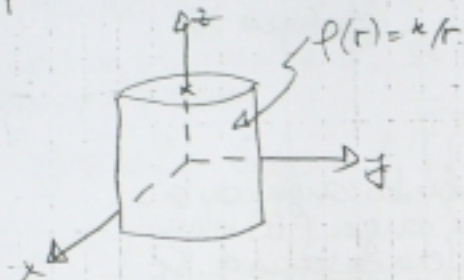


10x - F132A

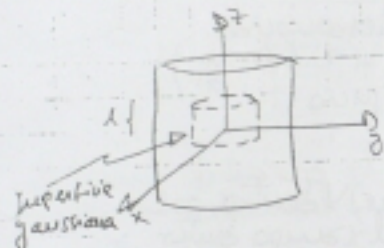
FOTOCOPIAS INTEGRAL
ALMIRANTE LATORRE 512
FONO: 671 9328

Prof. E. Cariani
Aux: I. Cobles

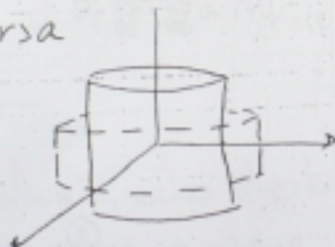
21) Calcular el campo generado por una densidad de carga $\rho(r) = k/r$ dentro de un cilindro de radio a y largo infinito. Grafique el módulo del campo.



a) $r < a$



b) $r > a$



Sol: Por simetría

$$\vec{E}(r, \theta, z) = E(r) \hat{r}$$

luego, usando Gauss.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

$$2\pi r l E(r) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_0^r \frac{k}{r} r dr d\theta dz$$

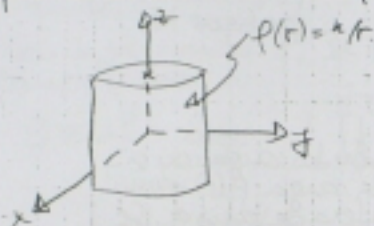
$$\vec{E}(r) = \frac{k}{\epsilon_0}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0}$$

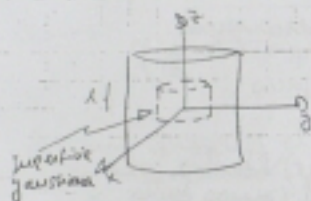
$$2\pi r l E(r) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^l \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{k}{r} r dr d\theta dz$$

①

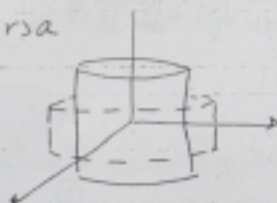
El calcular el campo generado por una densidad de carga $\rho(r) = k/r$ dentro de un cilindro de radio a y largo infinito. Graficar el módulo del campo.



a) $r < a$



b) $r > a$



Sol: Por simetría

$$\vec{E}(r, \theta, z) = E(r) \hat{r}$$

luego, usando Gauss

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = Q_{enc} \quad \rho(r)$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \int \int \frac{k}{r} r dr d\theta dz$$

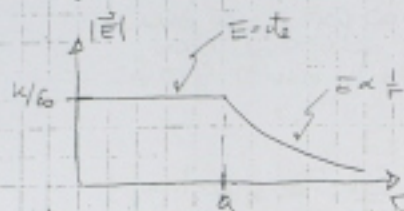
$$E(r) = \frac{k}{\epsilon_0}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = Q_{enc}$$

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\epsilon_0} \int \int \int \frac{k}{r} r dr d\theta dz$$

$$\rightarrow E(r) = \frac{k \cdot a}{\epsilon_0 r}$$

gráfico del campo.



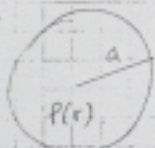
propuesto. Calcular
gráfique V.

