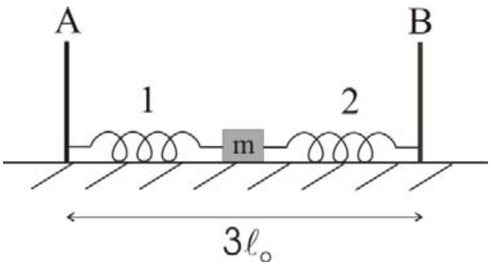
Control 2 13/10/2010 FI2001 Mecánica, Semestre Primavera 2010

Tiempo: 3 Horas Profesor: Ricardo Muñoz M.

1. Un bloque puntual de masa m se encuentra ligado a dos paredes A y B mediante dos resortes como se muestra en la figura. Ambos resortes tienen constante elástica k, pero el resorte 1 tiene largo natural ℓ_o, y el resorte 2 tiene largo natural $2\ell_o$. Considere que el bloque es liberado desde el reposo estando justo en el punto medio entre A y B.

a) Si no existe roce cinético con la superficie, determine los puntos extremos que alcanza el bloque en su movimiento.

b) Si existe un roce cinético μ entre bloque y superficie, determine los siguientes 2 puntos en que el bloque se detiene instantáneamente (suponga que el roce estático es insuficiente para mantener a la partícula en reposo).



2. Una partícula de masa m está sometida a una única fuerza central, cuya energía potencial $V(r)$ tiene la forma: $V(r) = -\frac{mK}{r^\lambda}$, donde λ y K son constantes positivas conocidas.

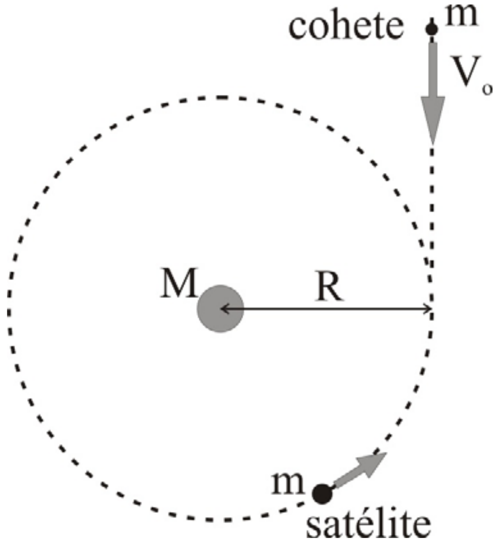
a) Si la partícula tiene momento angular L_o, determine su potencial efectivo, $V_*(r)$. Encuentre el radio de equilibrio asociado a este potencial efectivo. Determine la velocidad angular de la órbita circular correspondiente al radio de equilibrio.

b) ¿Para qué rango de valores de λ el radio de equilibrio encontrado en a) es estable? Para este caso determine la frecuencia de pequeñas oscilaciones para perturbaciones radiales de la órbita. ¿Bajo qué condición la órbita perturbada es cerrada? (*Sugerencia*: compare el periodo de las pequeñas oscilaciones con el periodo de la órbita circular).

3. a) Un cohete de masa m se acerca a la Tierra (de masa M) manteniendo una rapidez constante, v_o, siguiendo una trayectoria rectilínea que pasa a una distancia R del centro de la Tierra. El cohete sigue la trayectoria descrita gracias a una fuerza impulsora propia, además de la atracción terrestre que lo afecta. Determine el trabajo realizado por la fuerza impulsora entre la condición en que la distancia del cohete a la Tierra es $2R$ hasta la condición en que su distancia es R.

b) Si al llegar a la distancia R de la Tierra el cohete choca de frente y se adhiere a un satélite de masa m que se mantenía en una órbita circular de radio R en torno a la Tierra, determine el mínimo valor de v_o, tal que el conjunto satélite+cohete se escape de la atracción terrestre.

c) Si el valor de v_o del cohete es la mitad del valor mínimo encontrado en b), determine la excentricidad de la órbita resultante para el conjunto satélite+cohete.



Datos: G, M, m, R, v_o

Ind. 1: considere que en la colisión el moméntum total del satélite más cohete se mantiene constante.

Ind. 2: la fuerza impulsora del cohete deja de funcionar después de la colisión.

