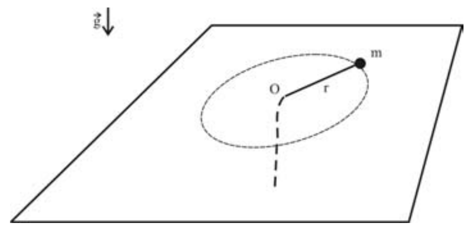
Control 2 FI2A1-02 Primavera 2008. Prof. Ricardo Munoz, 15/10/2008
Tiempo: 2,5 horas

1. Sobre una mesa horizontal se encuentra una partícula de masa *m* atada a una cuerda ideal cuyo otro extremo pasa por un orificio en la mesa ubicado en el punto O. Consideraremos que en este problema el único roce importante es el ejercido por el aire, el cual modelaremos como una fuerza de roce viscoso lineal de constante *k*. La partícula tiene inicialmente una velocidad angular ω_o y está a una distancia $r=R$ de O.

a) Si el extremo en O de la cuerda se mantiene fijo tal que la partícula describe una circunferencia, determine la velocidad angular y la tensión de la cuerda al cabo de una vuelta completa.



b) Desde la misma condición inicial, se recoge la cuerda a través del orificio O. Determine la función *r(t)* tal que la partícula mantenga su velocidad angular constante. Calcule el trabajo realizado por cada fuerza entre la condición inicial y la condición en que r = R/2.

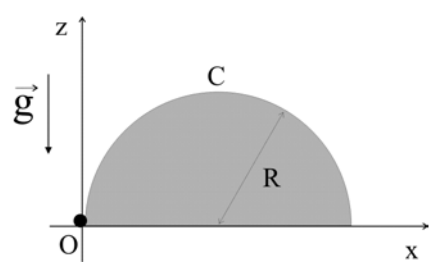
2. Una partícula de masa *m* se mueve con rapidez constante por el exterior de un semicilindro horizontal de radio *R*. Además del peso y la fuerza normal que ejerce la superficie, la partícula está sometida a otras dos fuerzas. La primera es una fuerza F_1 descrita por la expresión

$$\vec{F}_1 = -c\left(xz^2\hat{i} + zx^2\hat{k}\right),$$

donde *c* es una constante conocida y las coordenadas *x*, *z* se miden respecto al origen O. La otra fuerza, F_2, para la cual no se cuenta con una expresión explícita, es la que permite que la partícula se mueva con rapidez constante en su trayectoria desde el origen O a la cúspide C. Se pide:

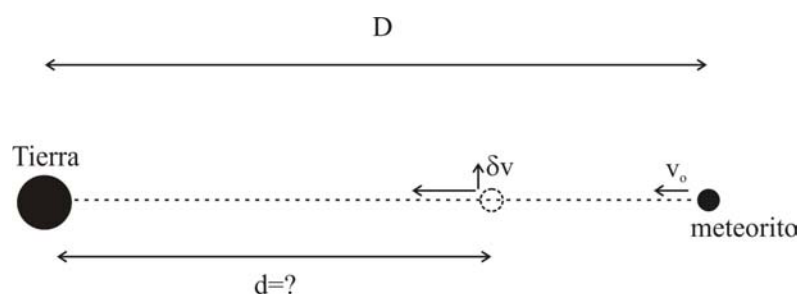
a) Mostrar que la fuerza $\vec{F}_1$ es conservativa.

b) Determinar el trabajo efectuado por la fuerza F_2 en el trayecto de O a C.



3. La Agencia Espacial Chilena ha descubierto un meteorito que a una distancia D de la Tierra tiene una velocidad v_o y se dirige "derechito" a ella, atraído por la fuerza gravitacional terrestre. Para evitar la hecatombe mundial se lanza un misil que interceptará al meteorito para desviarlo de su curso. El misil dará al meteorito una perturbación transversal de su velocidad de magnitud δv. Se pide plantear la(s) ecuación(es) algebraica(s) que permita(n) determinar la distancia mínima, d, en la que la intercepción debe ocurrir, tal que el meteorito no pase más cerca que una distancia R de la Tierra.

