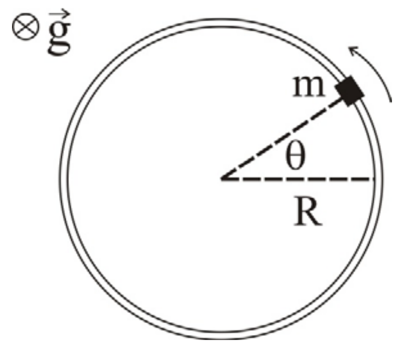
**Control 2** 26/5/2010 FI2001 Mecánica, Semestre Otoño 2010

Tiempo: 2.5 Horas Profesor: Ricardo Muñoz M.

**1.** Una partícula P de masa $m$ se mueve por un riel horizontal circunferencial de radio $R$. El único tipo de roce que hay es un roce viscoso lineal, $-c\,\vec{v}$, donde $c$ es una constante conocida.

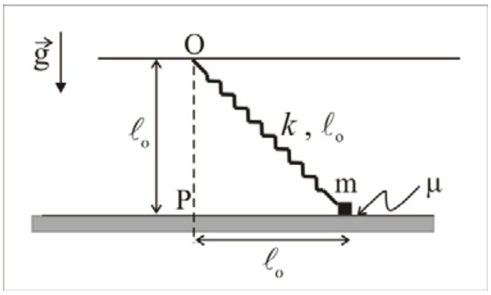



a) Si P es lanzada desde $\theta = 0$ con rapidez $v_o$, calcule el trabajo de la fuerza neta en función de $\theta$.

b) Determine el valor que debe tener $v_o$ para que P se detenga justo cuando ha avanzado media vuelta.

**2.** Considere un bloque de masa $m$ que se mueve por una superficie horizontal con la cual tiene un coeficiente de roce cinético $\mu$ desconocido. El bloque está unido a un resorte de constante elástica $k$ y largo natural $\ell_o$, cuyo otro extremo está unido a un punto fijo O ubicado a una altura $\ell_o$ de la superficie horizontal. En t=0 el bloque se suelta desde el reposo a una distancia $\ell_o$ a la derecha del punto P correspondiente a la proyección vertical de O sobre la superficie (ver figura). Determine:

a) La condición entre $m$, $g$, $k$ y $\ell_o$ tal que el bloque no se separe de la superficie en su condición inicial. Muestre que si esta condición se cumple, entonces tampoco se separa en su movimiento posterior.




b) Si el bloque se vuelve a detener a una distancia $\ell_o/2$ a la izquierda de P, determine el valor de $\mu$ en función de $m$, $k$, $\ell_o$ y $g$ (suponga que se satisface la condición de a).

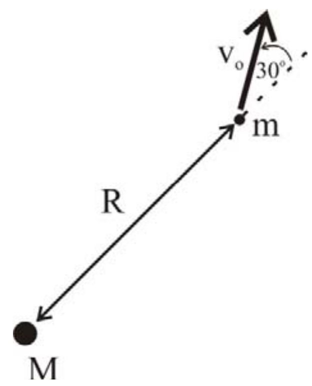
c) Calcule el trabajo realizado por <u>cada una de las fuerzas</u> presentes en el problema entre la condición inicial y el instante en que el bloque pasa por el punto P.

**3.** En un cierto instante un satélite se encuentra a una distancia $R$ del centro de la Tierra y su velocidad forma un ángulo de $30^o$ con su vector posición (ver Figura). Si la magnitud de la velocidad en ese instante es $v_o = \sqrt{\dfrac{3C}{2R}}$ se pide determinar:

a) Energía mecánica total por unidad de masa ($\varepsilon$) y momento angular por unidad de masa ($h$).

b) Excentricidad, semieje mayor y periodo de la órbita.

c) Radio mínimo de la órbita y mínimo $\delta v$ que se le debe dar a su rapidez <u>en el instante del radio mínimo</u>, tal que el satélite escape "para siempre" de la atracción terrestre.

