una onda transmitida, dirigida hacia el interior de la región II (Fig. 4.20).

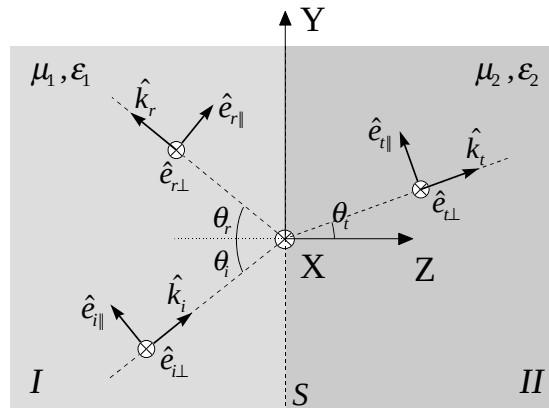


Fig. 4.20 Incidencia oblicua de una onda plana sobre un medio dieléctrico no conductor

Por consiguiente, las condiciones de contorno que deben satisfacerse en la superficie de separación serán las mismas que utilizamos en la sección 4.3.1 para tratar la incidencia normal, es decir

$$\hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) \Big|_S = 0 \quad (4.96)$$

$$\hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) \Big|_S = 0 \quad (4.97)$$

Por otro lado, el procedimiento que seguiremos será el mismo que el realizado para el caso de incidencia oblicua sobre conductores: en primer lugar, vamos a determinar las leyes que fijan las direcciones de propagación de las ondas generadas, para luego determinar los campos asociados a las mismas, descomponiendo la onda incidente, polarizada elípticamente en el caso general, en dos ondas polarizadas linealmente en direcciones ortogonales.

#### 4.5.1 Leyes de Snell para la reflexión y la refracción de ondas planas

Recordemos que habíamos podido comprobar, en el caso de incidencia oblicua sobre conductores, que para que se cumplieran las condiciones de contorno en la superficie del conductor las direcciones de propagación de las ondas incidente y reflejada debían estar contenidas necesariamente en un mismo plano, perpendicular a la superficie, al que habíamos convenido en llamar plano de incidencia. Esta propiedad, conocida como *primera ley de Snell*, en honor a su descubridor, se cumple independientemente de si el medio que constituye la región II es un conductor o un dieléctrico. En el caso de incidencia sobre medios dieléctricos, además, es fácil demostrar que se verifica también para la onda transmitida, ejercicio que dejamos para el lector.

Bajo este supuesto, si fijamos los ejes de coordenadas como se indica en la figura 4.20, de forma que el plano de incidencia coincida con el plano YZ, y definimos los *ángulos de incidencia, de reflexión y de transmisión*  $\theta_i$ ,  $\theta_r$  y  $\theta_t$ , respectivamente, como los ángulos que forman los vectores de propagación  $\vec{k}_i$ ,  $\vec{k}_r$  y  $\vec{k}_t$ , de las ondas incidente reflejada y transmitida con la normal a la superficie de separación entre los dos dieléctricos, podemos expresar matemáticamente los campos eléctricos asociados de la forma

$$\begin{aligned} \vec{E}_i(\vec{r}) &= \vec{E}_{0i} e^{-jk_1(\sin\theta_i y + \cos\theta_i z)} \\ \vec{E}_r(\vec{r}) &= \vec{E}_{0r} e^{-jk_1(\sin\theta_r y - \cos\theta_r z)} \\ \vec{E}_t(\vec{r}) &= \vec{E}_{0t} e^{-jk_2(\sin\theta_t y + \cos\theta_t z)} \end{aligned}$$

La onda transmitida se denomina también onda *refractada*. (Se entiende por refracción el paso de una onda electromagnética de un medio dieléctrico a otro).

Por otro lado, al coincidir la superficie de separación con el plano  $Z = 0$  (Fig. 4.20), podemos descomponer la condición de contorno (4.96) como sigue:

$$(E_{ix} + E_{rx})|_{z=0} = E_{tx}|_{z=0} \quad (4.98)$$

$$(E_{iy} + E_{ry})|_{z=0} = E_{ty}|_{z=0} \quad (4.99)$$

Expresando los fasores de amplitud de la forma  $\vec{E}_{0i} = E_{0ix}\hat{x} + E_{0iy}\hat{y} + E_{0iz}\hat{z}$  para la onda incidente, y similarmente para las ondas reflejada y transmitida, y aplicando la condición (4.98) para la componente en la dirección del eje  $X$ , obtenemos la expresión

$$E_{0ix}e^{-jk_1 \sin \theta_i y} + E_{0rx}e^{-jk_1 \sin \theta_r y} = E_{0tx}e^{-jk_2 \sin \theta_t y}$$

similar a (4.68), con la diferencia que ahora aparece, además, el término correspondiente a la onda transmitida. Despejando  $E_{0ix}$ , obtenemos

$$E_{0ix} = -E_{0rx}e^{-jk_1(\sin \theta_r - \sin \theta_i)y} + E_{0tx}e^{-j(k_2 \sin \theta_t - k_1 \sin \theta_i)y} \quad (4.100)$$

Al ser  $E_{0ix}$  un término de fase constante, por fuerza el término de la derecha de la igualdad deber serlo también, por lo que se debe cumplir

$$\theta_r = \theta_i \quad (4.101)$$

$$k_1 \sin \theta_i = k_2 \sin \theta_t \quad (4.102)$$

La relación (4.101), conocida como la *segunda ley de Snell*, ya había sido obtenida para incidencia sobre conductores. En cuanto a la *tercera ley de Snell*, suele escribirse más a menudo de la forma

$$n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t \quad (4.103)$$

donde  $n_1$  y  $n_2$  representan los índices de refracción de los dieléctricos que constituyen las regiones I y II, respectivamente, los cuales se definen mediante la relación (4.45).

#### 4.5.2 Ecuaciones de Fresnel

En conjunto, las tres leyes de Snell determinan completamente las direcciones de propagación de las ondas reflejada y transmitida, en función de la de la onda incidente. Una vez obtenidas estas direcciones, el siguiente paso que se debe realizar consiste en hallar unas expresiones generales que relacionen entre sí los campos respectivos. Estas expresiones son conocidas comúnmente como *ecuaciones de Fresnel*. Para ello, vamos a descomponer la

onda incidente, que en el caso más general tendrá polarización elíptica, en dos ondas con el campo eléctrico polarizado linealmente, según las direcciones paralela y perpendicular al plano de incidencia, utilizando para ello la notación empleada para el caso de incidencia sobre conductores. Para el campo eléctrico, tendremos

$$\vec{E}_i = \vec{E}_{i\parallel} + \vec{E}_{i\perp} \quad (4.104)$$

y, para el campo magnético,

$$\vec{H}_i = \vec{H}_{i\parallel} + \vec{H}_{i\perp} \quad (4.105)$$

(a) *Onda incidente con polarización lineal perpendicular al plano de incidencia*

Empecemos por la onda polarizada linealmente en la dirección perpendicular al plano de la incidencia. Tal como se han fijado los ejes en la figura 4.20, esta dirección coincide con la del eje  $X$ , por lo que podemos expresar el fasor de campo eléctrico asociado a la onda de la forma

$$\vec{E}_{i\perp}(\vec{r}) = E_{0i\perp} \hat{x} e^{-jk_1(\sin\theta_i y + \cos\theta_i z)}$$

Los campos asociados a las ondas reflejada y transmitida, asumiendo que mantienen la misma polarización, serán de la forma

$$\vec{E}_{r\perp}(\vec{r}) = E_{0r\perp} \hat{x} e^{-jk_1(\sin\theta_r y - \cos\theta_r z)}$$

$$\vec{E}_{t\perp}(\vec{r}) = E_{0t\perp} \hat{x} e^{-jk_2(\sin\theta_t y + \cos\theta_t z)}$$

Teniendo en cuenta la equivalencia  $E_{0ix} \equiv E_{0i\perp}$ ,  $E_{0rx} \equiv E_{0r\perp}$  y  $E_{0tx} \equiv E_{0t\perp}$ , junto con la segunda y la tercera leyes de Snell, (4.101) y (4.102), la relación (4.100) nos queda de la forma

$$E_{0i\perp} + E_{0r\perp} = E_{0t\perp} \quad (4.106)$$

En el caso de incidencia sobre conductores, teníamos  $E_{0t} = 0$ , con lo que esta relación bastaba para determinar la amplitud de la onda reflejada. En el caso de incidencia sobre dieléctricos, la presencia de la onda transmitida nos obliga a hallar una relación adicional, que obtendremos a partir de la condición de contorno (4.97) para las componentes tangenciales del campo magnético, la cual se descompone de la forma

$$(H_{ix} + H_{rx})\big|_{z=0} = H_{tx}\big|_{z=0} \quad (4.107)$$

$$(H_{iy} + H_{ry})\big|_{z=0} = H_{ty}\big|_{z=0} \quad (4.108)$$

Las expresiones genéricas del campo magnético asociado a cada una de las ondas involucradas se obtienen mediante la relación habitual,  $\vec{H} = \eta^{-1} \hat{k} \times \vec{E}$ , lo que nos da

$$\begin{aligned}\vec{H}_{i\perp}(\vec{r}) &= \frac{E_{0i\perp}}{\eta_1} (\cos\theta_i \hat{y} - \sin\theta_i \hat{z}) e^{-jk_1(\sin\theta_i y + \cos\theta_i z)} \\ \vec{H}_{r\perp}(\vec{r}) &= -\frac{E_{0r\perp}}{\eta_1} (\cos\theta_r \hat{y} + \sin\theta_r \hat{z}) e^{-jk_1(\sin\theta_r y - \cos\theta_r z)} \\ \vec{H}_{t\perp}(\vec{r}) &= \frac{E_{0t\perp}}{\eta_2} (\cos\theta_t \hat{y} - \sin\theta_t \hat{z}) e^{-jk_2(\sin\theta_t y + \cos\theta_t z)}\end{aligned}$$

En este caso, el campo magnético está contenido en el plano de incidencia (Fig. 4.21), y la componente tangencial a la superficie de separación es la componente en la dirección del eje Y. Imponiendo la condición (4.108) a dicha componente, obtenemos la relación que nos faltaba

$$\frac{E_{0i\perp}}{\eta_1} \cos\theta_i e^{-jk_1 \sin\theta_i y} - \frac{E_{0r\perp}}{\eta_1} \cos\theta_r e^{-jk_1 \sin\theta_r y} = \frac{E_{0t\perp}}{\eta_2} \cos\theta_t e^{-jk_2 \sin\theta_t y}$$

en la que podemos eliminar los términos exponenciales, de acuerdo con la segunda y la tercera leyes de Snell, con lo que nos queda

$$\frac{E_{0i\perp} - E_{0r\perp}}{\eta_1} \cos\theta_i = \frac{E_{0t\perp}}{\eta_2} \cos\theta_t \quad (4.109)$$

Finalmente, resolviendo el sistema de ecuaciones formado por (4.106) y (4.109), obtenemos las expresiones generales que nos relacionan las amplitudes de las ondas reflejada y transmitida con la de la onda incidente:

$$E_{0r\perp} = \frac{\eta_2 \cos\theta_i - \eta_1 \cos\theta_t}{\eta_2 \cos\theta_i + \eta_1 \cos\theta_t} E_{0i\perp} \quad (4.110)$$

$$E_{0t\perp} = \frac{2\eta_2 \cos\theta_i}{\eta_2 \cos\theta_i + \eta_1 \cos\theta_t} E_{0i\perp} \quad (4.111)$$

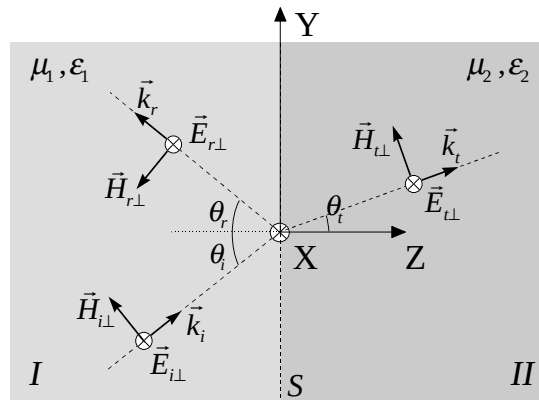


Fig. 4.21 Disposición de los campos asociados a las ondas incidente, reflejada y transmitida. Al ser, en este caso, el campo eléctrico perpendicular al plano de incidencia (plano YZ), el campo magnético es paralelo a él. Las componentes del campo tangenciales a la superficie de separación entre los dos dieléctricos son la componente X para el campo eléctrico y la componente Y para el campo magnético

(b) Onda incidente con polarización lineal paralela al plano de incidencia

Es ahora el turno de la onda polarizada linealmente en la dirección paralela al plano de la incidencia. Tal como muestra la figura 4.22, en este caso podemos expresar el campo eléctrico asociado a las ondas incidente, reflejada y transmitida de la forma

$$\begin{aligned}\vec{E}_{i\parallel}(\vec{r}) &= E_{0i\parallel}(\cos\theta_i \hat{y} - \sin\theta_i \hat{z}) e^{-jk_1(\sin\theta_i y + \cos\theta_i z)} \\ \vec{E}_{r\parallel}(\vec{r}) &= E_{0r\parallel}(\cos\theta_r \hat{y} + \sin\theta_r \hat{z}) e^{-jk_1(\sin\theta_r y - \cos\theta_r z)} \\ \vec{E}_{t\parallel}(\vec{r}) &= E_{0t\parallel}(\cos\theta_t \hat{y} - \sin\theta_t \hat{z}) e^{-jk_2(\sin\theta_t y + \cos\theta_t z)}\end{aligned}$$

mientras que el campo magnético será ahora perpendicular al plano de incidencia:

$$\begin{aligned}\vec{H}_{i\parallel}(\vec{r}) &= \frac{1}{\eta_1} \hat{k}_i \times \vec{E}_{i\parallel} = -\frac{E_{0i\parallel}}{\eta_1} \hat{x} e^{-jk_1(\sin\theta_i y + \cos\theta_i z)} \\ \vec{H}_{r\parallel}(\vec{r}) &= \frac{1}{\eta_1} \hat{k}_r \times \vec{E}_{r\parallel} = \frac{E_{0r\parallel}}{\eta_1} \hat{x} e^{-jk_1(\sin\theta_r y - \cos\theta_r z)} \\ \vec{H}_{t\parallel}(\vec{r}) &= \frac{1}{\eta_2} \hat{k}_t \times \vec{E}_{t\parallel} = -\frac{E_{0t\parallel}}{\eta_2} \hat{x} e^{-jk_2(\sin\theta_t y + \cos\theta_t z)}\end{aligned}$$



