

## 1 Ecuaciones de Maxwell en condiciones estáticas

Este primer capítulo sirve de repaso a los conceptos y métodos que se vieron en el curso introductorio de Física sobre Teoría Electromagnética. Se analizan situaciones típicas en las que determinadas distribuciones de carga conocidas –sean puntuales, dipolos, o distribuciones continuas– producen campos y potenciales en el espacio. Algunos otros problemas hacen referencia a corrientes estacionarias y sus distribuciones de campo magnético. Se emplean herramientas conocidas, como las leyes integrales de Gauss y Ampère y las ecuaciones diferenciales de Laplace y Poisson. Se han incluido también ejercicios de inducción electromagnética, resolubles mediante la ley de Faraday. Estos problemas se incluyen en algunos textos bajo el epígrafe de *Campos lentamente variables en el tiempo*, y es cierto que ya no son problemas en régimen estático, y que implican relaciones entre campos eléctricos y magnéticos. Sin embargo, los incluimos en este primer capítulo porque reflejan situaciones ya conocidas por los estudiantes.

1. Calcule el flujo del campo eléctrico creado por una carga puntual, de valor  $q$ , situada en el origen de coordenadas, a través de las dos superficies siguientes:

- a) una semiesfera de radio  $R$ , cuyo centro (el origen de los radios) coincide con la carga.
- b) el plano  $y = d$ .

2. Un medio dieléctrico sometido a la acción de un campo eléctrico se polariza y, como consecuencia, aparecen en el medio las llamadas densidades de carga ligada, volúmica y superficial. El vector de polarización da cuenta del estado de polarización del medio y aquellas densidades de carga pueden calcularse a partir de este vector. Las expresiones son, respectivamente:

$$\begin{aligned}\rho_b &= -\nabla \cdot \vec{P} \\ \sigma_b &= \vec{P} \cdot \hat{n}\end{aligned}$$

A partir de la igualdad  $\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = Q / \epsilon_0$ , deduzca la ley de Gauss para el vector desplazamiento que, en el caso más sencillo y más habitual de que no haya cargas libres en el dieléctrico, toma la forma

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = 0$$

El vector desplazamiento eléctrico  $\vec{D}$  se define como  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ .

3. Calcule el potencial eléctrico en el interior de una esfera de radio  $a$  que contiene una densidad de carga eléctrica

$$\rho = \rho_0 \left(1 + 2\frac{r}{a}\right)$$

sabiendo que el potencial es nulo en el infinito. Haga el cálculo a partir de la ecuación de Poisson.

4. Determine el campo eléctrico dentro y fuera de una distribución esférica de carga de densidad constante  $\rho_0$  y radio  $R$ . Utilice la ley de Gauss.

5. Algunas de las líneas de *campo electrostático* de la figura 1, donde A y B son conductores perfectos, no son posibles. ¿Cuáles son?, ¿por qué?

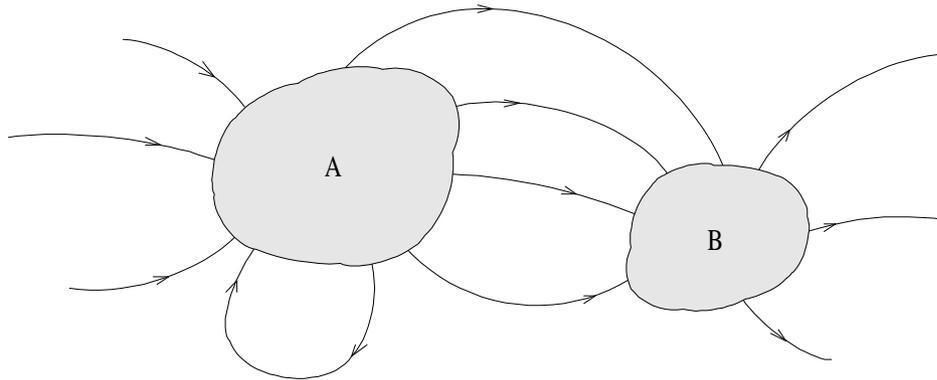


Fig. 1 Líneas de campo electrostático entre dos conductores.  
Algunas de esas líneas no son posibles físicamente

6. Dos cargas puntuales de valores  $+q$  y  $-q$  están situadas, respectivamente, en los puntos  $z = s/2$  y  $z = -s/2$ , formando un dipolo eléctrico.

- Calcule el potencial eléctrico creado por el dipolo en todo el espacio.
- Aproxime la expresión anterior para puntos tales que  $r \gg s$ .

7. La gráfica de la figura 2 representa la distribución de carga volúmica en una unión  $p-n$  no polarizada. Esa distribución, debida a la huida de los portadores mayoritarios de uno y otro lado de la unión, se denomina zona de carga espacial. Ocurre que el exceso de electrones libres debido a los átomos *donadores* de la zona  $n$  han escapado, dejando tras de sí una zona iónica de carga neta positiva, y también algunos electrones de la banda de valencia han sido capturados por los átomos *aceptores* de la zona  $p$ , formando un volumen de iones negativos.

a) A partir de la ley de Gauss en forma diferencial, determine *de forma gráfica* la dependencia del campo eléctrico con  $x$  a lo largo de la unión, ignorando las variaciones en las otras dos direcciones.

b) Obtenga la gráfica de la función potencial  $\phi(x)$ , mediante su relación con el campo eléctrico, o a partir de la ecuación de Poisson. Como no disponemos en este caso de referencias externas de potencial, podemos fijar arbitrariamente  $\phi(x=0) = 0$ .

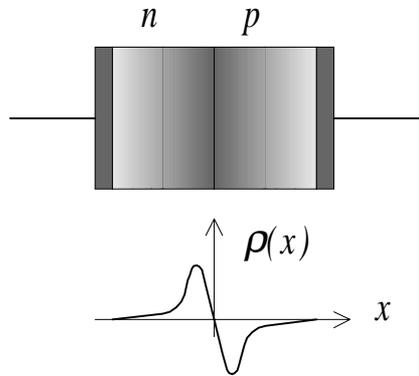


Fig. 2 Unión p-n y zona de carga espacial

8. Una barra de un semiconductor dopado tipo  $n$  (cuyos portadores son electrones en la banda de conducción) es atravesada por una densidad de corriente homogénea de valor  $J_0$ . La corriente está provocada por una tensión aplicada en los extremos de la barra,  $V_0 = 50 \text{ mV}$ . Suponemos que el campo eléctrico que se establece es constante a lo largo de toda la longitud del semiconductor. La concentración de portadores a la temperatura de trabajo es  $N = 6.24 \times 10^{25} \text{ electr./m}^3$ . La carga del electrón es  $q = -1.602 \times 10^{-19} \text{ C}$ . La conductividad del semiconductor es  $\sigma = 3.12 \times 10^4 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$ .

- ¿Cuánto vale la densidad de corriente?
- Calcule la intensidad de corriente que circula por la barra.
- ¿Cuál es la velocidad media de los portadores?

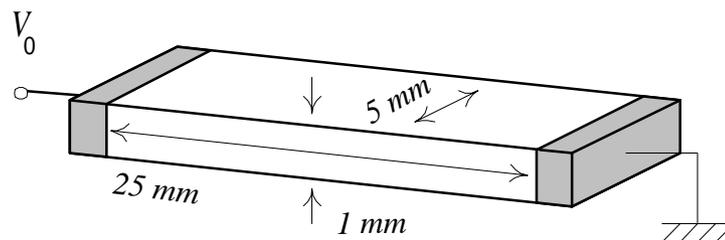


Fig. 3 La barra de semiconductor del problema 8

Se sumerge la barra en el seno de un campo magnético homogéneo orientado transversalmente a la dirección de la corriente, con  $B_0 = 1.0 \text{ T}$ .

d) ¿Cuál será la magnitud de la fuerza magnética por unidad de carga que experimentan los portadores? ¿Variará la densidad de corriente respecto a la situación en que no había campo magnético? ¿Y la intensidad de corriente en la barra?

9. Calcule la capacidad de un condensador formado por dos placas metálicas de dimensiones 21 cm x 29 cm separadas por una hoja de papel ( $\epsilon_r = 2$ ,  $d = 0,1 \text{ mm}$ ).

10. Una corriente circula a través de un hilo conductor recto extendido en la dirección del eje Z. La densidad volúmica de corriente es

$$\vec{J}(\vec{r}) = J_0 \frac{\rho^2}{a^2} \hat{z}$$

donde  $a$  es el radio del conductor y  $\rho$  la coordenada radial cilíndrica.

- Calcule la intensidad de corriente  $I$  que atraviesa el hilo.
- Si  $I = 1 \text{ A}$  y  $a = 0,3 \text{ mm}$  ¿cuál es el valor de  $J_0$ ?
- Calcule el valor del campo magnético creado a 1 cm del hilo conductor.

11. Dos láminas conductoras paralelas de muy pequeño grosor, anchura  $h$  y longitud  $l$ , separadas una distancia  $d$ , forman una línea de transmisión. Ambas conducen una densidad superficial uniforme y constante en el tiempo, de valor  $J_0$ , en sentidos opuestos. Las dimensiones de la línea satisfacen las condiciones  $l \gg h$  y  $h \gg d$ . Calcule mediante la ley integral de Ampère y aplicando superposición cómo será la distribución del campo magnético producido por las corrientes.

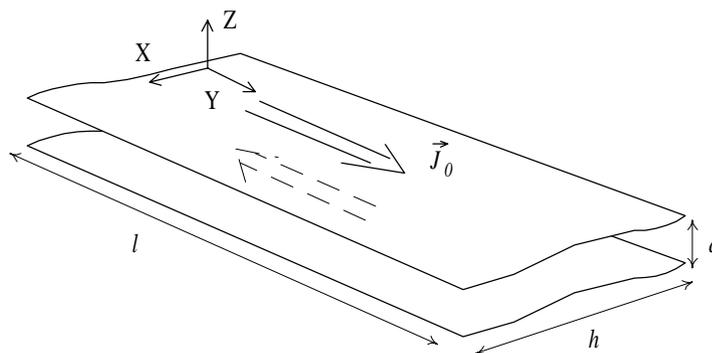


Fig. 4 Línea de transmisión formada por dos láminas conductoras delgadas y paralelas

12. Se utilizan dos imanes cilíndricos con sus ejes alineados y con una cierta separación entre ellos para producir un campo magnético aproximadamente constante, de valor  $B_0$ . Entre medio de ambos se sitúa un arrollamiento formado por  $N$  espiras de radio  $a$ , que se hace girar a  $n$  r.p.m.