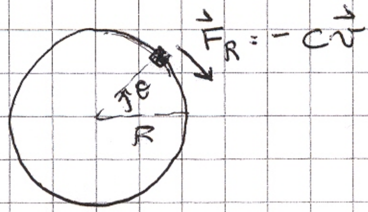



*Indicación*: Exprese sus resultados finales en función de $R$ y $C= GM$.

$$r = \frac{h^2/C}{1+\sqrt{1+\frac{2\epsilon h^2}{C^2}}\cos\theta} \qquad r = \frac{r_o(1+e)}{1+e\cos\theta} \qquad T^2 = \frac{(2\pi)^2}{C}a^3 \qquad \int\frac{d\theta}{\cos\theta} = \ln\left[\tan\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

P1






a) $$mR\ddot{\theta} = -cR\dot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} = -\frac{c}{m}\dot{\theta}$$

$$\cancel{\dot{\theta}}\frac{d\dot{\theta}}{d\theta} = -\frac{c}{m}\cancel{\dot{\theta}}$$

$$\int_{v_0/R}^{\dot{\theta}} d\dot{\theta} = \int_0^{\theta} -\frac{c}{m}\,d\theta$$

$$\dot{\theta} - \frac{v_0}{R} = -\frac{c}{m}\theta \rightarrow \dot{\theta} = \frac{v_0}{R} - \frac{c}{m}\theta$$

$$\Delta K = W^{Neto}$$

$$K_i = \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$K_f = \frac{1}{2}m(R\dot{\theta})^2 = \frac{1}{2}m\left(v_0 - \frac{cR}{m}\theta\right)^2$$

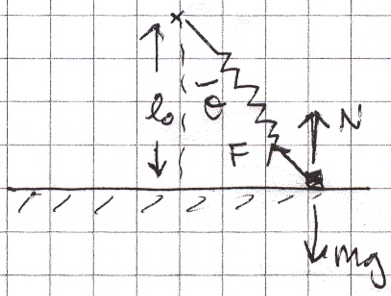
$$\rightarrow \boxed{W^{Neto} = \frac{1}{2}m\left(v_0 - \frac{cR}{m}\theta\right)^2 - \frac{1}{2}mv_0^2}$$

b) $\dot{\theta} = 0$ para $\theta = \pi$

$$\rightarrow \frac{v_0}{R} - \frac{c}{m}\pi = 0 \rightarrow \boxed{v_0 = \frac{cR\pi}{m}}$$

② 1/4

a)




$$N - mg + F\cos\theta = 0$$

$$N = mg - F\cos\theta$$

$$F = k(l - l_0)$$

$$\cos\theta = \frac{l_0}{l} \rightarrow l = \frac{l_0}{\cos\theta}$$

$$N = mg - k\left(\frac{l_0}{\cos\theta} - l_0\right)\cos\theta$$

$$N = mg - kl_0(1 - \cos\theta) \qquad (*)$$

$t=0$ $\theta = 45°$

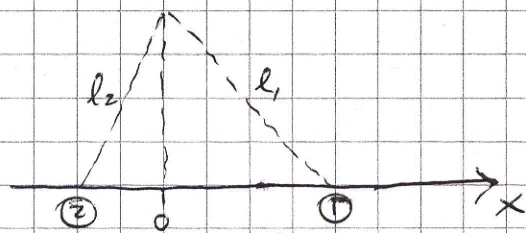
$$N_0 = mg - kl_0\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \geq 0$$

$$\Rightarrow \boxed{mg \geq kl_0 \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}}$$

de $(*)$: $N(\theta) = mg - kl_0 + kl_0\cos\theta$

en movimiento posterior $\theta\downarrow \rightarrow \cos\theta\uparrow \rightarrow N\uparrow$

b)




