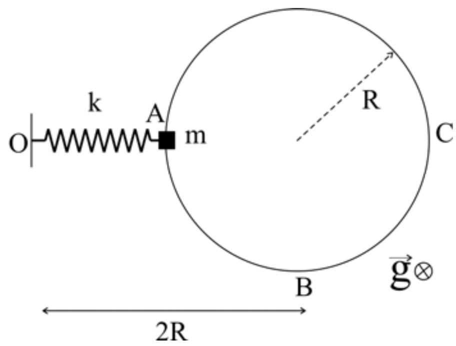
Control 2 6/5/2009 FI2001 Mecánica, Semestre Otoño 2009

Tiempo: 3 Horas Profesor: Ricardo Muñoz M.

1. Un anillo de masa m se mueve con roce despreciable a lo largo de un aro de radio R colocado en un plano horizontal, bajo la acción de la fuerza $\vec{F} = -k\,\vec{r}$ que ejerce un resorte de largo natural nulo cuyo otro extremo está fijo en el punto O. El punto O se encuentra en el mismo plano del aro, a un distancia $2R$ de su centro (ver figura).

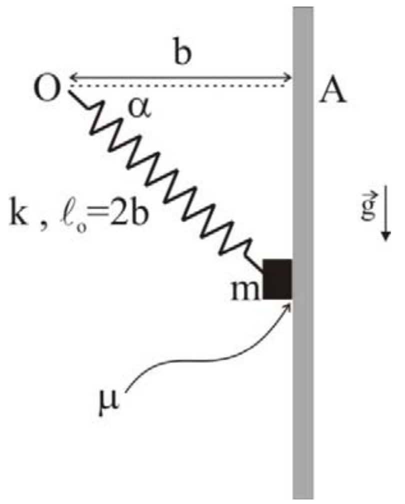


a) ¿Con qué rapidez mínima es necesario impulsar el anillo desde el punto más cercano a O (punto A), para que alcance a llegar al punto más lejano (punto C)?

b) Si el anillo es lanzado con la rapidez mínima encontrada en a), determine la fuerza que el aro ejerce sobre el anillo cuando pasa por el punto intermedio B.

c) Si el anillo es lanzado con la mitad de la rapidez mínima encontrada en a), determine el punto del aro al cual alcanza a llegar.

2. Una partícula de masa m desliza por una pared vertical empujada por un resorte de constante elástica k. El otro extremo está fijo en el punto O (ver figura). La distancia entre O y la pared es b (distancia OA) y el largo natural del resorte es $2b$. Entre la partícula y la pared existe un roce caracterizado por el coeficiente μ (cinético y estático). Considere que $k = 2\,m\,g\,/\,b$.



a) ¿Qué condición debe cumplir μ tal que al dejar la partícula en reposo en el punto A, ésta comience a descender?

b) Si μ cumple la condición de a) y la partícula es liberada desde el reposo en el punto A, determine la magnitud de la normal que la pared ejerce sobre la partícula en función del ángulo α. Indique el ángulo α_s en que la partícula se separa de la pared.

c) Para el caso b), determine la energía cinética de la partícula en el instante en que ella se separa de la pared.

3. Un satélite se encuentra en una órbita circular de radio R en torno a la Tierra.

a) Indique el momento angular por unidad de masa, la energía potencial por unidad de masa, la energía cinética por unidad de masa, la energía mecánica total por unidad de masa y la rapidez del satélite, todo en función de R y $C=GM_T$.

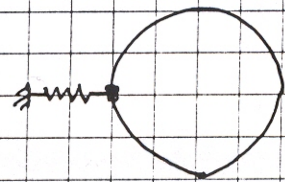
b) En cierto instante el satélite recibe un impulso tangencial δ_v que lo deja en una órbita elíptica de radio mínimo R y radio máximo $4R$. Determine el valor de δ_v.

c) Si estando en el punto más lejano a la Tierra de la órbita elíptica la rapidez del satélite es reducida instantáneamente de modo que su momento angular vuelve a ser el mismo que tenía inicialmente en su órbita circular, se pide determinar la mínima distancia a la Tierra a la cual pasa el satélite en su órbita final.

