

$$\vec{M} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{m}}{\Delta v} = \frac{d \vec{m}}{d v} \quad (\text{A/m}) \quad (2.29)$$

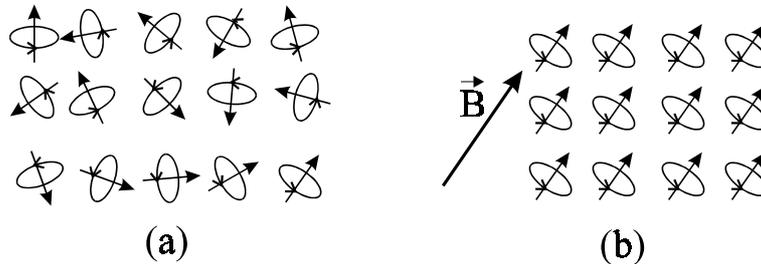


Figura 2.15 Ejemplo de magnetización

Ejemplo 2.13: Efecto de los materiales magnéticos sobre el campo creado por una bobina.

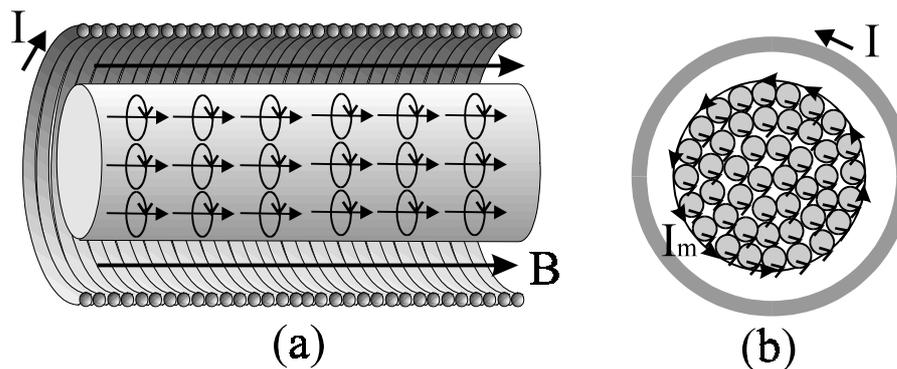


Fig. 2.16

Para entender cómo afecta la magnetización vamos a considerar los efectos de un material magnético dentro de una bobina. En la figura 2.16a vemos cómo el campo en el interior de la bobina magnetiza el material, orientando las espiras en una misma dirección. Si hacemos un corte transversal (Fig. 2.16b) vemos cómo en el interior del material las corrientes en las espiras se anulan en el punto de contacto con la vecina. Esto no ocurre con las espiras situadas en la superficie del material, ya que éstas tendrán un lado que coincidirá con la superficie del material y no estará contrarrestada. Si consideramos la aportación de todas las espiras que están en la superficie el resultado será la aparición de una densidad de corriente en la superficie

del material a la que llamaremos de magnetización I_m . Esta densidad de corriente va en la misma dirección que las corrientes de la bobina I , con lo que en este ejemplo el campo magnético creado por el material se suma al campo creado por la bobina.

La expresión que nos da las densidades de corriente de magnetización superficial y volúmica ya vistas en el capítulo anterior son:

$$\vec{J}_{SM} = \vec{M} \times \hat{n} \quad \vec{J}_M = \nabla \times \vec{M} \quad (2.30)$$

donde nuevamente \hat{n} es un vector unitario normal a la superficie del material dirigido hacia el exterior. El significado de estas expresiones lo vemos en la figura 2.17. En el primer caso, ya vimos que las espiras inducen corrientes superficiales, sin embargo, estas corrientes aparecerán si el vector magnetización es perpendicular a \hat{n} . Como muestra la figura, en la base del cilindro ambos vectores son paralelos con lo que la densidad de corriente superficial debe ser nula y, efectivamente, la disposición de las espiras muestra que no hay una contribución neta. De esta manera vemos que \vec{M} y \hat{n} deben estar relacionados por el producto vectorial.

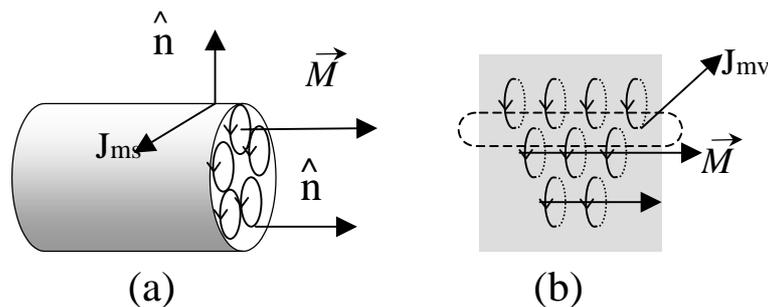


Fig. 2.17 Interpretación de las densidades de corriente de magnetización

Las densidades de corrientes volúmicas aparecen cuando hay algún tipo de no uniformidad del medio o de los campos externos. La figura 2.17b muestra la creación de estas corrientes debido a la no uniformidad del medio. Si nos fijamos en la zona rodeada por una línea de puntos, el número de corrientes elementales que atraviesan la superficie de color gris es mayor en el sentido hacia dentro del papel que hacia a fuera. Como resultado aparecerá una densidad de corriente volúmica que atraviesa la superficie. La figura también muestra que este efecto está relacionado con la no uniformidad de la magnetización (el tamaño del vector aumenta al desplazarnos verticalmente) y en la sección anterior vimos que no uniformidad implica la existencia de un rotacional. En este caso el rotacional de la magnetización es directamente la densidad de corriente de magnetización volúmica.

El siguiente paso es considerar el efecto de los materiales magnéticos sobre los campos. Para ello, debemos introducir las densidades de corriente de magnetización en las ecuaciones donde aparezcan densidades de corriente, es decir, en Ampère-Maxwell. A parte de esta densidad de corriente, debemos considerar otras dos posibles contribuciones: la densidad de corriente libre y la densidad de corriente dipolar. La primera corresponde al movimiento de los electrones libres debido a la acción de un campo externo y la indicaremos por \vec{J}_f . La segunda está relacionada con la variación temporal de la posición de las cargas ligadas, es decir, las oscilaciones de los dipolos, y vendrá dada por:

$$\vec{J}_b = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

Introduciendo todas estas contribuciones para la densidad de corriente en la ecuación de Ampère-Maxwell y utilizando el procedimiento seguido en el capítulo anterior, el resultado es

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_f + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (2.3.1)$$

donde sólo aparecen de forma explícita las corrientes libres. \vec{H} es la intensidad de campo magnético o simplemente campo magnético y viene definido por

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad (A/m)$$

aunque la forma habitual de encontrarlo escrito es

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \quad (2.32)$$

La ecuación (2.3.1) constituye la ley de Ampère-Maxwell en medios materiales. Su principal característica es la independencia respecto de las características magnéticas del material, gracias a la introducción del campo \vec{H} , y tan sólo dependerá de las corrientes libres.

Al igual que en dieléctricos, podemos desarrollar en serie de Taylor la dependencia de \vec{M} respecto de \vec{H} , dependencia que para medios lineales isótropos y homogéneos se reduce a

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} \quad (2.3.3)$$

que corresponde al primer término del desarrollo de Taylor, donde χ_m es el coeficiente susceptibilidad magnética. Introduciendo (2.33) en la ecuación (2.32) obtenemos

$$\vec{B} = \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H} = \mu_0\mu_r\vec{H} = \mu\vec{H} \quad (2.34)$$

donde de forma similar a los dieléctricos se define la permeabilidad magnética relativa μ_r y la permeabilidad del medio $\mu = \mu_r\mu_0$. Estos parámetros, junto con χ_m , caracterizan las propiedades magnéticas del medio.

Nuevamente, en medios lineales isótropos y homogéneos, la presencia de medios materiales puede ser tratada simplemente substituyendo en las ecuaciones μ_0 por μ . En el ejemplo 2.13 se vio que el campo magnético en una bobina con un medio magnético aumentaba debido a la aparición de corrientes de magnetización. Por otro lado, el campo magnético de una bobina puede obtenerse a partir de la ley de Ampère para medios materiales como $B = \mu n I$. Este resultado permite una nueva interpretación: el campo aumenta al aumentar la permeabilidad del medio.

Ejemplo 2.14: *En un medio magnético lineal isótropo y homogéneo de permeabilidad relativa μ_r , tenemos un flujo de densidad de corriente libre $\vec{J}_v = K / \rho \hat{z}$ (A/m^2). Encontrar la corriente de magnetización inducida.*

En este ejercicio tenemos una densidad de corriente volúmica que inducirá corrientes de magnetización. Al no considerar los límites del medio y no haber superficies no podemos tener densidades de corrientes superficiales. La densidad de corriente de magnetización vendrá dada por:

$$\vec{J}_M = \nabla \times \vec{M}$$

con lo que deberemos encontrar la expresión para \vec{M} . Procediendo como en el ejemplo 2.7 tenemos:

$$\left. \begin{array}{l} \vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) \\ \vec{B} = \mu_0\mu_r\vec{H} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{M} = \vec{H}(\mu_r - 1)$$

con lo que deberemos encontrar \vec{H} aplicando Ampère

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_f$$

Nuestro problema tiene simetría cilíndrica; luego calcularemos las corrientes que atraviesan una superficie circular de radio ρ

$$I_f = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_0^\rho \int_0^{2\pi} \frac{K}{\rho} \rho d\rho d\varphi = 2\pi \rho K$$

Por simetría, nuestro campo \vec{H} debe tener una única componente en la dirección de la φ y además debe ser constante por lo que la circulación queda:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_\varphi 2\pi \rho$$

Igualando las dos ecuaciones, el campo magnético obtenido es $\vec{H} = K\hat{\varphi}$, con lo cual la magnetización será

$$\vec{M} = K(\mu_r - 1)\hat{\varphi}.$$

Para terminar falta calcular el rotacional de la magnetización que en coordenadas cilíndricas es:

$$\vec{J}_{m_V} = \nabla \times \vec{M} = \frac{1}{\rho} \begin{vmatrix} \hat{\rho} & \rho\hat{\varphi} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial z} \\ M_\rho & \rho M_\varphi & M_z \end{vmatrix} = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} (\rho M_\varphi) \right] \hat{z} = \frac{1}{\rho} K(\mu_r - 1) \hat{z}$$

Este ejemplo muestra cómo en un caso en que tenemos un medio homogéneo pueden aparecer unas corrientes de magnetización por el simple hecho de tener una densidad de corriente libre. De forma similar, una densidad de carga libre puede generar cargas ligadas, tal y como se vio en el ejemplo 1.25 del capítulo anterior.

2.3.4 Ecuaciones fundamentales del electromagnetismo en medios materiales

En las 2.3.2 y 2.3.3 hemos obtenido las ecuaciones de Gauss para el campo eléctrico y la de Ampère-Maxwell en presencia de medios materiales. Las otras ecuaciones, Gauss para el campo magnético y Faraday, serán válidas tanto en presencia de medios materiales como en el vacío, ya que no aparecen en su expresión cargas ni corrientes que pudieran ser afectadas por las características del medio. Por lo tanto las ecuaciones de Maxwell teniendo en cuenta la presencia de medios materiales serán:

forma integral	forma diferencial
$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q$	$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$
$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$	$\nabla \cdot \vec{B} = 0$
$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$	$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_f + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$	$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

donde en ninguna de ellas es necesario tener en cuenta las cargas y las corrientes que forman la materia. A estas ecuaciones deberían añadirse las ecuaciones

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \qquad \vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

denominadas *relaciones constitutivas de la materia*, ya que su forma exacta determinará las propiedades electromagnéticas de un determinado medio y es donde aparece la relación existente entre las cargas ligadas y corrientes de magnetización y los campos externos, es decir la respuesta del material. Para medios lineales isótropos y homogéneos las relaciones constitutivas se reducen a

$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \qquad \vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

Donde las características del material vendrá determinadas por ϵ_r y μ_r .