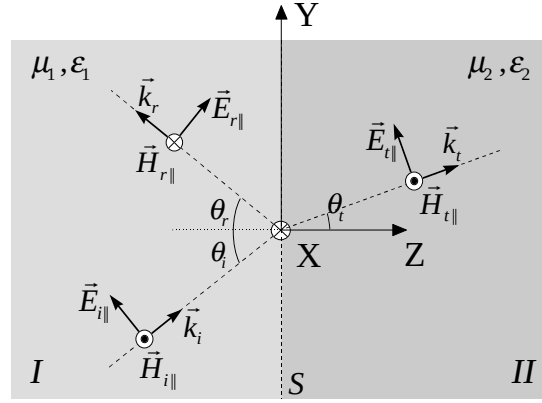


Fig. 4.22 Disposición de los campos asociados a las ondas incidente, reflejada y transmitida para el caso de polarización paralela. La situación resultante es justo la complementaria de la obtenida para polarización perpendicular, con el campo eléctrico paralelo al plano de incidencia (plano YZ) y el campo magnético perpendicular a él

Comparando las figuras 4.21 y 4.22, podemos comprobar que nos encontramos ante dos situaciones complementarias, de modo que combinándolas, podremos obtener todas las componentes del campo electromagnético. Por otro lado, las componentes del campo tangenciales a la superficie de separación entre los dos medios son ahora la componente según el eje Y, para el campo eléctrico, y la componente según el eje X, para el campo magnético. Aplicando las condiciones de contorno correspondientes, (4.99) y (4.107), obtenemos las dos relaciones siguientes

$$E_{0i\parallel} \cos\theta_i e^{-jk_1 \sin\theta_i y} + E_{0r\parallel} \cos\theta_r e^{-jk_1 \sin\theta_r y} = E_{0t\parallel} \cos\theta_t e^{-jk_2 \sin\theta_t y}$$

$$-\frac{E_{0i\parallel}}{\eta_1} e^{-jk_1 \sin\theta_i y} + \frac{E_{0r\parallel}}{\eta_1} e^{-jk_1 \sin\theta_r y} = -\frac{E_{0t\parallel}}{\eta_2} e^{-jk_2 \sin\theta_t y}$$

en las que la segunda y la tercera leyes de Snell, una vez más, nos permiten eliminar los términos exponenciales, resultando el siguiente sistema de ecuaciones

$$(E_{0i\parallel} + E_{0r\parallel}) \cos\theta_i = E_{0t\parallel} \cos\theta_t \quad (4.112)$$

$$\frac{E_{0i\parallel} - E_{0r\parallel}}{\eta_1} = \frac{E_{0t\parallel}}{\eta_2} \quad (4.113)$$

cuyas soluciones generales son

$$E_{0r\parallel} = \frac{\eta_2 \cos \theta_t - \eta_1 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_i} E_{0i\parallel} \quad (4.114)$$

$$E_{0t\parallel} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_i} E_{0i\parallel} \quad (4.115)$$

(c) Onda incidente con una polarización cualquiera

Las relaciones (4.110), (4.111), (4.114) y (4.115), expresan matemáticamente las denominadas *leyes de Fresnel de la reflexión y la refracción*, las cuales nos permiten determinar la distribución de campo que resulta de la incidencia de una onda plana sobre un medio dieléctrico con un ángulo cualquiera. Sin embargo, resulta más práctico expresarlas de la forma siguiente

$$E_{0r\perp} = \rho_{\perp} E_{0i\perp} \quad (4.116a) \quad E_{0r\parallel} = \rho_{\parallel} E_{0i\parallel} \quad (4.117a)$$

$$E_{0t\perp} = \tau_{\perp} E_{0i\perp} \quad (4.116b) \quad E_{0t\parallel} = \tau_{\parallel} E_{0i\parallel} \quad (4.117b)$$

donde  $\rho_{\perp}$  y  $\rho_{\parallel}$  son, respectivamente, los coeficientes de reflexión para ondas planas con polarización lineal perpendicular al plano de incidencia y para ondas con polarización paralela. Al igual que en el caso de incidencia normal, se han definido como la relación de amplitudes entre la onda reflejada y la onda incidente.  $\tau_{\perp}$  y  $\tau_{\parallel}$  representan, a su vez, los coeficientes de transmisión para ondas con polarización perpendicular y con polarización paralela al plano de incidencia y se definen como la relación de amplitudes entre las ondas transmitida e incidente. Las *fórmulas de Fresnel* para los coeficientes de reflexión y transmisión son las siguientes

$$\rho_{\perp} = \frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1 \cos \theta_t}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t} \quad (4.118a) \quad \rho_{\parallel} = \frac{\eta_2 \cos \theta_t - \eta_1 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_i} \quad (4.119a)$$

$$\tau_{\perp} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1 \cos \theta_t} \quad (4.118b) \quad \tau_{\parallel} = \frac{2\eta_2 \cos \theta_i}{\eta_2 \cos \theta_t + \eta_1 \cos \theta_i} \quad (4.119b)$$

donde los ángulos de incidencia y de reflexión,  $\theta_i$  y  $\theta_r$ , están relacionados entre sí por la tercera ley de Snell (4.102).

En el caso más general, en el que la onda incidente esté polarizada elípticamente, basta con efectuar la descomposición (4.104) para el campo eléctrico asociado, es decir

$$\vec{E}_i = \vec{E}_{i\parallel} + \vec{E}_{i\perp} = (E_{0i\parallel} \hat{e}_{i\parallel} + E_{0i\perp} \hat{e}_{i\perp}) e^{-j\vec{k}_i \cdot \vec{r}} \quad (4.120)$$

donde  $\hat{e}_{i\parallel}$  y  $\hat{e}_{i\perp}$  se han definido como dos vectores unitarios, dirigidos, respectivamente, según las direcciones paralela y perpendicular al plano de incidencia (Fig. 4.23). Semejantemente, podemos descomponer las ondas reflejada y transmitida de la forma

$$\vec{E}_r = \vec{E}_{r\parallel} + \vec{E}_{r\perp} = (\rho_{\parallel} E_{0i\parallel} \hat{e}_{r\parallel} + \rho_{\perp} E_{0i\perp} \hat{e}_{r\perp}) e^{-j\vec{k}_r \cdot \vec{r}} \quad (4.121)$$

$$\vec{E}_t = \vec{E}_{t\parallel} + \vec{E}_{t\perp} = (\tau_{\parallel} E_{0i\parallel} \hat{e}_{t\parallel} + \tau_{\perp} E_{0i\perp} \hat{e}_{t\perp}) e^{-j\vec{k}_t \cdot \vec{r}} \quad (4.122)$$

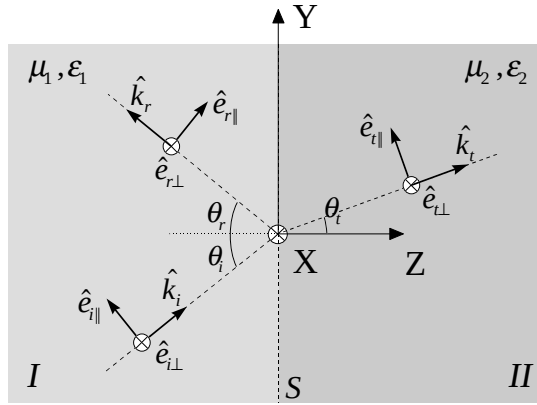


Fig. 4.23 Descomposición de los campos asociados a las ondas incidente, reflejada y transmitida para el caso general en el que la onda incidente esté polarizada elípticamente

Por consiguiente, la resolución de un problema de incidencia sobre medios dieléctricos, en el caso más general, se limita al cálculo, mediante las leyes de Fresnel, de los valores de los coeficientes de reflexión y transmisión de la superficie de separación, según el ángulo de incidencia que corresponda. Una vez conocidos estos valores, las relaciones (4.121) y (4.122) nos permiten calcular el campo eléctrico que resulta de la incidencia de una onda plana, independientemente de cuál sea su estado de polarización. Para el cálculo del campo magnético, basta con hacer uso de la relación  $\vec{H} = \eta^{-1} \hat{k} \times \vec{E}$  para cada onda.

Cabe señalar, además, que el cálculo de los coeficientes  $\rho$  y  $\tau$  se puede simplificar si se emplean las siguientes relaciones adicionales:

$$1 + \rho_{\perp} = \tau_{\perp} \quad (4.123)$$

$$1 - \rho_{\parallel} = \frac{\eta_1}{\eta_2} \tau_{\parallel} \quad (4.124)$$

obtenidas sustituyendo (4.116) en (4.106) y (4.117) en (4.113). Podemos combinar estas relaciones con las fórmulas (4.118) y (4.119) para calcular los coeficientes de transmisión, una vez conocidos los coeficientes de reflexión, y viceversa.

Finalmente, podemos comprobar que el caso de incidencia normal no es más que un caso especial de incidencia, en el que se cumple  $\theta_i = \theta_t = 0$ . En este caso, las expresiones de los coeficientes que resultan para ambas situaciones de incidencia, esto es, con polarización paralela y con polarización perpendicular al plano de incidencia, coinciden entre sí y con las obtenidas en la sección 4.3.1<sup>23</sup>.

#### *Ecuaciones de Fresnel para medios no magnéticos*

Como ya vimos en el caso de incidencia normal, en los dieléctricos no magnéticos los coeficientes de reflexión y de transmisión se suelen expresar en función de los índices de refracción. Mediante la sustitución  $n_{1,2} \rightarrow \frac{\eta_0}{n_{1,2}}$ , las leyes de Fresnel (4.118) y (4.119) toman la siguiente forma particular para medios no magnéticos

$$\rho_{\perp} = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \quad (4.125a) \quad \rho_{\parallel} = \frac{n_1 \cos \theta_t - n_2 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_t + n_2 \cos \theta_i} \quad (4.126a)$$

$$\tau_{\perp} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t} \quad (4.125b) \quad \tau_{\parallel} = \frac{2n_1 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_t + n_2 \cos \theta_i} \quad (4.126b)$$

#### *Reflectividad y transmitividad en la superficie de un medio dieléctrico*

En la sección 4.3.2 habíamos definido la reflectividad  $R$  y la transmitividad  $T$  en la superficie de un medio dieléctrico como las fracciones de potencia reflejada y transmitida por la superficie al incidir una onda plana. La fracción de potencia reflejada correspondía, en el caso de incidencia normal, a la relación entre los vectores de Poynting asociados a las ondas reflejada e incidente (ecuación (4.51)), los cuales expresaban los flujos de potencia por unidad de superficie respectivos, en la dirección normal a la superficie. En el caso de incidencia oblicua, el flujo de potencia en la dirección normal (la del eje  $Z$ , según hemos fijado los ejes de coordenadas) viene dado por la componente en esta dirección del vector de Poynting, con lo que tenemos

<sup>23</sup> La coincidencia que se establece entre las expresiones (4.118) y (4.119) en el caso de incidencia normal se debe a la situación de elevada simetría que se produce, bajo la cual los comportamientos de las ondas polarizadas en una dirección u otra son indistinguibles.

$$R \equiv \frac{|P_{rz}|}{|P_{iz}|} = \frac{\frac{|E_{0r}|^2}{2\eta_1} \cos\theta_i}{\frac{|E_{0i}|^2}{2\eta_1} \cos\theta_i} = |\rho|^2 \quad (4.127)$$

para la fracción de potencia reflejada. Similarmente, en el caso de incidencia oblicua, la transmitividad o fracción de potencia transmitida viene dada por

$$T \equiv \frac{|P_{tz}|}{|P_{iz}|} = \frac{\frac{|E_{0t}|^2}{2\eta_2} \cos\theta_t}{\frac{|E_{0i}|^2}{2\eta_1} \cos\theta_i} = |\tau|^2 \frac{\eta_1 \cos\theta_t}{\eta_2 \cos\theta_i} \quad (4.128)$$

Se puede comprobar fácilmente, sustituyendo las fórmulas de Fresnel (4.118) y (4.119), que para ambas polarizaciones se cumplen las condiciones

$$0 \leq R, T \leq 1 \quad (4.129)$$

y

$$R + T = 1 \quad (4.130)$$

o, lo que es lo mismo

$$|\rho|^2 + |\tau|^2 \frac{\eta_1 \cos\theta_t}{\eta_2 \cos\theta_i} = 1 \quad (4.131)$$

necesarias para asegurar la conservación de la potencia en la superficie de separación. Según estas condiciones, las dos situaciones extremas son aquellas en las que se cumple  $R=1$ ,  $T=0$ , por un lado y  $R=0$ ,  $T=1$ , por el otro. Estas situaciones particulares, de especial interés por sus aplicaciones prácticas, en las que se consigue que la potencia incidente sea reflejada en su totalidad, o bien que se transmita íntegramente a través de la superficie, serán abordadas en las secciones siguientes.

### 4.5.3 Ángulo de Brewster

El primer caso particular de los dos que acabamos de reseñar es aquel en el que no se produce reflexión alguna en la superficie de separación entre los dos medios. Al abordar el problema general de la incidencia de ondas planas sobre medios dieléctricos hemos aceptado, como hipótesis de partida, la formación de una onda reflejada y de una onda transmitida, cuyos campos asociados se superponían a los de la onda incidente y cuya existencia venía impuesta por las condiciones de contorno del campo en la superficie.

Digamos que éste era el número mínimo de ondas necesario para satisfacer dichas condiciones para un ángulo de incidencia  $\theta_i$  genérico. Sin embargo, si hubiéramos considerado únicamente dos ondas, la incidente y la transmitida, habríamos visto que para un cierto ángulo  $\theta_{iB}$ , conocido como *ángulo de Brewster*, todavía es posible satisfacer dichas condiciones.

Nuestro propósito inmediato consiste en obtener expresiones genéricas para el ángulo de reflexión nula o ángulo de Brewster. Para ello podríamos aplicar el procedimiento, ya mencionado, de imponer que no existe la onda reflejada (i.e.,  $E_{0r} = 0$ ) al aplicar las condiciones de contorno en la superficie de separación. Sin embargo, una vez obtenidas las fórmulas de Fresnel para los coeficientes de reflexión y de transmisión, resulta más sencillo analizar para qué valores de  $\theta_i$  se verifica la condición  $\rho = 0$ , necesaria para que no exista la onda reflejada. Esto es lo que vamos a hacer a continuación para los dos casos estudiados, de polarización perpendicular y de polarización paralela al plano de incidencia. Para simplificar el cálculo, vamos a considerar que los dieléctricos son no magnéticos ( $\mu \cong \mu_0$ ), por lo que nuestras expresiones de partida serán la (4.125a) y la (4.126a).