$$EMT_2 - EMT_1 = W^{FNC} \quad (\star) \qquad K_1 = K_2 = 0$$

$$EMT_2 = \frac{1}{2} k (l_2 - l_0)^2$$

$$EMT_1 = \frac{1}{2} k (l_1 - l_0)^2$$

$$l_1 = \sqrt{2}\, l_0$$

$$l_2 = \sqrt{l_0^2 + \left(\frac{l_0}{2}\right)^2} = l_0 \sqrt{\frac{5}{4}}$$

$$W^{FNC} = \int_{1}^{2} \vec{F}_{roce} \cdot d\vec{r}$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{F}_{ROCE} = \mu N \hat{\imath} \\ d\vec{r} = dx\, \hat{\imath} \\ x_1 = l_0 \\ x_2 = -\frac{l_0}{2} \end{array}\right\} \text{de acuerdo a eje X elegido}$$

$$W^{FNC} = \int_{l_0}^{-\frac{l_0}{2}} \mu N \, dx = \mu \int_{l_0}^{-\frac{l_0}{2}} N \, dx$$

pero N es variable en X.

obtuvimos en a):

$$N(\theta) = mg - k l_0 + k l_0 \cos\theta$$

$$\therefore \; W^{FNC} = \mu \int_{l_0}^{-\frac{l_0}{2}} \left[ mg - k l_0 + k l_0 \cos\theta \right] dX$$

$$W^{FNC} = \mu (mg - k l_0)\left(-\frac{3}{2} l_0\right) + \mu k l_0 \int_{①}^{②} \cos\theta \, dx \quad ⊛⊛$$

$$I \equiv \int_{①}^{②} \cos\theta \, dx = ?$$

La relación $\theta(x)$ ó $x(\theta)$ la entrega la geometría del problema:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{X}{l_0} \Rightarrow \frac{1}{\cos^2\theta} d\theta = \frac{dX}{l_0}$$

$$\rightarrow \quad dX = \frac{l_0 \, d\theta}{\cos^2\theta}$$

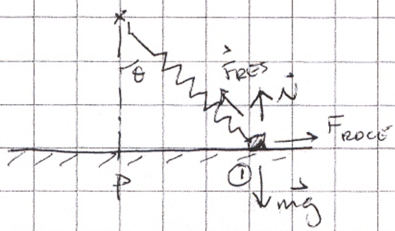
$$\Rightarrow \quad I = \int_{①}^{②} \cos\theta \, \frac{l_0 \, d\theta}{\cos^2\theta} = \int_{①}^{②} l_0 \frac{d\theta}{\cos\theta} = l_0 \int_{45°}^{-30°} \frac{d\theta}{\cos\theta}$$

$$= l_0 \left[ \ln\left( \tan\left( \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right) \right]_{45°}^{-30°}$$ completamente conocido

Reemplazando todo lo anterior en la ecuación de la energía ⊛, obtenemos una ecuación con única incógnita $\mu$.

c)






$$\boxed{\begin{aligned} W^{\vec{N}} &= 0 \\ W^{\vec{mg}} &= 0 \end{aligned}}$$

$$W^{RESORTE}_{1 \to P} = V^{RES}_{1} - V^{RES}_{P}$$

$$V^{RES}_{P} = 0 \quad \text{(resorte en largo natural)}$$

$$V^{RES}_{1} = \frac{1}{2} k \left(\sqrt{2}\, l_0 - l_0\right)^2 = \frac{1}{2} k l_0^2 \left(\sqrt{2} - 1\right)^2$$

$$\boxed{W^{RESORTE}_{1 \to P} = \frac{1}{2} k l_0^2 \left(\sqrt{2} - 1\right)^2}$$

$$W^{ROCE} = \int_{1}^{P} \vec{F}_{ROCE} \circ d\vec{r} = \mu \int_{l_0}^{0} (mg - kl_0 + kl_0 \cos\theta)\, dx$$

$$W^{ROCE} = -\mu(mg - kl_0)\, l_0 + \mu k l_0 \underbrace{\int_{1}^{P} \cos\theta\, dx}_{J} \qquad (*)$$

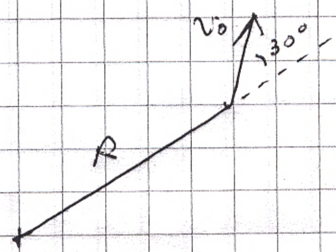
repitiendo lo hecho en b)

$$J = l_0 \int_{45^\circ}^{0^\circ} \frac{d\theta}{\cos\theta} = l_0 \left[ \ln\left( \tan\left( \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right) \right]_{45^\circ}^{0^\circ} \qquad (**)$$

$(*)$ y $(**)$ entregan $W^{ROCE}$ ya que $\mu$ es ahora conocido.