2.4 Condiciones de contorno

En la sección 2.2 hemos deducido las ecuaciones de Maxwell en forma diferencial y en la 2.3 para medios materiales. Indirectamente, en su obtención, hemos asumido que el medio es infinito y que estará caracterizado por una determinada conductividad, una permitividad y una permeabilidad. Sin embargo, en la práctica tendremos cambios de medio con lo cual nuestros campos se verán afectados en las superficies de separación. Las ecuaciones de Maxwell en forma diferencial no describen qué ocurre en las superficies de separación entre medios, ya que relacionan entre sí los campos y sus fuentes en un punto, pero no tienen en cuenta lo que ocurre en otro punto justo a su lado. La información sobre los campos en las superficies de separación la tendremos que buscar en la forma integral de las ecuaciones de Maxwell, ya que éstas sí dan información sobre el comportamiento global en una región determinada. El resultado será unas relaciones entre las distintas componentes de los campos, llamadas condiciones de continuidad, de frontera o, en general, condiciones

de contorno. El proceso que seguiremos a continuación, consiste en tomar cada una de las ecuaciones de Maxwell en forma integral y ver que información se deriva en las superficies de separación entre dos medios o superficies con cargas y corrientes.

2.4.1 Continuidad de los campos eléctricos

La información sobre continuidad de los campos eléctricos aparece en la ecuación de Gauss para el campo eléctrico y la ecuación de Faraday. Empezaremos con la primera de ellas, que en forma integral y para medios materiales se escribe:

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q$$

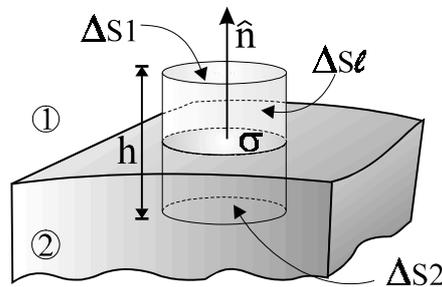


Fig. 2.18 Superficie para el cálculo de Gauss

Para el cálculo del flujo tomaremos un elemento de superficie cilíndrico que atraviese la superficie de separación entre los dos medios (Fig. 2.18). El flujo sobre la superficie cerrada la podemos descomponer en el flujo a través de cada uno de sus lados con lo que tendremos

$$\oint_{\Delta S} \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_{\Delta S_1} \vec{D}_1 \cdot d\vec{S}_1 + \int_{\Delta S_2} \vec{D}_2 \cdot d\vec{S}_2 + \int_{\Delta S_\ell} \vec{D}_\ell \cdot d\vec{S}_\ell$$

donde con el subíndice identificamos el campo o la superficie en cada uno de los medios.

Como estamos interesados en el comportamiento en la superficie de separación, no interesa tener flujo sobre la superficie lateral. Así, tenemos que disminuir la superficie lateral \$\Delta S_\ell\$, con lo que haremos tender a cero la altura del cilindro \$h \rightarrow 0\$, igualando, además, las superficies superior e inferior \$\Delta S_1 = \Delta S_2 = \Delta S\$. Falta el cálculo del flujo para \$\Delta S_1\$ y \$\Delta S_2\$, para ello, tomaremos un vector unitario \$\hat{n}\$ normal a la superficie de separación entre ambos medios y dirigido al medio 1. Entonces, el flujo queda:

$$\begin{aligned}\oint_{\Delta S} \vec{D} \cdot d\vec{S} &= \int_{\Delta S} \vec{D}_1 \cdot \hat{n} dS + \int_{\Delta S} \vec{D}_2 \cdot (-\hat{n}) dS = \\ &= \int_{\Delta S} \hat{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) dS\end{aligned}\quad (2.35)$$

con lo que ya hemos calculado el primer miembro de la ecuación de Gauss. Falta por calcular la carga libre total dentro del volumen. En general será:

$$Q = \int_V \rho dV + \int_{\Delta S} \sigma dS$$

correspondiente a la densidad de carga volúmica y la densidad de carga superficial que pueda haber dentro del cilindro. Al hacer $h \rightarrow 0$ el volumen también tiende a cero, con lo que la contribución a la densidad de carga volúmica se anula y sólo queda la densidad de carga superficial. A partir de aquí, igualando con (2.35), obtenemos

$$\int_{\Delta S} \hat{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) dS = \int_{\Delta S} \sigma dS$$

Esta igualdad debe cumplirse para cualquier superficie por lo que las dos funciones dentro de las integrales deben ser iguales. Así obtenemos la condición de contorno para las componentes normales del vector desplazamiento:

$$\hat{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \sigma \quad (2.36)$$

Para entender esta ecuación debemos pensar que, al multiplicar escalarmente por \hat{n} , sólo sobreviven la componente normal a la superficie de separación de \vec{D} . Así pues, *la diferencia (si existe) entre las componentes normales del vector desplazamiento, en los puntos entre dos medios materiales es debida a una densidad superficial de carga libre.*

Como hemos comentado, la ecuación de Faraday en forma integral nos va a proporcionar más información sobre la continuidad de los campos eléctricos:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

Para ello, como muestra la figura 2.19, aplicaremos esa ley sobre un elemento de circulación que atraviese la superficie. En el cálculo necesitamos definir dos vectores unitarios: \hat{n} , que es normal a la superficie entre medios, tangente al circuito y dirigido al medio 1, y \hat{t} , que es normal al circuito y tangente a la superficie entre medios. Utilizaremos estos dos vectores para indicar cualquier dirección en nuestros cálculos. Entonces, la circulación la podemos descomponer en la integral de línea sobre cada uno de sus lados:

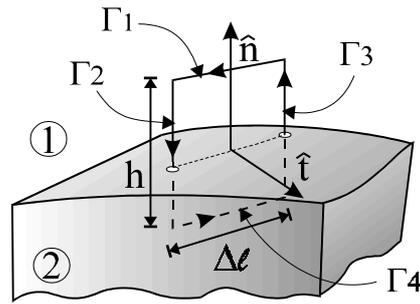


Fig. 2.19 Circuito para el cálculo de Faraday

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{\Gamma_1} \vec{E}_1 \cdot (\hat{t} \times \hat{n}) dl_1 + \int_{\Gamma_2} \vec{E} \cdot (-\hat{n}) dl_2 + \int_{\Gamma_3} \vec{E}_2 \cdot (\hat{n} \times \hat{t}) dl_3 + \int_{\Gamma_4} \vec{E} \cdot \hat{n} dl_4 = - \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{t} dS \quad (2.37)$$

Como estamos interesados en conocer los campos sobre la superficie, haremos tender $h \rightarrow 0$; así, los términos de circulación sobre Γ_2 y Γ_4 podrán ser despreciados y los dos lados restantes se igualan $\Gamma_1 = \Gamma_3 = \Delta l$. Además, la superficie sobre la que calculamos la variación del flujo de campo magnético, $S = h \Delta l$, al tomar $h \rightarrow 0$ la podremos despreciar. Así pues, la ecuación (2.37) en estas condiciones se reduce a:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{\Delta l} \vec{E}_1 \cdot (\hat{t} \times \hat{n}) dl + \int_{\Delta l} \vec{E}_2 \cdot (\hat{n} \times \hat{t}) dl = 0$$

Como esta igualdad debe cumplirse para cualquier valor de Δl , la única solución es que:

$$\vec{E}_1 \cdot (\hat{t} \times \hat{n}) \Delta l - \vec{E}_2 \cdot (\hat{t} \times \hat{n}) \Delta l = 0$$

Un aspecto importante de este resultado, es que al eliminar las integrales esta relación es independiente del circuito de cálculo elegido, con lo que siempre se cumple. Esta ecuación nos relaciona los campos a ambos lados de la superficie de separación, sin embargo, vamos a encontrar una expresión más útil. Si utilizamos la propiedad vectorial

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) \quad (2.38)$$

y después simplificamos, obtenemos la condición de contorno para las componentes tangenciales del campo eléctrico en una forma más compacta:

$$\hat{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = 0 \quad (2.39)$$

Para entender esta ecuación, debemos recordar que, al hacer el producto vectorial, las componentes del campo paralelas a \hat{n} se anulan; luego, la ecuación (2.39) nos indica que *las componentes tangenciales del campo eléctrico a una superficie de separación entre dos medios siempre son continuas (iguales)*.

Ejemplo 2.15: Tenemos dos dieléctricos lineales isótropos y homogéneos con permitividad relativa ϵ_{r1} y ϵ_{r2} , respectivamente. La superficie de separación se encuentra en el plano $y = 0$ con una densidad de carga σ . Encontrar el campo eléctrico sobre la superficie del segundo medio si sabemos que el campo sobre la superficie en el medio 1 es $\vec{E}_1|_S = E_{1x}\hat{x} + E_{1y}\hat{y} + E_{1z}\hat{z}$.

Primero debemos encontrar el vector normal a la superficie, que, como muestra la figura, es $\hat{n} = -\hat{y}$. La primera condición de contorno se aplica sobre el vector desplazamiento, luego, teniendo en cuenta que $\vec{D} = \epsilon_r \epsilon_0 \vec{E}$, tenemos

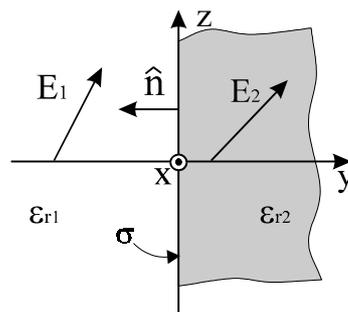


Fig. 2.20

$$-\hat{y} \cdot (\epsilon_{1r} \epsilon_0 \vec{E}_1 - \epsilon_{2r} \epsilon_0 \vec{E}_2) = \epsilon_0 (-\epsilon_{1r} E_{1y} + \epsilon_{2r} E_{2y}) = \sigma$$

donde sólo sobreviven las componentes en la dirección normal y . Aislando la componente y del campo en el medio 2 obtenemos:

$$E_{2y}|_S = \frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_{2r}} + \frac{\epsilon_{1r}}{\epsilon_{2r}} E_{1y}$$

Las componentes x y z las encontraremos aplicando la condición de contorno

$$\hat{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = -\hat{y} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = (E_{1x} - E_{2x})\hat{z} - (E_{1z} - E_{2z})\hat{x} = 0$$

con lo que cada una de las componentes del vector resultante deben ser nulas, así pues

$$E_{1x} = E_{2x}$$

$$E_{1z} = E_{2z}$$

De los resultados anteriores podemos escribir el campo eléctrico en el medio 2 pero en la superficie de separación como:

$$\vec{E}_2|_S = E_{1x}\hat{x} + \left(\frac{\sigma}{\epsilon_0\epsilon_{2r}} - \frac{\epsilon_{1r}}{\epsilon_{2r}} E_{1y} \right) \hat{y} + E_{1z}\hat{z}$$

Ejemplo 2.16: Campo eléctrico sobre la superficie de un conductor perfecto con densidad de carga superficial σ (no confundir con conductividad $\sigma = \infty$)

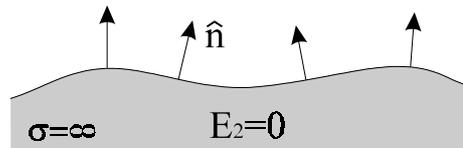


Fig. 2.21

Recordemos que en el interior de un conductor perfecto el campo eléctrico es nulo, con lo que las condiciones de contorno se reducen a

$$\begin{aligned}\vec{n} \times \vec{E}_1 &= 0 \\ \hat{n} \cdot \vec{D}_1 &= \sigma\end{aligned}$$

La primera de estas expresiones muestra que sobre la superficie de un conductor perfecto no tenemos componentes tangenciales, es decir, el campo eléctrico siempre es normal a la superficie de un conductor perfecto. La segunda expresión la podemos escribir como

$$\epsilon \hat{n} \cdot \vec{E}_1 = \sigma$$

Esta expresión muestra que existe una relación biunívoca entre la componente normal del campo eléctrico y la densidad de carga superficial. Estos resultados en conductores perfectos coinciden con los obtenidos en electrostática, que, como ya se comentó en la sección 2.3.1, aquí justificamos para campos variables en el tiempo.