Información potencialmente útil:

$$r = \frac{h^2/C}{1+\sqrt{1+\frac{2\epsilon h^2}{C^2}}\cos\theta} \qquad r = \frac{r_o(1+e)}{1+e\cos\theta} \qquad \int \frac{d\theta}{\cos\theta} = \ln\left[\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\right]$$

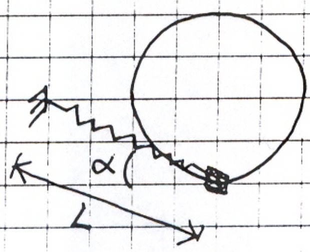
a)



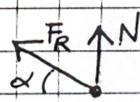
$$\frac{1}{2} m v_0^2 + \frac{1}{2} k R^2 = \frac{1}{2} k (3R)^2 = \frac{9}{2} k R^2$$

$$\boxed{v_0^2 = 8 \frac{k}{m} R^2}$$

b)



DCL



$$N + F_R \operatorname{sen}\alpha = \frac{m v_B^2}{R} \Rightarrow N = \frac{m v_B^2}{R} - F_R \operatorname{sen}\alpha$$

v_B resulta de EMT: $\frac{1}{2} k L^2 + \frac{1}{2} m v_B^2 = \frac{9}{2} k R^2$

geometría: $L^2 = (2R)^2 + R^2 = 5R^2$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} m v_B^2 = \frac{9}{2} k R^2 - \frac{1}{2} k 5R^2 = 2 k R^2$$

$$\Rightarrow v_B^2 = 4 \frac{k R^2}{m}$$

$$\left.\begin{array}{l} F_R = kL = k\sqrt{5}R \\ \operatorname{sen}\alpha = \frac{R}{\sqrt{5}R} = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{array}\right\} \Rightarrow N = 4kR - k\sqrt{5}R\frac{1}{\sqrt{5}} = \underline{\underline{3kR}}$$

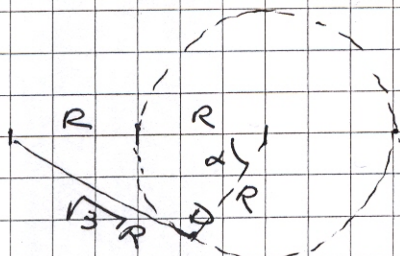
c) $v_i = \frac{1}{2}\sqrt{8}\,\omega_0 R \qquad \omega_0^2 \equiv \frac{k}{m}$

$= \sqrt{2}\,\omega_0 R$

	K	V
A	$\frac{1}{2}m(\sqrt{2}\omega_0 R)^2$	$\frac{1}{2}kR^2$
D	0	$\frac{1}{2}kr_D^2$

$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}kr_D^2 = \frac{1}{2}kR^2 + kR^2$

$r_D^2 = 3R^2 \quad \rightarrow \quad \underline{\underline{r_D = \sqrt{3}\,R}}$



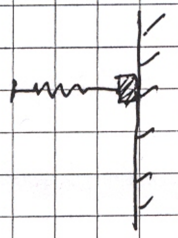
$3R^2 = (2R)^2 + R^2 - 2(2R)R\cos\alpha$

$3R^2 = 5R^2 - 4R^2\cos\alpha$

$\cos\alpha = \frac{2R^2}{4R^2} = \frac{1}{2} \rightarrow \underline{\underline{\alpha = 60°}}$