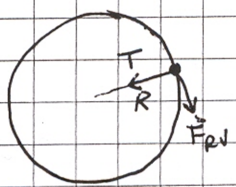
Datos: D, v_o, δv, R, $C=GM$



$$r(\theta)=\frac{h^2/C}{1+\sqrt{1+\frac{2\varepsilon h^2}{C^2}}\cos\theta} \qquad r(\theta)=\frac{r_o(1+e)}{1+e\cos\theta}$$

P1

a)



$$\vec{v} = \dot{r}\hat{r} + r\dot{\theta}\hat{\theta}$$

$$\vec{F}_{RV} = -k\vec{v}$$

$$\hat{r}: \quad +m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = -T - k\dot{r} \qquad (1)$$

$$\hat{\theta}: \quad m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = -kr\dot{\theta} \qquad (2)$$

$r = R$; $\dot{r} = 0$

$$(2) \rightarrow \quad m \frac{1}{r} \frac{d(r^2\dot{\theta})}{dt} = -kr\dot{\theta}$$

$$\rightarrow \quad \frac{dh}{dt} = -\frac{k}{m} h \qquad h \equiv r^2\dot{\theta}$$

$$h = h_0 e^{-\frac{k}{m}t} \qquad (3)$$

$$h_0 = R^2 \omega_0$$

$$r = R = cte \rightarrow \quad \dot{\theta} = \omega_0 e^{-\frac{k}{m}t} = \omega_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad \tau \equiv \frac{m}{k}$$

Tiempo para 1 vuelta: $T = ?$

$$\int_0^{2\pi} d\theta = \int_0^T \omega_0 e^{-\frac{t}{\tau}} dt = -\omega_0\tau e^{-\frac{t}{\tau}}\Big|_0^T$$

$$2\pi = \omega_0\tau(1 - e^{-\frac{T}{\tau}})$$

$$e^{-\frac{T}{\tau}} = 1 - \frac{2\pi}{\omega_0\tau}$$

$$T = -\tau \ln\left(1 - \frac{2\pi}{\omega_0\tau}\right)$$

$$\boxed{\dot{\theta} = \omega_0\left(1 - \frac{2\pi}{\omega_0\tau}\right)} \qquad (4)$$

Tensión:

(1): $T = \cdot m R \dot{\theta}^2$

$$\boxed{T = mR\left(\omega_0 - \frac{2\pi}{\tau}\right)^2} \quad (5)$$

b)

la solución (3) sigue siendo válida

$$h = h_0 \, e^{-\frac{t}{\tau}} \qquad h = r^2\dot{\theta}$$

$$h_0 = R^2\omega_0$$

$$\tau = \frac{m}{k}$$

pero ahora: $\dot{\theta} = cte = \omega_0$

$$\rightarrow \quad r^2\omega_0 = R^2\omega_0 \, e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$\rightarrow \quad \boxed{r^2 = R^2 e^{-\frac{t}{\tau}}} \quad (6)$$

$$(1) \rightarrow \quad T = -k\dot{r} - m(\ddot{r} - r\omega_0^2) \quad (7)$$

para encontrar $T(r)$ buscamos $\dot{r}(r)$, $\ddot{r}(r)$

$$(6) \rightarrow \quad 2r\dot{r} = -\frac{R^2}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} = -\frac{r^2}{\tau} \Rightarrow \boxed{\dot{r} = -\frac{r}{2\tau}} \quad (8)$$

$$\frac{d(8)}{dt} \rightarrow \quad \ddot{r} = -\frac{\dot{r}}{2\tau} = -\frac{1}{2\tau}\left(-\frac{r}{2\tau}\right) = \frac{r}{4\tau^2} \quad (9)$$

(9), (8) en (7):

$$T(r) = -k\left(\frac{-r}{2\tau}\right) - m\left(\frac{r}{4\tau^2} - r\omega_0^2\right)$$

$$= r\left\{\frac{k}{2\tau} - \underbrace{\frac{m}{4\tau^2}}_{\frac{k}{4\tau}} + m\omega_0^2\right\}$$

$$T(r) = r\left(\frac{k}{4\tau} + m\omega_0^2\right)$$

$$W_T = \int \vec{T} \circ d\vec{r} = \int_R^{R/2} -r\left(\frac{k}{4\tau} + m\omega_0^2\right) dr$$

$\vec{T} = -T\hat{r}$

$d\vec{r} = dr\,\hat{r} + rd\theta\,\hat{\theta}$

$$= -\left(\frac{k}{4\tau} + m\omega_0^2\right)\left[\frac{1}{2}r^2\right]_R^{R/2}$$

$$\boxed{W_T = \frac{1}{2}\left(\frac{k}{4\tau} + m\omega_0^2\right)\frac{3}{4}R^2} \quad (9)$$

Calculemos W_{FRV} con la EMT:

$$EMT_f - EMT_i = W_T + W_{FRV} \quad (10)$$

$$EMT_i = K_i = \frac{1}{2}m\left((R\omega_0)^2 + (\dot{r})_i^2\right)$$

según (8) $\dot{r}_i = -\frac{R}{2\tau} \rightarrow K_i = \frac{1}{2}m\left((R\omega_0)^2 + \frac{R^2}{4\tau^2}\right)$ (11)

$$EMT_f = K_f = \frac{1}{2}m\left(\left(\frac{R}{2}\omega_0\right)^2 + \left(\frac{R}{4\tau}\right)^2\right) \quad (12)$$