2.4.2 Continuidad de los campos magnéticos

Procederemos como para los campos eléctricos, analizando la información contenida en la ecuación de Gauss para el campo magnético y para la ecuación de Ampère-Maxwell. La primera de ellas es:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

Para ello tomaremos el mismo elemento de superficie de la figura 2.18. Entonces tendremos el flujo como

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{\Delta S_1} \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_1 + \int_{\Delta S_2} \vec{B}_2 \cdot d\vec{S}_2 + \int_{\Delta S_l} \vec{B} \cdot d\vec{S}_l = 0$$

donde si tomamos $h \rightarrow 0$ y hacemos las mismas suposiciones que en la sección 2.4.1, obtenemos

$$\hat{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \quad (2.40)$$

que nos da la condición de contorno para la componente normal de los campos inducción magnética. Esta nos dice que las *componentes campo \vec{B} normales a la superficie de separación entre dos medios del siempre deben ser continuas.*

Por último analizaremos qué ocurre con las componentes tangenciales de los campos magnéticos. Para ello analizaremos la información contenida en la ecuación de Ampère-Maxwell:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S}$$

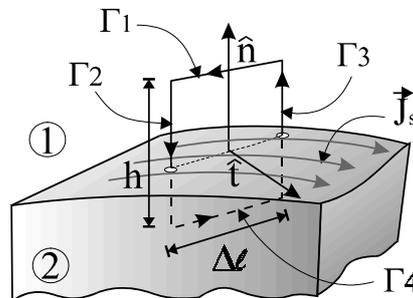


Fig. 2.22 Circuito para el cálculo de Ampère-Maxwell

En el cálculo elegiremos un circuito como el de la figura 2.22 que en general estará atravesado por una densidad de corriente. Al igual que para las componentes tangenciales del campo eléctrico definiremos dos vectores unitarios \hat{n} y \hat{t} que serán respectivamente normal y tangente a la superficie de separación. Entonces la circulación puede escribirse:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{\Gamma_1} \vec{H}_1 \cdot (\hat{t} \times \hat{n}) dl_1 + \int_{\Gamma_2} \vec{H} \cdot (-\hat{n}) dl_2 \\ \int_{\Gamma_3} \vec{H}_2 \cdot (\hat{n} \times \hat{t}) dl_3 + \int_{\Gamma_4} \vec{H} \cdot \hat{n} dl_4$$

Si hacemos tender $h \rightarrow 0$, obtenemos

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{\Delta l} \vec{H}_1 \cdot (\hat{t} \times \hat{n}) dl + \int_{\Delta l} \vec{H}_2 \cdot (\hat{n} \times \hat{t}) dl = \\ = \int_{\Delta l} (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \cdot (\hat{t} \times \hat{n}) dl \quad (2.41)$$

Falta calcular los otros términos. Respecto al término de corriente de desplazamiento al hacer $h \rightarrow 0$ tenemos que la superficie de integración $S = h\Delta l$ se hace cada vez menor, con lo que el resultado final será nulo:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = 0$$

Por lo que respecta a las corrientes, las podemos descomponer en una densidad volúmica más otra superficial:

$$\int_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_S \vec{J}_v \cdot \hat{t} dS + \int_{\Delta l} \vec{J}_s \cdot \hat{t} dl \quad (2.42)$$

donde al disminuir la superficie sólo sobrevive el término de densidad de corriente superficial. Igualando (2.41) y (2.42) obtenemos

$$\int_{\Delta l} (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \cdot (\hat{t} \times \hat{n}) dl = \int_{\Delta l} \vec{J}_s \cdot \hat{t} dl$$

Utilizando la relación vectorial (2.38) y teniendo en cuenta que la igualdad debe cumplirse para cualquier Δl obtenemos la cuarta condición de contorno:

$$\hat{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_s \quad (2.43)$$

En este caso, *las componentes tangenciales del campo magnético en la superficie de separación entre dos medios pueden ser discontinuas siendo la causa (o la consecuencia) la densidad de corriente superficial.*

En las condiciones de contorno es importante tener presente que el vector \hat{n} se ha tomado siempre apuntando al medio 1, o si no la dirección de \vec{J}_s o el signo de la densidad de carga serían erróneos.

Ejemplo 2.17: Un medio magnético con permeabilidad relativa μ_r está separado del vacío por una superficie $y = 0$ por donde pasa una densidad de corriente superficial $\vec{J}_s = J_x \hat{x}$. Hallar el campo magnético en la superficie del material si el campo justo sobre la superficie pero en el vacío es

$$\vec{H}|_S = H_{x1} \hat{x} + H_{y1} \hat{y} + H_{z1} \hat{z}.$$

Definiremos como medio 1 el vacío y como medio 2 el material magnético tal como muestra la figura 2.23. En esta situación el vector normal a la superficie de separación será $\hat{n} = -\hat{y}$ y las condiciones de contorno que deben cumplir serán:

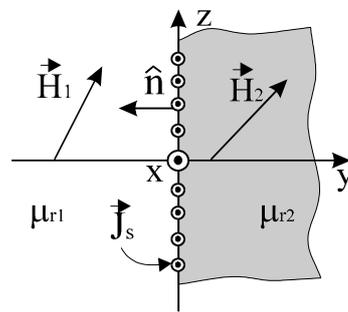


Fig. 2.23

$$\hat{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0$$

$$\hat{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_s$$

De la primera de ellas tenemos:

$$\hat{n} \cdot (\mu_{r1} \mu_0 \vec{H}_1 - \mu_{r2} \mu_0 \vec{H}_2) = 0$$

$$\Rightarrow -H_{y1} + \mu_{r2} H_{y2} = 0 \Rightarrow H_{y2} = \frac{H_{y1}}{\mu_{r2}}$$

De la segunda:

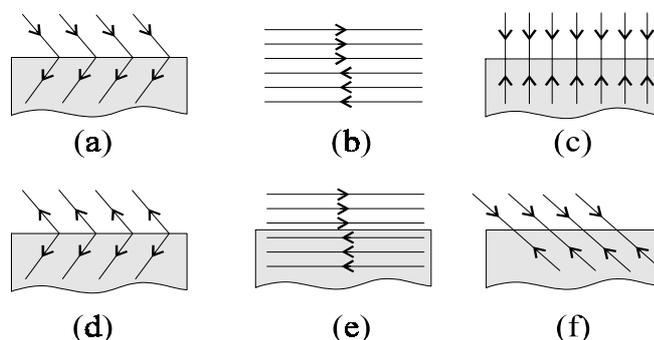
$$-\hat{y} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = J_x \hat{x} \Rightarrow (H_{x1} - H_{x2}) \hat{z} - (H_{z1} - H_{z2}) \hat{x} = J_x \hat{x}$$

$$\text{donde, igualando componentes, obtenemos } \Rightarrow \begin{cases} H_{x2} = H_{x1} \\ H_{z2} = J_x + H_{z1} \end{cases}$$

con lo que el campo magnético justo en la superficie, pero en el medio material, y es:

$$\vec{H}_2|_S = H_{x1} \hat{x} + \frac{H_{y1}}{\mu_{r2}} \hat{y} + (H_{z1} - J_x) \hat{z}$$

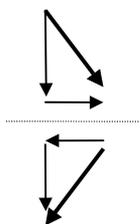
Ejemplo 2.18: Determinar cuál de los siguientes esquemas corresponden a campos eléctricos, magnéticos o ninguno de los dos.



Las líneas con flechas representan líneas de campo, y de distinto color se ha pintado el medio material, mientras que el vacío lo está de blanco. En la superficie de separación pueden haber densidades de carga o corriente superficiales.

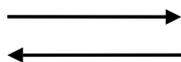
Para saber si un determinado campo vectorial corresponde a un campo eléctrico o magnético éste debe cumplir las ecuaciones de Maxwell. Como no conocemos la expresión matemática correspondiente a los campos del esquema tenemos que utilizar otra herramienta. Las condiciones de contorno se derivan de las ecuaciones de Maxwell con lo que son una alternativa en la situación presente. Las líneas de campo tan sólo dan información de la dirección y no de la magnitud; así pues, nos fijaremos en la primera para determinar que condiciones de contorno pueden cumplirse, y a partir de aquí el tipo de campo.

a)



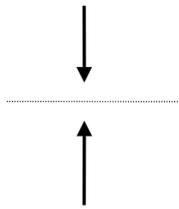
Si descomponemos las líneas de campo en su componentes normal y tangente a la superficie, tal como muestra el esquema, vemos que las componentes tangenciales son discontinuas (apuntan en distinta dirección) mientras las componentes normales son continuas (apuntan en la misma dirección). Estas son las características o condiciones de continuidad de un campo magnético y como ambas condiciones se cumplen simultáneamente podría corresponder a un campo \vec{B} o \vec{H} .

b)



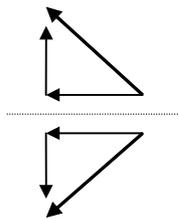
El esquema no muestra una superficie de separación entre las líneas de campo. En cambio, sí aparece una transición abrupta (discontinuidad) de la dirección del campo. Las condiciones de contorno nos dicen que si tenemos discontinuidad de los campos debe haber una superficie de separación con cargas o corriente. Este no es el caso; luego no puede corresponder a un campo eléctrico ni magnético.

c)



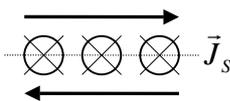
En el tercer esquema tan sólo tenemos componentes normales discontinuas. Las condiciones de contorno para el campo eléctrico permiten la discontinuidad de las componentes normales, que estará asociada a una densidad de carga superficial. Al no tener información sobre las componentes tangenciales, podemos determinar que este caso corresponde a un campo \vec{E} o \vec{D} . En concreto, podría ser el campo creado por una superficie infinita con una densidad de carga superficial negativa y constante.

d)



La descomposición de las líneas de campo muestra que las componentes tangenciales son continuas (mismo sentido) mientras que las componentes normales son discontinuas (sentido contrario). Estas dos características son las condiciones de contorno que debe cumplir los campos eléctricos; luego corresponde a un campo \vec{E} o \vec{D} .

e)

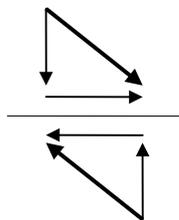


En este caso sólo tenemos componentes tangenciales que son discontinuas. Los campos que permiten la discontinuidad de las componentes tangenciales son los campos magnéticos, debido a una densidad de corriente superficial. Al aplicar la condición de contorno

$$\hat{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_s$$

la densidad de corriente debe ir hacia dentro del papel.

f)



La descomposición en el último caso muestra que ni las componentes tangenciales ni las normales son continuas. De las condiciones de contorno sabemos que las dos componentes de los campos no pueden ser simultáneamente discontinuas; luego el esquema no puede corresponder a un campo electromagnético.

2.5 Energía de los campos electromagnéticos

El gran interés que tiene el estudio de los campos electromagnéticos es debido a una razón fundamental: la capacidad que tienen de transportar energía. Este hecho tiene una gran importancia ya que es el responsable de que la energía del sol llegue a nosotros en forma de campos electromagnéticos, como es la luz, y permita la existencia de vida sobre la Tierra. Ya desde un punto de vista tecnológico, para transmitir información de un punto a otro

necesitamos “escribirla” sobre algún soporte y transportarla. El soporte óptimo es la energía y el medio de transporte más eficaz los campos electromagnéticos. Esto hace que todos los sistemas de comunicación actuales estén basados en ellos. Como veremos en el capítulo 3, el transporte de energía está asociado a la propagación de ondas electromagnéticas. En esta sección veremos qué ocurre con la energía suministrada a los campos electromagnéticos, utilizando criterios de conservación de la energía y las ecuaciones de Maxwell. El proceso en la deducción de las distintas contribuciones energéticas es lo que se conoce como teorema de Poynting.