- a) ¿Qué frecuencia tiene la tensión generada en el arrollamiento?  
b) ¿Cuál es su amplitud?  
c) Calcule el valor numérico de ambas magnitudes con los siguientes datos:  $B_0 = 10^{-2}$  T,  $N = 100$  espiras,  $a = 1$  cm,  $n = 2000$  r.p.m.

**13.** Calcule la resistencia a lo largo de un hilo de cobre de sección circular de 50 m de longitud y 0,6 mm de diámetro. La conductividad del cobre es  $\sigma = 5,9 \times 10^7$  1/ $\Omega$ m.

**14.** Calcule la capacidad por unidad de longitud de un cable coaxial formado por un hilo central de 1,0 mm de diámetro y una malla exterior de 8,0 mm de diámetro. El dieléctrico que separa ambos conductores tiene una constante  $\epsilon_r = 3,2$ .

## 2 Ecuaciones de Maxwell en condiciones dinámicas

Al incluir la variación temporal desaparece la distinción rígida, propia de la Estática, entre campos eléctricos y magnéticos. Los problemas de este capítulo se acercan, aunque tímidamente, al tema de ondas, que constituye el tema fundamental de la Teoría Electromagnética. Los próximos capítulos se dedican exclusivamente a ellas, razón por la cuál aquí hemos preferido centrarnos en otras aplicaciones y derivaciones de las ecuaciones de Maxwell.

**15.** Un buen conductor se caracteriza por el valor de su conductividad, que será elevado, pero también por su constante dieléctrica y su permeabilidad magnética. Una de las características fundamentales de los buenos conductores es que *no pueden almacenar carga libre neta en su interior*, sino tan sólo en su superficie. A partir de la ley de Gauss, de la ley de Ohm y de la ecuación de continuidad, todas ellas en su forma diferencial; compruebe que si en un instante inicial existiera una densidad volúmica no nula en el interior de un buen conductor, introducida artificialmente de algún modo, entonces esa densidad de carga desaparecería muy rápidamente, según una constante de tiempo inversamente proporcional a la conductividad del medio.

**16.** Un medio material presenta una constante dieléctrica  $\epsilon_r = 2$  y una conductividad elevada,  $\sigma = 5,6 \times 10^6 \text{ } (\Omega\text{m})^{-1}$ .

- a) Calcule la densidad de corriente de conducción y la densidad de corriente de desplazamiento en función del campo eléctrico cuando en el interior del medio aparecen campos de frecuencia  $f = 1,0 \text{ GHz}$ . ¿Son comparables ambas densidades de corriente?
- b) Teniendo en cuenta el resultado anterior compruebe que para ondas con *variación temporal arbitraria* que viajen en el medio se ha de cumplir muy aproximadamente la ecuación:

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \frac{1}{\sigma\mu} \nabla^2 \vec{H}$$

- c) Compruebe que para una onda con variación temporal arbitraria y dependiente únicamente de la coordenada espacial en la dirección de propagación,  $z$ , la ecuación anterior tiene una posible solución de la forma:

$$\vec{H}(z, t) = \frac{A}{\sqrt{\pi D t}} \exp\left(-\frac{z^2}{4D t}\right) \hat{x}$$

donde  $A$  y  $D$  son constantes. ¿Cuál es el valor de la constante  $D$ ?

d) Obtenga el campo eléctrico.

e) Un pulso electromagnético muy corto, del orden de algunos nanosegundos, incide sobre la superficie plana de separación entre el aire y el medio descrito. Como resultado, parte de la radiación se refleja y otra parte penetra en el medio, en donde el campo magnético adopta la forma dada en el apartado c). Represente la forma de  $H$  en función de  $z$  para algunos valores entre  $z = 0$  y  $z = 100 \mu\text{m}$  en los dos instantes de tiempo  $t = 1 \text{ ns}$  ( $10^{-9} \text{ s}$ ) y  $t = 4 \text{ ns}$ . Para ello tome los valores  $A = 2,11 \times 10^{-3} \text{ H}$  y  $D = 0,142 \text{ m}^2/\text{s}$ .

**17.** En el proceso de carga de un condensador plano, como el que se muestra en la figura 5, supondremos que la tensión aplicada crece linealmente en el tiempo. Se considera que las placas son conductores perfectos y que la densidad superficial de corriente que recorre las placas tiene únicamente componente longitudinal.

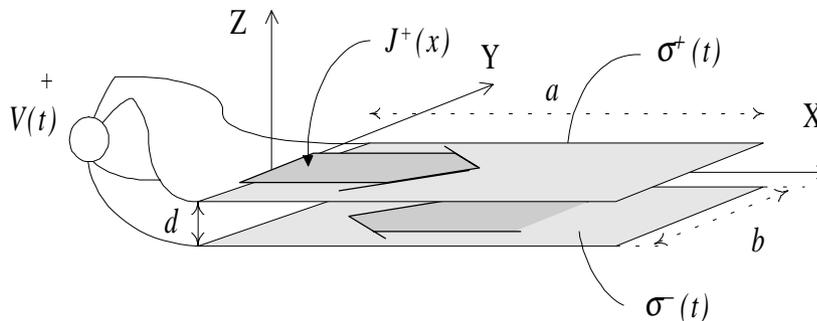


Fig. 5 Condensador de placas paralelas en el proceso de carga

La tensión puede tomarse en la forma  $V(t) = K t$  y se hará la aproximación  $a, b \gg d$ . Se comprueba que la densidad de corriente, que tiene igual magnitud y diferente signo en cada una de las armaduras, es

$$J_s(\vec{r}) = \pm J_0(a - x)\hat{x}$$

- A partir de la ecuación de continuidad (en dos dimensiones), calcule la densidad superficial de carga en las armaduras.
- Calcule el campo eléctrico entre las placas mediante la ley de Gauss integral.
- Calcule el campo magnético entre las placas.
- Obtenga la energía eléctrica instantánea almacenada por el condensador.
- ¿Cuál es el valor de  $J_0$ ?

**18.** Un cable conductor cilíndrico y rectilíneo, orientado en la dirección del eje  $Z$ , está recorrido por una densidad volúmica de corriente cuya expresión es:

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = J_0 \left(1 - e^{-\frac{r}{a}}\right) e^{-\alpha z} \cos(\omega t - bz) \hat{z} \quad \frac{A}{m^2}$$

donde  $a$  es el radio del cable,  $\alpha$  y  $\beta$  son, respectivamente, constantes de atenuación y de propagación, y  $\rho$  es la coordenada cilíndrica de cada punto considerado.

- Obtenga la expresión del fasor correspondiente.
- Calcule la densidad volúmica de carga presente en el cable.
- El cable no puede ser un conductor perfecto a la vista de lo anterior. Explíquelo más claramente.
- ¿Qué intensidad de corriente instantánea circula por el cable?

**19.** La transformada de Fourier  $\hat{S}(\omega, \vec{k})$  (simultánea en frecuencia temporal y frecuencias espaciales) de un campo  $\vec{S}(t, \vec{r})$  se define como:

$$\frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int dt \int \vec{S}(t, \vec{r}) \exp(-j\omega t + j\vec{k} \cdot \vec{r}) dV$$

Escriba las ecuaciones de Maxwell en el espacio  $(\omega, \vec{k})$  y demuestre que cuando no hay cargas, el campo eléctrico es transversal, es decir:  $\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$ . Así mismo, demuestre que el campo magnético siempre es transversal:  $\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$ .

**20.** Dos placas conductoras perfectas, paralelas, de anchura  $a$ , longitud  $l$  y situadas a una distancia  $d$  llevan corrientes de igual valor y signo contrario, tal como se muestra en la figura 6. El espesor de las placas es muy pequeño y las densidades de corriente pueden considerarse laminares. Su expresión es

$$\vec{J}(\vec{r}) = \pm J_0 \cos(\omega t) \hat{y} \quad \frac{A}{m}$$

Indique cuáles de las afirmaciones que siguen son ciertas y cuáles no, y razone su respuesta en cada caso, basándose en alguna de las ecuaciones fundamentales del Electromagnetismo.

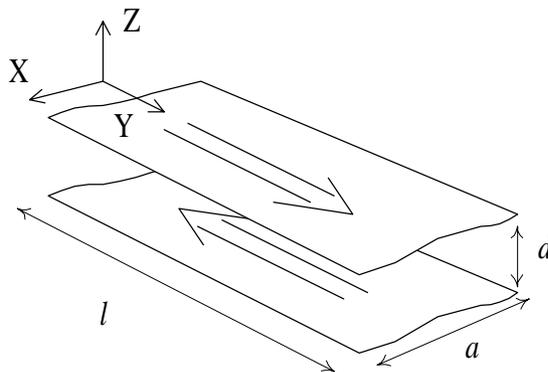


Fig. 6

- a) Aparecerá un campo magnético en el espacio que rodea las placas porque las corrientes varían en el tiempo;
- b) ese campo magnético será también variable en el tiempo.
- c) En cada una de las placas debe existir un campo eléctrico tangencial, proporcional al valor de la corriente.
- d) El campo magnético rodeará a cada placa, con dirección predominante según X,
- e) pero entre ambas placas el campo magnético tiende a cancelarse.
- f) Debe existir además un campo eléctrico entre ambas placas, que invierte su signo en cada semiperiodo de variación temporal de la corriente.
- g) La expresión dada para la corriente debe ser una aproximación si la longitud  $l$  en la que se utiliza es pequeña (en comparación con  $\lambda$ ), porque la expresión exacta sería  $\cos(\omega t - ky)$  para el término de variación temporal de la corriente.
- h) Si la frecuencia se hace cero, desaparecerá el campo magnético
- i) y el eléctrico.

**21.** Algunos problemas prácticos electromagnéticos tratan con geometrías complicadas, que incluso de forma aproximada son muy difíciles de resolver analíticamente. En estos casos se recurre a menudo a la reproducción de los fenómenos en laboratorio. Por otro lado, no siempre esa reproducción puede hacerse a la escala real del fenómeno, sino que debe emplearse una escala reducida. Esto ocurre, por poner un ejemplo, cuando se desea estudiar el comportamiento de una antena de grandes dimensiones y que debe radiar a grandes distancias. El empleo de una escala espacial reducida fuerza a resolver algunas cuestiones adicionales, para construir correctamente el prototipo y trasladar después los resultados obtenidos a la escala real.