(a) *Onda incidente con polarización lineal paralela al plano de incidencia*

En este caso, según la expresión (4.126a), la condición de reflexión nula es

$$n_1 \cos \theta_t = n_2 \cos \theta_i \quad (4.132)$$

de donde se obtiene, elevando al cuadrado los dos términos de la igualdad y reemplazando los senos por cosenos

$$1 - \sin^2 \theta_t = \frac{n_2^2}{n_1^2} (1 - \sin^2 \theta_i)$$

Esta relación entre  $\theta_i$  y  $\theta_t$  se debe verificar al mismo tiempo que la tercera ley de Snell,  $n_1 \sin \theta_i = n_2 \sin \theta_t$ , de la que se obtiene

$$\sin \theta_t = \frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i \quad (4.133)$$

Luego, sustituyendo  $\sin \theta_t$  en la anterior expresión, resulta

$$1 - \frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2 \theta_i = \frac{n_2^2}{n_1^2} (1 - \sin^2 \theta_i) \quad (4.134)$$

Finalmente, despejando  $\sin \theta_i$ , se obtiene la siguiente expresión

$$\sin \theta_{iB} = \frac{1}{\sqrt{1 + (n_1/n_2)^2}} \quad (4.135)$$

para el ángulo de Brewster  $\theta_{iB}$ , aunque es más frecuente utilizar la expresión equivalente

$$\theta_{iB} = \arctg \frac{n_2}{n_1} \quad (4.136)$$

Por otro lado, al ser el denominador mayor que la unidad en (4.135), se cumple que  $\sin \theta_{iB} < 1$ , cualesquiera que sean los valores de  $n_1$  y  $n_2$ . Por consiguiente, dados dos medios dieléctricos, existe *siempre* un ángulo de incidencia  $\theta_{iB}$ , cuyo valor viene dado por (4.136), para el cual las ondas polarizadas linealmente con el vector  $\vec{E}$  paralelo al plano de incidencia no se reflejan en la superficie de separación o, lo que es lo mismo, para el que toda la potencia de la onda incidente se transmite íntegramente al segundo medio.

(b) *Onda incidente con polarización lineal perpendicular al plano de incidencia*

En este caso, el coeficiente de reflexión para medios no magnéticos viene dado por la expresión (4.125a), por lo que la condición de reflexión nula es ahora

$$n_1 \cos \theta_i = n_2 \cos \theta_t \quad (4.137)$$

Operando del mismo modo que en el caso anterior, en lugar de (4.134) resulta ahora la expresión

$$1 - \frac{n_1^2}{n_2^2} \sin^2 \theta_i = \frac{n_1^2}{n_2^2} (1 - \sin^2 \theta_i)$$

en la que los términos con  $\sin \theta_i$  desaparecen. Luego, por fuerza debe ser  $n_1/n_2 = 1$  para que no haya reflexión en la superficie. Es decir, los dos dieléctricos deben ser idénticos en cuanto a su comportamiento electromagnético, lo cual es una perogrullada, ya que resulta evidente que en este caso la onda incidente no percibe ningún cambio al pasar de un medio al otro, por lo que continuará propagándose en la misma dirección y con la misma potencia, tal como haría si no hubiera cambio de medio alguno.

Dicho de otro modo: una onda plana con el campo eléctrico polarizado linealmente en la dirección perpendicular al plano de incidencia siempre sufrirá una reflexión no nula al pasar de un medio no magnético a otro de índice de refracción distinto<sup>24</sup>.

(c) *Onda incidente con una polarización cualquiera*

En consecuencia, en el caso general, cuando una onda plana incida sobre la superficie de separación entre dos dieléctricos no magnéticos con un ángulo igual al ángulo de Brewster, sea cual sea su estado de polarización, la onda reflejada será, como máximo, una onda polarizada linealmente. Si la onda incidente presenta únicamente la componente del campo eléctrico paralela al plano de incidencia, no habrá onda reflejada alguna. En este último caso, la potencia que incide sobre la superficie se transmitirá en su totalidad al segundo medio.

**Ejemplo 4.4:** *Ventanas de Brewster*

Una aplicación práctica de estas propiedades la encontramos en las *ventanas de Brewster*. Tal como muestra la figura 4.24, una ventana de Brewster es, básicamente, una lámina de material dieléctrico (de vidrio, generalmente) sobre la que incide una onda plana, polarizada elípticamente, con un ángulo en relación a la normal igual al ángulo de Brewster para la primera superficie. Como acabamos de reseñar, bajo esta situación, en la primera superficie se refleja únicamente la componente de la onda incidente perpendicular al plano de incidencia, mientras que la componente paralela se transmite íntegramente al interior de la lámina. Por otro lado, se puede comprobar fácilmente que en la segunda superficie se reproduce exactamente la misma situación (la demostración se propone como ejercicio al final del capítulo), al ser el ángulo de incidencia de nuevo igual al ángulo de Brewster. Como consecuencia, una ventana de Brewster refleja en ambas superficies únicamente la componente del campo perpendicular al plano de incidencia, siendo totalmente transparente para la componente paralela<sup>25</sup>.

La aplicación principal de las ventanas de Brewster la encontramos en los láseres de gas, en las que se emplean para obtener emisiones de luz linealmente polarizadas. Su funcionamiento es como sigue: si las superficies que encierran el

<sup>24</sup> Cabe señalar que en el caso de medios magnéticos sí que existe también un ángulo de Brewster para ondas con polarización perpendicular al plano de incidencia. Sin embargo, este fenómeno no presenta ninguna aplicación práctica conocida, por lo que soslayaremos su análisis.

<sup>25</sup> Suponiendo, como hemos hecho hasta ahora, que se trata de un dieléctrico ideal, sin pérdidas.



medio activo, en el que se produce la emisión estimulada, son dos ventanas de Brewster (Fig. 4.11), la onda con polarización perpendicular sufrirá ocho transiciones o cambios de medio en cada ciclo completo dentro de la cavidad resonante, con las consiguientes pérdidas por reflexión, mientras que una onda con polarización paralela no sufrirá disminución de potencia, por la acción de las ventanas de Brewster<sup>26</sup>. De este modo, tras múltiples reflexiones en las paredes de la cavidad resonante, se consiguen fácilmente relaciones de 1 a 100 entre las componentes perpendicular y paralela en el haz de salida.

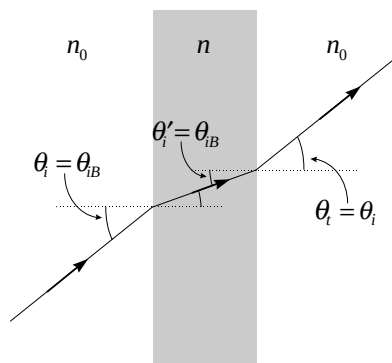


Fig. 4.24 Ventana polarizadora. Cuando es  $\theta_i = \theta_{iB}$  ambas superficies reflejan únicamente la componente del campo paralela al plano de incidencia. Si el dieléctrico no tiene pérdidas, la ventana es transparente para la componente paralela

#### 4.5.4 Ángulo crítico. Reflexión total en un dieléctrico

La segunda situación extrema, más interesante aún que la anterior por sus aplicaciones prácticas, es aquella en la que no se transmite potencia a través de la superficie de separación (*i.e.*,  $T=0$ ,  $R=1$ ). Como hemos visto, siempre aparece un campo electromagnético en el medio situado detrás de la superficie, ya que si no se cumplirían las condiciones de contorno, pero, como veremos a continuación, existen ciertas situaciones en las que este campo ya no transmite potencia hacia el segundo medio y no corresponde, en general, a una onda plana uniforme.

<sup>26</sup> De hecho, la situación es aquí ligeramente distinta a la contemplada en la figura 4.24, ya que ahora los medios situados en las dos caras de la ventana son distintos. Sin embargo, si el medio activo es un gas enrarecido (He-Ne, por ejemplo), su índice de refracción será similar al del aire, por lo que podremos aplicar, en buena aproximación, el análisis anterior.

Para ello, consideremos que el medio del que procede la onda incidente (región I, en la figura 4.25a), presenta un índice de refracción mayor que el del medio sobre el que incide la onda (región II). En este caso, como consecuencia de la tercera ley de Snell, se cumple

$$\frac{\sin \theta_t}{\sin \theta_i} = \frac{n_1}{n_2} > 1$$

Es decir, si  $n_1 > n_2$ , el ángulo de transmisión siempre será mayor que el ángulo de incidencia. Podemos imaginar, por lo tanto, una situación en la que  $\theta_i$  sea lo suficientemente grande como para que se obtenga  $\theta_t > \pi/2$  (Fig. 4.25b). Esta situación plantea una incongruencia, ya que, por definición, la onda transmitida debe propagarse por detrás de la superficie de separación entre los dos dieléctricos y no por delante, como ocurre con la onda reflejada. De no ser así, tendríamos dos ondas reflejadas y ninguna onda transmitida, lo cual es absurdo.

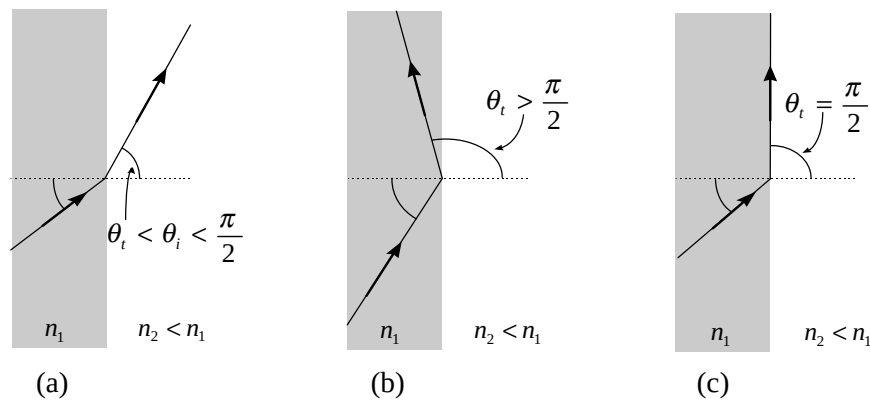


Fig. 4.25 (a) Incidencia de una onda plana sobre un medio dieléctrico de índice de refracción menor que el del medio de procedencia. En este caso la dirección de propagación de la onda transmitida tiende a alejarse de la normal, en relación a la de la onda incidente. (b) Situación absurda en la que, para ángulos de incidencia relativamente grandes, la onda transmitida saldría con un ángulo  $\theta_t > \frac{\pi}{2}$ . (c) Caso límite, en el que la dirección de propagación de la onda transmitida es tangente a la superficie de separación

¿Qué ocurre en realidad? Para verlo, supondremos que tanto las leyes de Snell como las ecuaciones de Fresnel siguen siendo válidas en este caso, ya que han sido deducidas con carácter general para cualquier valor del ángulo de incidencia comprendido entre 0 y  $\pi/2$ .

Lo que ocurre entonces es que, simplemente, algunas magnitudes pasan a ser complejas<sup>27</sup>. Consideremos, en primer lugar, el caso límite, en el que se obtiene un valor  $\theta_t = \frac{\pi}{2}$  para el ángulo de transmisión. En este caso, la onda transmitida se propagará paralelamente a la superficie de separación (Fig. 4.25c). Según la tercera ley de Snell, esta situación se produce cuando se cumple

$$\frac{n_1}{n_2} \sin \theta_i = \sin \frac{\pi}{2} = 1$$

El valor  $\theta_{ic}$  del ángulo de incidencia para el que se produce esta situación recibe el nombre de *ángulo crítico de la superficie* y viene dado por

$$\theta_{ic} = \arcsen \frac{n_2}{n_1} \quad (4.138)$$

Luego, para valores de  $\theta_i \in [0, \theta_{ic})$ , tenemos que  $\theta_t \in [0, \pi/2)$ , con lo que la onda transmitida se propaga hacia el interior del medio de índice  $n_2$ . Digamos que ésta sería la situación normal, planteada como hipótesis de partida, al principio de la sección 4.5, para un caso genérico de incidencia oblicua sobre dieléctricos. La situación anómala se produciría para valores de  $\theta_i \in (\theta_{ic}, \pi/2)$ . En este caso, según la tercera ley Snell, tenemos

$$\sin \theta_t > 1$$

con lo que el ángulo  $\theta_t$  deja de tener significado físico inmediato. Sin embargo, debemos suponer que las expresiones (4.133) para la tercera ley de Snell y

$$\vec{E}_t(\vec{r}) = \vec{E}_{0t} e^{-jk_2(\sin \theta_t y + \cos \theta_t z)} \quad (4.139)$$

para el campo eléctrico (fasorial) en la región II siguen siendo válidas. Bajo esta suposición, podemos expresar el término  $\cos \theta_t$  en (4.139) de la forma

$$\cos \theta_t = \sqrt{1 - \left(n_1/n_2\right)^2 \sin^2 \theta_i}$$

<sup>27</sup> Sin ir más lejos, el propio ángulo de transmisión deviene complejo. Podemos comprobar, a modo de ejercicio, que si  $\theta_t = \pi/2 - jb$ , entonces sí sucede realmente que  $\sin \theta_t > 1$ . Aunque ello puede parecer un artificio matemático, no es ésta la primera vez que trabajamos con magnitudes complejas: por ejemplo, para definir las magnitudes fasoriales en régimen senoidal permanente ya habíamos utilizado este mismo recurso, de gran utilidad por otra parte.

en la que el término de la raíz es negativo. Luego, para valores de  $\theta_i > \theta_{ic}$ , el término  $\cos\theta_t$  toma valores imaginarios, por lo que es más conveniente ponerlo de manifiesto, expresándolo de la forma  $\cos\theta_t = \pm j\gamma$ . De las dos soluciones posibles para la raíz, tomaremos únicamente la negativa, es decir

$$\cos\theta_t = -j\gamma \quad (4.140)$$

con  $\gamma \equiv \sqrt{(n_1/n_2)^2 \sin^2 \theta_i - 1}$ . Sustituyendo (4.133) y (4.140) en (4.139) nos queda

$$\vec{E}_t(\vec{r}) = \vec{E}_{0t} e^{-k_2 \gamma z} e^{-jk_1 \sin\theta_i y} = \vec{E}_t(z) e^{-j\beta y} \quad (4.141)$$

con  $\beta \equiv k_1 \sin\theta_i$  y  $\vec{E}_t(z) \equiv \vec{E}_{0t} e^{-k_2 \gamma z}$ .