Ind. 3: desprecie la atracción gravitacional entre satélite y cohete.

$$r = \frac{h^2/C}{1+\sqrt{1+\frac{2\epsilon h^2}{C^2}}\cos\theta} \qquad\qquad r = \frac{r_o(1+e)}{1+e\cos\theta}$$

P1 a) $EMT_i = \cancel{K_i}^{\,0} + k\left(\frac{3}{2}l_0 - l_0\right)^2 = \frac{k l_0^2}{4}$

$EMT_f = \cancel{K_f}_{\,0} + k(x - l_0)^2$

$EMT_i = EMT_f$

$\cancel{k}(x - l_0)^2 = \frac{\cancel{k} l_0^2}{4}$

$x - l_0 = \pm \frac{l_0}{2}$

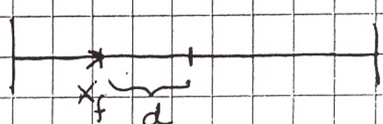
$x = l_0 \pm \frac{l_0}{2} \begin{cases} \frac{3}{2}l_0 \\ \frac{l_0}{2} \end{cases}$

b) $W_{roce} = -\mu N |d|$ (ya que la magnitud del roce no cambia)

$N = mg$

Primera Parada

$$k\frac{l_0^2}{4} - \mu m g d = k(x_f - l_0)^2$$



$d = \frac{3l_0}{2} - x_f$

$$k\frac{l_0^2}{4} - \mu m g\left(\frac{3l_0}{2} - x_f\right) = k(x_f - l_0)^2$$

ya que conocemos una solución de esta ecuación $\left(x_f = \frac{3l_0}{2}\right)$

hagamos un cambio de variable $y = x - \frac{l_0 3}{2}$

2/5

$$\frac{k l_0^2}{4} + \mu m g\, y = k\left(y + \frac{3 l_0}{2} - l_0\right)^2$$

$$\frac{k l_0^2}{4} + \mu m g\, y = k\left(y + \frac{l_0}{2}\right)^2$$

$$\cancel{\frac{k l_0^2}{4}} + \mu m g\, y = k\left(y^2 + l_0 y + \cancel{\frac{l_0^2}{4}}\right)$$

$$0 = y^2 + l_0 y - \frac{\mu m g}{k} y$$

$$0 = y^2 + \left(l_0 - \mu \frac{m g}{k}\right) y$$

$y = 0 \rightarrow$ punto de partida

$y \neq 0 \rightarrow \quad 0 = y + \left(l_0 - \mu \frac{m g}{k}\right)$

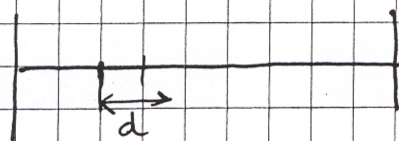
$$y = -l_0 + \frac{\mu m g}{k}$$

$$x_f = y_f + \frac{3 l_0}{2} = \frac{l_0}{2} + \frac{\mu m g}{k}$$

3/5

Segunda Parada

$$EMT_i = k\left(\frac{l_0}{2}+\frac{\mu m g}{k}-l_0\right)^2 = k\left(\frac{\mu m g}{k}-\frac{l_0}{2}\right)^2$$



$$EMT_i - \mu m g d = EMT_f$$

$$= k\left(x_f - l_0\right)^2$$

y $d = \left(x_f - \left(\frac{l_0}{2}+\frac{\mu m g}{k}\right)\right)$

$$k\left(\frac{\mu m g}{k}-\frac{l_0}{2}\right)^2 - \mu m g\left(x_f - \left(\frac{l_0}{2}+\frac{\mu m g}{k}\right)\right) = k\left(x_f-l_0\right)^2$$

ya que conocemos una solución de esta ecuación $\left(x_f = \left(\frac{l_0}{2}+\mu m g/k\right)\right)$ hacemos un cambio de variable

$$Y = x_f - \left(\frac{l_0}{2}+\frac{\mu m g}{k}\right)$$

4/5

$$k\left(\mu \frac{mg}{k} - \frac{l_0}{2}\right)^2 - \mu mg\, y = k\left(y + \left(\frac{l_0}{2} + \frac{\mu mg}{k}\right) - l_0\right)^2$$

$$= k\left(y + \left(-\frac{l_0}{2} + \frac{\mu mg}{k}\right)\right)^2$$

$$-\mu mg\, y = k\left(y^2 + 2y\left(-\frac{l_0}{2} + \frac{\mu mg}{k}\right)\right)$$

$$0 = y\left[ky + 2k\left(-\frac{l_0}{2} + \frac{\mu mg}{k}\right) + \mu mg\right]$$