Denominemos  $x, y, z, t, \vec{E}, \vec{B}, \epsilon_r, \mu_r, \sigma$ , etc., a las variables y magnitudes reales, y utilizemos  $x', y', z', t', \vec{E}', \vec{B}'$ , etc., para las variables y magnitudes medidas en el laboratorio, a escala reducida. Unas y otras variables se han de relacionar linealmente, en la forma:

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{z}{z'} = l \quad \frac{t}{t'} = \tau \quad \frac{E}{E'} = e \quad \frac{H}{H'} = h$$

- a) Compruebe en primer lugar que los operadores diferenciales se transforman en la forma:

$$\vec{\nabla} = \frac{1}{l} \vec{\nabla}' \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{\tau} \frac{\partial}{\partial t'}$$

y que la frecuencia también sufre transformación, en la forma  $f = \frac{1}{\tau} f'$  cuando se trabaja en RSP.

- b) A partir de las ecuaciones tercera y cuarta de Maxwell obtenga las relaciones entre

$$\mu_r \text{ i } \mu_r' \quad \epsilon_r \text{ i } \epsilon_r' \quad \sigma \text{ i } \sigma'$$

- c) Obtenga también las relaciones entre  $\vec{B}$  y  $\vec{B}'$ ,  $\vec{D}$  y  $\vec{D}'$ ,

- d) y entre  $V$  y  $V'$ ,  $I$  y  $I'$ .

NOTA:  $\mu_0$  y  $\epsilon_0$  no sufren ningún cambio de escala, ya que no son variables, sino constantes particulares del vacío.

**22.** Una zona del espacio está ocupada por un campo magnético, que podemos considerar en la zona de estudio como aproximadamente uniforme, o con variaciones espaciales muy lentas, y que varía senoidalmente en el tiempo. Tomemos su expresión aproximada como:

$$\vec{B} = B_0 \hat{z} \cos \omega t$$

- a) Se sitúa en el seno de ese campo una espira conductora circular, de radio  $a$ , y resistencia  $R$  cuyo plano es perpendicular al campo magnético. ¿Cuál será el valor de la corriente inducida en la espira?
- b) Independientemente de que coloquemos o no la espira para comprobar el fenómeno de inducción electromagnética, lo cierto es que por el mero hecho de existir un campo magnético variable en el tiempo debe aparecer un campo eléctrico en el espacio: precisamente el campo que hace circular a los electrones en la espira del apartado anterior. Calcúlelo a partir de la ley de Maxwell-Faraday.

### 3 Ondas planas

El estudio de la naturaleza y las propiedades básicas de las ondas electromagnéticas es el objetivo fundamental en este curso. Éste es el primer tema que hace referencia directa a la ecuación de onda y a sus soluciones. Dentro de la diversidad enorme de formas que pueden adoptar las ondas, en las diferentes situaciones que pueden considerarse, se comienza por el estudio de ondas planas en medios ilimitados, esto es, sin condiciones de contorno debidas a cambios de medio. Las ondas planas uniformes constituyen el tipo de solución más sencillo de la ecuación de onda, pero gran parte de las propiedades interesantes de cualquier onda se encuentran ya en ellas. En este capítulo hemos hecho especial hincapié en las cuestiones relacionadas con la polarización de las ondas planas y se presentan problemas en los que intervienen elementos de control de la polarización, tales como polarizadores y láminas de retardo. Casi todos los problemas se plantean y se resuelven en forma fasorial, como la más conveniente al régimen senoidal, sin embargo se incluyen algunos problemas en los que deberá trabajarse con las expresiones instantáneas de los campos.

**23.** Una onda plana uniforme que viaja en el aire en la dirección del eje Z tiene asociado un vector de intensidad de campo magnético de amplitud  $H_0 = 1/\pi$  A/m, dirigido en la dirección dada por el vector  $\hat{x} + \hat{y}$ . La frecuencia de la onda es de 100 MHz.

- a) Escriba la expresión del campo magnético instantáneo.
- b) Halle el fasor campo eléctrico.
- c) ¿Qué densidad media de potencia transporta la onda?

**24.** Una onda plana propagándose en el vacío tiene como fasor campo eléctrico:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_0(1 + j\sqrt{3})(\hat{x} - \hat{y})\exp(-j0,2\pi z). \text{ Considérese } E_0 \text{ real.}$$

- a) ¿Cuál es el tipo de polarización?
- b) ¿Cuál es su frecuencia?
- c) Calcule el vector de Poynting medio.
- d) Escriba la expresión del campo instantáneo.

**25.** Calcule las longitudes de onda en el aire para ondas planas de las siguientes frecuencias:

- |                         |                                |
|-------------------------|--------------------------------|
| a) $f = 270$ KHz, (LW)  | c) $f = 440$ MHz, (UHF)        |
| b) $f = 92,5$ MHz, (FM) | d) $f = 2,5$ GHz. (microondas) |

**26.** Describa el tipo de polarización y el sentido de giro en su caso de las siguientes ondas planas:

$$\begin{aligned}
 a) \quad \vec{E}(\vec{r}) &= E_0[(1+j)(\hat{x}-\hat{y})]e^{-jk_0z}, \\
 b) \quad E(\vec{r},t) &= E_0\cos(\omega t - k_0z)\hat{x} + E_0\cos(\omega t - \frac{\pi}{2} - k_0z)\hat{y}, \\
 c) \quad \vec{E}(\vec{r}) &= E_0[(\hat{x}-j\hat{y}) - j(\hat{x}-j\hat{y})]e^{-jk_0z}, \\
 d) \quad \vec{E}(\vec{r}) &= E_0\left[(\hat{x}-\hat{y}) - \frac{1-j}{\sqrt{2}}(\hat{x}-\hat{y})\right]e^{+jk_0z}, \\
 e) \quad \vec{E}(\vec{r}) &= E_0\left[(\hat{x}+\hat{y}-\sqrt{2}\hat{z}) - e^{j\frac{\pi}{3}}(\sqrt{2}\hat{x}-\hat{z})\right]e^{j\pi(x-3y-\sqrt{2}z)}.
 \end{aligned}$$

27. Determine el tipo de polarización y, en su caso, el sentido de giro, de las ondas planas siguientes:

$$\begin{aligned}
 a) \quad \vec{E}(\vec{r}) &= E_0 e^{j\pi} (\hat{x} + \hat{y} - j(\hat{x} - \hat{y})) e^{-jkz} \\
 b) \quad \vec{E}(\vec{r},t) &= A \left[ (\hat{x} + \hat{y}) \cos(\omega t - \frac{1}{\sqrt{2}}k(x-y) + \frac{\pi}{4}) + \hat{z} \cos(\omega t - \frac{1}{\sqrt{2}}k(x-y) - \frac{\pi}{4}) \right] \\
 c) \quad \vec{E}(\vec{r},t) &= A \left[ \frac{(\hat{x} + \hat{y})}{\sqrt{2}} \cos(\omega t - \frac{1}{\sqrt{2}}k(x-y) - \frac{\pi}{4}) + \hat{z} \sin(\omega t - \frac{1}{\sqrt{2}}k(x-y) - \frac{\pi}{4}) \right] \\
 d) \quad \vec{H}(\vec{r}) &= H_0 \frac{1}{\sqrt{2}} (1+j)(\hat{x} - \sqrt{3}\hat{z}) e^{jky}
 \end{aligned}$$

28. Una onda plana que se propaga en el vacío según la dirección dada por  $\phi = 30^\circ$  y  $\theta = 60^\circ$  tiene polarización elíptica a derechas. Su frecuencia es de 880 MHz, transporta una densidad media de potencia de  $0,5/\pi$  W/m<sup>2</sup> y el valor mínimo del campo, que se alcanza en la dirección horizontal, es de 5 V/m.

- Escriba la expresión fasorial del campo eléctrico de dicha onda.
- ¿Está unívocamente definida la onda con aquellos datos?
- La onda atraviesa normalmente un polarizador y pierde la mitad de la potencia. ¿En qué dirección se orienta el eje del polarizador? ¿Hay más de una solución a esta pregunta?

29. Una onda plana uniforme se propaga por un medio no magnético de índice  $n = 2$ , con una frecuencia  $f = 36$  KHz. El fasor de campo eléctrico es:

$$\vec{E}(\vec{r}) = E_0 (j\hat{x} + A(\sqrt{3}\hat{y} - \hat{z})) \exp(-j\alpha(y + \sqrt{3}z))$$

donde  $A$  es un número complejo ( $A = a + jb$ ) y  $E_0 = 30\pi$  V/m. La onda transporta una densidad de potencia  $P_m = 15\pi$  W/m<sup>2</sup>. Calcular:

- $\alpha$
- $|A|$
- polarización y sentido de giro de la onda en los dos casos siguientes:

- c.i)  $b = 0, a > 0$   
 c.ii)  $\vec{E}(\vec{r} = 0, t = 0) = 0$

**30.** Un polarizador es un elemento que deja pasar, de las ondas que inciden sobre él, únicamente la componente de campo eléctrico paralela a su propio eje, y que absorbe o refleja la componente perpendicular a ese eje.

Una onda plana viaja en la dirección positiva del eje Z e incide normalmente sobre un polarizador. Su fasor campo eléctrico es:

$$\vec{E}_{in}(\vec{r}) = E_0 [(\hat{x} - \hat{y}) - j(\hat{x} + \hat{y})] e^{-jkz}$$

- a) ¿Cuál es la expresión del campo eléctrico a la salida del polarizador?  
 b) Se desea añadir un segundo polarizador para que la potencia de la onda resultante final quede reducida a la cuarta parte de la inicial. ¿Cuál deberá ser el ángulo entre los ejes de los dos polarizadores?

**31.** Una onda plana uniforme con polarización elíptica y frecuencia  $f = 300$  MHz, que se propaga en el vacío, atraviesa un polarizador y pierde cuatro quintas partes de su potencia original. A continuación atraviesa una lamina de grosor  $d = 1$  cm de un dieléctrico no magnético con pérdidas, con permitividad relativa  $\epsilon_r = 1$ . A la salida de la lámina, la potencia de la onda queda reducida otra vez a un quinto de la incidente. El fasor de campo eléctrico de la onda resultante al final es

$$\vec{E}(\vec{r}) = 50\pi \hat{x} e^{-jkz}$$

- a) Calcule la expresión del campo eléctrico de la onda original.  
 b) En la hipótesis de que el material es un buen conductor, calcule su conductividad.  
 c) Con el resultado del apartado anterior, determine si la hipótesis de buen conductor es correcta o no.