P2

a)



$$\mu N < mg$$

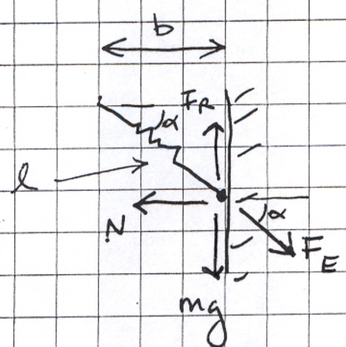
$$N = kb$$

$$\rightarrow \quad \mu k b < mg \rightarrow \boxed{\mu < \frac{mg}{kb}}$$

$kb = 2mg$

$\mu < \frac{1}{2}$

b)



$$N = F_E \cos\alpha$$

l_0

$$F_E = -k\,(l - 2b)$$

$$l = \frac{b}{\cos\alpha}$$

$$\Rightarrow \quad N = k\left(2b - \frac{b}{\cos\alpha}\right)\cos\alpha$$

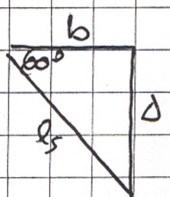
$$\boxed{N = kb\,(2\cos\alpha - 1)}$$

$$N(\alpha_S) = 0 \rightarrow \cos\alpha_S = \frac{1}{2} \rightarrow \boxed{\alpha_S = 60^\circ}$$

c)

$$EMT^f - EMT^i = W^{FNC}$$

	K	V_{mg}	V_{RES}
A	0	0	$\frac{1}{2}kb^2$
Sep	K_s	$-mg\Delta_s$	$\frac{1}{2}k(\underbrace{l_s}_{2b} - l_0)^2$



$$\Delta = b\,tg\,60^\circ = \sqrt{3}\,b$$

$$l_s = \frac{b}{\cos 60} = 2b$$

$$\Rightarrow \quad K_s - mg\sqrt{3}\,b + \frac{1}{2}k(\cdot 0)^2 - \frac{1}{2}kb^2 = W^{FNC}$$

$$\Rightarrow K_s = mg\sqrt{3}\,b + \frac{1}{2}kb^2 + W^{FNC}$$

$$W^{FNC} = W^{FR} = \int \vec{F}^R \circ d\vec{r}$$

$$\vec{F}_R = \mu N \hat{k} \qquad d\vec{r} = dz\,\hat{k}$$

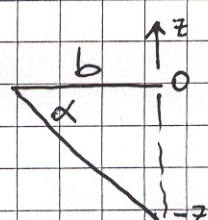
$$W^{FR} = \int_0^{-\Delta} \mu N\, dz = \mu \int_0^{-\Delta} kb(2\cos\alpha - 1)\, dz$$

$$= \mu k b \left[2\int_0^{-\Delta} \cos\alpha\, dz - \int_0^{-\Delta} dz \right]$$

$$= \mu k b \left[2I + \Delta \right] \quad \text{con} \quad \begin{array}{l} \Delta = \sqrt{3}\,b \\ I = \int_0^{-\Delta} \cos\alpha\, dz \end{array}$$

$$I = \int_0^{-\Delta} \cos\alpha \, dz$$

para poder calcularlo debemos relacionar α con z



$$tg\alpha = \frac{-z}{b}$$

$$\frac{d\alpha}{\cos^2\alpha} = -\frac{dz}{b}$$

$$\rightarrow \quad dz = -\frac{b\,d\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$\Rightarrow I = \int_0^{60°} \cos\alpha \left(\frac{-b\,d\alpha}{\cos^2\alpha}\right) = -b\int_0^{60°} \frac{d\alpha}{\cos\alpha}$$

$$I = -b \ln\left(tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right)\right)\Big|_0^{60}$$

$$I = -b \ln\left(tg(75°)\right)$$

$$\therefore \; K_s = \sqrt{3}\, mgb + \frac{1}{2}kb^2 + \mu kb\Big(\underbrace{-2b\ln(tg(75°)) + \sqrt{3}\,b}_{\approx -0.9\,b}\Big)$$

< 0 como debe ser

con $kb = 2mg$

$$K_s = mgb\left\{\sqrt{3} + 1 - 2\times(0.9)\cdot\mu\right\} \qquad \mu < \frac{1}{2} \rightarrow K_s > 0.$$