$y = 0$ (cond. inicial)

y la otra solución

$$0 = y + 2\left(-\frac{l_0}{2} + \frac{\mu mg}{k}\right) + \frac{\mu mg}{k}$$

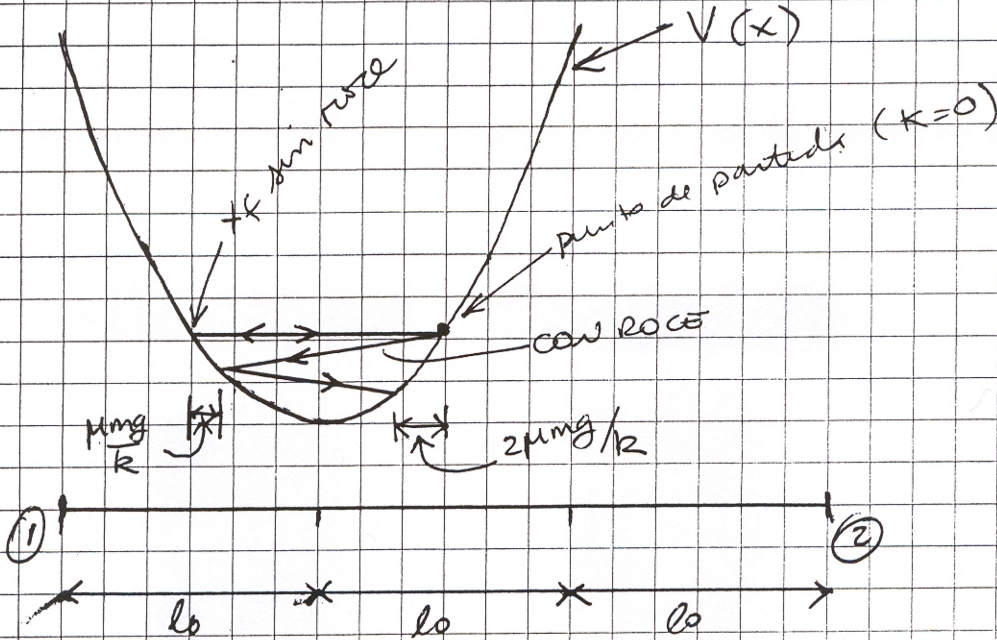
$$y = l_0 - 3\frac{\mu mg}{k}$$

$$X_f = l_0 - 3\frac{\mu mg}{k} + \left(\frac{l_0}{2} + \frac{\mu mg}{k}\right)$$

$$\boxed{X_f = \frac{3}{2} l_0 - 2\frac{\mu mg}{k}}$$

5/5

El esquema es el siguiente:



Este esquema no era necesario hacerlo, pero sirve para entender lo que pasa en el problema

P2

a) $$EMT = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2\right) - \frac{mK}{r^\lambda} \quad (1)$$

conservación de $\vec{L}_o$: $$L_o = m r^2 \dot{\theta} \rightarrow \dot{\theta} = \frac{L_o}{mr^2} \quad (2)$$

(2) en (1):

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{1}{2}m\left(\frac{L_o}{mr}\right)^2 - \frac{mK}{r^\lambda}}_{V_*(r)} = E_o$$

$V_*(r)$ ← cualquier múltiplo de V_* sirve.

$$\boxed{V_*(r) = \frac{1}{2}\frac{L_o^2}{mr^2} - \frac{mK}{r^\lambda}}$$

Radio de equilibrio

$$\frac{dV_*}{dr} = 0 \rightarrow \frac{-\cancel{2}L_o^2}{\cancel{2}mr_*^3} + \frac{\lambda mK}{r_*^{\lambda+1}} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{r_*^{\lambda-2} = \frac{\lambda m^2 K}{L_o^2}}$$

$$L_o = m r_*^2 \dot{\theta} \rightarrow \boxed{\dot{\theta} = \frac{L_o}{m r_*^2}}$$

b)

evaluamos $V_*''(r_*)$

$$\frac{d^2V_*}{dr^2} = \frac{3L_0^2}{mr^4} - \frac{\lambda(\lambda+1)mk}{r^{\lambda+2}}$$

$$= \frac{3L_0^2}{mr^4}\left\{1 - \frac{\lambda(\lambda+1)mk}{r^{\lambda+2}}\frac{mr^4}{3L_0^2}\right\}$$

$$= \frac{3L_0^2}{mr^4}\left\{1 - \frac{\lambda(\lambda+1)m^2k}{3L_0^2}\frac{1}{r^{\lambda-2}}\right\}$$

pero $r_*^{\lambda-2} = \dfrac{\lambda m^2 k}{L_0^2}$

$$\Rightarrow \quad V_*''(r_*) = \frac{3L_0^2}{mr_*^4}\left\{1 - \frac{\cancel{\lambda}(\lambda+1)\cancel{m^2k}}{3\cancel{L_0^2}}\frac{\cancel{L_0^2}}{\cancel{\lambda m^2k}}\right\}$$

$$V_*''(r_*) = \frac{L_0^2}{mr_*^4}\left\{3-(\lambda+1)\right\} = \frac{L_0^2}{mr_*^4}\left\{2-\lambda\right\}$$

r_* equilibrio estable para $V''>0 \rightarrow 2-\lambda>0 \Rightarrow \boxed{\lambda<2}$