**32.** Una lámina de retardo consiste en una lámina plano-paralela de un material anisótropo, que presenta diferente índice de refracción para las ondas en función de la orientación del campo eléctrico de las mismas. Más concretamente: la lámina fuerza la descomposición del campo eléctrico incidente en dos componentes lineales y ortogonales, paralelas a los ejes propios de la lámina, y asigna un índice diferente a cada una de esas dos nuevas ondas. Durante el trayecto por la lámina, que tiene un cierto grosor  $d$ , las dos ondas van acumulando un desfase diferente debido a esa diferencia de índices. La amplitud de cada onda se determina en la descomposición inicial y depende de cómo incide la onda respecto a los ejes de la lámina.

- a) Con la información anterior calcule el campo final a la salida de una lámina de retardo de acuerdo con los datos de la figura 7.  
 b) Modifique los cálculos anteriores para el caso en que  $\psi = -45^\circ$ . ¿Cuál es la diferencia en el campo final?

$$\vec{E}_{in}(\vec{r}) = E_0(\hat{x} + j\hat{y})e^{-jkz}$$

$$n_O = 1,43$$

$$n_E = 1,45$$

$$d = 9,75 \mu\text{m}$$

$$\lambda = 0,78 \mu\text{m}$$

$$\psi = 45^\circ$$

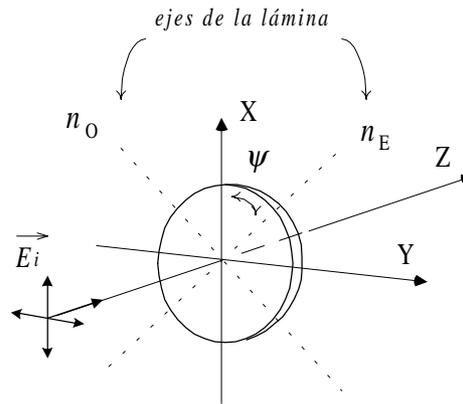


Fig. 7 Una lámina de retardo sólo admite propagación de ondas planas en su interior con polarización lineal y paralela a alguno de sus dos ejes propios

**33.** La lámina de retardo del problema anterior se denomina *lámina de lambda cuartos*. El nombre proviene del hecho de que provoca un desfase entre las dos componentes paralelas a sus ejes, de valor  $\pi/2$ , que es la cuarta parte de un ciclo de fase completo ( $2\pi$ ). Las láminas de lambda cuartos se utilizan para convertir una polarización lineal en circular, para lo que sólo hay que incidir con el ángulo adecuado ( $45^\circ$ ) respecto a sus ejes, a fin de igualar las amplitudes. También sirve, recíprocamente, para convertir una polarización circular en lineal, como se ha visto en el problema anterior. Sin embargo un polarizador también convierte una polarización circular en lineal. ¿Cuál es la ventaja de la lámina frente al polarizador?

**34.** Junto a las láminas de lambda cuartos, el otro tipo más popular son las *láminas de lambda medios*. Éstas tienen un comportamiento del todo similar a las anteriores, pero ahora el desfase que provocan entre las componentes paralelas a sus ejes es de  $\pi$ . La cuestión es:

- ¿Cómo afecta a una onda con polarización lineal el paso a través de una lámina de lambda medios? Suponga que la onda incide con su campo eléctrico formando un determinado ángulo  $\psi$  respecto a uno de los ejes de la lámina.
- ¿Cómo afecta a una onda con polarización circular?

**35.** Un investigador ha encontrado en el cajón de una mesa del laboratorio dos elementos ópticos, y no sabe si son polarizadores o láminas de retardo. Para averiguarlo dispone de un láser de He-Ne, cuyo tipo de polarización no recuerda, y de un detector de luz. Alinea el láser con el detector e intercala en el trayecto del haz el primer elemento óptico. La potencia recibida cae a la mitad al intercalar el elemento, pero no varía si lo hace girar. Quita esa lámina e intercala la segunda. Ahora la potencia recibida tampoco es sensible al giro de esa segunda lámina y esta vez ni siquiera varía significativamente por el hecho de que la lámina esté o no. El investigador saca varias consecuencias

de estos hechos, entre ellos que uno de los elementos ópticos es una lámina de retardo. Ahora le falta saber si es de  $\lambda/2$  o de  $\lambda/4$ .

Explique qué es lo que ha deducido y por qué y qué otro experimento puede hacer con esos cuatro elementos para averiguar el tipo de lámina de retardo.

**36.** Cualquier onda plana puede descomponerse en la suma de dos ondas planas con polarización circular y sentido de giro distintos.

a) Realice la deducción general a partir de la expresión

$$E_0 \hat{e} e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}} = [A(\hat{e}_1 + j\hat{e}_2) + B(\hat{e}_1 - j\hat{e}_2)] e^{-j\vec{k} \cdot \vec{r}}, \quad (\text{con } \hat{e}_1 \perp \hat{k} \text{ y } \hat{e}_1 \times \hat{e}_2 = \hat{k})$$

para una onda con polarización lineal, encontrando los valores de  $A$  y de  $B$  ( $\in \mathbb{C}$ ).

b) Repita lo anterior para el caso de una onda polarizada elípticamente a partir de la expresión adecuada para ese caso.

**37.** Una onda plana con polarización lineal que viaja en la dirección  $Z^+$  alcanza su valor máximo de campo instantáneo en  $z = 0$  y  $t = 0$ , y lo alcanza de nuevo en ese mismo punto en el instante  $t = 25$  ns. Otra onda plana con polarización lineal y ortogonal a la anterior, que también viaja en la dirección  $Z^+$ , alcanza su máximo en  $z = 3,75$  m y  $t = 25$  ns. Si ambas ondas tienen la misma frecuencia ¿cuál será el tipo de polarización de la onda conjunta, formada por la suma de las dos?

**38.** Una onda plana uniforme se propaga en el vacío. Se sabe que su frecuencia está comprendida entre los 10 MHz y los 30 MHz. La polarización de la onda tiene sentido de giro a izquierdas. El fasor campo eléctrico es

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{5}{2}(1 - j)(\hat{x} + 3j\hat{y} + \sqrt{3}\hat{z}) \exp(-j\vec{k} \cdot \vec{r}) \quad \text{V/m}$$

Se ha medido la componente  $E_y$  del campo eléctrico instantáneo simultáneamente en dos puntos, separados entre sí 80 m en la dirección de propagación de la onda, y se ha comprobado que las dos señales obtenidas en esas condiciones están en fase. Después se ha medido la misma componente en otros dos puntos, separados entre sí 60 m, y en ese caso las dos señales medidas están en contrafase.

- ¿Cuál es el vector  $\hat{k}$  de la onda? ¿Está unívocamente definido?
- ¿Qué tipo de polarización tiene la onda?
- Escriba la expresión del campo eléctrico instantáneo.
- ¿Cuál es la frecuencia de la onda?

**39.** Un conductor cilíndrico muy largo, de radio  $R$  y orientado en la dirección del eje  $Z$ , está recorrido por una densidad de corriente constante  $\vec{J} = J_0 \hat{z}$ . El conductor es un material no magnético de conductividad  $\sigma$ .

a) Calcule el campo magnético dentro y fuera del conductor y el campo eléctrico en el interior del conductor.

b) ¿Será nulo el campo eléctrico en el exterior del conductor? ¿Por qué?

El mismo conductor del apartado anterior está ahora recorrido por una intensidad de corriente que varía senoidalmente en el tiempo. A bajas frecuencias, tales que la longitud de onda es mucho mayor que la longitud considerada de hilo conductor, la corriente puede escribirse como

$$I(t) \cong I_0 \cos \omega t$$

sin necesidad de añadir un término de fase dependiente de  $z$ .

Se comprueba que *la densidad de corriente ya no se distribuye de forma homogénea* en el interior del hilo. En estas nuevas condiciones responda a las siguientes cuestiones:

c) Si no es homogénea ¿de qué variables, en coordenadas cilíndricas, podrá depender ahora la densidad de corriente?

d) De acuerdo con la respuesta obtenida en el apartado c), ¿puede existir densidad de carga en el interior del conductor?

e) ¿Qué componente o componentes vectoriales, en coordenadas cilíndricas, tendrá el fasor de campo eléctrico en el interior del conductor? ¿de qué variables coordenadas puede depender?

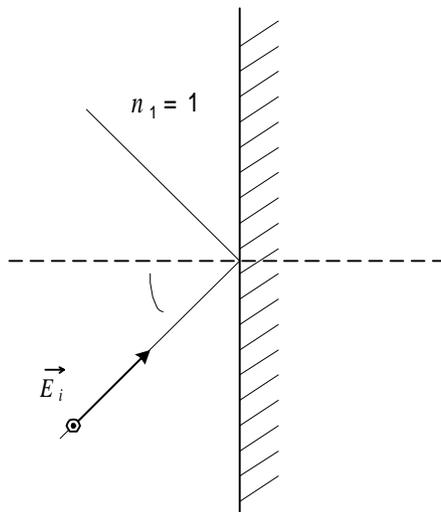
f) Supongamos que, como en el caso estático, el fasor de campo magnético sólo tiene una componente vectorial que, a su vez, sólo depende de una coordenada espacial. Razone por qué no puede variar con las otras variables espaciales (en coordenadas cilíndricas).

g) Suponiendo que el material es un buen conductor a bajas frecuencias, obtenga la ecuación diferencial que satisface el campo eléctrico en su interior.

## 4 Incidencia de ondas planas

Después de familiarizarse con el comportamiento de las ondas planas propagadas en el espacio libre llega el turno a los dos fenómenos básicos de reflexión y refracción de ondas sobre la superficie de separación con otros medios, sean dieléctricos o conductores. Se proponen problemas básicos para la correcta descripción matemática de las ondas reflejadas y transmitidas, según las leyes de Snell y las fórmulas de Fresnel. También hay problemas referentes a los casos particulares de incidencia, como son incidencia normal, incidencia según el ángulo de Brewster e incidencia por encima del ángulo crítico de reflexión total. Al final se presentan varios problemas de multicapas o incidencia múltiple.