P3 1/2

a) órbita circular

$$h^2 = CR$$

$$\mathcal{E} = -\frac{C}{2R}$$

$$\frac{K}{m} = \frac{C}{2R} \rightarrow \frac{1}{2}v^2 = \frac{C}{2R} \rightarrow v^2 = \frac{C}{R}$$

$$\frac{V}{m} = -\frac{C}{R}$$

b) $r_{min} = R$

$r_{max} = 4R$

$$4R = R\,\frac{1+e}{1-e} \rightarrow e = \frac{3}{5}$$

$$\frac{h^2}{C} = R(1+e) = R\,\frac{8}{5} \rightarrow$$

$$e = \sqrt{1 + \frac{2\mathcal{E}h^2}{C^2}} \rightarrow \frac{3}{5} = \sqrt{1 + \frac{2}{C}R\frac{8}{5}\mathcal{E}}$$

$$\frac{9}{25} = 1 + \frac{16}{5}\frac{R}{C}\mathcal{E} \Rightarrow -\frac{16}{25} = \frac{16}{5}\frac{R}{C}\mathcal{E}$$

$$\rightarrow \mathcal{E} = -\frac{1}{5}\frac{C}{R} = K + V$$

$$\Rightarrow K - \frac{C}{R} = -\frac{1}{5}\frac{C}{R} \rightarrow K = \frac{4}{5}\frac{C}{R}$$

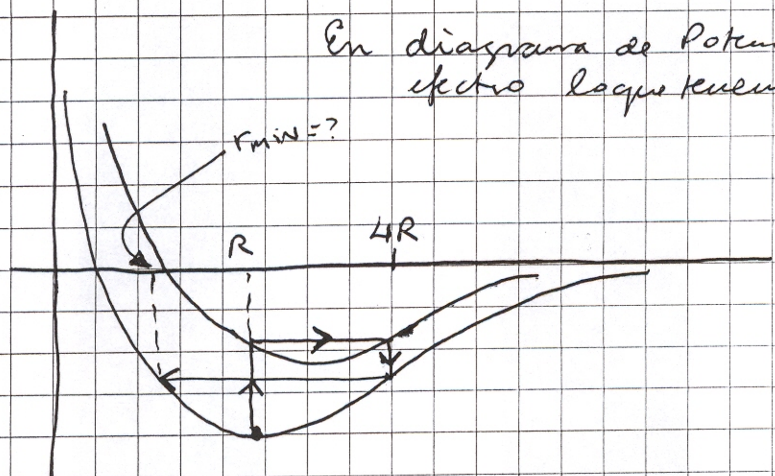
$$\Rightarrow \frac{1}{2}v_+^2 = \frac{4}{5}\frac{C}{R} \rightarrow v_+^2 = \frac{8}{5}\frac{C}{R}$$

$$v_- = \sqrt{\frac{C}{R}}$$

$$v_+ = \sqrt{\frac{8}{5}}\sqrt{\frac{C}{R}}$$

$$\boxed{\delta_v = \left(\sqrt{\frac{8}{5}} - 1\right)\sqrt{\frac{C}{R}}}$$

c) En diagrama de Potencial efectivo lo que tenemos es:



De la última órbita sabemos:

$$h^2 = CR \qquad (= \text{órbita circular inicial})$$

$$r_{MAX} = 4R$$

Debemos calcular r_{min}.

En r_{max}: $\quad v \cdot 4R = \sqrt{CR} \rightarrow v^2 = \frac{1}{16}\frac{C}{R} \rightarrow E = \overbrace{\frac{1}{32}\frac{C}{R}}^{\frac{1}{2}v^2} - \frac{C}{4R} = \frac{-7}{32}\frac{C}{R}$

$$e = \sqrt{1 + \frac{2Eh^2}{C^2}} = \sqrt{1 + 2\left(\frac{-7}{32}\frac{C}{R}\right)\frac{CR}{C^2}} = \sqrt{1 - \frac{14}{32}} = \frac{3}{4}$$

$$r_{MAX} = r_{min}\frac{(1+e)}{(1-e)} \rightarrow r_{min} = \frac{1-\frac{3}{4}}{1+\frac{3}{4}} \cdot 4R = \frac{1/4}{7/4}\, 4R = \underline{\underline{\frac{4}{7} R}}$$