Para incidencias supercríticas tenemos, pues, en la región II, una onda cuya amplitud se atenúa progresivamente, a medida que nos alejamos del lugar en el que fue generada (el plano  $z = 0$ , en este caso). Si, por el contrario, hubiéramos considerado la solución positiva de la raíz en (4.140), obtendríamos una onda cuya amplitud crecería exponencialmente hasta el infinito, al adentrarse en el interior del segundo medio, lo cual es del todo imposible que se produzca en la realidad.

Por otro lado, el término exponencial  $e^{-j\beta y}$  de la expresión (4.141) nos indica que el campo instantáneo asociado a la onda transmitida presentará una fase instantánea, que se propagará en la dirección del eje  $Y$  con una velocidad

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{k_1 \sin\theta_i} \quad (4.142)$$

Más adelante veremos que esta propiedad se cumple también para el campo en la región I, al igual que ocurría en el caso de incidencia oblicua sobre conductores perfectos.

De hecho, esta no es la única similitud que se produce entre ambos casos. Si expresamos las fórmulas de Fresnel (4.125a) y (4.126a) para los coeficientes de reflexión en dieléctricos no magnéticos de la forma

$$\rho_{\perp} = \frac{n_1 \cos\theta_i - j\eta_2}{n_1 \cos\theta_i + j\eta_2} \equiv \frac{A}{A^*} \quad (4.143)$$

$$\rho_{\parallel} = -\frac{n_2 \cos\theta_i + j\eta_1}{n_2 \cos\theta_i - j\eta_1} \equiv -\frac{B}{B^*} \quad (4.144)$$

resulta evidente que se cumple  $|\rho_{\perp, \parallel}| = 1$ . Luego, para valores de  $\theta_i > \theta_{ic}$ , podemos definir

$$\rho_{\perp} \equiv e^{j\varphi_{\perp}} \quad (4.145)$$

$$\rho_{\parallel} \equiv e^{j\varphi_{\parallel}} \quad (4.146)$$

En este caso, la onda reflejada y la onda incidente presentan la misma amplitud, diferenciándose únicamente en unos términos de fase, introducidos por (4.145) y (4.146). Obviaremos, por lo farragoso, el cálculo de expresiones genéricas para estos términos de fase, ya que resulta más fácil trabajar directamente con valores numéricos, una vez conocidos  $\theta_i$  y los índices de refracción para cada caso concreto. Debemos concluir, pues, que, como ocurría en el caso de incidencia oblicua sobre conductores perfectos, toda la potencia que incide sobre la superficie de separación entre los dos dieléctricos, transportada por la onda incidente, es reflejada hacia el medio de la región I, sin que se transmita potencia alguna a la región II<sup>28</sup>. Este fenómeno recibe el nombre de *reflexión total en dieléctricos*.

Desde este punto de vista, el caso de incidencia oblicua sobre conductores perfectos no sería más que un caso particular de reflexión total, en el que se cumpliría  $\varphi_{\perp} = \varphi_{\parallel} = \pi$ .

En este último caso, se formaba en la región I una onda estacionaria mixta, con el vector  $\vec{E}$  perpendicular o paralelo al plano de incidencia. Podemos comprobar que este fenómeno ocurre también ahora, sin importar cuáles sean los valores de los términos de fase  $\varphi_{\perp}$  y  $\varphi_{\parallel}$ .

Para ello determinemos el campo total en la región I para ambas polarizaciones, superponiendo las ondas incidente y reflejada

$$\begin{aligned} \vec{E}_{1\perp}(\vec{r}) &= E_{0i\perp} \hat{x} \left( e^{-jk_1(\sin\theta_i y + \cos\theta_i z)} + \rho_{\perp} e^{-jk_1(\sin\theta_i y - \cos\theta_i z)} \right) \\ \vec{E}_{1\parallel}(\vec{r}) &= E_{0i\parallel} \left( (\cos\theta_i \hat{y} - \sin\theta_i \hat{z}) e^{-jk_1(\sin\theta_i y + \cos\theta_i z)} + \rho_{\parallel} (\cos\theta_i \hat{y} + \sin\theta_i \hat{z}) e^{-jk_1(\sin\theta_i y - \cos\theta_i z)} \right) \end{aligned}$$

Expresando los coeficientes de reflexión en la forma dada por (4.145) y (4.146), obtenemos

$$\begin{aligned} \vec{E}_{1\perp}(\vec{r}) &= E_{0i\perp} \hat{x} e^{j\frac{\varphi_{\perp}}{2}} e^{-j\beta y} \left( e^{-j\frac{\varphi_{\perp}}{2}} e^{-jk_{iz}z} + e^{j\frac{\varphi_{\perp}}{2}} e^{jk_{iz}z} \right) \\ &= 2E_{0i\perp} e^{j\frac{\varphi_{\perp}}{2}} \hat{x} \cos\left(\frac{\varphi_{\perp}}{2} + k_{iz}z\right) e^{-j\beta y} \end{aligned} \quad (4.147)$$

<sup>28</sup> Esta afirmación es cierta sólo si nos encontramos en régimen permanente. Lógicamente, mientras dura el régimen transitorio, es indispensable una cierta transmisión de potencia para que aparezca el campo dado por (4.141) en la región II.

$$\vec{E}_{\parallel}(\vec{r}) = 2E_{0i\parallel} e^{j\frac{\varphi_{\perp}}{2}} e^{-j\beta y} \cdot \left[ \hat{y} \cos\theta_i \cos\left(\frac{\varphi_{\perp}}{2} + k_{iz}z\right) + \hat{z} \sin\theta_i \sin\left(\frac{\varphi_{\perp}}{2} + k_{iz}z\right) \right] \quad (4.148)$$

donde  $k_{iz} \equiv k_1 \cos\theta_i$  y  $\beta \equiv k_1 \sin\theta_i$  representan, respectivamente, las componentes normal y transversal del vector de propagación de la onda incidente.

Es inmediato comprobar, calculando los campos instantáneos, que en ambos casos se forman ondas estacionarias mixtas, de tipo TE en el caso de polarización perpendicular, y de tipo TM en el caso de polarización paralela, que se propagan paralelamente a la superficie de separación, con una velocidad de fase  $v = \frac{\omega}{k_1 \sin\theta_i}$ . Podemos comprobar, también,

calculando las expresiones de los vectores de Poynting correspondientes, que en ambos casos la potencia fluye en la dirección del eje Y, es decir, paralelamente a la superficie de separación entre los dos dieléctricos.

De hecho, los valores que toman los términos de fase,  $\varphi_{\perp}$  y  $\varphi_{\parallel}$ , afectan únicamente al punto en que aparece el primer nodo de la onda, lo que se puede comprobar representando gráficamente las funciones  $\vec{E}_{\perp}(\vec{r}, t)$  y  $\vec{E}_{\parallel}(\vec{r}, t)$  para valores de  $\varphi_{\perp}$  y  $\varphi_{\parallel}$  distintos. En los casos particulares  $\varphi_{\perp} = \pi$  y  $\varphi_{\parallel} = \pi$ , recuperamos las expresiones (4.78) y (4.80), obtenidas para el caso de incidencia sobre conductores perfectos.

#### **Ejemplo 4.5:** *Propagación ionosférica*

La reflexión que se produce en las capas altas de la ionosfera para las ondas de radiofrecuencia es un fenómeno de sobras conocido, ya que posibilita la comunicación a distancias mucho mayores que las que permitiría un enlace directo. En esencia se debe a la variación que sufre el índice de refracción de la ionosfera con la altura. Al tratarse de un gas ionizado o *plasma*, el índice de refracción de la ionosfera es, en buena aproximación, una función de la forma

$$n = \sqrt{1 - 80.5 \frac{N_e}{f^2}}$$

donde  $N_e$  representa el número de electrones libres por metro cúbico y  $f$  es la frecuencia de la onda que la atraviesa<sup>29</sup>. Para una frecuencia dada, el índice de refracción disminuye con la altura en las capas bajas de la ionosfera, debido al aumento que se produce en la cantidad de electrones libres.

Para entender el comportamiento de un medio de estas características, en lo que a la propagación de ondas planas se refiere, podemos representarlo de forma esquemática como la sucesión de un conjunto de capas superpuestas, lo suficientemente delgadas para poder considerar que en cada una de ellas el índice de refracción es constante. La trayectoria descrita por una onda plana en un medio de estas características aparece representada en la figura 4.26 está determinada por la ley de Snell, la cual debe cumplirse en las superficies de separación entre capas contiguas. Considerando  $n_0 \cong 1$  en el borde inferior de la ionosfera, resulta

$$\sin \theta_0 = n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 = \dots$$

y así, sucesivamente. Es decir, la cantidad  $n_i \sin \theta_i$  permanece constante a lo largo de la trayectoria y su valor viene determinado por  $\sin \theta_0$ . Teniendo en cuenta que el índice de refracción es cada vez menor a medida que la onda se adentra en la ionosfera, el ángulo de incidencia aumenta progresivamente al pasar de una capa a la siguiente. El resultado es el que aparece en la figura 4.26a. Si en alguna de ellas se cumple la condición

$$n_i < \sin \theta_0$$

se produce la reflexión total de la onda, al ser  $\sin \theta_i > 1$  (Fig. 4.26b).

Llamemos  $n_{\min}$  al valor mínimo que toma el índice de refracción en la ionosfera. Este valor se alcanza donde la concentración de electrones libres es máxima (capa de Heaviside), de acuerdo con la relación

$$n_{\min.} = \sqrt{1 - 80.5 \frac{(N_e)_{\max.}}{f^2}}$$

<sup>29</sup> Obsérvese que, para valores de  $f < \sqrt{80.5 N_e}$ , el índice de refracción es una magnitud compleja. En este caso, el medio se comporta como un conductor (ver sección 3.4). Para valores de  $f > \sqrt{80.5 N_e}$ ,  $n$  es una función real. En este caso, la ionosfera se comporta como un dieléctrico, con la salvedad que es  $n < 1$ . Es éste uno de los pocos casos en que nos encontraremos con índices de refracción menores que la unidad.

Por lo tanto, una onda electromagnética que penetre en la ionosfera con un ángulo  $\theta_0$  en relación a la vertical del suelo sufrirá reflexión total si se cumple la condición

$$\text{sen } \theta_0 > \sqrt{1 - 80.5 \frac{(N_e)_{\text{max.}}}{f^2}}$$

o, lo que es lo mismo

$$f < \frac{\sqrt{80.5(N_e)_{\text{max.}}}}{\cos \theta_0}$$

Según este resultado y teniendo en cuenta que se cumple  $0 \leq \cos \theta_0 \leq 1$ , una onda cuya frecuencia sea  $f < \sqrt{80.5(N_e)_{\text{max.}}}$  será devuelta a tierra por la ionosfera, independientemente del ángulo con el que llegue. Por el contrario, si es  $f > \sqrt{80.5(N_e)_{\text{max.}}}/\cos \theta_0$ , la onda se transmitirá al espacio exterior. En este último caso, la ionosfera posibilita la comunicación espacial (teniendo en cuenta que el número de electrones libres varía entre  $10^{10}$  y  $10^{12}$  por  $\text{m}^3$ , la frecuencia empleada debe ser mayor de 9MHz); en el primero, facilita la radiocomunicación terrestre a larga distancia (lo cual agradecieron enormemente los pioneros de la radio, que rabajaban con transmisores de unos pocos kHz).

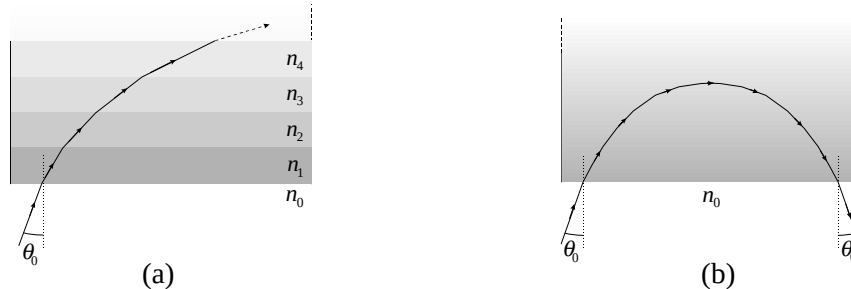


Fig. 4.26 (a) Deflexión sufrida por una onda plana al cruzar una sucesión de capas homogéneas de índice de refracción decreciente. (b) Cuando en alguno de las capas se alcanza el valor del ángulo crítico se produce la reflexión total de la onda y ésta es devuelta a tierra con el mismo ángulo con el que entra. Este sencillo modelo nos permite entender la propagación ionosférica.



**Ejemplo 4.6:** Guías de onda dieléctricas

Al igual que ocurría con la reflexión en conductores, el fenómeno de la reflexión total en dieléctricos puede aprovecharse también para la propagación de ondas electromagnéticas. Las guías de onda dieléctricas (las fibras ópticas en particular) constituyen, con mucho, su principal aplicación, al haberse erigido en una pieza (de considerable importancia) dentro de la ingeniería contemporánea.

El principio de funcionamiento de una guía de onda dieléctrica como la que muestra la figura 4.27 es muy similar al de las guías de paredes conductoras: para que se genere una onda estacionaria mixta en el interior de la guía, y que sea estable en régimen permanente, debe producirse reflexión total en ambas paredes. Según hemos visto anteriormente, ello sólo puede ocurrir si el índice de refracción del medio interno es superior al del medio externo. Por otro lado, las sucesivas reflexiones de la onda incidente producidas deben dar lugar a interferencias constructivas. En una guía de paredes conductoras, ello ocurría cuando se cumplía la condición  $k_{iz}d = m\pi$ . En este caso, la onda incidente, tras haber sido reflejada una vez en cada pared y haber efectuado un recorrido completo de ida y vuelta, regresaba al punto de partida con una diferencia de fase acumulada  $e^{-j2k_{iz}d} = e^{-2jm\pi} = 1$  con respecto a la onda inicial, con lo que se añadía en fase a la primera, y así, sucesivamente.

En el caso de una guía dieléctrica, al desfase  $e^{-j2k_{iz}d}$  acumulado durante el trayecto de ida y vuelta hay que añadirle un término de fase del tipo  $e^{-j\varphi_{\perp,\parallel}}$  (según se trate de incidencia perpendicular o paralela) para cada reflexión producida. El desfase total acumulado es, pues,  $e^{-j2k_{iz}d - 2j\varphi_{\perp,\parallel}}$  y la condición para que se produzcan interferencias constructivas deviene

$$\varphi_{\perp,\parallel} + k_{iz}d = m\pi$$

de donde resulta

$$\operatorname{tg}(\varphi_{\perp,\parallel} + k_{iz}d) = 0$$

o, lo que es lo mismo

$$\operatorname{tg}(k_{iz}d) = -\operatorname{tg}(\varphi_{\perp,\parallel})$$

Por consiguiente, en el interior de la guía se generarán únicamente aquellas ondas estacionarias o modos propios que cumplan esta última condición, conocida como ecuación de valores propios de la guía.