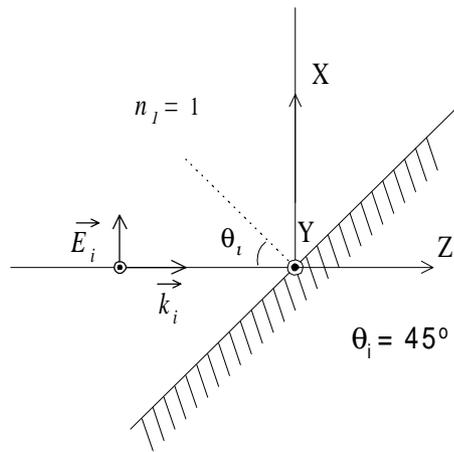
**40.** Una onda plana con polarización lineal incide oblicuamente sobre un plano conductor en la forma en que se muestra en la figura.



- Calcule las densidades superficiales de carga y de corriente que se inducen en el conductor.
- Repita el apartado anterior para una onda plana con polarización lineal ortogonal.
- ¿Qué observa en cuanto a la dirección en que circula la corriente inducida?

Fig. 8 Incidencia sobre un conductor perfecto

**41.** Una onda plana con polarización circular a izquierdas incide sobre un plano conductor inclinado  $45^\circ$  respecto a los ejes coordenados, tal como se muestra en la figura 9.



- Obtenga la expresión del campo eléctrico asociado a la onda reflejada
- ¿de qué tipo es la polarización de esa onda?
- La polarización de la onda reflejada ¿depende del ángulo de incidencia?

Fig. 9 Incidencia de una onda con polarización circular sobre un conductor perfecto

42. Una onda plana con polarización lineal incide normalmente desde el aire sobre un dieléctrico de índice de refracción  $n_2$ . La onda transmitida conserva tan sólo el 75 % de la potencia incidente. ¿Cuál es el valor de  $n_2$ ?

43. Una onda plana atraviesa normalmente una ventana de doble vidrio (dos hojas separadas por una cámara de aire). El índice del vidrio es 1,48. Calcule la fracción de potencia transmitida al otro lado de la ventana (no es necesario que considere dobles reflexiones). Repita el cálculo anterior con  $n_V = 1,78$ .

44. Se desea utilizar un prisma rectangular como retrorreflector (blanco cooperativo) de un medidor de distancias láser, de manera que devuelva la práctica totalidad de la potencia incidente en la misma dirección en que la recibe. El índice de refracción del material que forma el prisma es 1,50. ¿En qué margen de ángulos, respecto a la normal a la cara de entrada, podrá utilizarse con ese propósito? Ignórense las situaciones de incidencia en el *corner* interno del prisma.

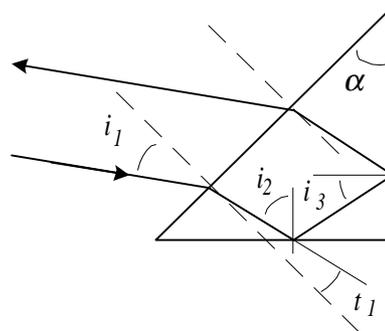
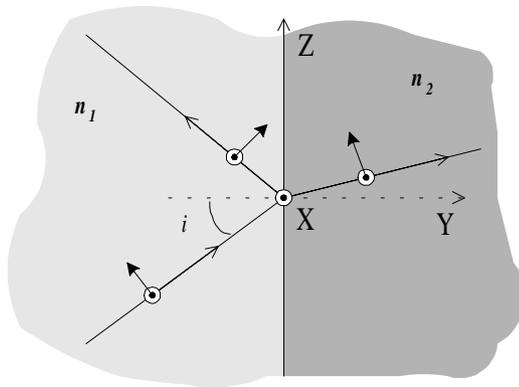


Fig. 10 Prisma rectangular utilizado como retrorreflector de radiación óptica

45. Una onda electromagnética de frecuencia  $f = 300$  MHz se propaga en un medio dieléctrico con índice de refracción  $n_1 = \sqrt{2}$ , e incide oblicuamente sobre un medio de índice  $n_2 = 2$ . El fasor campo eléctrico de la onda incidente es:

$$\vec{E}_i(\vec{r}) = E_0(\sqrt{6}(\hat{y} - \hat{z}) + \sqrt{3}(\sqrt{3} - j)\hat{x})e^{-j\vec{k}_i \cdot \vec{r}}$$



Hallar:

- El fasor campo eléctrico transmitido.
- El fasor campo eléctrico reflejado.

Fig. 11 Cambio de medio y orientaciones de las componentes paralela y perpendicular al plano de incidencia de las tres ondas: incidente, reflejada y transmitida

46. Una onda plana uniforme de frecuencia  $f = 150$  MHz tiene asociado un campo eléctrico cuyo fasor puede escribirse como

$$\vec{E}_i(\vec{r}) = E_0 \left[ 2(2\hat{z} - \hat{y}) + j \frac{5\sqrt{5}}{2} \hat{x} \right] \exp(-j\vec{k}_i \cdot \vec{r})$$

según la misma referencia de coordenadas del problema anterior (véase la Fig. 11)

La onda incide desde un medio dieléctrico no magnético de índice de refracción  $n_1 = 2$  sobre la superficie de separación con el aire ( $n_2 = 1$ ).

- Obtenga el valor de los ángulos de incidencia ( $\theta_i$ ) y de refracción ( $\theta_t$ ).
- Escriba las expresiones de los vectores de onda de las tres ondas: incidente, reflejada y transmitida.
- Identifique el tipo de polarización de la onda incidente.
- ¿Cuál es el valor del ángulo de Brewster para una onda plana que incide desde el dieléctrico sobre el aire?
- Obtenga el valor de los coeficientes de reflexión y transmisión correspondientes a ondas con polarización paralela y perpendicular al plano de incidencia.
- ¿Cuál es el valor del ángulo crítico para esa interficie?
- Escriba la expresión de la misma onda incidente cuando incide sobre la superficie de separación del dieléctrico con un ángulo de  $60^\circ$  respecto a la normal.

47. Una onda plana polarizada elípticamente, cuyo campo eléctrico es:

$$\vec{E}_i(\vec{r}) = E_0(\hat{e}_{\parallel} + \hat{e}_{\perp} e^{-j\Delta\varphi}) \exp(-j\vec{k}_i \cdot \vec{r})$$

con  $\Delta\varphi = 37^\circ$ , incide desde un medio dieléctrico sobre la superficie de separación con el aire, tal como se muestra en la figura 12.

- Escriba la expresión completa de  $\vec{E}_i(\vec{r})$ , en función del ángulo  $\theta_i$  y de las características del medio.
- Si el ángulo de incidencia es tal que  $\text{sen } \theta_i = \sqrt{\frac{2}{3}}$ , ¿cómo será la polarización de la onda reflejada?
- Para un ángulo  $\theta_i < \theta_{iC}$  ¿sería posible obtener una polarización de la onda reflejada como la obtenida en el apartado b). Justifique la respuesta.
- Escriba la expresión de la componente de campo eléctrico transmitido al aire perpendicular al plano de incidencia para la situación descrita en b).

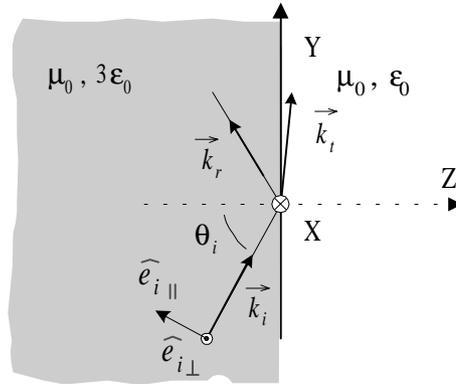


Fig. 12

48. Una onda plana incide con un cierto ángulo  $\theta_i$  sobre la superficie de separación de dos medios dieléctricos. Como resultado aparecen dos ondas, reflejada y transmitida, con las direcciones que se muestran en la figura 13.

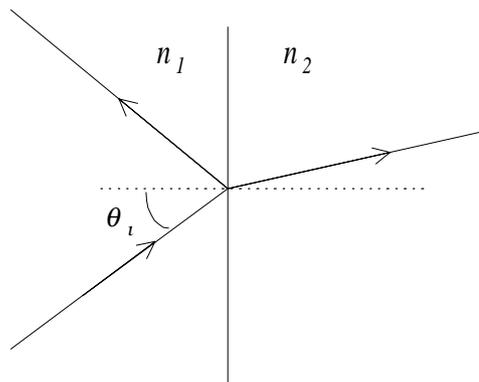


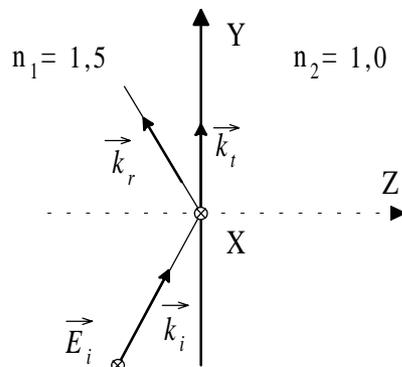
Fig. 13 Incidencia sobre la superficie de separación con otro dieléctrico. La información que da la figura es que el ángulo de transmisión es menor que el de incidencia

Indique si las afirmaciones que siguen son ciertas o no, y razónelo brevemente:

- a)  $n_1$  es mayor que  $n_2$ ;
- b) si la onda incidente tiene polarización lineal, la onda transmitida también tendrá polarización lineal;
- c) si la onda incidente tiene polarización circular, la onda reflejada también será circular;
- d) para algún ángulo de incidencia deberá ser posible cancelar la onda reflejada si la incidente tiene polarización lineal;
- e) podría conseguirse cualquier dirección de propagación para la onda transmitida hacia el segundo medio (en el plano de incidencia, al menos) eligiendo adecuadamente el ángulo de incidencia;
- f) si el ángulo de incidencia aumenta, también lo hará la potencia reflejada;
- g) existe un ángulo de incidencia tal que si la polarización de la onda incidente es circular también es circular la polarización de las ondas reflejada y transmitida;
- h) el ángulo de Brewster en este caso es menor de  $45^\circ$ ;
- i) la reflexión total sólo se lograría incidiendo desde el otro lado de la superficie de separación.