2.5.1 Potencia aplicada sobre portadores de carga

El primer paso de nuestro análisis energético será estudiar el intercambio energético entre la materia y los campos electromagnéticos. Recordemos que la materia está compuesta de cargas. Así pues, este intercambio estará relacionado con el trabajo que realizarán los campos sobre las cargas o al contrario, las cargas contra los campos.

El trabajo sobre una carga puntual q que se desplaza un $d\vec{r}$ vendrá dado por

$$dW_q = \vec{F} \cdot d\vec{r} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{r}$$

donde vemos que la fuerza que realiza el trabajo sobre las cargas es la fuerza de Lorentz. El trayecto recorrido lo podemos poner en función de la velocidad de la carga como $d\vec{r} = \vec{v} dt$, con lo que el trabajo quedará:

$$dW_q = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} dt = q \vec{E} \cdot \vec{v} dt \quad (2.44)$$

expresión que se ha obtenido teniendo en cuenta que $\vec{v} \times \vec{B}$ y \vec{v} son ortogonales entre sí. El resultado es importante, ya que muestra que *el campo magnético no realiza trabajo sobre las cargas* (o la materia), o sea, que no puede ser utilizado para aumentar la energía de las cargas. El trabajo total dependerá del tiempo que los campos actúen sobre las cargas. Así pues, nos será más cómodo trabajar con potencias. De (2.44) podemos definir la potencia que actúa sobre una carga

$$P_q = \frac{dW_q}{dt} = q \vec{E} \cdot \vec{v}$$

Falta generalizar la expresión para el conjunto del material, para ello consideraremos que el número de cargas por unidad de volumen es N y que todas tienen una velocidad \vec{v} . Entonces podemos definir la potencia realizada por los campos sobre un diferencial de volumen como

$$dP = Nq \vec{E} \cdot \vec{v} dV$$

El movimiento de las cargas será debido a los campos, luego creará una corriente de conducción. Teniendo en cuenta que la densidad de corriente de conducción es $\vec{J}_c = Nq \vec{v}$, podemos definir la potencia realizada por los campos sobre las cargas por unidad de volumen (densidad de potencia sobre las cargas) como

$$\frac{dP}{dV} = \vec{J}_c \cdot \vec{E} \quad W/m^3 \quad (2.45)$$

En el proceso que hemos seguido hemos considerado que los campos suministran energía a la materia; así diremos que los campos disipan energía. Si hiciéramos una analogía con teoría de circuitos, estaríamos en la zona de carga y de hecho (2.45) representa las pérdidas óhmicas en el material. Estaremos en esta situación siempre que las corrientes vayan en la dirección de los campos como son las corrientes de conducción. Cuando la energía pasa de la materia a los campos, diremos que estamos generando campos electromagnéticos, es decir, desde un punto de vista de teoría de circuitos estamos en la zona de generador. En este caso las corrientes (cargas) van en sentido contrario de los campos, con lo que las cargas pierden energía cinética y puede pasar a los campos. La potencia suministrada a los campos será

$$P = - \int_V \vec{J}_g \cdot \vec{E} dV$$

donde el signo negativo simplemente indica que las corrientes y los campos van en sentido contrario, con lo cual generamos campos electromagnéticos.

2.5.2 Principio de conservación de la energía. Teorema de Poynting

“La energía no se crea ni se destruye, sólo se transforma”. Este es uno de los principios básicos de la física y lo aplicaremos al electromagnetismo. El principio de conservación en el caso en que la materia suministre una densidad de potencia a un volumen V , puede ser escrito de forma matemática como

$$- \int_V \vec{J}_g \cdot \vec{E} dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_V U dV + \oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} + \int_V \vec{J}_c \cdot \vec{E} dV \quad (2.46)$$

donde U es la densidad de energía electromagnética y \vec{P} la densidad de flujo de potencia. El término de la izquierda nos está dando la potencia total suministrada por el generador (subíndice g) al volumen y que será invertida en los tres términos de la derecha. El primero de ellos corresponde al aumento de energía electromagnética que experimenta la región (o el

volumen V). El aumento lo expresamos como la derivada temporal y la energía total como la integral de U sobre el volumen. En el segundo término, al integrar \vec{P} obtenemos la potencia total que atraviesa la superficie que encierra el volumen, es decir, la potencia que abandona la región. Por último, tenemos el término que ya conocemos y que incluye las pérdidas óhmicas. Resumiendo, (2.46) nos está diciendo que la potencia suministrada a una región determinada por el material le puede suceder tres cosas: puede aumentar la energía electromagnética presente en la región, puede transformarse en pérdidas óhmicas y el resto de potencia que no contribuye a estas dos es porque abandona el volumen.

El siguiente paso es determinar las expresiones de U y \vec{P} , desarrollo que constituye el teorema de Poynting. Imaginemos que se alcanza una situación de equilibrio en el interior de nuestro volumen, donde unos portadores ceden energía a los campos y otros la capturan en una cierta proporción. En cualquier caso, podemos asumir que la corriente es única. Escribiremos $\vec{J} = \vec{J}_g + \vec{J}_c$, prescindiendo del papel concreto del portador en cada instante, con lo que (2.46) queda

$$-\int_V \vec{J} \cdot \vec{E} dV = \int_V \frac{\partial U}{\partial t} dV + \oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} \quad (2.47)$$

De la ecuación de Ampère-Maxwell podemos aislar \vec{J} como

$$\vec{J} = \nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

por lo que el término de la izquierda en (2.47) queda

$$\begin{aligned} -\int_V \vec{J} \cdot \vec{E} dV &= -\int_V \vec{E} \cdot \left(\nabla \times \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) dV = \int_V \left(\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \nabla \times \vec{H} \right) dV = \\ &= \int_V \left(\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{H} \cdot \nabla \times \vec{E} + \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) \right) dV \end{aligned}$$

donde en la última igualdad se ha utilizado la propiedad vectorial

$$\nabla \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot \nabla \times \vec{a} - \vec{a} \cdot \nabla \times \vec{b}$$

Ya sólo queda utilizar la ley de Faraday para eliminar el rotacional del campo eléctrico y aplicar el teorema de la divergencia en el último término, con lo que obtendremos la expresión final que nos interesa:

$$-\int_V \vec{J} \cdot \vec{E} dV = \int_V \left(\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) dV + \oint_S (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{S} \quad (2.48)$$

Si comparamos esta expresión con (2.47) podremos identificar la expresión de U y \vec{P} , con lo que obtenemos:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

que nos da la variación de densidad volúmica de energía, y la expresión para la densidad de flujo de potencia (o densidad de energía por unidad de tiempo o y superficie)

$$\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H} \quad (W/m^2) \quad (2.49)$$

más comúnmente llamado vector de Poynting.

Vamos a analizar estos resultados, empezando por la variación de energía electromagnética. Si queremos aislar U debemos integrar la ecuación diferencial en derivadas parciales. La integración será posible dependiendo de la expresión de las relaciones constitutivas del medio. Para medios lineales isótropos y homogéneos tenemos

$$\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{E} \cdot \frac{\partial \epsilon \vec{E}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \epsilon |\vec{E}|^2 \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} \right)$$

Siguiendo el mismo proceso para la parte correspondiente a los campos magnéticos, la densidad de energía electromagnética para medios lineales isótropos y homogéneos queda

$$U = \frac{1}{2} \epsilon |\vec{E}|^2 + \frac{1}{2} \mu |\vec{H}|^2 = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} + \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} \quad (J/m^3) \quad (2.50)$$

Este resultado muestra que la densidad de energía almacenada en los campos electromagnéticos la podemos dividir en dos: densidad de energía eléctrica U_e y magnética U_m . La expresión de cada una de estas componentes quedará:

$$U_e = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} \quad U_m = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B}$$

Falta discutir las implicaciones del vector de Poynting. Como comentamos al principio de la sección, desde el punto de vista de las comunicaciones estamos interesados en el transporte de energía. Pues bien, precisamente el vector de Poynting nos indica la energía por unidad de tiempo y de superficie que se propaga y, además, su dirección. Desde el punto

de vista de las telecomunicaciones, éste es el resultado del desarrollo anterior que más interesa.

Ejemplo 2.19: *Los terminales de una batería se encuentran conectados entre sí por un hilo conductor de conductividad σ ($\Omega^{-1}m^{-1}$) (Fig. 2.24a). Lejos del generador podemos considerar un segmento del hilo aproximadamente como un cilindro de radio a inmerso en un campo eléctrico uniforme $\vec{E} = E_0\hat{z}$, con E_0 constante (Fig. 2.24b). Calcular las pérdidas óhmicas y el flujo del vector de Poynting.*

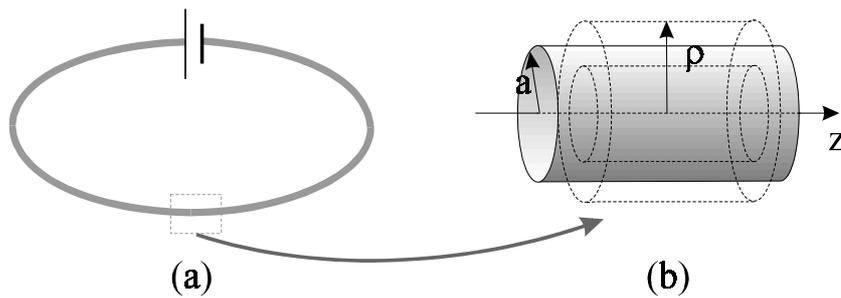


Fig. 2.24

Las pérdidas óhmicas vendrán dadas por $\int_V \vec{J}_C \cdot \vec{E} dV$

Por otro lado, la ley de Ohm nos dice que dentro el conductor $\vec{J}_C = \sigma \vec{E}$, con lo cual, a partir de la expresión del campo y tomando el volumen de integración mostrado en la figura 2.24b, las pérdidas para una longitud l vendrán dadas por

$$\int_V \vec{J}_C \cdot \vec{E} dV = \int_V \sigma E_0^2 dV = \int_{z=0}^l \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\rho=0}^a \sigma E_0^2 \rho d\rho d\varphi dz = \sigma E_0^2 a^2 \pi l$$

Teniendo en cuenta que, al ser los campos constantes, la intensidad la podemos escribir $I = \sigma A E_0$, donde $A = \pi a^2$ es el área de la sección del conductor, que la resistencia es $R = l/\sigma$ obtenemos el resultado familiar de

$$\int_V \vec{J}_C \cdot \vec{E} dV = I^2 R$$

Para calcular el vector de Poynting necesitamos conocer el campo magnético alrededor del cable. Para ello aplicaremos Ampère

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

para $\rho < a$, con lo que obtenemos

$$H_\varphi \cdot 2\pi\rho = \sigma E_0 \cdot \pi\rho^2 \Rightarrow \vec{H} = \frac{\rho}{2} \sigma E_0 \hat{\varphi}$$

y para $\rho > a$

$$H_\varphi \cdot 2\pi\rho = \sigma E_0 \cdot \pi a^2 \Rightarrow \vec{H} = \frac{a^2}{2\rho} \sigma E_0 \hat{\varphi}$$

Ahora ya estamos en disposición de calcular el vector de Poynting para la región en el interior y el exterior del conductor:

$$\rho < a \quad \vec{P} = \vec{E} \times \vec{H} = E_0 \hat{z} \times \frac{\rho}{2} \sigma E_0 \hat{\varphi} = -\frac{\rho}{2} \sigma E_0^2 \hat{\rho}$$

$$\rho > a \quad \vec{P} = \vec{E} \times \vec{H} = E_0 \hat{z} \times \frac{a^2}{2\rho} \sigma E_0 \hat{\varphi} = -\frac{a^2}{2\rho} \sigma E_0^2 \hat{\rho}$$

El signo negativo del vector de Poynting indica que el flujo de potencia es hacia el conductor. Si encontramos cuál es la potencia total que fluye hacia el conductor, deberemos integrar el vector de Poynting sobre las superficies de la figura 2.24b.

$$\text{Para } \rho < a \quad \oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^l -\frac{\sigma E_0^2}{2} \rho^2 dz d\varphi = -\sigma E_0^2 \pi \rho^2 l$$

$$\text{y para } \rho > a \quad \oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} = \int_0^{2\pi} \int_0^l -\frac{\sigma E_0^2}{2} a^2 dz d\varphi = -\sigma E_0^2 \pi a^2 l = -I^2 R$$

Como vemos para $\rho > a$ (fuera del conductor) obtenemos el mismo valor que para las pérdidas óhmicas pero cambiado de signo. Este resultado muestra como la energía electromagnética almacenada en los campos fluye hacia el conductor. Mientras estamos fuera del conductor el flujo es constante (independiente de la distancia entre la superficie de cálculo y el conductor), pero dentro del conductor el flujo disminuye con ρ , ya que parte de la energía pasa de los campos a la materia debido a las pérdidas óhmicas (se disipa en forma de calor). Así, estamos ante un ejemplo de conservación de la energía en que, al estar en un caso estático, no aparece una variación de la energía almacenada en los campos y como estamos fuera del generador el principio de conservación se reduce a

$$\oint_S \vec{P} \cdot d\vec{S} + \int_V \vec{J}_C \cdot \vec{E} dV = 0$$

Vamos a discutir que sucedería en el ejemplo anterior si el hilo estuviera formado con un conductor perfecto. Si nos fijamos en las expresiones del vector de Poynting dentro y fuera del conductor, dependen de σE^2 . Si el conductor es perfecto, es decir $\sigma = \infty$, y el campo eléctrico no es nulo, este resultado implicaría que el flujo de potencia es infinito. Evidentemente, la potencia y, por lo tanto, la energía de ningún sistema puede ser infinita. En consecuencia, si queremos tratar el caso idealizado de conductores perfectos, el campo en el interior del conductor debe ser nulo, resultado que ya se vio en la sección 2.3.1 y que aquí reafirmamos.