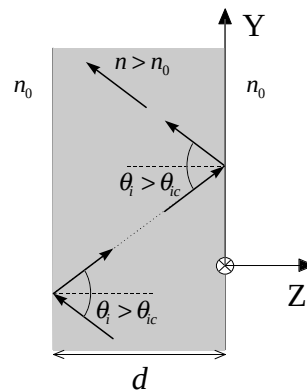


Fig. 4.27 Guía de ondas simétrica, formada por una lámina dieléctrica, recubierta en ambos lados por un dieléctrico de menor índice de refracción

#### Ejemplo 4.7: Propagación de ondas en una fibra óptica

Al igual que donde  $N_e$  representa el número de electrones libres por metro cúbico y  $f$  es la frecuencia, en las guías de onda dieléctricas, el fenómeno de la reflexión total permite la propagación de ondas guiadas en una fibra óptica. En ambos casos, el principio es el mismo: un material dieléctrico de índice de refracción determinado ( $n_c$ , en la figura 4.28) se encuentra rodeado por otro de índice de refracción inferior, de valor  $n_b$ , de forma que un rayo que incide sobre la superficie de separación entre ambos, con un ángulo respecto a la normal mayor que el ángulo crítico, sufre reflexión total, lo que da lugar a la formación de modos guiados en el interior de la fibra. Debido a la geometría que presenta, las expresiones matemáticas que se obtienen para el campo electromagnético asociado a los modos guiados en una fibra óptica son mucho más complejas que las obtenidas en el ejemplo anterior. Sin embargo, el concepto de ángulo crítico nos permite realizar una estimación sencilla de cómo debemos introducir la luz en la fibra para conseguir el guiado de la misma en su interior.

Si llamamos  $\theta_a$  al ángulo con respecto al eje de la fibra con el que la luz incide en la sección de entrada, tal como muestra la figura 4.28, el cono de aceptación de la fibra está determinado por el rango de valores de  $\theta_a$  para los cuales el rayo incidente da lugar a la formación de ondas guiadas. El valor máximo permitido para  $\sin\theta_a$  recibe el nombre de *apertura numérica* (N.A., del inglés *numerical aperture*). Para hallar una expresión de la apertura numérica de la fibra,

debemos relacionar los ángulos  $\theta_a$  y  $\theta_c$  de la figura. La relación en cuestión nos la proporciona la ley de Snell. En la sección de entrada se verifica

$$1 \cdot \sin \theta_a = n_c \sin \bar{\theta}_c = n_c \sqrt{1 - \cos^2 \bar{\theta}_c}$$

donde  $\bar{\theta}_c$  es el ángulo complementario de  $\theta_c$ . El valor máximo de  $\theta_a$  que permite la reflexión total en el interior de la fibra corresponde a un valor de  $\theta_c$  igual al del ángulo crítico de la superficie de separación entre el medio interno y la cubierta de la fibra. En este caso, se cumple

$$\begin{aligned} \sin \theta_c &= \frac{n_b}{n_c} = \cos \bar{\theta}_c \\ \sin \theta_a &= n_c \sqrt{1 - \frac{n_b^2}{n_c^2}} = \sqrt{n_c^2 - n_b^2} \end{aligned}$$

En las fibras ópticas la diferencia de índices  $n_c - n_b$  suele ser pequeña. En tal caso, podemos realizar la aproximación

$$\sin \theta_a \cong n_b \sqrt{2\Delta}$$

donde  $\Delta \equiv \frac{n_c - n_b}{n_b}$  es el incremento de índice relativo (normalmente  $\ll 1$ ). En una fibra típica de silicio, por ejemplo, se tiene un incremento relativo  $\Delta = 0.01$ , con un índice  $n_b = 1.46$  en la cubierta. El valor que se obtiene, en este caso, para la apertura numérica, es  $N.A. = 0.206$ , lo cual corresponde a un cono de aceptación con  $\theta_a = 11.9^\circ$ , que vendría a ser un valor típico.

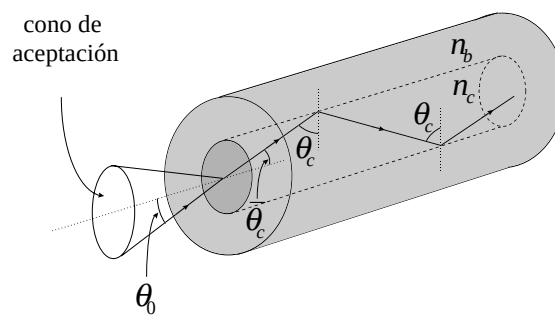


Fig. 4.28 Apertura numérica de una fibra óptica

## 4.6 Incidencia sobre un buen conductor

En el capítulo 3 habíamos introducido el concepto de permitividad compleja para representar el comportamiento electromagnético en régimen senoidal permanente de un medio con una conductividad  $\sigma$  finita. El uso de permitividades complejas nos permite extender el análisis matemático empleado para el estudio de la incidencia de ondas planas sobre medios dieléctricos ideales al caso de medios con pérdidas, como es, por ejemplo, un conductor real. Por su interés práctico, en la presente sección consideraremos medios que sean buenos conductores, centrándonos especialmente en los aspectos novedosos que presenta su comportamiento en relación al de un conductor perfecto, en lo que a la incidencia de ondas planas se refiere.

En la sección 3.4.3 habíamos definido un buen conductor como un medio en el que la corriente de conducción era mucho mayor que la corriente de desplazamiento o, lo que es lo mismo, en el que se cumplía la condición

$$\sigma \gg \omega \epsilon_0$$

En este caso, podíamos aproximar la permitividad compleja en régimen senoidal permanente por

$$\epsilon \cong -j \frac{\sigma}{\omega} \quad (4.149)$$

¿Cuáles son los aspectos novedosos a los que nos referíamos? Para empezar, la asunción de que el campo es nulo en el interior, tras la incidencia en la superficie de una onda plana procedente de un dieléctrico ideal sin pérdidas, sólo es cierta en un conductor perfecto. En un medio de conductividad finita debemos asumir, como si de un dieléctrico se tratara, la formación de una onda transmitida, además de la onda reflejada. Sin embargo, y a diferencia de un dieléctrico ideal, el carácter complejo de la permitividad produce una atenuación en la amplitud de la onda transmitida, a medida que ésta se adentra en el conductor. En la sección 3.4.3 habíamos introducido el concepto de profundidad de penetración en un buen conductor, como un indicativo de la atenuación sufrida por una onda plana que se propagase a través de un medio estas características. El estudio de la incidencia de ondas planas sobre buenos conductores nos permitirá abundar en este concepto.

Con este fin, procedamos a la obtención de una expresión genérica para la onda transmitida. La constante de propagación de las ondas planas en un medio cuya permitividad venía dada por (4.149) era, a su vez, una magnitud compleja de la forma

$$k \equiv \beta - j\alpha \cong \frac{1-j}{\delta_p}$$

donde el término  $\delta_p \equiv \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$  recibía el nombre de profundidad de penetración en el conductor. Por consiguiente, el campo eléctrico asociado a la onda transmitida, en el caso de incidencia normal, puede representarse mediante la siguiente expresión fasorial:

$$\vec{E}_t(z) = \vec{E}_{0t} e^{-j(\beta - j\alpha)z} = \vec{E}_{0t} e^{-z/\delta_p} e^{-jz/\delta_p} \quad (4.150)$$

donde hemos fijado, como de costumbre, los ejes de coordenadas de manera que el eje Z coincida con la dirección normal a la superficie. Tenemos, pues, que la amplitud de la onda transmitida se atenúa en un factor  $e^{-z/\delta_p}$ , como consecuencia del carácter complejo de la constante de propagación. A una profundidad  $z \approx 4.6\delta_p$ , por ejemplo, la amplitud es sólo un 1% de la inicial. El término  $\delta_p$  es, pues, un indicativo de la profundidad a la que penetran en el conductor los efectos electromagnéticos producidos por la incidencia de una onda plana sobre la superficie y de ahí su nombre.

¿Qué ocurre entonces si la onda incide oblicuamente sobre el conductor? Como hemos dicho al principio, podemos extender las leyes que rigen el comportamiento de los medios dieléctricos, en lo que a la incidencia de ondas planas se refiere, al caso de buenos conductores, con la salvedad de que ahora aparecen magnitudes complejas. Así, por ejemplo, tanto las leyes de Snell como las ecuaciones de Fresnel siguen siendo válidas. Bajo este supuesto y fijando los ejes de coordenadas de forma que el plano YZ corresponda al plano de incidencia (Fig. 4.20), el vector de propagación de la onda transmitida será de la forma  $\vec{k}_t = k_2(\sin\theta_t y + \cos\theta_t z)$ . Podríamos esperar entonces que la penetración de la onda transmitida fuera menor que si la incidencia es normal, ya que la componente normal se ve reducida un factor  $\cos\theta_t$ . Sin embargo, en un buen conductor, esta reducción es despreciable. Para ponerlo de manifiesto, basta con expresar el término  $\cos\theta_t$  de la forma

$$\cos\theta_t = (1 - \sin^2\theta_t)^{1/2} = \left(1 - \frac{k_1^2}{k_2^2} \sin^2\theta_i\right)^{1/2} \quad (4.151)$$

donde hemos aplicado la tercera ley de Snell. Si aplicamos ahora la aproximación (4.149), podemos expresar el segundo término de la raíz de la forma

$$\frac{k_1^2}{k_2^2} = \frac{\omega^2 \mu_1 \epsilon_1}{\omega^2 \mu_2 \epsilon_2} \approx j \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{\omega \epsilon_1}{\sigma}$$

Como hemos dicho, en un buen conductor es, por definición,  $\sigma \gg \omega\epsilon_0$ . Luego, si la permitividad y la permeabilidad del dieléctrico de la región I no difieren mucho de las del vacío, podemos considerar que se cumple la condición

$$\frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{\omega \epsilon_1}{\sigma} \ll 1 \quad (4.152)$$

y despreciar, sin más, el término  $(k_1/k_2)^2 \sin^2 \theta_i$  en (4.151), con lo que nos queda, simplemente

$$\cos \theta_t \approx 1 \quad (4.153)$$

independientemente del valor que tome el ángulo de incidencia  $\theta_i$ . Teniendo en cuenta este resultado, junto con la tercera ley de Snell, la expresión genérica de la onda transmitida queda de la forma

$$\vec{E}_t(\vec{r}) = \vec{E}_{0t} e^{-j\vec{k}_t \cdot \vec{r}} \equiv \vec{E}_t(z) e^{-jk_1 \sin \theta_i y} \quad (4.154)$$

donde el término  $\vec{E}_t(z)$  corresponde a la expresión (4.150), obtenida para incidencia normal.

Es decir, con independencia de cómo llegue a la superficie la onda incidente, en el caso de incidencia oblicua la onda transmitida penetra en el conductor con un ángulo  $\theta_t \approx 0$ , esto es, según la dirección normal, y se atenúa del mismo modo en que lo hace en el caso de incidencia normal. El concepto de profundidad de penetración *es válido entonces para cualquier ángulo de incidencia*<sup>30</sup>. Por otro lado, la presencia del término  $e^{-jk_1 \sin \theta_i y}$  en (4.154) indica que existe una propagación de la fase de la onda en la dirección  $\hat{y}$ , esto es, paralelamente a la superficie del conductor. De hecho, sólo la propagación en  $\hat{y}$  será relevante, puesto que la fuerte disminución de amplitud en la dirección  $\hat{z}$  impide una propagación efectiva en esa dirección, a pesar del término  $e^{-jz/\delta_p}$ . Podemos considerar, pues, que la onda transmitida se propaga en el interior del conductor concentrada en una región próxima a la superficie y paralelamente a ella. Este fenómeno recibe el nombre de *efecto pelicular* o *efecto skin*.

Por otro lado, la atenuación de la amplitud de la onda transmitida en un factor  $e^{-z/\delta_p}$  conlleva una disminución en el flujo de potencia a medida que ésta penetra en el conductor. Teniendo en cuenta que el término de fase  $e^{-jk_1 \sin \theta_i y}$  no afecta al flujo de potencia asociado a la onda transmitida, su densidad media viene dada por<sup>31</sup>

<sup>30</sup> Siempre, claro está, que se cumpla la condición de buen conductor  $\sigma \gg \omega \epsilon_0$ . A frecuencias ópticas, por ejemplo, podría no ser cierto, ya que un buen conductor puede dejar de serlo si  $\omega$  es muy elevada.

<sup>31</sup> Esta expresión se obtiene a partir de la expresión genérica para el valor medio del vector de Poynting en régimen senoidal permanente,  $\vec{P}_m = \frac{1}{2} \text{Re}[\vec{E} \times \vec{H}^*]$ , con  $\vec{H} = \frac{1}{\eta} \hat{k} \times \vec{E}$ , y teniendo en

$$|\vec{P}_t(z)| = \frac{|E_t(z)|^2}{2} \operatorname{Re} \left( \frac{1}{\eta_2^*} \right) = \frac{\sigma \delta_p}{4} |\vec{E}_{0t}|^2 e^{-2z/\delta_p}$$

donde hemos utilizado la aproximación

$$\eta_2 \cong \frac{1+j}{\sigma \delta_p} = \sqrt{2} \frac{1}{\sigma \delta_p} e^{j\pi/4} \quad (4.155)$$

Luego, la densidad media de potencia que penetra en el conductor a través de su superficie viene dada por

$$|\vec{P}_t(z=0)| \cos \theta_t \cong \frac{\sigma \delta_p}{4} |\vec{E}_{0t}|^2 \quad (4.156)$$

al ser, como hemos visto,  $\theta_t \approx 0$ . Este flujo disminuye en un factor  $e^{-2z/\delta_p}$  a medida que la onda transmitida se adentra en el conductor, tendiendo a cero en el límite  $z \rightarrow \infty$ .