Frecuencia de pequeñas oscilaciones

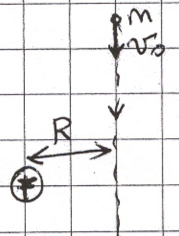
$$\omega_0^2 = \frac{V''}{m} = \frac{L_0^2}{m^2r_*^4}(2-\lambda)$$

órbita cerrada si $\dfrac{T_\theta}{T_{peq\ oscil}} \in \mathbb{Q}$

$$\Rightarrow \frac{\omega_0^2}{\dot\theta^2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \quad 2-\lambda \in \mathbb{Q} \Rightarrow \boxed{\lambda \in \mathbb{Q}}$$

P3

a)

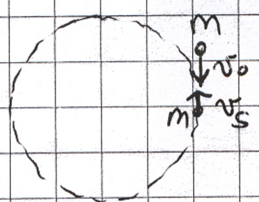


$$EMT_f - EMT_i = W^{FNC}$$

$$v_0 = cte \rightarrow K = cte$$

$$\Rightarrow \quad EMT_f - EMT_i = -\frac{C}{R} - \left(-\frac{C}{2R}\right) = \boxed{-\frac{C}{2R} = W^{FNC}}$$

b)



conservación de $\vec{p}$

$$m v_0 - m v_S = 2m v_+$$

$$\Rightarrow \quad v_+ = \frac{v_0 - v_S}{2} \rightarrow v_0 = v_S + 2v_+$$

para que escapen $\quad v_+ = v_E$

$$\frac{1}{2} v_E^2 - \frac{C}{R} = 0 \rightarrow v_E = \sqrt{\frac{2C}{R}}$$

$$\Rightarrow \quad v_0 = v_S + 2v_E = v_S + 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{C}{R}}$$

v_S es velocidad de órbita circular de radio R

$$\frac{1}{2} v_S^2 = \frac{C}{2R} \rightarrow v_S = \sqrt{\frac{C}{R}}$$

$$\Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{C}{R}} + 2\sqrt{2}\sqrt{\frac{C}{R}}$$

$$\boxed{v_0 = \sqrt{\frac{C}{R}}\left(1 + 2\sqrt{2}\right)}$$

c) $e = ?$

ec. de traducción:

$$e = \sqrt{1 + \frac{2\varepsilon h^2}{C^2}}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} v_+^2 - \frac{C}{R} \qquad h = v_+ \cdot R$$

en este caso $\quad v_+ = \frac{1}{2} v_0' - \frac{v_s}{2}$

$$v_0' = \sqrt{\frac{C}{R}} \left(\frac{1 + 2\sqrt{2}}{2} \right) \qquad v_s = \sqrt{\frac{C}{R}}$$

hasta aquí necesario

$$\Rightarrow \quad v_+ = \sqrt{\frac{C}{R}} \left(\frac{1 + 2\sqrt{2}}{4} - \frac{1}{2} \right) = \sqrt{\frac{C}{R}} \, \frac{1 + 2\sqrt{2} - 2}{4}$$

$$\boxed{v_+ = \sqrt{\frac{C}{R}} \left(\frac{2\sqrt{2} - 1}{4} \right)}$$

$$\varepsilon = \frac{C}{R} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{2\sqrt{2} - 1}{4} \right)^2 - 1 \right) = -\frac{C}{R} \left(1 - \frac{(2\sqrt{2} - 1)^2}{32} \right)$$

$$h^2 = \frac{C}{R} \left(\frac{2\sqrt{2} - 1}{4} \right)^2 \cdot R^2 = CR \, \frac{(2\sqrt{2} - 1)^2}{16}$$

$$e = \sqrt{1 - 2 \left(1 - \frac{(2\sqrt{2} - 1)^2}{32} \right) \frac{(2\sqrt{2} - 1)^2}{16}}$$

$$e = \sqrt{1 - 2 \times 0.9 \times 0.2} \sim 0.79$$