2.6 Aproximación estática de las ecuaciones de Maxwell

En el primer capítulo se ha analizado la parte del electromagnetismo conocida como estática. Ésta no considera las variaciones en el tiempo de las fuentes ni de los campos, que es lo mismo que afirmar que estamos suficientemente lejos de cualquier régimen transitorio. La estática no constituye una parte aislada del electromagnetismo, también está descrita por las ecuaciones de Maxwell. En el primer capítulo vimos que la mayoría de los fenómenos estáticos pueden abordarse mediante las ecuaciones de Poisson y de Laplace para los potenciales eléctricos y el potencial vector más unas determinadas condiciones de contorno. Aquí vamos a deducir las ecuaciones para los potenciales a partir de Maxwell, con lo que enlazaremos con el capítulo anterior, demostrando que constituye un régimen particular del electromagnetismo descrito por Maxwell. En esta sección no se resolverán ejemplos ya que en el capítulo primero hay gran cantidad de ellos.

La primera consecuencia de la no dependencia con el tiempo de los campos es que las derivadas temporales en las ecuaciones de Maxwell se anulan, con lo cual las ecuaciones quedan

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= 0 & \nabla \times \vec{H} &= \vec{J} \\ \nabla \cdot \vec{D} &= \rho & \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{D} &= \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} & \vec{B} &= \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \end{aligned}$$

donde además hemos escrito las relaciones constitutivas del medio.

Una vez escritas podemos observar una segunda consecuencia de gran importancia: *las ecuaciones para los campos eléctricos y magnéticos están desacopladas y, por lo tanto, pueden existir por separado dando lugar a la electrostática y la magnetostática.*

En total serán cuatro ecuaciones diferenciales en derivadas parciales para el campo eléctrico y cuatro más para el campo magnético, cuya solución tendrá significado físico si

cumple unas determinadas condiciones de contorno. A continuación analizaremos por separado los campos electrostáticos y los magnetostáticos con un objetivo: reducir el número de ecuaciones que describen los campos aunque sea a costa de aumentar el orden de la derivada.

2.6.1 Electroestática

El sistema de ecuaciones que debemos resolver para encontrar los campos eléctricos, como ya hemos indicado, es:

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{D} &= \rho \\ \vec{D} &= \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}\end{aligned}\tag{2.51}$$

Para resolver este sistema tenemos que conocer la relación entre el campo eléctrico y el vector desplazamiento que vendrá dada por la relación constitutiva del medio. La ecuación de Faraday para electrostática nos dice que el rotacional del campo eléctrico es nulo y de análisis vectorial sabemos que

$$\nabla \times (\nabla \Phi) = 0$$

Es decir, el rotacional del gradiente de una función o campo escalar siempre es nulo. Aplicándolo al campo eléctrico, como su rotacional es nulo, tenemos que siempre puede ser definido como el gradiente de un campo escalar Φ al que llamaremos potencial eléctrico:

$$\vec{E} = -\nabla \Phi\tag{2.52}$$

El significado físico del potencial eléctrico, aunque lo hemos definido desde un punto de vista matemático, es la energía potencial que tiene una carga de valor unidad y positiva en el seno de un campo eléctrico. Este tema es ampliamente tratado en el capítulo anterior. En dinámica, el rotacional del campo eléctrico no es nulo (ec. de Faraday), con lo cual, el campo eléctrico no vendrá dado por (2.52). La expresión del potencial para campos dependientes con el tiempo será hallada en el capítulo 6 dedicado a radiación.

Falta introducir información dada por (2.52) en la ecuación de Gauss, pero para ello necesitaremos conocer la relación constitutiva del medio. Para medios lineales isótropos y homogéneos ésta es $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, con lo que tendremos

$$\nabla \vec{D} = \epsilon \nabla \vec{E} = \epsilon \nabla (-\nabla \Phi) = -\epsilon \nabla^2 \Phi = \rho$$

y de aquí obtenemos la ecuación de Poisson

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (2.53)$$

que en el caso de tener una densidad de carga volúmica nula se reduce a la ecuación de Laplace

$$\nabla^2 \Phi = 0 \quad (2.54)$$

donde $\nabla^2 = \Delta$ es el operador diferencial laplaciana, que se definió en la sección 1.1.8, aplicado sobre un campo escalar.

Una vez encontradas las ecuaciones de Poisson y Laplace, los problemas de electrostática consisten en resolver estas ecuaciones para unas determinadas condiciones de contorno, y una vez encontrado el potencial, aplicando (2.52) determinar los campos eléctricos. Un aspecto importante en la resolución de las ecuaciones de Poisson y Laplace es el teorema de unicidad tratado ampliamente en la sección 1.1.10.

2.6.2 Magnetostática

Las ecuaciones que rigen la magnetostática son

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{H} &= \vec{J} \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{B} &= \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) \end{aligned} \quad (2.55)$$

Con lo que volvemos a tener un total de cuatro ecuaciones en derivadas parciales más la relación constitutiva del medio entre \vec{H} y \vec{B} .

De análisis vectorial sabemos que la divergencia del rotacional de un vector siempre es nula

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0$$

Como la divergencia del campo magnético es siempre nula, podemos afirmar que es el rotacional de otro campo vectorial

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A} \quad (2.56)$$

donde \vec{A} recibe el nombre de potencial vector. A diferencia del potencial eléctrico, el potencial vector no está relacionado con ninguna magnitud física, simplemente es una consecuencia de las propiedades matemáticas de los campos vectoriales que nos facilitará la

resolución. Otra diferencia con respecto al potencial eléctrico es que (2.56) es válida tanto para campos en estática como en dinámica.

Teniendo en cuenta que en medios lineales isotrópicos y homogéneos $\vec{B} = \mu \vec{H}$ e introduciendo (2.56) en la ecuación de Ampère, obtenemos

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu \vec{J} \quad (2.57)$$

donde hemos expresado el doble rotacional como el gradiente de la divergencia menos la laplaciana, que en este caso actúa sobre un vector. Los campos vectoriales quedan determinados una vez se conoce su divergencia y su rotacional. En el caso del potencial vector, el rotacional es el campo inducción magnética, falta por definir su divergencia. Teniendo en cuenta que el potencial vector es un artilugio matemático que nos facilitará el análisis de la magnetostática, podemos elegir arbitrariamente el valor de la divergencia. Elegiremos

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 \quad (2.58)$$

de manera que la ecuación (2.57) se simplificará a

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{J} \quad (2.59)$$

En coordenada cartesianas la laplaciana de un vector es la laplaciana de cada una de sus componentes con lo que (2.59) puede escribirse

$$\begin{aligned} \nabla^2 A_x &= -\mu J_x \\ \nabla^2 A_y &= -\mu J_y \\ \nabla^2 A_z &= -\mu J_z \end{aligned}$$

con lo que formalmente tendremos tres ecuaciones de Poisson que describirán nuestro problema. La resolución de problemas de magnetostática consiste en resolver estas ecuaciones, teniendo en cuenta que el resultado debe cumplir (2.58). En este proceso no hemos conseguido reducir el número de ecuaciones, pero el resultado final es una ecuación, la de Poisson, con la que estamos acostumbrados a trabajar y de la que conocemos su solución.

2.7 Ecuaciones de Maxwell en régimen senoidal permanente

Las ecuaciones de Maxwell son un sistema de ecuaciones acopladas en derivadas parciales. Si las relaciones constitutivas del medio son lineales, también lo serán las

ecuaciones. Esto implica que si las fuentes tienen una dependencia temporal de un tipo determinado, los campos seguirán la misma dependencia. Nosotros impondremos una dependencia de tipo senoidal por las dos razones siguientes:

- Mediante las fuentes (cargas y corrientes) se generan los campos, y si controlamos las fuentes, indirectamente, determinamos los campos; así, realizaremos estas fuentes con la dependencia temporal que nos interese. En muchos casos prácticos la dependencia temporal que nos interesa es senoidal: sistemas de radiodifusión, radioenlaces o comunicación por satélite.
- Los campos con dependencias temporales arbitrarias en el tiempo pueden ser expresados como la superposición de un continuo de campos con dependencia senoidal. De esta manera podemos utilizar técnicas de transformadas de Fourier en la resolución de problemas con dependencia temporal arbitraria.

Cuando las magnitudes que intervienen tienen una dependencia temporal senoidal, diremos que estamos en régimen senoidal permanente (R.S.P).

2.7.1 Fasores y campos instantáneos

Si consideramos la densidad de carga en régimen senoidal permanente la podremos escribir como

$$\rho(\vec{r}, t) = \rho_0(\vec{r}) \cos(\omega t + \theta_\rho(\vec{r}))$$

donde aparece explícitamente la dependencia en t , siendo $\rho_0(\vec{r})$ la amplitud o valor máximo que puede tomar la carga (indicada por el subíndice 0) y que en general dependerá de la posición; la pulsación es $\omega = 2\pi f$, donde f es la frecuencia de oscilación; y $\theta_\rho(\vec{r})$ es una fase que también puede depender de la posición (el subíndice indica que corresponde a la densidad de carga). Esta distribución de cargas creará un campo eléctrico

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_x(\vec{r}, t) \hat{x} + E_y(\vec{r}, t) \hat{y} + E_z(\vec{r}, t) \hat{z}$$

donde cada componente tendrá una forma

$$E_i(\vec{r}, t) = E_{0i}(\vec{r}) \cos(\omega t + \theta_{E_i}(\vec{r}))$$

y de la misma forma podríamos escribir la expresión para los campos magnéticos o las densidades de corriente. Cuando se escribe de forma explícita la dependencia temporal de los campos se llama *campos instantáneos* ya que nos da su valor en cada instante de tiempo.