**49.** Una onda plana con polarización lineal y frecuencia 150 MHz que viaja por un medio con índice de refracción  $n_1 = 1,5$  incide sobre la superficie de separación con el aire. La polarización de la onda es perpendicular al plano de incidencia. El ángulo de incidencia es superior al ángulo crítico y se produce reflexión total.

- a) Obtenga las expresiones de los campos eléctrico y magnético transmitidos hacia el aire.
- b) Calcule la expresión del vector de Poynting de la onda transmitida.
- c) Se comprueba que la densidad de potencia de la onda transmitida medida a una distancia de 1 m de la superficie de separación es un 1% de la misma densidad de potencia medida justo sobre la superficie del dieléctrico. ¿Cuál es el valor del ángulo de incidencia?



NOTA: Fórmulas de Fresnel:

$$\rho_{\perp} = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t}$$

$$\rho_{\parallel} = \frac{n_1 \cos \theta_t - n_2 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_t + n_2 \cos \theta_i}$$

$$\tau_{\perp} = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t}$$

$$\tau_{\parallel} = \frac{2n_1 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_t + n_2 \cos \theta_i}$$

Fig. 14 Incidencia por encima del ángulo crítico

**50.** Una onda plana con polarización circular que viaja por un medio dieléctrico de índice de refracción  $n_1$  incide con un cierto ángulo sobre la superficie de separación con otro medio de índice de refracción  $n_2$  y ocurre que la onda reflejada tiene polarización lineal.

- Explique en qué dos casos particulares podría darse ese cambio de polarización.
- Si  $n_1 < n_2$  sólo es posible uno de los dos casos mencionados en el apartado a). Escriba la relación lineal que surge entre  $\cos\theta_i$  y  $\cos\theta_r$  para esa situación.
- Consideremos que el primer medio es el aire y que la onda incide sobre un dieléctrico de índice de refracción  $n$ . La onda reflejada tiene polarización lineal y la transmitida polarización elíptica. Se comprueba que la potencia transportada por la componente paralela al plano de incidencia de la onda transmitida es tres veces superior a la potencia transportada por su componente perpendicular. Con esa información, obtenga el índice de refracción  $n$  del dieléctrico.

**51.** Una onda plana con polarización lineal incide normalmente sobre un plano conductor real, con una conductividad elevada pero finita. La densidad de corriente inducida en el conductor dejará de ser estrictamente superficial y penetrará en alguna medida en el conductor.

- ¿Es nulo el campo eléctrico en el conductor?
- ¿Qué valor toma la impedancia de onda en el conductor? Utilice los siguientes datos:  $\mu = \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$  H/m,  $\sigma = 5,0 \times 10^5$  1/ $\Omega$ m, y haga el cálculo para  $f = 90$  MHz y para  $f = 10$  GHz.
- ¿Cuánto vale el coeficiente de transmisión  $\tau$  para cada uno de los dos valores de frecuencia?
- ¿Cuál es la profundidad de penetración en el conductor?
- Escriba las expresiones del campo eléctrico y de la densidad de corriente en el interior del conductor. Utilice como amplitud de la onda incidente  $E_{oi} = 10$  V/m.
- Integre la densidad anterior para determinar la corriente total que circula por unidad de longitud en el conductor.
- ¿Cuál será la potencia disipada por  $\text{cm}^2$  en el conductor?

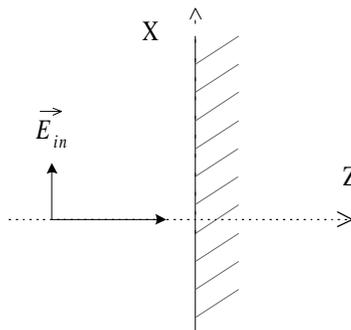


Fig. 15 Incidencia normal sobre un buen conductor

**52.** Una onda polarizada linealmente de longitud de onda  $\lambda$  incide sobre una lámina plano-paralela de grosor  $d$  de un material isótropo de índice de refracción  $n_2$ . La lámina está situada en el aire.

- ¿Para qué grosores de la lámina se conseguirá una reflexión global nula?

b) ¿Para cuáles tendremos, por el contrario, máxima reflexión? Deben considerarse reflexiones múltiples.

**53.** Se desea añadir un recubrimiento antirreflectante a un elemento óptico de índice de refracción  $n_3$ , que trabajará en el aire. Para ello se añade una capa de un material transparente de índice  $n_2$  y grosor  $d$  (véase la Fig. 16). Calcular los valores apropiados de  $d$  y  $n_2$  en función de los índices del aire  $n_1$  y del elemento óptico  $n_3$  y de la longitud de onda  $\lambda$  cuya reflexión se desea evitar.

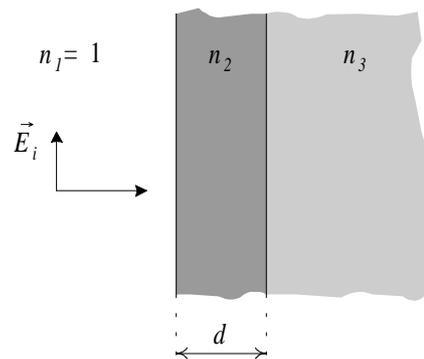


Fig. 16 Incidencia múltiple, donde deben tenerse en cuenta las dobles reflexiones de las ondas

## 5 Guías de onda

Las guías de onda representan una de las aplicaciones tecnológicas más importantes de la Teoría Electromagnética en la actualidad. En este capítulo se incluyen problemas básicos de guías de onda de paredes conductoras, planas y rectangulares. También hay alguno con guías dieléctricas. Se omiten las fibras ópticas por la dificultad que entraña su tratamiento matemático. Se pretende familiarizar al lector con los conceptos más importantes referentes a los modos propios de propagación de cada estructura.

**54.** Considérese una guía plana de paredes conductoras como la representada en la Fig. 17. (La dimensión transversal de la guía en la dirección del eje Y resulta ser mucho mayor que la separación  $d$  entre las placas, e ignoramos las variaciones de los campos en esa dirección.)

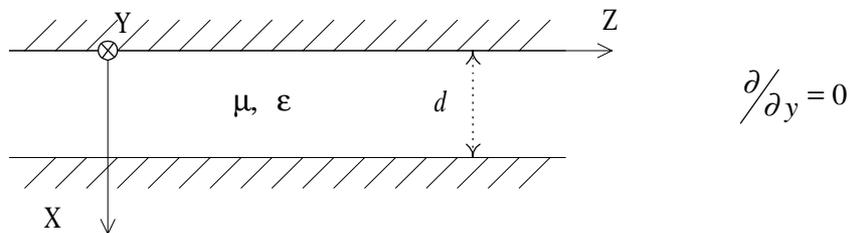


Fig. 17 Guía plana de paredes conductoras.

Se considera que ni la estructura ni los campos varían según la coordenada transversal Y

- Escriba la ecuación de onda vectorial para el campo eléctrico en el interior de la guía ( $0 < x < d$ ).
- Escriba la ecuación de onda escalar en coordenadas cartesianas para cada componente del campo eléctrico.
- Se considera un modo tipo TE ( $E_z = 0$ ), cuya expresión general podría ser:

$$E_x(x, z) = (A \operatorname{sen} k_x x + B \operatorname{cos} k_x x) \exp(-j\beta z)$$

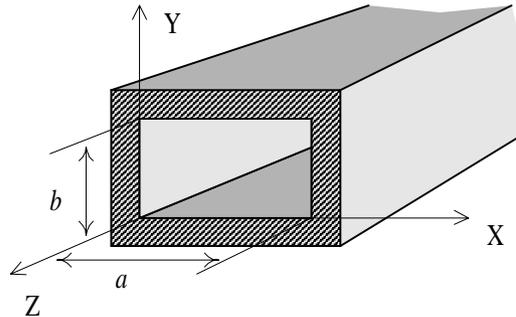
$$E_y(x, z) = (C \operatorname{sen} k_x x + D \operatorname{cos} k_x x) \exp(-j\beta z)$$

Compruebe que satisface la ecuación de onda y establezca la relación entre las constantes  $k_x$  y  $\beta$ .

- d) Compruebe que la condición de contorno aplicable al campo eléctrico obliga a anular la constante  $D$ .
- e) ¿Qué se deduce del hecho de que no haya carga en el interior de la guía para las constantes  $A$  y  $B$ ?

**55.** Una guía de ondas rectangular de paredes conductoras cuyo interior es aire tiene como dimensiones  $a = 2,28$  cm y  $b = 1,01$  cm.

- a) A la frecuencia de 8,5 GHz ¿cuál es el valor de la constante de propagación  $\beta$  para el modo  $TE_{10}$ ?
- b) ¿Cuál es la longitud de onda en la guía para ese modo?
- c) ¿Son posibles otros modos a esa frecuencia?
- d) ¿Cuál es la mínima frecuencia a la que es posible propagar algún modo?



*Fig. 18 Guía de ondas rectangular de paredes conductoras*

**56.** Teniendo en cuenta la relación de dispersión de la guía de ondas rectangular de paredes conductoras, determine las condiciones que deben satisfacer las dimensiones  $a$  y  $b$  de una guía (en las direcciones  $X$  e  $Y$  respectivamente) para que se cumplan las especificaciones siguientes:

- a) Que el modo fundamental sea el  $TE_{10}$  ( y no el  $TE_{01}$ ).
- b) Que el siguiente modo posible sea el  $TE_{01}$ .

Definimos la región de trabajo como el margen de frecuencias tal que su límite inferior sea un 30% mayor que la frecuencia de corte del modo fundamental y el límite superior sea un 30% menor que la frecuencia de corte del modo siguiente ( $TE_{01}$ ).

- c) Independientemente de los apartados anteriores, determinar la condición de existencia de ese margen de trabajo.
- d) Calcule el margen de valores de  $b$  en el que las tres condiciones anteriores pueden satisfacerse simultáneamente.
- e) Si se desea que la frecuencia central en la región de trabajo sea 10 GHz ¿cuál será el margen de valores posibles para  $a$  de acuerdo con los requisitos anteriores?