P3

1/2




$$v_0 = \sqrt{\frac{3C}{2R}}$$

a)

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}v_0^2 - \frac{C}{R} = \frac{1}{2}\left(\frac{3C}{2R}\right) - \frac{C}{R} = -\frac{1}{4}\frac{C}{R} \quad <0 \text{ elipse}$$

$$h = v_0 \operatorname{sen} 30 \cdot R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3C}{2R}}\, R = \sqrt{\frac{3CR}{8}}$$

b)

$$e = \sqrt{1 + \frac{2\mathcal{E}h^2}{C^2}} = \sqrt{1 + \frac{2\left(-\frac{C}{4R}\right)\left(\frac{3CR}{8}\right)}{C^2}}$$

$$e = \sqrt{1 - \frac{2\times 3}{4\times 8}} = \sqrt{1 - \frac{6}{32}} = \sqrt{\frac{26}{32}} = \sqrt{\frac{13}{16}}$$

$$e = \frac{\sqrt{13}}{4} \quad <1$$

$$r_0(1+e) = \frac{h^2}{C} = \frac{3}{8}\frac{CR}{C} = \frac{3}{8}R \rightarrow r_0 = \frac{3}{8}\frac{R}{(1+e)}$$

$$r_{max} = \frac{r_0(1+e)}{(1-e)} =$$

$$a = \frac{1}{2}(r_0 + r_{max}) = \frac{1}{2}\left(r_0 + \frac{r_0(1+e)}{(1-e)}\right) = \frac{r_0}{1-e}$$

$$a = \frac{\frac{3}{8}R}{(1+e)(1-e)} = \frac{\frac{3}{8}R}{1-e^2} = \frac{\frac{3}{8}R}{1-\frac{13}{16}} = \underline{\underline{2R}}$$

2/2

$$T^2 = \frac{(2\pi)^2}{C} a^3 = \frac{(2\pi)^2}{C} 8 R^3$$

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\sqrt{C}} \sqrt{8} R^{3/2}}$$

c) $r_0 = \frac{3}{8} \frac{R}{(1+e)}$ $\qquad e = \sqrt{\frac{13}{16}}$

velocidad de escape en radio minimo

$$\mathcal{E} = 0 \rightarrow \frac{1}{2} v_E^2 - \frac{C}{r_0} = 0 \rightarrow v_E^2 = \frac{2C}{r_0}$$

$$v_E^2 = \frac{2C\left(1+\sqrt{\frac{13}{16}}\right)}{\frac{3}{8} R} = \frac{16}{3}\left(1+\sqrt{\frac{13}{16}}\right) \frac{C}{R} \qquad (1)$$

$$\text{minimo } \delta v = v_E - v_{Max} \qquad (3)$$

$$\frac{1}{2} v_{MAX}^2 - \frac{C}{r_0} = -\frac{1}{4} \frac{C}{R} \leftarrow \text{calculado en a)}$$

$$\rightarrow v_{MAX}^2 = 2\left(\frac{C}{r_0} - \frac{1}{4}\frac{C}{R}\right) = 2\left(\frac{C(1+e)}{\frac{3}{8} R} - \frac{1}{4}\frac{C}{R}\right)$$

$$v_{MAX}^2 = \frac{C}{R}\left[\frac{16}{3}\left(1+\sqrt{\frac{13}{16}}\right) - \frac{1}{4}\right] \qquad (2)$$

(1) (2) y (3) dand $\delta v$ solicitado.