Desde un punto de vista matemático, las funciones senoidales con diferentes pulsaciones son linealmente independientes; luego, en nuestro caso, como las ecuaciones son lineales, la pulsación debe ser la misma para todas las magnitudes. Esto implica que una vez determinada, es una información de la que no tenemos que preocuparnos. Así pues, nos proponemos definir una magnitud que nos simplifique los cálculos y que tan sólo tenga información sobre la amplitud y fase. Los fasores son una magnitud compleja que contienen esta información y que expresamos como:

$$\rho(\vec{r}) = \rho_0(\vec{r})e^{j\theta_\rho(\vec{r})}$$

donde $j = \sqrt{-1}$ y explícitamente vemos que el fador tan sólo depende de la posición y no del tiempo. Los fasores pueden ser fácilmente relacionados con sus magnitudes instantáneas, simplemente multiplicándolos por un término de fase donde aparece la pulsación y quedándonos con la parte real, es decir

$$\rho(\vec{r}, t) = \Re\{\rho(\vec{r}) \cdot e^{j\omega t}\} = \Re\{\rho_0(\vec{r})e^{j\theta_\rho(\vec{r})} e^{j\omega t}\} = \rho_0(\vec{r})\cos(\omega t + \theta_\rho(\vec{r}))$$

donde se ha utilizado:

$$e^{j\phi} = \cos\phi + j\sin\phi$$

De la misma forma que hemos procedido con la densidad de carga, podemos definir el fador campo eléctrico

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_x(\vec{r})\hat{x} + E_y(\vec{r})\hat{y} + E_z(\vec{r})\hat{z}$$

que para una de sus componentes será

$$E_i(\vec{r}) = E_{0i}(\vec{r})e^{j\theta_{Ei}(\vec{r})}$$

y a partir de él encontrar el campo eléctrico instantáneo

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \mathcal{E}_x(\vec{r}, t)\hat{x} + \mathcal{E}_y(\vec{r}, t)\hat{y} + \mathcal{E}_z(\vec{r}, t)\hat{z}$$

donde cada una de las componentes se habrá encontrado a partir del fador como

$$\mathcal{E}_i(\vec{r}, t) = \Re\{E_{0i}(\vec{r})e^{j\theta_{Ei}(\vec{r})} \cdot e^{j\omega t}\} = E_{0i}(\vec{r})\cos(\omega t + \theta_{Ei}(\vec{r}))$$

Para distinguir y enfatizar la diferencia entre fasores y campos instantáneos ya hemos usado la nomenclatura que frecuentemente se utiliza: con letra normal indicaremos los fasores (E, H, D, B) y con letra caligráfica los campos instantáneos ($\mathcal{E}, \mathcal{H}, \mathcal{D}, \mathcal{B}$).

2.7.2 Ecuaciones de Maxwell en régimen senoidal permanente

Uno de los objetivos de la introducción de la notación fasorial es obtener unas ecuaciones de Maxwell más sencillas haciendo desaparecer las derivadas temporales. Por ejemplo, la derivada temporal del campo magnético la podemos escribir como:

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \Re\{\vec{B}(\vec{r}) \cdot e^{j\omega t}\} = \Re\left\{\frac{\partial}{\partial t} (\vec{B}(\vec{r}) \cdot e^{j\omega t})\right\} = \Re\{j\omega \vec{B}(\vec{r}) \cdot e^{j\omega t}\}$$

y por otro lado

$$\nabla \times \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \nabla \times \Re\{\vec{E}(\vec{r}) \cdot e^{j\omega t}\} = \Re\{e^{j\omega t} \nabla \times \vec{E}(\vec{r})\}$$

con lo cual la ecuación de Faraday la podemos escribir

$$\Re\{e^{j\omega t} \nabla \times \vec{E}(\vec{r})\} = \Re\{-j\omega \vec{B}(\vec{r}) \cdot e^{j\omega t}\}$$

donde si prescindimos de obtener la parte real y simplificamos las exponenciales, obtenemos la ecuación de Faraday en régimen senoidal permanente:

$$\nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = -j\omega \vec{B}(\vec{r}) \quad (2.60a)$$

De la misma manera, el resto de ecuaciones de Maxwell en régimen senoidal permanente son:

$$\nabla \cdot \vec{D}(\vec{r}) = \rho \quad (2.60b)$$

$$\nabla \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0 \quad (2.60c)$$

$$\nabla \times \vec{H}(\vec{r}) = \vec{J}(\vec{r}) + j\omega \vec{D}(\vec{r}) \quad (2.60d)$$

La principal característica de estas ecuaciones es que no aparece la dependencia temporal, que ya sabemos que siempre será armónica, con lo cual, facilita su resolución, ya que tan sólo dependen de las coordenadas espaciales.

Ejemplo 2.20: Determinar en qué condiciones el siguiente fasor constituye un campo eléctrico en el vacío.

$$\vec{E}(\vec{r}) = B \operatorname{sen}\left(\sqrt{k^2 - \beta^2} x\right) e^{-j\beta z} \hat{y}$$

La primera condición que debe cumplir un campo eléctrico es la ecuación de Gauss que para el vacío es:

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0$$

Nuestra expresión del campo tan sólo tiene una componente con lo que la divergencia se reduce a

$$\frac{\partial}{\partial y} E_y = 0$$

que efectivamente es nulo ya que nuestro campo no depende de la coordenada y .

El siguiente paso es aplicar Faraday y Ampere-Maxwell consecutivamente. Si queremos que éste sea efectivamente un campo eléctrico, el resultado final debe ser la misma expresión del campo dada en el enunciado. El fasor campo magnético puede obtenerse aislando de la ecuación de Faraday

$$\begin{aligned} \vec{H}(\vec{r}) &= \frac{\vec{B}(\vec{r})}{\mu_0} = \frac{j}{\omega\mu_0} \nabla \times \vec{E}(\vec{r}) = \frac{j}{\omega\mu_0} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & E_y & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{j}{\omega\mu_0} \left[-\frac{\partial}{\partial z} \hat{x} + \frac{\partial}{\partial x} \hat{z} \right] E_y \end{aligned}$$

cuyo resultado es

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{jB}{\omega\mu_0} \left[j\beta \sin(\sqrt{k^2 - \beta^2} x) \hat{x} + \sqrt{k^2 - \beta^2} \cos(\sqrt{k^2 - \beta^2} x) \hat{z} \right] e^{-j\beta z}$$

Falta encontrar el fasor campo eléctrico aplicando Ampere-Maxwell, que teniendo en cuenta que en el vacío no hay corrientes, puede ser escrito

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= \frac{\vec{D}(\vec{r})}{\epsilon_0} = \frac{-j}{\omega\epsilon_0} \nabla \times \vec{H}(\vec{r}) = \frac{-j}{\omega\epsilon_0} \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & 0 & H_z \end{vmatrix} = \\ &= \frac{-j}{\omega\epsilon_0} \left[\frac{\partial}{\partial z} H_x - \frac{\partial}{\partial x} H_z \right] \hat{y} \end{aligned}$$

donde, introduciendo la expresión para el fasor campo magnético, obtenemos

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{k^2}{\omega^2 \mu_0 \epsilon_0} B \operatorname{sen}\left(\sqrt{k^2 - \beta^2} x\right) e^{-j\beta z} \hat{y}$$

Como ya hemos comentado, para que este resultado sea un fasor campo eléctrico debe coincidir con el enunciado. Esto implica que la condición que debe cumplirse es:

$$k^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0$$

(como veremos en el siguiente capítulo, k es el número de onda)

Ejemplo 2.21: Encontrar los campos instantáneos para el fasor campo magnético encontrados en el ejemplo anterior.

La expresión encontrada para el fasor campo magnético es:

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{B}{\omega \mu_0} \left[-\beta \operatorname{sen}\left(\sqrt{k^2 - \beta^2} x\right) \hat{x} + j \sqrt{k^2 - \beta^2} \cos\left(\sqrt{k^2 - \beta^2} x\right) \hat{z} \right] e^{-j\beta z}$$

En este caso tenemos dos componentes, con lo que operaremos por separado. Para la componente x tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_x(\vec{r}, t) &= \Re\{H_x(\vec{r}) \cdot e^{j\omega t}\} = \Re\left\{ \frac{-B}{\omega \mu_0} \beta \operatorname{sen}\left(\sqrt{k^2 - \beta^2} x\right) e^{-j\beta z} e^{j\omega t} \right\} = \\ &= \frac{-B}{\omega \mu_0} \beta \operatorname{sen}\left(\sqrt{k^2 - \beta^2} x\right) \Re\{e^{j(\omega t - \beta z)}\} = \\ &= \frac{-B\beta}{\omega \mu_0} \operatorname{sen}\left(\sqrt{k^2 - \beta^2} x\right) \cos(\omega t - \beta z) \end{aligned}$$

y para la componente z

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_z(\vec{r}, t) &= \Re\{H_z(\vec{r}) \cdot e^{j\omega t}\} = \Re\left\{ \frac{jB}{\omega \mu_0} \sqrt{k^2 - \beta^2} \cos\left(\sqrt{k^2 - \beta^2} x\right) e^{-j\beta z} e^{j\omega t} \right\} = \\ &= \frac{B}{\omega \mu_0} \sqrt{k^2 - \beta^2} \cos\left(\sqrt{k^2 - \beta^2} x\right) \Re\{j e^{j(\omega t - \beta z)}\} \end{aligned}$$

donde teniendo en cuenta que $j e^{j\theta} = j \cos\theta - \text{sen}\theta$ obtenemos

$$\mathcal{H}_z(\vec{r}, t) = \frac{-B}{\omega\mu_0} \sqrt{k^2 - \beta^2} \cos(\sqrt{k^2 - \beta^2} x) \text{sen}(\omega t - \beta z)$$

con lo que el campo magnético instantáneo se podrá escribir como

$$\vec{\mathcal{H}}(\vec{r}, t) = \mathcal{H}_x(\vec{r}, t) \hat{x} + \mathcal{H}_z(\vec{r}, t) \hat{z}$$

donde tan sólo falta sustituir por las expresiones de las componentes instantáneas. La componente x tiene una dependencia temporal en función del coseno, sin embargo, la componente z depende del seno. Esta diferencia es debida a la fase que se añade a la componente z por estar multiplicada por j . Siempre que ocurra esto diremos que las componentes están en cuadratura.

Normalmente trabajaremos con las ecuaciones de Maxwell en R.S.P., con lo que la magnitud normal de trabajo serán los fasores en vez de los campos instantáneos. Por esta razón es importante conocer la expresión del vector de Poynting y la densidad de energía (que serán magnitudes instantáneas) en función de los fasores.

El vector de Poynting instantáneo queda:

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{P}}(\vec{r}, t) &= \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) \times \vec{\mathcal{H}}(\vec{r}, t) = \Re\{\vec{E} e^{j\omega t}\} \times \Re\{\vec{H} e^{j\omega t}\} = \\ &= \frac{1}{2} (\vec{E} e^{j\omega t} + \vec{E}^* e^{-j\omega t}) \times \frac{1}{2} (\vec{H} e^{j\omega t} + \vec{H}^* e^{-j\omega t}) = \\ &= \frac{1}{4} (\vec{E} \times \vec{H} e^{j2\omega t} + \vec{E} \times \vec{H}^* + \vec{E}^* \times \vec{H} + \vec{E}^* \times \vec{H}^* e^{-j2\omega t}) = \\ &= \frac{1}{2} \Re\{\vec{E} \times \vec{H}^*\} + \frac{1}{2} \Re\{\vec{E} \times \vec{H} e^{j2\omega t}\} \end{aligned} \quad (2.61)$$

donde * indica el complejo conjugado. La primera consecuencia de este resultado es que no podemos escribir el vector de Poynting como la parte real del producto de los fasores campo eléctrico y magnético y la exponencial respecto del tiempo. Esto es debido a que la relación entre el vector de Poynting y los campos no es lineal, con lo cual una variación en los campos no se traduce en el mismo tipo de variación en el vector de Poynting. Esto nos lleva a la segunda consecuencia: la dependencia temporal es distinta a la que presentan los campos. Aparecen dos términos, el primero independiente del tiempo, y el segundo con una pulsación 2ω , mientras que la pulsación de los campos, recordemos, es ω .