¿Qué ocurre entonces con la potencia perdida por la onda? Un sencillo cálculo nos permite comprobar que ha sido absorbida por el conductor, en forma de pérdidas óhmicas. Para ello, basta obtener la potencia media disipada por unidad de volumen por una corriente de tipo óhmico ( $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ ). En régimen senoidal permanente, esta potencia viene dada por

$$U_d \langle \vec{J} \cdot \vec{E} \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\vec{J} \cdot \vec{E}^*] = \frac{\sigma}{2} |\vec{E}|^2$$

Integrando esta expresión en todo el volumen ocupado por el conductor, obtenemos la potencia total disipada por la onda transmitida

$$W_d = \int_V \frac{\sigma}{2} |\vec{E}_t(\vec{r})|^2 dV = \int_V \frac{\sigma}{2} |\vec{E}_{0t}|^2 e^{-2z/\delta_p} dV$$

Considerando  $dV = dS dz$ , donde  $dS$  corresponde a un elemento de la superficie del conductor, resulta

$$W_d = \frac{\sigma}{2} |\vec{E}_{0t}|^2 \int_0^\infty e^{-2z/\delta_p} dz \int_S dS = \frac{\sigma \delta_p}{4} |\vec{E}_{0t}|^2 S \quad (4.157)$$

---

cuenta que la impedancia intrínseca en un buen conductor es una magnitud compleja. Dicho carácter se traduce, por otro lado, en un desfase entre los campos eléctrico y magnético de la onda transmitida, de valor  $\pi/4$ , según la expresión (4.155).

donde  $S$  representa la superficie total del conductor<sup>32</sup>. Comparando las expresiones (4.156) y (4.157), vemos que la potencia disipada en el conductor se corresponde exactamente con la potencia que penetra a través de su superficie, tal como esperábamos.

Una vez que hemos analizado lo que ocurre en el interior del conductor cuando incide una onda plana sobre su superficie, veamos qué sucede en el dieléctrico. Para ello podemos calcular los campos eléctrico y magnético asociados a la onda reflejada, aplicando las ecuaciones de Fresnel obtenidas para incidencia sobre dieléctricos, pero teniendo en cuenta que, según la expresión (4.155), la impedancia  $\eta_2$  del segundo medio es ahora una magnitud compleja. Para una onda incidente con el vector  $\vec{E}$  polarizado perpendicularmente al plano de incidencia se cumple, si aplicamos la aproximación (4.153)

$$\rho_{\perp} \cong \frac{\eta_2 \cos \theta_i - \eta_1}{\eta_2 \cos \theta_i + \eta_1} = \frac{\frac{\eta_2}{\eta_1} \cos \theta_i - 1}{\frac{\eta_2}{\eta_1} \cos \theta_i + 1} \quad (4.158)$$

Por otro lado, según (4.155), se verifica

$$\frac{\eta_2}{\eta_1} \cong \sqrt{2} \frac{1}{\sigma \delta_p \eta_1} e^{j\pi/4} = \left( \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{\omega \epsilon_1}{\sigma} \right)^{1/2} e^{j\pi/4} \quad (4.159)$$

Teniendo en cuenta, de nuevo, la condición (4.152), podemos despreciar, en una aproximación de primer orden, los términos con  $\eta_2/\eta_1$  en (4.158)<sup>33</sup>, con lo que resulta  $\rho_{\perp} \cong -1$ . Del mismo modo, para una onda incidente con el vector  $\vec{E}$  polarizado paralelamente al plano de incidencia, obtenemos,  $\rho_{\parallel} \cong -1$ . Es decir, podemos considerar, en una primera aproximación, que un buen conductor se comporta, en lo que a la reflexión se

<sup>32</sup> La potencia disipada en el conductor puede expresarse también de la forma  $\frac{W_d}{S} = \frac{1}{2} R_S |I|^2$

donde  $W_d/S$  es la potencia disipada por unidad de superficie del conductor,  $R_S \equiv \frac{1}{\sigma \delta_p}$  es la

resistencia superficial del conductor, definida en la sección 3.4.3 e  $I$  representa la intensidad de corriente que atraviesa una sección del conductor de longitud infinita en profundidad y anchura unidad, perpendicular a la superficie y a la dirección del campo eléctrico (ver sección 3.4.3.).

<sup>33</sup> Utilizando los valores del ejemplo 3.4 para el cobre, tenemos, para una incidencia desde el vacío con una frecuencia situada en el rango de las microondas (por ejemplo, 10 GHz),  $\left| \frac{\eta_2}{\eta_1} \right| \approx 10^{-4} !!$



refiere, como un conductor perfecto. Luego, en ambos casos se forman en el dieléctrico ondas estacionarias mixtas, cuya fase se propagará paralelamente a la superficie del conductor con una velocidad  $v = \omega/k \sin \theta_i$  y cuyos campos vendrán dados por (4.78) y (4.79), en el caso de polarización perpendicular, y por (4.80) y (4.81), en el caso de polarización paralela al plano de incidencia.

La aproximación de primer orden para la onda reflejada, sin embargo, no tiene en cuenta aspectos tales como la disipación de potencia en el conductor, producida por las corrientes de tipo óhmico que induce la onda transmitida. Las expresiones

$$\rho_{\perp} = -1 + 2 \frac{\eta_2}{\eta_1} \cos \theta_i \quad (4.160a) \quad \rho_{\parallel} = -1 + 2 \frac{\eta_2}{\eta_1} \frac{1}{\cos \theta_i} \quad (4.160b)$$

$$\tau_{\perp} = 2 \frac{\eta_2}{\eta_1} \cos \theta_i \quad (4.161a) \quad \tau_{\parallel} = 2 \frac{\eta_2}{\eta_1} \quad (4.161b)$$

obtenidas considerando los términos de orden inmediatamente superior en el desarrollo en serie de potencias de  $\eta_2/\eta_1$  de las ecuaciones de Fresnel sí son compatibles con el principio de conservación de la energía.

Una vez obtenidas las expresiones (4.161a) y (4.161b) para el coeficiente de transmisión en un buen conductor, podemos determinar qué fracción de la potencia que incide sobre la superficie, aportada por la onda incidente, se disipa en su interior por efecto Joule. La fracción de potencia que se disipa viene dada directamente por la transmitividad de la superficie, ya que, según hemos visto anteriormente, la potencia total disipada coincide con la potencia que penetra a través de su superficie. La transmitividad se obtiene fácilmente de la forma

$$T = \frac{|\vec{P}_t(z=0)| \cos \theta_t}{|\vec{P}_i(z=0)| \cos \theta_i} \cong \frac{\frac{\sigma \delta_p}{4} |\tau|^2 |E_{0i}|^2}{\frac{1}{2\eta_1} |E_{0i}|^2 \cos \theta_i} = \frac{\sigma \delta_p \eta_1}{2 \cos \theta_i} |\tau|^2$$

donde hemos utilizado la relación (4.156). Según este resultado y las expresiones (4.159) y (4.161), para ambas polarizaciones la transmitividad es una función de la forma

$$T \sim \left( \frac{\omega \epsilon_1}{\sigma} \right)^{1/2}$$

y tiende a cero, lógicamente, para conductores perfectos.

En el caso de un buen conductor, aunque el término  $(\omega\epsilon_1/\sigma)^{1/2}$  toma valores realmente pequeños ( $\approx 10^{-4}$  en el cobre para frecuencias del orden de 10GHz), la potencia total disipada puede ser apreciable si la superficie del conductor es lo suficientemente grande y la onda incidente lo suficientemente intensa.

#### **Ejemplo 4.8:** *Comunicación submarina*

El carácter conductor del agua salada dificulta enormemente la comunicación submarina. Si la señal se emite desde una estación terrestre, por ejemplo, la intensidad de la onda que llega a un receptor sumergido depende fundamentalmente de dos parámetros: la transmitividad en la superficie del mar y la profundidad de penetración, los cuales, como hemos visto, dependen de la frecuencia empleada. Por un lado, la transmitividad aumenta con la raíz de la frecuencia; por el otro, la profundidad de penetración disminuye con dicha raíz. De ambos efectos, predomina éste último, ya que la profundidad de penetración afecta exponencialmente la atenuación que sufre la onda en el agua. Así, por ejemplo, a una frecuencia  $f = 1$  MHz, la profundidad de penetración es  $\delta_p = 0.22 \text{ m}^{-1}$ , lo cual quiere decir que a una profundidad de 1 m sólo llega un 1% de la potencia transmitida en la superficie. A una frecuencia  $f = 10$  kHz, la profundidad de penetración toma un valor  $\delta_p = 2.25 \text{ m}^{-1}$ , con lo que se obtiene la misma situación a una profundidad de 10 m por debajo de la superficie. Para mantener una comunicación eficiente con un barco submarino sería necesario emplear frecuencias demasiado bajas o potencias demasiado elevadas, lo que la imposibilita en la práctica, excepto cuando éste se encuentra en la superficie.

### **4.7 Incidencia normal en multicapas**

Existe un elevado número de dispositivos prácticos que utilizan las propiedades de la incidencia de ondas planas sobre medios dieléctricos. En algunas de estas aplicaciones, como los recubrimientos antirreflectantes, los filtros interferenciales o los DFB (*distributed feedback lasers*), intervienen estructuras denominadas *multicapas dieléctricas*.

Una capa múltiple o multicapa dieléctrica es, en esencia, un conjunto de láminas dieléctricas paralelas, dispuestas sucesivamente. Hasta ahora nos hemos limitado al análisis de los fenómenos producidos como consecuencia de la incidencia de una onda plana sobre la superficie de separación entre dos medios distintos. Cuando uno de ellos era un conductor perfecto, aparecía una onda reflejada hacia el primer medio, como consecuencia de la interacción entre el campo de la onda incidente y las cargas presentes en el conductor. Cuando ambos medios eran dieléctricos aparecía, además, una onda transmitida hacia el segundo medio. La cuestión es ¿qué ocurre ahora al añadir más discontinuidades en el recorrido de las ondas?

Lógicamente, debemos esperar que se generen ondas reflejadas y ondas transmitidas en cada una de las distintas discontinuidades que encuentre a su paso la onda incidente. Para ilustrar el fenómeno, tomemos la situación más sencilla de reflexión múltiple, con tres medios diferentes y dos superficies de separación. En el ejemplo de la figura 4.29a, estas superficies aparecen situadas en  $z = -d$  y en  $z = 0$ . Tal como hemos visto en la sección 4.3.1, tras la incidencia de una onda plana en la primera de ellas, aparecerán una onda reflejada hacia el medio que forma la región I y una onda transmitida hacia la región II, representadas en la figura por sus vectores de propagación correspondientes,  $\vec{k}_{r1}$  y  $\vec{k}_{t2}$ . Al incidir ésta última sobre la superficie situada en  $z = 0$ , se generarán una onda transmitida hacia la región III y una segunda onda reflejada, representadas por los vectores de propagación  $\vec{k}_{t3}$  y  $\vec{k}_{r2}$ , respectivamente. Esta segunda onda reflejada, a su vez, incidirá en la superficie  $z = -d$ , dando lugar a la aparición de las ondas  $\vec{k}_{t1}$  y  $\vec{k}'_{r2}$  y así, sucesivamente.

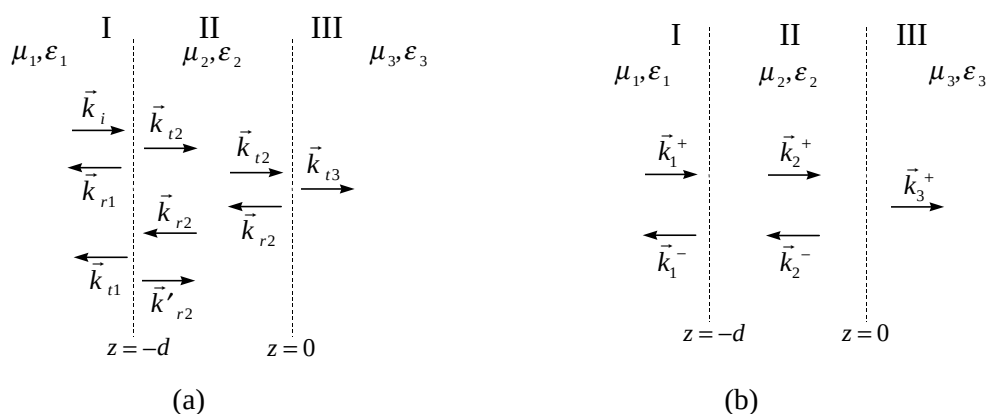


Fig. 4.29 (a) Incidencia en multicapas dieléctricas. En los medios intermedios aparecen múltiples ondas reflejadas. (b) Situación final (estacionaria) tras las múltiples reflexiones y transmisiones

Por consiguiente, este proceso de reflexiones múltiples se repite *ad infinitum*. No obstante, dentro de cada región podemos aplicar el principio de superposición a todas las ondas que viajan en la misma dirección, con lo que se obtiene la situación final de la figura 4.29b, en la que tenemos una onda progresiva y una onda regresiva en cada una de ellas, excepto en la última<sup>34</sup>. Como siempre, las condiciones de contorno que deben cumplir las

<sup>34</sup> Si añadiéramos una discontinuidad en el otro extremo de la región III aparecería una onda regresiva también en esta región.

componentes tangenciales del campo total en las superficies situadas en  $z = -d$  y  $z = 0$  nos permiten relacionar las distintas amplitudes entre sí.

#### 4.7.1 Impedancia de onda generalizada

La obtención de estas relaciones no es excesivamente complicada, en este caso concreto (al final del capítulo aparece propuesta como ejercicio)<sup>35</sup>. Ahora bien, la complejidad aumenta ostensiblemente si tomamos un número de capas mayor. Por fortuna, existe una forma mucho más simple y elegante de resolver problemas como el planteado en la figura 4.29. El procedimiento en cuestión se basa en la extensión del concepto de impedancia intrínseca de un medio material, definido en el capítulo 3 a partir de la relación entre el campo eléctrico y el campo magnético de una onda plana uniforme, a una situación genérica en la que existe en el medio una onda o suma de ondas planas cualesquiera. Desde este punto de vista, la reflexión de parte de la potencia al variar las características del medio (por ejemplo, en la superficie de separación entre dos dieléctricos distintos) se relaciona con un cambio de impedancia de la onda. Veámoslo.

En el caso más general, podemos definir la *impedancia de onda* como sigue:

$$Z_{ij} \equiv \frac{E_i}{H_j} \quad (4.162)$$

Formalmente,  $Z$  sería una matriz cuyos elementos  $Z_{ij}$  relacionan la componente  $i$ -ésima del campo eléctrico con la componente  $j$ -ésima del campo magnético de la onda. En las ondas de tipo TEM (transversal electromagnético) los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{H}$  tienen ambos una única componente, perpendicular a la dirección de propagación (de ahí el nombre de ondas TEM). En este caso, la impedancia de onda se reduce a un escalar, definido por

$$Z = (\pm) \frac{E_t}{H_t} \quad (4.163)$$

---

<sup>35</sup> Por ejemplo, las expresiones que relacionan entre sí las amplitudes de las ondas  $\vec{k}_2^+$ ,  $\vec{k}_2^-$  y  $\vec{k}_3^+$  son, justamente, (4.43) y (4.44), ya que la situación que se produce en la superficie situada en  $z = -d$  idéntica a la planteada en la sección 4.3.1 (Fig. 4.12). Dichas expresiones, sin embargo, no son válidas en la superficie situada en  $z = -d$ , donde nos enfrentamos a una *situación distinta, en la que inciden a la vez dos ondas planas desde direcciones opuestas* (identificadas por los vectores  $\vec{k}_1^+$  y  $\vec{k}_2^-$  en la figura 4.29b). En este caso habrá que resolver el problema desde el principio, es decir, partiendo de las condiciones de contorno (4.29) y (4.30) para las componentes tangenciales del campo.

donde el subíndice  $t$  se refiere a las componentes transversales del campo. El signo de la expresión debe escogerse arbitrariamente de forma que, para el caso de una onda plana uniforme, coincida con la impedancia intrínseca del medio, con signo positivo.