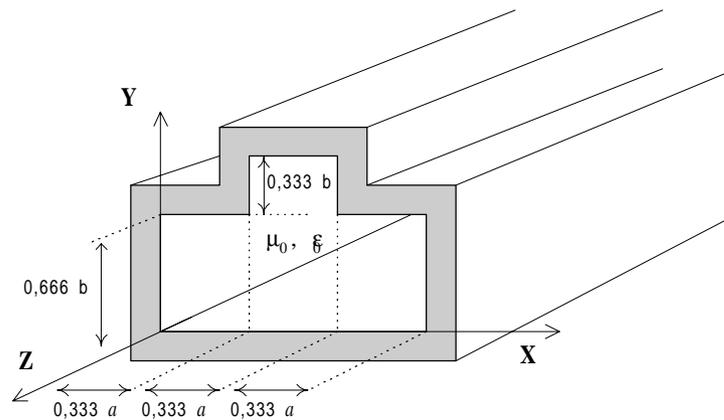
**57.** Se desea diseñar una guía de onda rectangular de paredes conductoras que cumpla los siguientes requisitos:

- i) que solamente permita la propagación del modo fundamental,  $TE_{10}$ , entre, al menos, las frecuencias de 2,3 GHz y 2,5 GHz;
- ii) que no propague ningún modo por debajo de 2,2 GHz;
- iii) que el siguiente modo en propagarse sea el  $TE_{01}$ .

- a) Escriba la expresión de la constante de propagación  $\beta$  en función de las dimensiones de la guía y de la frecuencia.
- b) Escriba las expresiones genéricas de las frecuencias de corte de los modos implicados en el diseño.
- c) Obtenga los valores mínimos de las dimensiones  $a$  y  $b$  de la guía que permitan cumplir las especificaciones anteriores.

**58.** Se intenta comprobar si en la guía de paredes conductoras de la figura 19 puede propagarse un modo cuyo campo eléctrico viene dado por:

$$\begin{cases} E_x(\vec{r}) = E_{0x} \cos k_x x \sin k_y y \exp(-j\beta z) \\ E_y(\vec{r}) = E_{0y} \sin k_x x \cos k_y y \exp(-j\beta z) \\ E_z(\vec{r}) = 0 \end{cases}$$



*Fig. 19 Guía de onda de paredes conductoras en un formato no habitual*

- a) Examine si el campo descrito puede satisfacer la ecuación de onda y las condiciones de contorno.
- b) ¿Cuál será el modo fundamental si  $a > b$ ?
- c) Si  $a = 6,00$  cm ¿qué valor máximo puede tener  $b$  para que la guía sea monomodo hasta la frecuencia  $f = 9,00$  GHz?

**59.** Una guía rectangular de paredes conductoras se utiliza para transmitir una señal de elevada potencia hacia la antena emisora de un radar. La guía es monomodo (con el modo  $TE_{10}$ ) entre, al menos, las frecuencias de 8,0 GHz y 9,0 GHz, que constituyen el margen de trabajo.

- a) De los cuatro límites  $a_{\min}$ ,  $a_{\max}$ ,  $b_{\min}$  y  $b_{\max}$  que deben imponerse en el diseño de la guía, tres quedan ya definidos con las condiciones anteriores. Calcúlelos.
- b) Modifique los resultados obtenidos en el apartado anterior añadiendo a cada uno un margen de seguridad del 10%, que garantice aquellas condiciones de guiado.

Se precisa que la guía sea capaz de transmitir una potencia elevada hacia la antena, en todo el margen de frecuencias dado, pero sin que el campo eléctrico de la onda sobrepase el valor de ruptura del aire, estimado en  $3,0 \times 10^6$  V/m en condiciones normales, ya que eso provocaría la ionización del aire dentro de la guía con el consiguiente corte de la transmisión.

- c) Calcule la expresión de la potencia transmitida por la guía para el modo  $TE_{10}$ .
- d) ¿Cuál es la potencia máxima que podría propagar la guía a 8,5 GHz si tuviera las dimensiones  $a_{\max}$  y  $b_{\max}$ ? Utilice los resultados del apartado b).
- e) ¿Qué alternativas hay para que la guía pudiera transportar una potencia mayor que la calculada en el apartado anterior?

**60.** En una guía rectangular de paredes conductoras hacemos propagar un único modo TM. La distribución de las tres componentes de campo eléctrico según las direcciones transversales, X e Y, se muestra en la figura 20.

- a) Razone qué componente del campo eléctrico ( $E_x$ ,  $E_y$ ,  $E_z$ ) corresponde a cada una de las curvas que se muestran en la figura ( $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$ ).
- b) ¿De qué modo se trata? (valores de  $m$  y  $n$ ). Escriba la dependencia explícita de cada componente con  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .
- c) Obtenga la expresión de las amplitudes de  $E_x$  y  $E_y$  ( $E_{0x}$  y  $E_{0y}$ ) en función de la de  $E_z$  ( $E_{0z}$ ) para este modo (en la figura no se han escalado de forma proporcional a sus valores reales de amplitud).
- d) Si  $a = 1$  cm y  $b = 1,5$  cm ¿a partir de qué frecuencia existe el modo descrito?

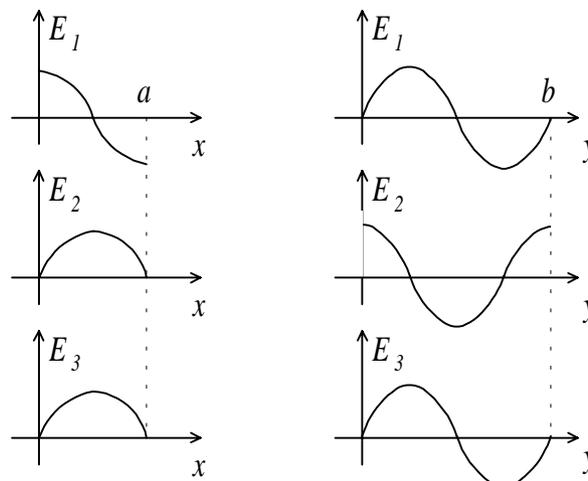


Fig. 20 Forma de variación de un modo de una guía rectangular según las direcciones transversales

**61.** Una guía de onda dieléctrica plana está formada por una lámina de grosor  $2d$  e índice de refracción  $n_2$ , limitada en el sentido transversal por dos medios semi-infinitos de índice de refracción  $n_1$ , tal como se muestra en la figura 21.

El campo eléctrico de un modo que se propaga a lo largo de la guía es:

$$E_y(x, z) = \begin{cases} E_0 \cos(k_x d) e^{-\gamma(x-d)} e^{-j\beta z} & (x > d) \\ E_0 \cos(k_x x) e^{-j\beta z} & (-d < x < d) \\ E_0 \cos(k_x d) e^{\gamma(x+d)} e^{-j\beta z} & (x < -d) \end{cases}$$

donde se está asumiendo que no hay variación de los campos ni de la guía en la dirección del eje Y, y con las otras dos componentes del campo eléctrico nulas.

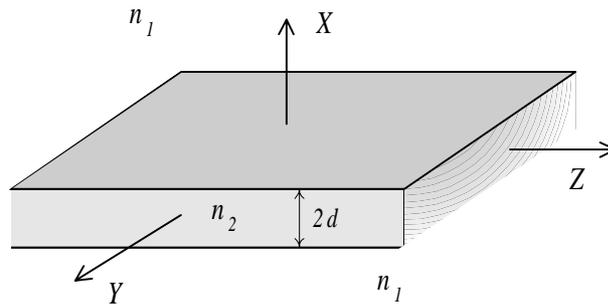


Fig. 21 Guía dieléctrica plana. No se consideran variaciones en la dirección del eje Y

- Compruebe que el campo eléctrico cumple las condiciones de contorno exigibles.
- ¿Qué componentes tiene el campo magnético? ¿De qué tipo de modo se trata? Calcule la componente tangencial de campo magnético en los tres medios.
- Obtenga las tres relaciones que deben existir entre  $k_x$ ,  $\gamma$  y  $\beta$ , en función de los parámetros propios de la guía ( $n_1$ ,  $n_2$  y  $d$ ) y de la longitud de onda (o de  $k_0$ ) para que se satisfagan todas las condiciones necesarias.

**62.** La guía de ondas mostrada en la figura 22, de sección rectangular y paredes conductoras perfectas, está rellena parcialmente de un material dieléctrico de permitividad relativa  $\epsilon_{r1}$ . El fasor de campo eléctrico de la onda que se propaga por su interior responde a la expresión:

$$\vec{E}(\vec{r}) = \begin{cases} \hat{y} (A \cos \alpha_1 x + B \operatorname{sen} \alpha_1 x) \exp(-j\beta z) & 0 < x < \frac{a}{2} \\ \hat{y} (C \cos \alpha_0 x + D \operatorname{sen} \alpha_0 x) \exp(-j\beta z) & \frac{a}{2} < x < a \end{cases}$$

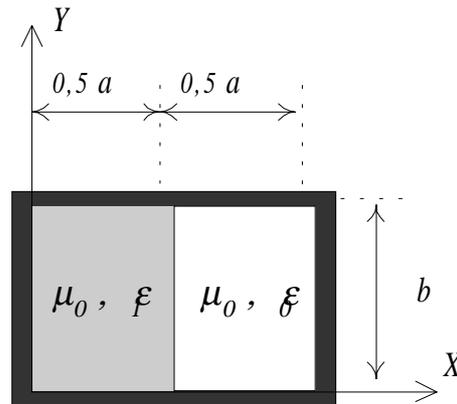


Fig. 22 Sección de una guía conductora parcialmente rellena de un dieléctrico distinto del aire

- Escriba las relaciones que deben satisfacerse entre  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$  y  $\beta$  para que el campo dado arriba corresponda a una onda posible.
- Halle el campo magnético asociado a la onda.
- A partir de las expresiones de los campos eléctrico y magnético, obtenga las relaciones entre las constantes A, B, C y D.
- Obtener la ecuación de dispersión.
- Tomando el caso particular en que  $\alpha_1 = 3\alpha_0$  encuentre el valor mínimo (no trivial) de la constante  $\alpha_0$ .
- Obtenga el valor que debe tomar la permitividad relativa del dieléctrico para que la solución del apartado anterior se dé para una frecuencia de 30 GHz, tomando  $a = 1,0$  cm.
- Dibuje la forma del campo eléctrico en su dependencia con  $x$  para la relación dada en el apartado e).