Desde el punto de vista de un ingeniero no interesa el flujo de potencia instantáneo a través de una superficie, sino que, más bien, interesa el promedio temporal de potencia o la

potencia efectiva que la atraviesa. Podemos definir el vector de Poynting medio o densidad de flujo de potencia media como la media temporal del vector de Poynting, que matemáticamente escribiremos:

$$\vec{P}_m(\vec{r}) = \langle \vec{\mathcal{P}}(\vec{r}, t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \vec{\mathcal{P}}(\vec{r}, t) dt \quad (2.62)$$

Si introducimos el resultado de (2.61) en (2.62) tenemos que el vector de Poynting medio queda

$$\vec{P}_m(\vec{r}) = \frac{1}{2} \Re \{ \vec{E} \times \vec{H}^* \} \quad (2.63)$$

Este resultado es lógico, ya que la única contribución neta puede estar dada por el primer término en (2.61) y se ve claramente si analizamos los dos términos obtenidos en (2.61) sobre una superficie. En la figura 2.25 vemos cómo el segundo término (al que hemos llamado P_2) irá cambiando de sentido con el tiempo mientras que el primero (P_1) siempre atraviesa la superficie en el mismo sentido, con lo cual, al ser P_2 una función armónica, su media es cero y no contribuirá a la densidad de flujo de potencia media.

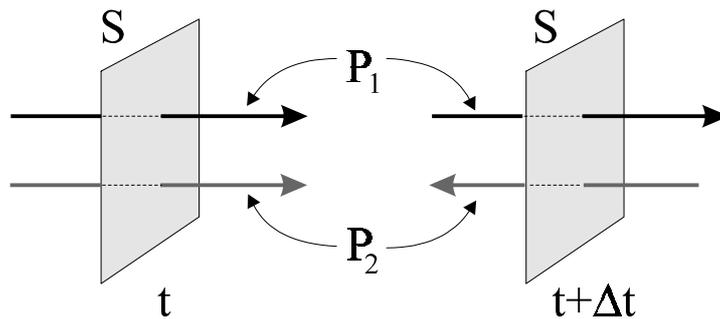


Figura 2.25 Sentido de los términos del vector de Poynting instantáneo para dos tiempos diferentes

Ejemplo 2.22: Calcular el vector de Poynting medio para los campos obtenidos en el ejemplo 2.20.

Las expresiones para el fasor campo eléctrico y para el magnético son:

$$\vec{E}(\vec{r}) = B \sin(\sqrt{k^2 - \beta^2} x) e^{-j\beta z} \hat{y}$$

$$\vec{H}(\vec{r}) = \frac{jB}{\omega\mu_0} \left[j\beta \operatorname{sen}(\sqrt{k^2 - \beta^2} x) \hat{x} + \sqrt{k^2 - \beta^2} \cos(\sqrt{k^2 - \beta^2} x) \hat{z} \right] e^{-j\beta z}$$

El primer paso consiste en realizar el producto vectorial

$$\begin{aligned} \vec{E} \times \vec{H}^* &= \frac{B^2}{\omega\mu_0} \beta \operatorname{sen}^2(\sqrt{k^2 - \beta^2} x) \hat{z} + \\ &+ \frac{jB^2}{\omega\mu_0} \sqrt{k^2 - \beta^2} \operatorname{sen}(\sqrt{k^2 - \beta^2} x) \cos(\sqrt{k^2 - \beta^2} x) \hat{x} \end{aligned}$$

donde se ha tenido en cuenta las propiedades del producto vectorial

$$\hat{y} \times \hat{x} = -\hat{z} \quad \hat{y} \times \hat{z} = \hat{x}$$

El vector de Poynting medio viene dado por

$$\vec{P}_m(\vec{r}) = \frac{1}{2} \Re\{\vec{E} \times \vec{H}^*\}$$

con lo que tan sólo nos interesa las componentes reales de la expresión encontrada anteriormente, en este caso la componente z . El vector de Poynting medio queda:

$$\vec{P}_m(\vec{r}) = \frac{B^2}{2\omega\mu_0} \beta \operatorname{sen}^2(\sqrt{k^2 - \beta^2} x) \hat{z}$$

Esta expresión indica que la dirección de propagación de la densidad de potencia media es la z . Si hubiéramos calculado el vector de Poynting instantáneo habríamos obtenido una componente en la dirección de las x ; sin embargo, su promedio temporal es nulo con lo que no tenemos propagación neta en esta dirección. Esta componente lo que nos indica es que tenemos una oscilación de la energía en la dirección transversal a la de propagación.

Siguiendo un proceso similar a (2.61) la densidad de energía instantánea para medios lineales isotrópicos y homogéneos puede ser escrita:

$$\mathcal{u} = \frac{1}{2} (\epsilon \vec{E} \vec{E} + \mu \vec{H} \vec{H}) = \frac{1}{4} \Re\{(\epsilon \vec{E} \vec{E} + \mu \vec{H} \vec{H}) e^{j2\omega t}\} + \frac{1}{4} [\epsilon |\vec{E}|^2 + \mu |\vec{H}|^2] \quad (2.64)$$

donde nuevamente aparecerá un término dependiente del tiempo y otro de independiente. Al igual que el vector de Poynting, definiremos la densidad de energía media como:

$$U = \frac{1}{4} \left[\epsilon |\vec{E}|^2 + \mu |\vec{H}|^2 \right] \quad (2.65)$$

Ejemplo 2.23: Se tiene una sección de cable coaxial de longitud l , radio del conductor interno a y radio de la superficie interna del conductor externo b . La sección de cable está cerrada por ambos extremos por conductores. Los fasores campo eléctrico y magnético entre conductores, donde tenemos el vacío, son:

$$\vec{E} = \frac{V}{\ln(b/a)} \frac{\sin(\pi z/l)}{\rho} \hat{\rho} \quad \vec{H} = \frac{jV}{\ln(b/a)} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{\cos(\pi z/l)}{\rho} \hat{\phi}$$

Encontrar el vector de Poynting medio y la energía media almacenada por el campo electromagnético en el interior de la estructura (Fig. 2.26) Se supone que los conductores que constituyen el cable coaxial son perfectos.

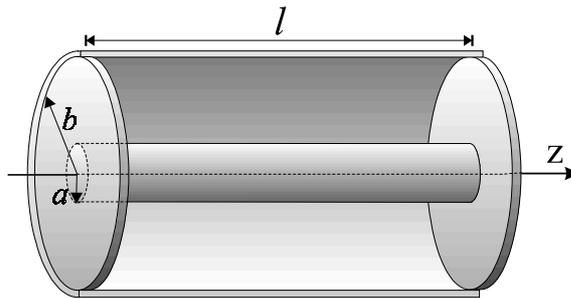


Figura 2.26

Para calcular el vector de Poynting medio debemos realizar el producto vectorial entre \vec{E} y \vec{H} . Al ser \vec{H} imaginario puro, el resultado final también lo será, con lo que el vector de Poynting medio, al sacar la parte real, será nulo.

$$\vec{P}_m(\hat{r}) = 0$$

Este resultado es lógico ya que los campos no pueden salir de esta estructura, con lo que no puede haber un flujo de densidad de potencia medio, aunque sí podemos tener un flujo de potencia instantáneo debido a la redistribución de la energía. Como

veremos en el capítulo 4, la expresión de los fasores corresponden a una onda estacionaria.

Si queremos calcular la energía media almacenada, primero tendremos que encontrar la densidad de energía media que vendrá dada por la expresión (2.67). Si calculamos el cuadrado del modulo del fasor campo eléctrico obtenemos

$$|\vec{E}|^2 = \frac{V^2}{\ln^2(b/a)} \frac{\text{sen}^2(\pi z/l)}{\rho^2}$$

y para el modulo al cuadrado del fasor campo magnético

$$|\vec{H}|^2 = \frac{V^2}{\ln^2(b/a)} \frac{\epsilon_0}{\mu_0} \frac{\text{cos}^2(\pi z/l)}{\rho^2}$$

La densidad de energía media queda

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{4} [\epsilon_0 |\vec{E}|^2 + \mu_0 |\vec{H}|^2] = \frac{\epsilon_0 V^2}{4 \ln^2(b/a)} \frac{\text{sen}^2(\pi z/l)}{\rho^2} + \frac{\epsilon_0 V^2}{4 \ln^2(b/a)} \frac{\text{cos}^2(\pi z/l)}{\rho^2} \\ &= \frac{\epsilon_0 V^2}{4 \ln^2(b/a)} \frac{1}{\rho^2} \end{aligned}$$

Para calcular la energía almacenada en la estructura debemos integrar la densidad de energía sobre el volumen entre conductores

$$U_t = \int_v U \rho d\rho d\phi dz = \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_a^b \frac{\epsilon_0 V^2}{4 \ln^2(b/a)} \frac{1}{\rho} d\rho d\phi dz = \frac{\epsilon_0 V^2}{2 \ln(b/a)} \pi l$$

Por último, con respecto a las condiciones de contorno, en régimen senoidal permanente adoptan la misma forma que para los campos instantáneos. Sin embargo, debemos tener en cuenta cuando trabajamos en R.S.P., que tanto los campos como las densidades de carga y corrientes son fasores.

Ejemplo 2.24: Encontrar las densidades de cargas y corrientes en las paredes de la estructura presentada en el ejemplo anterior.

Para encontrar las densidades de carga sobre la superficie de los conductores debemos utilizar las condiciones de contorno, en concreto aquellas en que aparecen

las densidades de carga y corriente. Las condiciones de contorno en R.S.P. no cambia de expresión, y simplemente tenemos que tener en cuenta que estamos trabajando con fasores.

$$\begin{aligned}\hat{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) &= \sigma \\ \hat{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) &= \vec{J}_s\end{aligned}$$

Como la estructura está compuesta por conductores perfectos, en su interior no podemos tener campos eléctricos o magnéticos variables en el tiempo. Entonces las condiciones de contorno, teniendo en cuenta que entre conductores tenemos el vacío, quedan:

$$\begin{aligned}\epsilon_0 \hat{n} \cdot \vec{E}_1 &= \sigma \\ \hat{n} \times \vec{H}_1 &= \vec{J}_s\end{aligned}$$

que aplicaremos sistemáticamente sobre cada superficie.

- Superficie S_0 : tapadera de la derecha, donde $z=0$, $\hat{n} = \hat{z}$

$$\sigma = \epsilon_0 \hat{z} \cdot \vec{E}(z=0) = 0 \quad (\vec{E} \perp \hat{z})$$

$$\vec{J}_{S_0} = \hat{z} \times \vec{H}(z=0) = \frac{jV}{\ln(b/a)} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{1}{\rho} (-\hat{\rho})$$

- Superficie S_1 : tapadera de la izquierda, donde $z=l$ y $\hat{n} = -\hat{z}$

$$\sigma = \epsilon_0 (-\hat{z}) \cdot \vec{E}(z=l) = 0 \quad (\vec{E} \perp \hat{z})$$

$$\vec{J}_{S_1} = -\hat{z} \times \vec{H}(z=l) = \frac{jV}{\ln(b/a)} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{-1}{\rho} \hat{\rho}$$

- Superficie S_a : conductor interno, donde $\rho = a$ y $\hat{n} = \hat{\rho}$

$$\sigma_{S_a} = \epsilon_0 \hat{\rho} \cdot \vec{E}(\rho = a) = \frac{\epsilon_0 V}{\ln(b/a)} \frac{\text{sen}(\pi z/l)}{a}$$

$$\vec{J}_{S_a} = \hat{\rho} \times \vec{H}(\rho = a) = \frac{jV}{\ln(b/a)} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{\cos(\pi z/l)}{a} \hat{z}$$

- Superficie S_b : conductor externo, donde $\rho = b$ y $\hat{n} = -\hat{\rho}$

$$\sigma_{S_b} = \epsilon_0 (-\hat{\rho}) \cdot \vec{E}(\rho = b) = \frac{-\epsilon_0 V}{\ln(b/a)} \frac{\text{sen}(\pi z/l)}{b}$$

$$\vec{J}_{S_b} = -\hat{\rho} \times \vec{H}(\rho = b) = \frac{-jV}{\ln(b/a)} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \frac{\cos(\pi z/l)}{b} \hat{z}$$

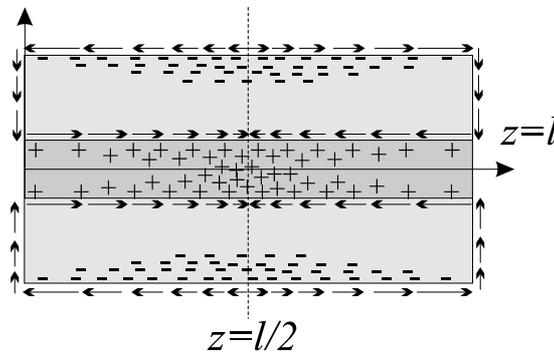


Fig. 2.27 Esquema de la sección longitudinal de la estructura y la distribución de cargas y corrientes

En la figura 2.27 hemos representado esquemáticamente las densidades de carga (con signos positivos y negativos) y las densidades de corriente (con flechas) dadas por las expresiones anteriores. Vemos cómo las corrientes salen del centro del conductor externo (donde es nula) para ser máximas justo en los extremos (\vec{J}_{S_b} viene descrita por un coseno). Esta corriente hará desaparecer las cargas del centro del conductor ($z=l/2$), con lo que tendremos una densidad de carga negativa σ_{S_b} . Esta carga que desaparece, será conducida a través de las tapaderas hacia el conductor interno (\vec{J}_{S_0} y \vec{J}_{S_l}). Una vez allí la corriente \vec{J}_{S_a} distribuirá la carga, con lo que aparecerá una densidad de carga positiva σ_{S_a} que será máxima en el centro, ya que es donde confluyen las corrientes.