**Ejemplo 4.9:** Algunos ejemplos de cálculo de impedancia de onda

Veamos a continuación qué expresiones se obtienen para los distintos tipos de ondas vistos en este capítulo

(a) *Onda plana uniforme*

En el caso de una onda plana que se propaga en la dirección  $\hat{z}$ , con el campo eléctrico polarizado linealmente en la dirección  $\hat{y}$ , las expresiones fasoriales del campo son de la forma

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_0 e^{-jkz} \hat{y} \quad \vec{H}(\vec{r}) = -\frac{E_0}{\eta} e^{-jkz} \hat{x}$$

donde  $k$  representa la constante de propagación y  $\eta$  la impedancia intrínseca del medio en el que se propaga la onda. Sustituyendo estas expresiones en (4.163), obtenemos

$$Z = -\frac{E_y}{H_x} = -\frac{E_0 e^{-jkz}}{-\frac{E_0}{\eta} e^{-jkz}} = \eta \quad (4.164)$$

Es decir, la impedancia de una onda plana uniforme es justamente la impedancia intrínseca del medio en el que se propaga, tal como hemos impuesto al principio.

(b) *Onda plana estacionaria*

En la sección 4.2.1 habíamos obtenido las siguientes expresiones para el campo total que resulta de la incidencia normal de una onda plana como la del caso (a) sobre la superficie de un conductor perfecto

$$\vec{E}(z) = -2j\hat{y} E_0 \sin kz \quad \vec{H}(z) = -2\frac{E_0}{\eta} \hat{x} \cos kz$$

Luego, la impedancia de una onda estacionaria resulta ser

$$Z = -\frac{E_y}{H_x} = -j\eta \operatorname{tg} kz \quad (4.165)$$

(c) *Onda parcialmente estacionaria*

Cuando la onda plana uniforme del caso (a) incidía normalmente sobre la superficie de separación entre dos dieléctricos se formaba en el primer medio una onda parcialmente estacionaria, cuyas componentes transversales del campo eran de la forma

$$E_y(z) = E_0(2j\rho \operatorname{sen} k_1 z + \tau e^{-jk_1 z}) \quad H_x(z) = \frac{E_0}{\eta_1}(2\rho \cos k_1 z - \tau e^{-jk_1 z})$$

donde los coeficientes  $\rho$  y  $\tau$  vienen dados por (4.43) y (4.44). En este caso y tras algunas simplificaciones, se obtiene la siguiente expresión para la impedancia de onda en el medio I:

$$Z = -\frac{E_y}{H_x} = \eta_1 \frac{\eta_2 - j\eta_1 \operatorname{tg} k_1 z}{\eta_1 - j\eta_2 \operatorname{tg} k_1 z} \quad (4.166)$$

#### 4.7.2 Coeficiente de reflexión generalizado

El concepto de impedancia de onda es de gran utilidad en el estudio de situaciones en las que aparecen reflexiones múltiples, siempre que la incidencia sea normal y las ondas sean de tipo TEM<sup>36</sup>. Como hemos dicho anteriormente, podemos entender el fenómeno de la reflexión en relación con las variaciones de la impedancia de onda a lo largo de la dirección de propagación. Para ponerlo de manifiesto, consideremos un medio cualquiera, de impedancia intrínseca  $\eta$ . Supongamos que a través de este medio viajan dos ondas planas uniformes, según las direcciones  $\hat{k} = \hat{z}$  y  $\hat{k} = -\hat{z}$ . Llamemos onda progresiva a la primera de estas ondas y onda regresiva a la segunda. Asumiendo que la onda regresiva aparece en el medio como consecuencia de la reflexión, ya sea total o parcial, de la onda progresiva en algún punto del eje de propagación, podemos definir el *coeficiente de reflexión generalizado* como sigue:

<sup>36</sup> En realidad, con ello entramos en la teoría general de las *líneas de transmisión*, aunque su estudio detallado escapa al propósito de este libro.

$$\Gamma(z) \equiv \frac{E^-(z)}{E^+(z)} \quad (4.167)$$

donde  $E^+(z)$  es el campo eléctrico asociado a la onda progresiva y  $E^-(z)$  es el campo eléctrico asociado a la onda regresiva. Al ser ambas, ondas planas uniformes, podemos expresar  $\Gamma(z)$  de la forma

$$\Gamma(z) = \frac{E_0^- e^{jkz}}{E_0^+ e^{-jkz}} = \frac{E_0^-}{E_0^+} e^{2jkz} \quad (4.168)$$

La expresión (4.168) es aplicable a cualquier punto del eje de propagación. Expresa que el coeficiente de reflexión generalizado, mientras permanezcamos en un mismo medio, es una función continua de  $z$  que sólo variará en fase. Para que se produzcan variaciones en el módulo debe haber necesariamente un cambio de medio. Para cada medio distinto, debemos recalcular  $\Gamma(z)$  en función de las ondas presentes en él.

En la práctica, resulta conveniente referir el coeficiente de reflexión a un punto concreto (por ejemplo, la superficie de separación entre dos medios). Llamemos  $z_0$  a este punto. Según (4.168), el valor  $\Gamma_0$  que toma el coeficiente de reflexión en  $z_0$ , es

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma(z_0) = \frac{E_0^-}{E_0^+} e^{2jkz_0}$$

lo que nos permite reescribir dicha expresión de la forma<sup>37</sup>

$$\Gamma(z) = \Gamma(z_0) e^{2jk(z-z_0)} \quad (4.169)$$

Esta última expresión nos permite “trasladar” el valor  $\Gamma_0$ , obtenido para el coeficiente de reflexión en una superficie situada en el plano  $z = z_0$ , a cualquier punto del espacio donde nos interese hallar la relación entre los campos eléctricos de las ondas progresiva y regresiva.

---

<sup>37</sup> Una expresión de este tipo debe ser necesariamente cierta mientras no se produzcan variaciones en el medio. Nos dice que el valor del coeficiente de reflexión generalizado no puede cambiar en amplitud, sino solamente en su fase, dentro de un mismo medio. Las variaciones en amplitud se deben a cambios de medio.

### Relación entre impedancia de onda y coeficiente de reflexión

Una vez definido el coeficiente de reflexión generalizado, sólo nos queda determinar la relación existente entre éste y la impedancia de onda generalizada. Aplicando la definición (4.163) para la impedancia de onda al caso considerado en el que tenemos una componente progresiva y una componente regresiva obtenemos la expresión

$$Z(z) = \frac{E^+(z) + E^-(z)}{H^+(z) + H^-(z)} \quad (4.170)$$

en la que la relación entre los campos  $E^+(z)$  y  $E^-(z)$  se obtiene directamente a partir del coeficiente de reflexión generalizado. La relación entre los campos magnéticos,  $H^+(z)$  y  $H^-(z)$ , asociados, respectivamente, a las ondas progresiva y regresiva se obtiene como sigue

$$H^- = \frac{1}{\eta}(-\hat{z}) \times E^- = -\frac{1}{\eta} \hat{z} \times (\Gamma E^+) = -\Gamma H^+$$

Por consiguiente, podemos expresar (4.171) de la forma

$$\begin{aligned} Z(z) &= \frac{E^+(z) + \Gamma(z)E^+(z)}{H^+(z) - \Gamma(z)H^+(z)} = \frac{E^+(z)}{H^+(z)} \frac{1 + \Gamma(z)}{1 - \Gamma(z)} \\ &= \eta \frac{1 + \Gamma(z)}{1 - \Gamma(z)} \end{aligned} \quad (4.171)$$

ya que  $E^+(z)$  y  $H^+(z)$  corresponden a una onda plana uniforme que viaja en la dirección positiva del eje  $Z$ .

Esta última expresión, junto con (4.169), nos permite conocer la impedancia de onda en todos los puntos de un medio cualquiera si conocemos el valor del coeficiente de reflexión en un punto concreto del medio en cuestión.

La relación inversa correspondiente, obtenida despejando  $\Gamma(z)$  en (4.171), es

$$\Gamma(z) = \frac{Z(z) - \eta}{Z(z) + \eta} \quad (4.172)$$

Aunque en apariencia las expresiones (4.171) y (4.172) representan las dos caras de la misma moneda, existe una diferencia fundamental entre ambas. Por un lado, como hemos dicho anteriormente,  $\Gamma(z)$  es una función continua dentro de un mismo medio. En el paso de un medio a otro, en cambio, presenta discontinuidades en la superficies de separación. La



impedancia de onda generalizada  $Z(z)$ , por el contrario, *es una función continua siempre*. Para ponerlo de manifiesto, volvamos a la definición (4.163) para ondas planas. La razón de esta continuidad hay que buscarla en la continuidad de las componentes tangenciales del campo. Si recordamos las diversas situaciones estudiadas hasta ahora, podemos comprobar que en todos los casos el punto de partida eran las condiciones de contorno para las componentes tangenciales, que debían ser continuas en la transición entre dos medios dieléctricos<sup>38</sup> (obviamente, debían serlo también dentro de un mismo medio). Desde este punto de vista, el papel que desempeña la impedancia de onda generalizada consiste en condensar las condiciones de contorno en una única expresión, de aplicación general. En este sentido, podemos decir que la presente sección constituye un compendio o culminación de todo lo visto en las secciones de la 4.1 a la 4.3.

Una vez obtenidas las expresiones (4.171) y (4.172), veamos a continuación cómo podemos aplicarlas a la resolución de una situación concreta. Para empezar, digamos que la clave reside en lo que acabamos de comentar en el párrafo precedente: dentro de un mismo medio, la continuidad de la función  $\Gamma(z)$  nos permite calcular en todo momento la relación entre las ondas progresiva y regresiva en el medio en cuestión; en las superficies de separación entre dos medios distintos, la continuidad de la función  $Z(z)$  nos permite superar las discontinuidades que aparecen en  $\Gamma(z)$ . De este modo, somos capaces de “saltar” sucesivamente de un medio al siguiente.

Para ilustrar el procedimiento, volvamos al ejemplo planteado al principio de esta sección. Según la figura 4.29b, en la región III tenemos una onda plana uniforme. En esta región, pues, la impedancia de onda coincide con la impedancia intrínseca del medio, según hemos visto en el ejemplo 4.9a. Tenemos, por lo tanto

$$Z(z) = \eta_3 \quad z > 0$$

Según (4.172) el coeficiente de reflexión en la superficie del medio, situada en  $z = 0$ , es

$$\Gamma_{II}(0) = \frac{Z(0) - \eta_2}{Z(0) + \eta_2} = \frac{\eta_3 - \eta_2}{\eta_3 + \eta_2} \equiv \rho_{23}$$

donde lo hemos denominado de este modo debido a la coincidencia que presenta con la expresión (4.43), obtenida en la sección 4.3.1. Esta coincidencia no es casual en modo alguno, ya que la situación en la superficie  $z = 0$  es idéntica a la planteada en la figura 4.12. Empleando, a continuación, las expresiones (4.169) y (4.171), obtenemos, en la región  $-d < z < 0$

---

<sup>38</sup> Por otro lado, la introducción de la impedancia intrínseca compleja nos permite extender esta continuidad al caso en que un medio (o ambos a la vez) sea un conductor.

$$Z(z) = \eta_2 \frac{1 + \Gamma_{II}(z)}{1 - \Gamma_{II}(z)} = \frac{1 + \rho_{23} e^{2jk_2 z}}{1 - \rho_{23} e^{2jk_2 z}}$$

Multiplicando numerador y denominador por  $e^{-jk_2 z}$  y descomponiendo los términos exponenciales en senos y cosenos, resulta la expresión

$$Z(z) = \eta_2 \frac{\eta_3 \cos k_2 z - j\eta_2 \sin k_2 z}{\eta_2 \cos k_2 z - j\eta_3 \sin k_2 z} = \eta_2 \frac{\eta_3 - j\eta_2 \operatorname{tg} k_2 z}{\eta_2 - j\eta_3 \operatorname{tg} k_2 z} \quad -d < z < 0$$

para la impedancia de onda en la región II. En este caso, la coincidencia se produce con la expresión (4.166), obtenida para la onda estacionaria mixta del ejemplo 4.9c. Este resultado no debe sorprendernos, ya que la expresión utilizada para el coeficiente de reflexión es la misma en ambos casos.

Pasemos ahora a la segunda superficie, situada en  $z = -d$ . El valor que toma la impedancia de onda en esta superficie, según la expresión anterior es

$$Z(-d) = \eta_2 \frac{\eta_3 + j\eta_2 \operatorname{tg} k_2 d}{\eta_2 + j\eta_3 \operatorname{tg} k_2 d}$$

El coeficiente de reflexión correspondiente se obtiene utilizando de nuevo la expresión (4.172)

$$\Gamma_I(-d) = \frac{Z(-d) - \eta_1}{Z(-d) + \eta_1} = \frac{\eta_2(\eta_3 + j\eta_2 \operatorname{tg} k_2 d) - \eta_1(\eta_2 + j\eta_3 \operatorname{tg} k_2 d)}{\eta_2(\eta_3 + j\eta_2 \operatorname{tg} k_2 d) + \eta_1(\eta_2 + j\eta_3 \operatorname{tg} k_2 d)} \quad (4.173)$$

Conviene expresar, mediante el subíndice correspondiente (I, II o III) la región a la que referimos el coeficiente de reflexión, ya que, como hemos dicho anteriormente, la función  $\Gamma(z)$  es discontinua en los puntos en los que se produce un cambio de medio.

Finalmente, utilizando otra vez las expresiones (4.169) y (4.171), obtendríamos la expresión para la impedancia de onda en la región I. En los sistemas en los que aparecen más de tres capas, debe repetirse este proceso de forma iterativa en las diversas capas, empezando siempre por la última. Si ésta es un conductor perfecto, deberemos tomar  $Z_{\text{cond}}(z) = 0$  como valor de partida.