[2] Se tiene una distribución de carga con simetría esférica y densidad de carga $\rho(r)$ constante en el interior de una esfera de radio a . Se sabe que, además, el potencial eléctrico en el interior de la esfera está dado por

$$V(r) = \frac{V_0}{a^4} r^3 + k, \quad k \text{ es constante desconocida.} \quad (A = \frac{V_0}{a^4})$$

Calcular ρ , E y V en todo el espacio

Sol:



Como se conoce V dentro, podemos obtener el campo dentro de la esfera

$$V(r, \theta, \phi) = V(r) \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0$$

$$E = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial r} \hat{r} + \dots$$

$$\boxed{|\vec{E}| = -\frac{\partial V}{\partial r} \hat{r}}$$

Como se conoce el campo, se puede obtener ρ ley de Gauss

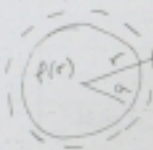
$$\rho(r) = \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 E_r(r)) + \dots$$

$$\rho(r) = \epsilon_0 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 (3Ar^2))$$

$$\boxed{\rho = -12 \epsilon_0 A r}$$

Como se conoce ρ , se puede obtener el campo fuera

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{enc}}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V \rho r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$$



$$\rightarrow 4\pi r^2 E(r) = \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V -12 \epsilon_0 A r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi$$

$$\boxed{E(r) = -\frac{3Aa^4}{r^2}} \quad \frac{3 \cdot \frac{1}{4} \cdot a^4}{\frac{1}{4} \cdot r^2}$$

Si, como conocemos el campo afuera, podemos determinar el potencial fuera

$$V = - \int \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_{\infty}^r -\frac{3Aa^4}{r^2} dr = -\frac{3Aa^4}{r}$$

$$\boxed{V = -\frac{3Aa^4}{r}}$$

Finalmente, como el potencial es continuo

$$V(a^+) = V(a^-) \rightarrow -\frac{3Aa^4}{a} = Aa^3 + K \rightarrow \boxed{K = -4Aa^3}$$

33) Se tiene una esfera de radio R cargada con densidad de carga descompuesta. Se sabe que en su interior el campo eléctrico es radial y tiene magnitud constante E_0 . Fuera de la esfera solo existe vacío y en la superficie no existe ninguna densidad superficial de carga.

a) Determine la densidad de carga en el interior de la esfera.

b) Deduzca la siguiente ecuación: $\nabla^2 V = -\rho/\epsilon_0$

c) Usando (b), determine el potencial V en cualquier punto del espacio. Para ello se sabe que $V(r \rightarrow \infty) = 0$, $V(r=0)$ finito, $E(r^+) = E(r^-)$.

Sol: a) $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ (Ley de Gauss)

$$\begin{aligned} \rho &= \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} \\ &= \epsilon_0 \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \cdot E) = \frac{2\epsilon_0 E_0}{r} \end{aligned}$$

b) $\nabla \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$
 $\nabla \times \vec{E} = 0 \rightarrow \vec{E} = -\nabla V$

$$\rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = \nabla \cdot (-\nabla V) = -\nabla^2 V = \rho/\epsilon_0$$

$$\rightarrow \boxed{\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}} \quad \text{Ecuación de Poisson}$$

c) hay que ver las zonas $r > R$ y $r < R$.

$r < R$ $\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) = -\frac{2\epsilon_0 E_0}{r} \left(= \frac{\rho}{\epsilon_0} \right)$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) = -2\epsilon_0 E_0 r / \int$$

$$r^2 \frac{\partial V}{\partial r} = -\epsilon_0 E_0 r^2 + K_1$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = -E_0 + \frac{k_1}{r^2} \quad / \int$$

$$V = -E_0 r - \frac{k_1}{r} + k_2$$

2º

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) = 0 \quad / \int$$

$$\rightarrow r^3 \frac{\partial V}{\partial r} = k_3$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{k_3}{r^2} \quad / \int$$

$$V = -\frac{k_3}{r} + k_4$$

Veremos las condiciones de borde

$$1) V(r=\infty) = 0 \Rightarrow k_4 = 0$$

$$2) V(r=0) \text{ finito} \Rightarrow k_1 = 0$$

$$3) E(r^+) = E(r^-) \Rightarrow \frac{k_3}{R^2} = -E_0 \Rightarrow k_3 = -E_0 R^2$$

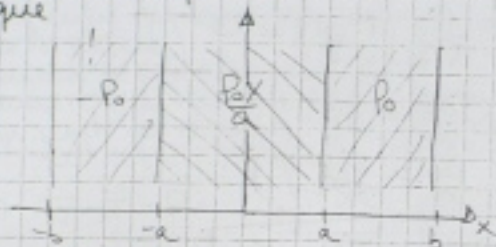
$$4) V(R^+) = V(R^-) \Rightarrow -E_0 R + k_2 = E_0 R \Rightarrow k_2 = 2E_0 R$$