Debemos recordar que trabajamos con fasores con lo que las densidades cambiarán con el tiempo. Vemos que las densidades de cargas y corrientes están desfasadas $\pi/2$ ya que las corrientes están multiplicadas por j . Esto implica que,

cuando la concentración de carga (positiva o negativa) es máxima, las corrientes son nulas, siendo justo en este momento cuando invierten la dirección, con lo cual empezará a disminuir las concentraciones de carga y a aumentar la corriente.

El efecto aquí descrito es similar a un circuito cerrado compuesto por una bobina y un condensador, donde la carga va cambiando de una cara a la otra del condensador a través del cable que las une. A ambos dispositivos se les llama resonadores ya que este efecto es máximo a unas frecuencias determinadas que dependen de sus dimensiones. Discutiremos sus características en el capítulo 5.

2.7.3 Fasores y transformadas de Fourier

Cuando la dependencia temporal es arbitraria se recurre a técnicas de transformada de Fourier para su resolución. Cualquier función puede ser descompuesta en la suma de un continuo de funciones senoidales. En nuestro caso particular, y tomando como ejemplo el campo eléctrico, lo podemos escribir como:

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(\vec{r}, \omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (2.66)$$

donde el fasor $\vec{E}(\vec{r}, \omega)$ es la amplitud en el dominio transformado obtenida a partir de:

$$\vec{E}(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) e^{-j\omega t} dt \quad (2.67)$$

El fasor $\vec{E}(\vec{r}, \omega)$ es exactamente el definido en la sección 2.7.1, pero poniendo de manifiesto explícitamente su dependencia con la pulsación ω para indicar que la amplitud es distinta para pulsaciones distintas. Esta dependencia con respecto de la pulsación es el espectro del campo instantáneo. En la situación de tener una dependencia temporal senoidal a una sola pulsación, el espectro tan sólo tendría dos componentes a las pulsaciones ω y $-\omega$, con lo que la ecuación (2.67) se transforma en la suma de tan sólo dos componentes

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \left[\vec{E}(\vec{r}, \omega) e^{j\omega t} + \vec{E}(\vec{r}, -\omega) e^{-j\omega t} \right]$$

Las propiedades de la transformada de Fourier nos dicen que $\vec{E}^*(\vec{r}, \omega) = \vec{E}(\vec{r}, -\omega)$ con lo que la ecuación anterior queda:

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2} \left[\vec{E}(\vec{r}, \omega) e^{j\omega t} + \vec{E}^*(\vec{r}, \omega) e^{-j\omega t} \right] = \Re \left\{ \vec{E}(\vec{r}, \omega) e^{j\omega t} \right\}$$

Así pues, recuperamos la expresión del campo instantáneo de la misma forma que en la sección 2.7.1. Entonces, en la ecuación (2.66) lo único que estamos haciendo es obtener la parte real de la suma de un continuo de fasores, lo que da como resultado un campo instantáneo que es la suma de campos con dependencia senoidal y frecuencias entre 0 y ∞ .

El método de análisis de campos con dependencia temporal arbitraria consiste en encontrar el espectro del campo inicial utilizando (2.67). Una vez encontradas las componentes, cada una de ellas por separado cumplirá las ecuaciones de Maxwell en régimen senoidal permanente (2.60). Operando con estas ecuaciones, por ejemplo para encontrar el campo en un instante de tiempo más tarde o en otra posición, se encontrará los nuevos fasores, o dicho de otra forma, se modificará el espectro. Entonces a partir del nuevo espectro y de (2.66) se encontrarán los campos instantáneos en la nueva situación.

Cuestiones de repaso:

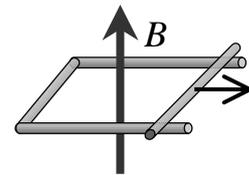
- 1) Explique qué entiendes por campo. Clarifique su respuesta explicando el significado de campo electromagnético.
- 2) ¿Por qué un hilo por donde circula una corriente variable en el tiempo radia ondas electromagnéticas?
- 3) ¿La única manera posible de crear un campo magnético es mediante un hilo conductor por donde circula una intensidad de corriente?
- 4) ¿Cuántas ecuaciones son necesarias para describir el electromagnetismo?
- 5) Se quiere calcular la circulación del campo magnético a través de un camino utilizando la ecuación de Ampère-Maxwell. Para ello se utiliza una superficie S para el cálculo de la intensidad de corriente libre y una superficie diferente S' para el cálculo del término de desplazamiento. ¿Es correcto utilizar dos superficies distintas?
- 6) Se tienen dos expresiones matemáticas de campos vectoriales. Si se toma la ecuación de Faraday y se substituye el campo eléctrico por una de estas expresiones y el campo magnético por la otra y vemos que se cumple la ecuación de Faraday. ¿Podemos afirmar que estas dos expresiones corresponden a campos electromagnéticos?
- 7) ¿Por qué se necesita la forma diferencial de las ecuaciones de Maxwell?
- 8) ¿Cuál es el significado físico de los operadores divergencia y rotacional?
- 9) ¿En qué dirección van los campos eléctricos en la superficie de un conductor perfecto?

- 10) ¿Qué parámetro caracteriza los conductores?
- 11) Se Tiene un conductor no perfecto por el que circula una densidad de corriente volúmica ¿Hay campo eléctrico dentro del conductor? ¿En qué dirección irán los campos en la superficie del conductor si tenemos una cierta densidad de carga superficial?
- 12) ¿Por qué se necesita definir una nueva magnitud física como el vector desplazamiento?
- 13) ¿Con qué parámetros se caracteriza un medio dieléctrico lineal, isotropo y homogéneo? ¿Y si el medio es no lineal?
- 14) ¿Por qué los campos eléctricos y magnéticos deben cumplir las condiciones de contorno en la superficie de separación entre dos medios?
- 15) Se Tiene una cavidad de paredes conductoras completamente hermética (los campos no pueden abandonarla) que encierran el vacío. Dentro de la cavidad existe energía electromagnética almacenada que decrece paulatinamente con el tiempo. ¿A que es debida esta disminución de energía? ¿Qué se puede afirmar sobre la naturaleza del conductor?
- 16) ¿Qué indica el vector de Poynting?
- 17) ¿Por qué razón teórica en estática se puede obtener campos eléctricos o campos magnéticos por separado?
- 18) ¿Por qué no es válida la utilización del potencial eléctrico definido en estática cuando tenemos variaciones temporales de nuestros campos?
- 19) ¿Es válida la definición del potencial vector cuando tenemos variaciones temporales de los campos?
- 20) ¿Por qué razón se pone especial énfasis en el estudio de los campos electromagnéticos en régimen senoidal permanente?
- 21) ¿Los campos electromagnéticos son en realidad una magnitud compleja o simplemente utilizamos esta representación para facilitar el trabajo?
- 22) ¿Qué diferencia hay entre el vector de Poynting instantáneo y el vector de Poynting medio?
- 23) El valor obtenido al calcular la densidad de energía media y la densidad de energía instantánea es distinto. ¿A qué es debido? Piense en el principio de conservación de

la energía para magnitudes instantáneas y magnitudes medias, ya que debe cumplirse en ambos casos.

PROBLEMAS – CAPÍTULO 2

1. Calcule de la f.e.m. inducida por un campo magnético uniforme sobre una espira rectangular en la que uno de sus lados se mueve con una velocidad constante.



2. Comprobar que las siguientes expresiones constituyen campos magnéticos en régimen estático y encontrar la distribuciones de corrientes que los crea.

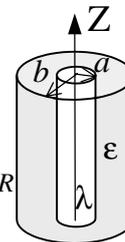
$$\vec{B}(\vec{r}) = zy^2 \hat{x} + xz \hat{y} + xy \hat{z} \quad \vec{H}(\vec{r}) = \frac{H_0 a^2}{\rho} \left[1 - e^{-\rho/a} \left(1 + \frac{\rho}{a} \right) \right] \hat{\phi}$$

3. La expresión del campo magnético en cierta región del espacio viene dada por:

$$\vec{B} = B_0 z \cos \omega t \hat{y}$$

y se sabe que el campo eléctrico asociado tiene tan sólo una componente en la dirección x

- Utilice la ley de Faraday para encontrar el campo eléctrico.
 - A partir del campo eléctrico encontrado, utilizar la ley de Ampère-Maxwell para hallar de nuevo el campo magnético suponiendo que la densidad de corriente volúmica es nula.
 - Compare el resultado obtenido en el apartado b) con la expresión inicial del campo magnético. ¿Es correcta la suposición de que la densidad de corriente es nula? ¿Por qué? Obtenga el valor que debería tener.
4. Un hilo conductor infinito tiene una densidad de carga lineal λ y está en el eje de un cilindro dieléctrico lineal, isótropo y homogéneo con permitividad relativa ϵ_r . El radio del hilo es a y el del cilindro es b . Encontrar la carga ligada en el dieléctrico y la carga total en la superficie de separación entre dieléctrico y conductor.



5. El campo eléctrico dentro de una esfera dieléctrica de radio R , es decir para $r < R$ es:

$$\vec{E}_1 = E_{01} (\cos\theta \hat{r} - \text{sen}\theta \hat{\theta})$$

Para $r > R$ tenemos el vacío y la expresión del campo es

$$\vec{E}_2 = E_{02} \left[(1 + R^3/r^3) \cos\theta \hat{r} - (1 + R^3/2r^3) \text{sen}\theta \hat{\theta} \right]$$

Encontrar ϵ_r del medio dieléctrico

6. En un medio material se propaga un campo eléctrico de fasor:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \left[3 e^{-j\beta z} e^{-\alpha z} + e^{j\beta z} e^{\alpha z} \right] \hat{y} \quad \text{V / m}$$

donde β es la constante de propagación, α el coeficiente de atenuación, la pulsación es $\omega = 10^8 \text{ rad / s}$, $\epsilon_r = 19.5$ y $\mu = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H / m}$. Si realizamos una medida del vector de Poynting en $z = 0$ obtenemos $P = 0.05 \text{ W/m}^2$ y en $z = 1 \text{ m}$ es nulo. Hallar:

- La constante de propagación β y el coeficiente de atenuación α .
- La densidad de corriente volúmica y la conductividad considerando que todas las pérdidas son por conducción.

Nota: Un medio con pérdidas es aquél en el que el vector de Poynting medio de una onda decrece con la distancia. En el caso que nos ocupa, es debido a que el medio posee una cierta conductividad y por lo tanto se inducen corrientes que disipan energía (pérdidas por conducción).

7. La densidad de potencia sobre las cargas para magnitudes instantáneas viene dada por $\vec{j} \cdot \vec{E}$. Deduce la expresión para la densidad de potencia media ejercida sobre las cargas (forma fasorial).