NOTA:

$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg}x \pm \operatorname{tg}y}{1 \mp \operatorname{tg}x \operatorname{tg}y} \quad \operatorname{tg}(3x) = \frac{3\operatorname{tg}x - \operatorname{tg}^3x}{1 - 3\operatorname{tg}^2x}$$

## 6 Radiación de antenas elementales

La solución de la ecuación de onda en presencia de las fuentes que producen los campos es el tema que trata este último capítulo. Esas fuentes son las distribuciones de carga y corriente del que, en cada caso, sea el sistema radiante o antena. Se presentan problemas de radiación de dipolos eléctricos elementales y de algunas agrupaciones sencillas de dipolos. Otros tipos de antenas con distribuciones de corrientes distintas de la homogénea, que es la propia del dipolo elemental, se verán en cursos más avanzados. Se hace hincapié en la superposición de los campos creados por los diferentes elementos radiantes y en la obtención y representación de los diagramas de radiación de tales agrupaciones.

**63.** Dos dipolos eléctricos cortos ( $l \ll \lambda$ , donde  $l$  es la longitud del dipolo) e idénticos, alimentados por corrientes cuyos fasores son  $I_1$  e  $I_2$  respectivamente, están orientados según la dirección del eje Z y separados una distancia  $2d$  a lo largo del eje Y.

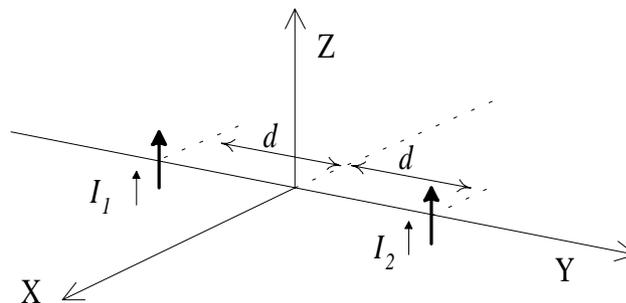


Fig. 23 Agrupación de dos dipolos eléctricos elementales

Sabiendo que el campo eléctrico radiado a grandes distancias por un único dipolo situado en el origen de coordenadas es

$$\vec{E}_{rad}(\vec{r}) \cong jC \frac{\text{sen}\theta}{r} e^{-jkr} \hat{\theta} \quad (r \gg l, \lambda)$$

a) Comprobar que, si las corrientes son iguales en módulo y fase, el campo radiado por el sistema de la figura es:

$$\vec{E}_{rad}(\vec{r}) \cong 2jC \frac{\text{sen}\theta}{r} \cos(kd \text{sen}\theta \text{sen}\varphi) e^{-jkr} \hat{\theta} \quad (r \gg d, \lambda)$$

Supóngase en adelante que  $I_2 = -I_1$ .

- b) Calcule el campo total radiado en este caso por el sistema.  
 c) Obtenga el campo magnético total radiado y la densidad de potencia media.  
 d) Dibuje las secciones del diagrama de radiación según los tres planos cartesianos X-Y, X-Z e Y-Z tomando  $kd = \pi/2$ .  
 e) Se dispone de un sistema con  $d = 2$  cm diseñado para aplicaciones en la llamada banda X (el intervalo de frecuencias 8,2-12,4 GHz). Obtenga el valor de la frecuencia de esa banda para la que la radiación es máxima en la dirección del eje Y.

64. El campo radiado por una determinada antena viene dado por  $\vec{E} = j \frac{\eta_0 I_0}{2\pi r} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{\sin \theta} e^{-jkr} \hat{\theta}$ .

- a) Calcule el fasor campo magnético.  
 b) Calcule la densidad de potencia media radiada.  
 c) Dibuje una sección vertical del diagrama de radiación de forma aproximada.

65. El potencial vector creado a grandes distancias del origen por un dipolo eléctrico elemental de longitud  $l$  se puede escribir como:

$$\vec{A}(\vec{r}) \cong \frac{\mu_0 I l}{4\pi r} e^{-jkr} \exp(jk\hat{r} \cdot \vec{r}_0) \hat{u}$$

donde  $\vec{r}_0$  señala la posición del dipolo y  $\hat{u}$  es el vector unitario que indica su orientación. Utilice esa expresión en la situación que se describe a continuación.

Sean dos dipolos eléctricos elementales idénticos, situados sobre el eje Z y separados una distancia  $2d$ . Por ambos dipolos circulan corrientes de igual frecuencia, cuyos fasores respectivos son  $I_1$  e  $I_2$ . Los dipolos están orientados en la dirección del mismo eje Z.

- a) Calcule el campo total radiado por el conjunto de los dipolos.  
 b) Obtenga el campo magnético.  
 c) Si las corrientes tienen igual amplitud y  $d = \lambda$ , ¿cuál debe ser el desfase entre las corrientes para que se produzca un nulo de radiación en el plano  $z = 0$ .

66. Se disponen cuatro dipolos idénticos simétricamente respecto al origen de coordenadas, en los lados de un cuadrado de lado  $2d$  en el plano XZ (Fig. 24). Las corrientes que los recorren son de igual amplitud y fase.

- a) Obtenga la expresión del potencial vector creado por el sistema a grandes distancias. Puede utilizar la fórmula general del potencial a grandes distancias que se dio en el problema anterior.  
 b) Calcule el campo eléctrico total de acuerdo con la aproximación:  

$$\vec{E}(\vec{r}) \cong -j\omega (A_\phi \hat{\phi} + A_\theta \hat{\theta})$$
  
 c) Obtenga el vector de Poynting del conjunto, tomando  $d = 0,25\lambda$ . ¿En qué dirección o direcciones se radia el máximo de potencia?.

- d) A partir del resultado del apartado c) represente el diagrama de radiación mediante sus secciones en los planos XY, YZ y XZ.
- e) ¿Cómo modificaría las fases de las corrientes de los dipolos para girar 90° el máximo del diagrama de radiación en el plano horizontal?

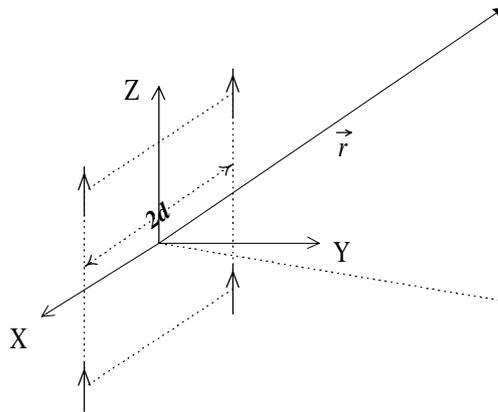


Fig. 24 Agrupación de dipolos en forma de matriz bidimensional

67. Tenemos dos dipolos orientados en la dirección del eje Z y situados en las coordenadas  $(d,0,0)$  y  $(-d,0,0)$ , tal como se muestra en la figura 25.

- a) Obtenga el potencial total creado por el sistema. Ambos tienen igual longitud  $h$ , pero distinto valor de corriente,  $I_2 = 2I_1$ .
- b) Obtenga la expresión del campo eléctrico total radiado. Puede utilizar la expresión aproximada para grandes distancias dada en el problema anterior.
- c) Calcule la expresión del diagrama de radiación en el plano XY para un valor  $d = \lambda/2$ . Dibújelo. ¿Aparecen ceros de radiación? ¿Por qué?
- d) Se desea añadir un tercer dipolo en el origen de coordenadas de modo que se cancele la radiación emitida en la dirección del eje X en campo lejano. Asumiendo que tendrá la misma longitud y orientación que los anteriores, calcule el módulo y la fase de la corriente que deberá circular por ese dipolo para conseguir aquello.

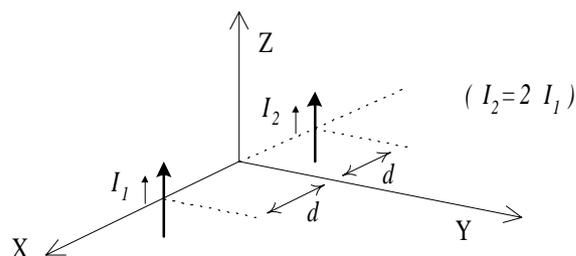


Fig. 25

68. Dos dipolos radiantes elementales están situados sobre el eje Z, con su centro separado del origen una distancia  $d$  y orientados en el plano YZ, tal como muestra la figura 26. Se sabe que el potencial vector que produce a grandes distancias un dipolo radiante, orientado en la dirección  $\hat{u}$  y situado en un punto  $\vec{r}_0$  respecto al origen, puede escribirse en la forma:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} I h \frac{e^{-jk r}}{r} \exp(+jk\hat{r} \cdot \vec{r}_0) \hat{u}$$

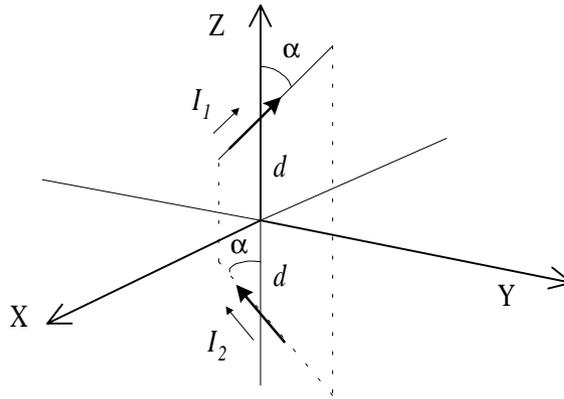


Fig. 26

- a) Si se toman los valores  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ,  $d = \frac{\lambda}{4}$  y  $I_2 = I_1 e^{j\psi}$ , probar que el potencial vector producido por ambos dipolos a grandes distancias tiene como componentes:

$$A_y = A_{0Y} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}(\pi \cos\theta - \psi)\right)$$

$$A_z = A_{0Z} \cos\left(\frac{1}{2}(\pi \cos\theta - \psi)\right)$$

Escriba explícitamente el valor de  $A_{0Y}$  y de  $A_{0Z}$ .

- b) Calcule el campo eléctrico radiado por el conjunto de ambos dipolos.  
 c) Averigüe el tipo de polarización, en función del desfase  $\psi$ , que adquieren las ondas que viajan en la dirección del eje X.  
 d) Hallar la densidad de potencia media radiada para el caso particular  $\psi = \pi$   
 e) Dibuje las secciones del diagrama de radiación para los planos XY, YZ y XZ para el caso anterior.