#### **Ejemplo 4.10:** Recubrimientos antirreflectantes

Una aplicación típica de los sistemas de multicapas dieléctricas se encuentra en la fabricación de recubrimientos antirreflectantes para superficies ópticas. Una capa antirreflectante presenta un coeficiente de reflexión nulo para la incidencia de

ondas planas a una cierta frecuencia. El caso más sencillo es un sistema de tres capas como el que acabamos de analizar, en el que la capa intermedia (la capa II) se introduce a modo de recubrimiento para evitar la reflexión que se produciría si las capas I y II estuviesen en contacto directo. En este caso, *existen dos situaciones distintas para las que se cumple la condición de reflexión nula*,  $\Gamma_1(-d) = 0$ , las cuales se obtienen a partir de la expresión (4.173) (es preferible, sin embargo, multiplicar previamente numerador y denominador por  $\cos k_2 d$ ). En la primera, la condición de reflexión nula se obtiene cuando se verifica

$$\eta_3 = \eta_1, \quad d = m \frac{\lambda_2}{2}$$

con  $m$  entero (la obtención de este resultado aparece propuesta como ejercicio al final del capítulo). Sin embargo, un sistema de estas características no es viable como recubrimiento antirreflectante. En un sistema típico,  $\eta_3$  representa el medio sobre el que se aplica el recubrimiento, mientras que  $\eta_1$  será, mayormente, el aire o un gas, o bien una solución líquida, por lo que tendrán valores distintos. Por fortuna, en la segunda situación de reflexión nula, se verifica, simultáneamente

$$\eta_2 = \sqrt{\eta_1 \eta_3}, \quad d = (2m + 1) \frac{\lambda_2}{4}$$

(donde  $m$  puede ser un número entero cualquiera), lo que permite que pueda ser aplicada como recubrimiento antirreflectante.

Del resultado anterior se deduce que un recubrimiento es totalmente antirreflectante únicamente para una determinada longitud de onda. En general, el coeficiente de reflexión generalizado es una función que depende de la longitud de onda empleada (ver, por ejemplo, la expresión (4.173), aplicable a un recubrimiento de una capa). Si se trabaja con ondas no monocromáticas, es necesario emplear recubrimientos de más de una capa. Un procedimiento empleado habitualmente, aunque su justificación exigiría un análisis detallado, consiste en añadir al conjunto capas de grosor  $\lambda/2$  para la longitud de onda óptima. Cada una de estas capas aumenta el orden de la función  $\Gamma(\lambda)$  y hace que el nulo sea más pronunciado en la longitud de onda de interés. De este modo se consigue una respuesta  $\Gamma(\lambda)$  tanto más plana cuanto mayor es el número de capas introducidas. En la figura 4.30 aparece la función correspondiente a sistema típico de cuatro capas.

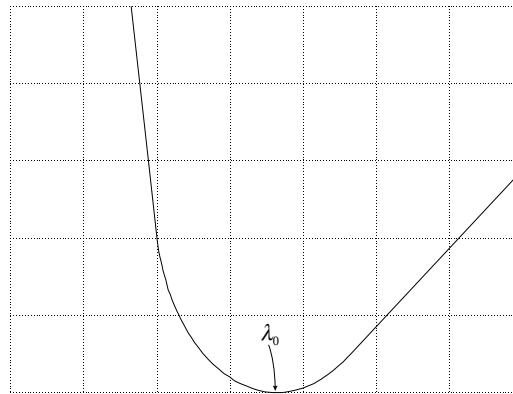


Fig. 4.30 Respuesta  $\Gamma(\lambda)$  para un recubrimiento típico de dos capas

#### PROBLEMAS - CAPÍTULO 4

1. Una onda plana que se propaga en el vacío tiene su campo eléctrico asociado en la forma:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_0 (\hat{x} + j\hat{y}) e^{-jk_0 z}$$

- Escriba la dirección de propagación, el tipo de polarización y su sentido de giro.
- Si la amplitud es  $E_0 = 1$  V/m calcule la potencia media transportada por la onda.

La onda incide sobre un plano conductor perfecto, situado en los puntos  $x=z$  (Fig. 1).

- Calcule el fasor del campo reflejado. ¿Qué tipo de polarización tiene?
- Escriba la expresión del campo total existente en todo el espacio.
- Calcule el vector medio de Poynting y justifique ese resultado.
- En un plano paralelo a la superficie del conductor y a una distancia de 1 m la componente  $y$  del campo total se cancela. Sabiendo que esa es la distancia mínima a la que esto ocurre, ¿cuál es la frecuencia de la onda?

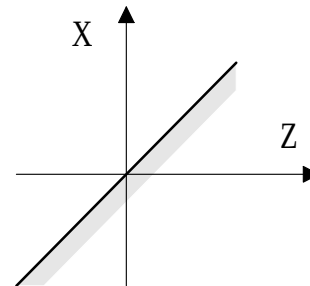


Fig. 1

2. Calcule los coeficientes de reflexión, en los casos de polarización paralela y perpendicular al plano de incidencia, para una onda plana uniforme que incide desde el aire en agua ( $\epsilon_r=81$ ) y en parafina ( $\epsilon_r=2$ ). Dibuje en una gráfica los resultados obtenidos.

3. Demuestre que cuando una onda plana con polarización paralela incide con el ángulo de Brewster sobre una lámina plano-paralela de cierto grosor no se produce reflexión en ninguna de las dos superficies.

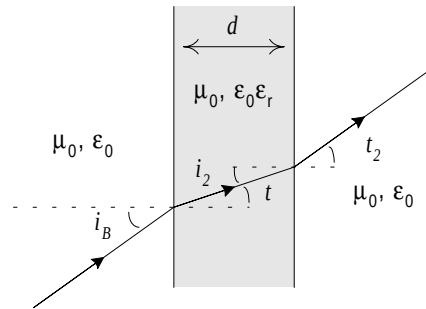


Fig. 2

4. Una onda plana uniforme de frecuencia  $f = 150$  MHz cuyo fasor campo eléctrico se escribe en la forma:

$$\vec{E}_i(\vec{r}) = E_{0i} \left[ 2(2\hat{x} - \hat{z}) + j\frac{5\sqrt{5}}{2}\hat{y} \right] \exp(-j\vec{k}_i \cdot \vec{r})$$

incide oblicuamente desde un medio dieléctrico perfecto no magnético con índice de refracción  $n_1 = 2$  sobre el espacio vacío ( $n_2 = 1$ ), tal como se muestra en la figura 3.

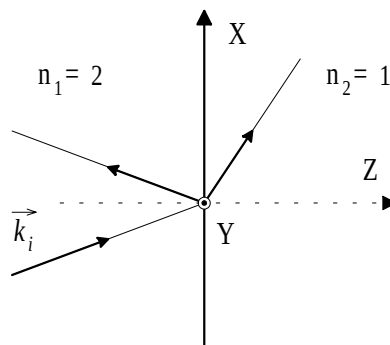


Fig. 3

- Obtenga el valor de los ángulos de incidencia y de refracción.
- Escriba las expresiones de los vectores de onda de las tres ondas: incidente, reflejada y transmitida.
- Identifique el tipo de polarización de la onda incidente.
- Calcule el ángulo de Brewster para una onda plana que incide desde el dieléctrico sobre el vacío.
- Calcule los coeficientes de reflexión y de transmisión para esta situación.

- f) Obtenga el fasor campo eléctrico de la onda transmitida.
- g) Identifique el tipo de polarización de las ondas reflejada y transmitida.
- h) Calcule el valor del ángulo crítico para este problema.

5. Se ha medido el coeficiente de reflexión para una onda plana con polarización lineal que incide desde un medio dieléctrico en la superficie de separación con el aire, para diferentes ángulos de incidencia. Los resultados obtenidos se representan en las figura 4.

A la vista de la forma de esas gráficas conteste a las siguientes cuestiones:

- a) ¿Cuál es la orientación del campo eléctrico incidente?
- b) Explique la forma de las gráficas en los tres intervalos de ángulos que se pueden distinguir:  $[0^\circ - 35,26^\circ]$ ,  $[35,26^\circ - 45^\circ]$  y  $[45^\circ - 90^\circ]$ .
- c) ¿Cuál es el índice de refracción del dieléctrico?
- d) Calcule el valor del ángulo de incidencia para el que el coeficiente de reflexión tiene una fase de  $-\pi/2$  rad.

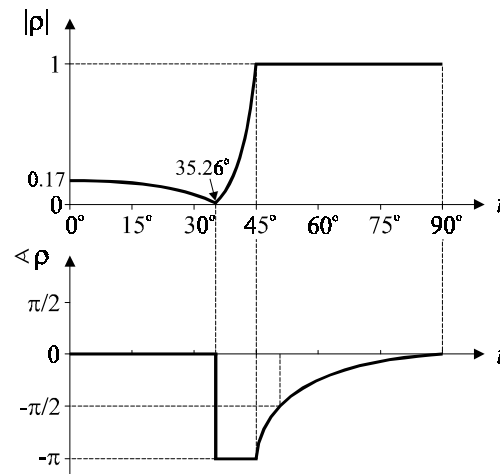


Fig. 4

6. Una onda electromagnética, con polarización lineal y perpendicular al plano de incidencia, de frecuencia  $f = 300$  MHz, viaja por un medio dieléctrico cuyo índice de refracción es  $n = 1,45$ , e incide sobre la superficie de separación con el aire. Al medir el campo eléctrico en el aire, en puntos cercanos a la superficie de separación, se comprueba que su amplitud se atenúa en la forma  $\exp(-6,3z)$ .

- a) ¿Con qué ángulo respecto a la normal a la superficie dieléctrico-aire está incidiendo la onda?
- b) Si la amplitud de la onda incidente fuese de 10 mV/m, ¿cuál sería la densidad de potencia reflejada hacia el dieléctrico?, ¿y la transmitida hacia el aire?
- c) Escriba la expresión del campo eléctrico total en el dieléctrico en función del coeficiente de reflexión (no es necesario que calcule éste explícitamente).

- d) ¿Se forman ondas estacionarias en el dieléctrico? ¿A qué distancia mínima podemos encontrar dos puntos en el dieléctrico en los que el fasor de campo eléctrico es nulo?, ¿en qué dirección debe medirse esa distancia mínima?

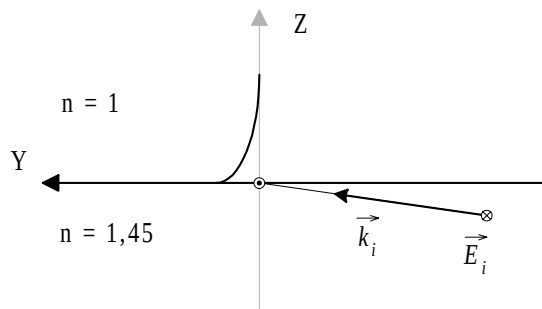


Fig. 5

7. Una onda plana uniforme polarizada elípticamente incide desde el aire sobre un medio dieléctrico de índice de refracción  $n$  (Fig.6). El fasor campo eléctrico de la onda incidente puede escribirse en la forma:

$$\vec{E}_i(\vec{r}) = C(\hat{e}_{\perp i} + p e^{j\Delta\varphi} \hat{e}_{\parallel i}) e^{-j\vec{k}_i \cdot \vec{r}}$$

y se comprueba que la onda reflejada tiene polarización lineal, y la onda transmitida polarización circular y sentido de giro a derechas (viendo alejarse la onda). Con esa información conteste a las siguientes cuestiones:

- Obtenga las expresiones de  $p$  y de  $\Delta\varphi$  en función de  $n$ .
- Calcule la orientación de los ejes de la elipse de polarización de la onda incidente respecto a los ejes en los que se expresa la onda ( $\perp$  y  $\parallel$ ).
- Sabiendo que la relación axial de la elipse de polarización de la onda incidente es  $R=2$ , calcule el valor del índice de refracción del dieléctrico.

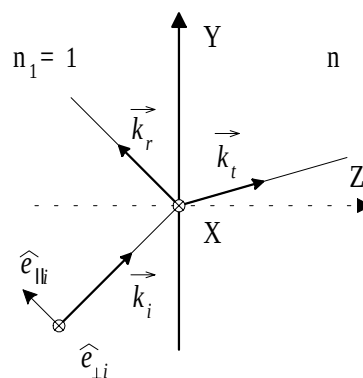


Fig. 6

8. Una onda plana uniforme incide con cierto ángulo sobre un diedro de paredes conductoras, tal como se muestra en la figura 7.

- Escriba la expresión del vector de onda incidente.
- Escriba la expresión del campo eléctrico de la onda incidente.
- ¿Qué otras ondas son necesarias para describir formalmente la situación? Escriba sus vectores de onda y los fasores de sus campos eléctricos, en función de la amplitud de la onda incidente.
- Obtenga las direcciones en que aparecen ondas estacionarias.
- ¿Cómo cambiará la dirección de la radiación emergente del diedro si recubrimos la pared interna del diedro situada en  $y=0$  con una lámina dieléctrica de grosor  $d$  e índice de refracción  $n$ ?

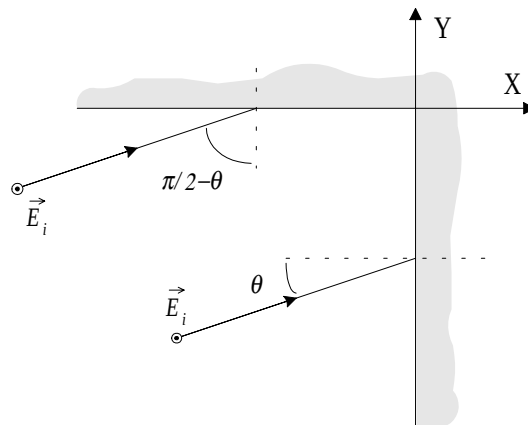


Fig. 7

9. Una onda plana incide normalmente sobre una lámina dieléctrica de índice de refracción  $n$  en la forma en que se muestra en la figura 8.

- Calcule el mínimo grosor  $d$  (distinto de cero) para el que no se produce reflexión hacia el aire.
- Si la relación de onda estacionaria en el dieléctrico toma el valor 2 ¿cuál es el índice de refracción de la lámina?

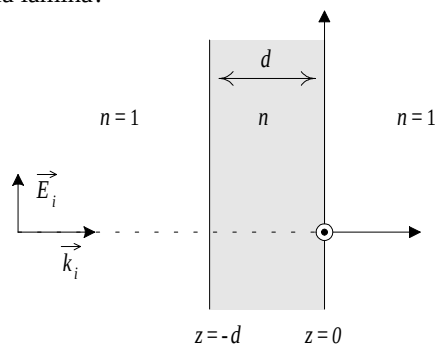


Fig. 8