$\rightarrow$ Se conoce el potencial en todo el espacio

P4) Considere la distribución de cargas dada por

$$\rho(x) = \begin{cases} -\rho_0 & -b \leq x < -a \\ \frac{\rho_0 x}{a} & -a \leq x \leq a \\ \rho_0 & a \leq x \leq b \end{cases}$$

Determine el campo eléctrico en todo el espacio grafique



Sol: Para calcular el campo de una "pared" cargada se usará el campo de un plano infinito. Recordemos que

$$\vec{E}_{\text{pared}} = \begin{cases} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{n} & x > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{n} & x < 0 \end{cases}$$

Luego, una pared es una suma ∞ de planos $\rightarrow$ integrar. Además, Notar que

$$P = \frac{dQ}{dV} = \frac{dQ}{dx dy dz} = \frac{dQ}{dy dz} \cdot \frac{1}{dx} = \frac{\sigma}{dx}$$

$$\rightarrow P dx = \sigma$$

$$\Rightarrow \vec{E}_{\text{pared}} = \frac{1}{2\epsilon_0} \left[\int_{-\infty}^x P dx + \int_x^{\infty} P dx \right]$$

calcular para todas las zonas

$$I) -\infty < x < b$$

$$\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \left[\int_{-\infty}^b -\rho_0 dx - \int_{-\infty}^a \frac{\rho_0 x}{a} dx - \int_a^b \rho_0 dx \right] = 0 \hat{i}$$

$$II) -b < x < -a$$

$$\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \left[\int_{-\infty}^x -\rho_0 dx - \int_x^a -\rho_0 dx - \int_{-\infty}^a \frac{\rho_0 x}{a} dx - \int_a^b \rho_0 dx \right]$$

$$\vec{E} = -\frac{\rho_0}{\epsilon_0} (x+b) \hat{i}$$

$$III) -a < x < a$$

$$\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \left[\int_{-\infty}^x -\rho_0 dx + \int_{-\infty}^a \frac{\rho_0 x}{a} dx - \int_x^a \frac{\rho_0 x}{a} dx - \int_a^b \rho_0 dx \right]$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \left[\frac{x^2}{2a} - \frac{b+a}{2} \right] \hat{i}$$

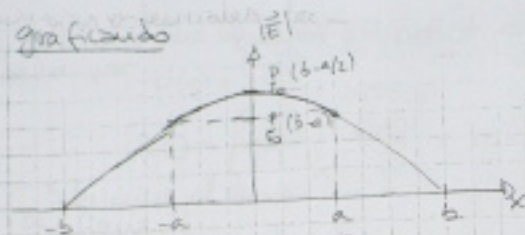
$$IV) a < x < b$$

$$\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \left[\int_{-\infty}^a -\rho_0 dx + \int_{-\infty}^a \frac{\rho_0 x}{a} dx + \int_a^x \rho_0 dx - \int_x^b \rho_0 dx \right]$$

$$\Rightarrow \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} (x-b) \hat{i}$$

$$V) b < x < \infty \quad \vec{E} = 0 \text{ (compensado)}$$

graficando



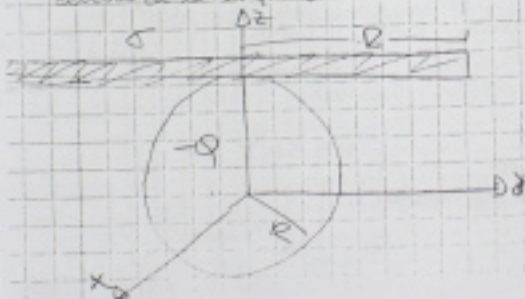
Por Un disco de radio R , masa m , cargado con una densidad superficial σ positiva y uniforme, se encuentra en contacto tangencial con una esfera de radio $R/2$ (cargada con Q ($Q > 0$)) distribuida uniformemente en el volumen de ella, tal como se indica en la figura. Determine

a) E y V producido por la esfera en todo punto del espacio

b) Energía electrostática propia de la esfera.

c) Fm y gl la esfera ejerce so por el disco

d) Velocidad que adquiere el disco cuando penetra dentro de la esfera, hasta que sus centros coinciden, suponiendo que la esfera permanece en reposo y que el disco puede penetrar libremente dentro de la esfera