(9), (11), (12) en (10) :

$$W_{FRV} = \frac{1}{2} m \left[\frac{R^2}{4} \omega_0^2 + \frac{R^2}{16\tau^2} \right] - \frac{1}{2} m \left[R^2 \omega_0^2 + \frac{R^2}{4\tau^2} \right] - \frac{1}{2} \left(\frac{k}{4\tau} + m\omega_0^2 \right) \frac{3}{4} R^2$$

$$= \frac{1}{2} m \left[-\frac{3}{4} R^2 \omega_0^2 + \frac{R^2}{\tau^2} \left(-\frac{3}{16} \right) \right] - \frac{3}{8} mR\omega_0^2 - \frac{3}{32} \frac{kR^2}{\tau}$$

$$\boxed{W_{RFV} = -\frac{3}{4} mR^2 \omega_0^2 - \frac{3}{16} \frac{kR^2}{\tau}} = -\frac{3}{4} mR^2 \left(\omega_0^2 + \frac{1}{4} \frac{1}{\tau^2} \right)$$

Solución P1 – C2

a)

$$F_x = -cxz^2$$

$$F_z = -czx^2$$

$$\frac{\partial F_x}{\partial z} = -2cxz = \frac{\partial F_z}{\partial x} \rightarrow \text{es conservativa}$$

b)

$$EMT_0 + W_{F_2} = EMT_c$$

$$EMT = mgz + V_{F_1}$$

V_1 es tal que $-\vec{\nabla} V_{F_1} = \vec{F}_1$

$$-\frac{\partial V}{\partial x} = -cxz^2$$

$$-\frac{\partial V}{\partial z} = -cx^2z$$

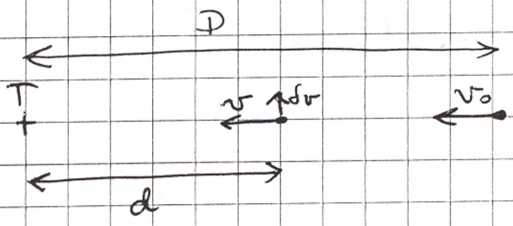
$$\Rightarrow \quad V_{F_1} = \frac{c}{2}x^2z^2$$

$$V_{F_1 0} = 0$$

$$V_{F_1 C} = \frac{c}{2}R^4$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{W_{F_2} = mgR + \frac{c}{2}R^4}$$

P3



i) el meteorito se acelera al acercarse a la Tierra

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}v_0^2 - \frac{c}{D} = \frac{1}{2}v^2 - \frac{c}{d} \qquad (1)$$

ii) Después de la intercepción las propiedades físicas del meteorito son

$$\mathcal{E}_+ = \frac{1}{2}\left(v^2 + \delta v^2\right) - \frac{c}{d} \qquad (2)$$

$$h_+ = \delta v \cdot d \qquad (3)$$

iii) Para encontrar el radio mínimo usamos las ecuaciones de traducción

$$\frac{h_+^2}{c} = r_0(1+e) \qquad (4)$$

$$\sqrt{1 + \frac{2\mathcal{E}_+ h_+^2}{c^2}} = e \qquad (5)$$

iv) y finalmente imponemos la condición requerida:

$$r_0 \geq R \qquad (6)$$

(1) – (6) son las ecuaciones que permiten resolver las incógnitas: v, $\mathcal{E}_+$, h_+, d, r_0, e

aunque no es necesario, podemos tratar de resolverlas:

(4) y (5)

$$r_0 = \frac{h^2/c}{1 + \sqrt{1 + \frac{2\varepsilon h^2}{c^2}}}$$

en (6)

$$\frac{h^2}{RC} \geqslant 1 + \sqrt{1 + \frac{2\varepsilon h^2}{c^2}}$$

$$\left(\frac{h^2}{RC}\right)^2 + \cancel{1} - \frac{2h^2}{RC} \geqslant \cancel{1} + \frac{2\varepsilon h^2}{c^2}$$

$$\frac{h^2}{(RC)^2} \geqslant \frac{2}{RC} + \frac{2\varepsilon}{C^2}$$

con (3)

$$d^2 \delta_v^2 \geqslant 2RC + 2\varepsilon R^2$$

$$d^2 \geqslant \frac{2R}{\delta_v^2}\left(C + \varepsilon R\right)$$

con (1) y (2):

$$\boxed{d^2 \geqslant \frac{2R}{\delta_v^2}\left(C + R\left(\frac{1}{2}v_0^2 - \frac{C}{D} + \delta v^2\right)\right)}$$

lo interesante será encontrar la condición para $d \leq D$ tal que aún podamos salvar a la Tierra!!

(propuesto)