

Pauta P3C2 FI2001 Mecánica

Profesor: Claudio Romero

Primavera/2011

a) La energía mecánica del sistema se escribe como (usando el teorema del coseno)

$$E = K + U = \frac{m}{2} R^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} k R^2 (\sqrt{3 - 2 \cos \theta} - \beta)^2$$

para los puntos de equilibrio se hace $\frac{\partial U}{\partial \theta} = 0$

$$k R^2 (\sqrt{3 - 2 \cos \theta} - \beta) \frac{\sin \theta}{\sqrt{3 - 2 \cos \theta}} = k R^2 (1 - \frac{\beta}{\sqrt{3 - 2 \cos \theta}}) \sin \theta = 0$$

se tiene inmediatamente que dos puntos de equilibrio son $\phi = 0, \pi$. Los otros puntos se obtienen si

$$(1 - \frac{\beta}{\sqrt{3 - 2 \cos \theta}}) = 0$$

$$3 - 2 \cos \theta = \beta^2$$

por lo tanto, como $-1 \leq \cos \theta \leq 1$, entonces para que existan puntos de equilibrio fuera del eje PQ

$$\boxed{1 < \beta < \sqrt{5}}$$

b) Para determinar si es estable o no, se analiza el signo de la segunda derivada del potencial

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = k R^2 [(1 - \frac{\beta}{\sqrt{3 - 2 \cos \theta}}) \cos \theta + \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} (1 - \frac{\beta}{\sqrt{3 - 2 \cos \theta}})]$$

en $\theta = 0$ se debe tener que $\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} > 0$ para que sea estable

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}(\theta = 0) = k R^2 [(1 - \frac{\beta}{\sqrt{3 - 2}})] = k R^2 (1 - \beta)$$

en $\theta = \pi$ se debe tener que $\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} > 0$ para que sea estable

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}(\theta = \pi) = k R^2 [-(1 - \frac{\beta}{\sqrt{3 + 2}})] = k R^2 (-1 + \frac{\beta}{\sqrt{5}})$$

se debe tener que $\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} > 0$ para que sea estable (caso contrario, es inestable). Por lo tanto

$$\boxed{\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}(\theta = 0) > 0 \Rightarrow \beta < 1}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}(\theta = \pi) > 0 \Rightarrow \beta > \sqrt{5}}$$

c) Para la frecuencia de pequeñas oscilaciones en $\theta = 0$

$$\omega_{o.p.}^2 = \frac{1}{mR^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} (\theta = 0)$$

$$\boxed{\omega_{o.p.}^2 = \frac{k}{m}(1 - \beta)}$$