2b) Cuando el tes de Gauss, se obtiene trivialmente que

$$a) \quad \vec{E} = \begin{cases} -\frac{2Qr}{\pi\epsilon_0 R^3} \hat{r} & r < R/2 \\ -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r} & r > R/2 \end{cases} \quad (\text{comprobar})$$

Potencial: tomando referencia en ∞

$$\begin{aligned} r > R \\ V &= - \int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{r} \\ &= - \int_{\infty}^r -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r < R \\ V &= - \int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{r} \\ V &= - \int_{\infty}^R -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dr - \int_R^r -\frac{2Qr}{\pi\epsilon_0 R^3} dr \\ V &= \frac{Q}{\pi\epsilon_0 R} \left(\frac{r^2}{R^2} - \frac{3}{4} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b) \quad U_{el} &= \frac{1}{2} \int \rho Q_{enc} V_{enc} \\ &= \frac{1}{2} \iiint \underbrace{\frac{6Q}{\pi R^3} r^2}_{\rho} \underbrace{\frac{Q}{\pi\epsilon_0 R} \left(\frac{r^2}{R^2} - \frac{3}{4} \right)}_V d\tau \\ &= \frac{3}{10} \frac{Q^2}{\pi\epsilon_0 R} \end{aligned}$$

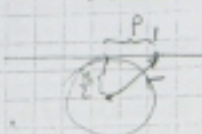
$$c) \vec{F} = \oint d\vec{Q} \cdot \vec{E}$$

$$dQ = \sigma p dp d\phi$$

p coord. radial en cilíndricas

$$\vec{E} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}$$

En este caso se cumple



$$\vec{r} = \frac{R}{2} \hat{k} + p \hat{p}$$

$$\frac{\hat{r}}{r^2} = \frac{\frac{R}{2} \hat{k} + p \hat{p}}{(R^2/4 + p^2)^{3/2}}$$

$$\rightarrow \vec{F} = \int_0^{2\pi} \int_0^R \underbrace{\sigma p dp d\phi}_{dQ} \cdot \underbrace{\left(\frac{-Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\frac{R}{2} \hat{k} + p \hat{p})}{(R^2/4 + p^2)^{3/2}} \right)}_{\vec{E}}$$

$$\vec{F} = -\frac{\sigma Q R}{2\pi\epsilon_0} \hat{k} \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{p dp}{(R^2/4 + p^2)^{3/2}}$$

resolviendo

$$\boxed{\vec{F} = -\frac{\sigma Q}{2\epsilon_0} \left[1 - \frac{\sqrt{5}}{5} \right] \hat{k}}$$

e) Rx energía. Al no haber fuerzas no conservativas (visc, fric, interatómicas, etc), ésta se conserva

$$E_o = E_f$$

$$U_o + K_o = U_f + K_f$$

$$\int_0^L dQ \cdot V + \frac{1}{2} m v_o^2 = \int_f dQ V + \frac{1}{2} m v_f^2$$

que calcula las energías potenciales electrostáticas mutuas

$$U_{el0} = \iint dQ \cdot V = \iint_0^{2\pi} \int_0^R \sigma \rho d\rho \cdot \left(\frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 (\rho^2 + R^2)^{3/2}} \right)$$

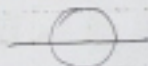
(solo el disco está fuera de la esfera.)

$$U_{el0} = -\frac{Q\sigma R}{4\epsilon_0} (\sqrt{5} - 1)$$



$$U_{elf} = \iint dQ V = \iint_0^{2\pi} \int_0^{R/2} \sigma \rho d\rho \left(\frac{Q}{\pi\epsilon_0 R} \left(\frac{\rho^2}{R^2} - \frac{3}{4} \right) \right) \\ + \iint_0^{2\pi} \int_{R/2}^R \sigma \rho d\rho \left(\frac{-Q}{4\pi\epsilon_0 R} \right)$$

(parte del disco dentro de esfera y parte fuera. Además, r.c.p.)



$$U_{elf} = -\frac{13}{32} \frac{Q\sigma R}{\epsilon_0}$$

finalmente

$$N_f = \sqrt{\frac{2}{\epsilon_0}} (U_{el0} - U_{elf})$$

$$N_f = \sqrt{\frac{Q\sigma R}{16\pi\epsilon_0}} (21 - 8\sqrt{5})$$