**Control 2** 4/5/2011 *FI2001 Mecánica, Semestre Otoño 2011*

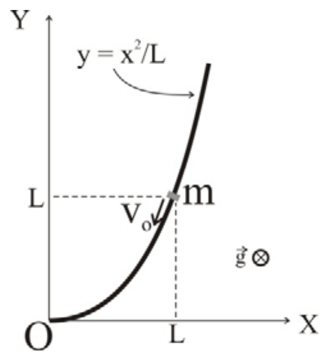
Tiempo: 3 Horas *Profesor: Ricardo Muñoz M.*

**1.** Un anillo de masa $m$ se mueve sin roce inserto en un alambre <u>horizontal</u> con forma de parábola descrita por $y = x^2/L$, donde $L$ es una constante conocida. En el instante inicial el anillo se encuentra en el punto *(L,L)* moviéndose hacia el origen con rapidez $v_o$. Además de la fuerza normal que el alambre ejerce al anillo, actúan las siguientes dos fuerzas sobre él:

$\vec{F}_1 = -A\,r^2\,\hat{r}$ (fuerza de atracción radial; $r$: distancia a O)

$\vec{F}_2 = B(\,y^2\,\hat{\imath} - x^2\,\hat{\jmath}\,)$ ,

donde $A$ y $B$ son constantes positivas conocidas.

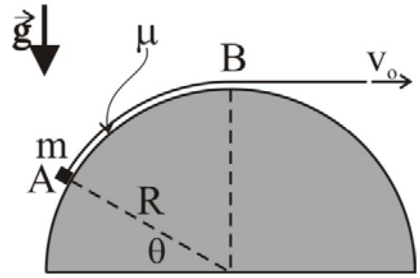



a) Determine la energía potencial asociada a $\vec{F}_1$: $V_1(r)$.

b) Calcule el trabajo realizado por $\vec{F}_2$ en el movimiento del anillo entre su posición inicial y el origen O: $W_2$.

c) Determine la rapidez con que el anillo llega al origen.

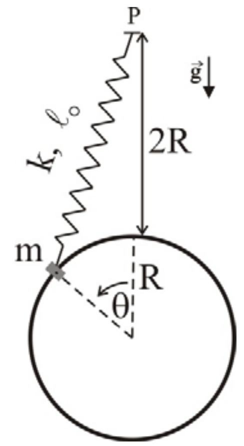
**2.** Una partícula de masa $m$ se encuentra sobre el manto de un semicilindro de radio $R$ como muestra la figura. Una cuerda ideal arrastra a la partícula con rapidez constante $v_o$ a partir del punto A en que $\theta = 30^o$. Entre la partícula y el semicilindro existe un <u>roce cinético</u> de coeficiente $\mu$ y además existe un <u>roce viscoso</u> lineal con el aire de la forma $-c\vec{v}$.




a) Determine la normal que el semicilindro ejerce sobre la partícula en función de θ. ¿Cuál es el mayor valor que puede tener $v_o$, tal que la partícula no se separe del semicilindro en el tramo A-B (donde B es el punto más alto del semicilindro)?. `[2 puntos]`

b) Suponiendo que la partícula no se separa del semicilindro, determine el trabajo realizado por cada una de las fuerzas que actúan sobre la partícula, en su movimiento de A a B. `[4 puntos]`

**3.** Un anillo de masa $m$ puede moverse sin roce inserto en un aro de radio $R$, manteniéndose ligado mediante un resorte ideal de largo natural $\ell_o$ y constante elástica $k$ a un punto fijo P ubicado a una altura $2R$ sobre el punto más alto del aro.

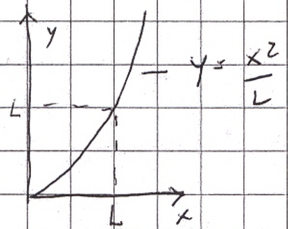



a) Determine el rango de valores para el largo natural del resorte tal que $\theta = 0^o$ sea un equilibrio <u>inestable</u> para el anillo.

b) Si se cumple que $\ell_o = 2R$ y $mg = kR$ determine todos los puntos de equilibrio del anillo, indicando su tipo y la frecuencia de pequeñas oscilaciones en torno a los equilibrios estables.

c) Si se cumplen las condiciones de b) y el anillo se encuentra en $\theta = 90^o$, determine la mínima rapidez que se le debe impartir tal que en su movimiento dé por lo menos una vuelta completa al aro.

(P1)




a) $\vec{F}_1 = -Ar^2\hat{r} = -\frac{dV}{dr}\hat{r}$

$\Rightarrow \frac{dV}{dr} = Ar^2 \rightarrow V(r) = \frac{A}{3}r^3 + \text{cte}$

e.g. $V(0) = 0 \Rightarrow \boxed{V(r) = \frac{A}{3}r^3}$

b) $W_2 = \int_{i\,\mathscr{C}}^{f} \vec{F}_2 \circ d\vec{r}$

$d\vec{r} = dx\,\hat{\imath} + dy\,\hat{\jmath}$ pero $y = \frac{x^2}{L}$ sobre $\mathscr{C} \Rightarrow dy = \frac{2x\,dx}{L}$

$\Rightarrow d\vec{r} = dx\left(\hat{\imath} + \frac{2x}{L}\hat{\jmath}\right)$

$\vec{F}_2 = B(y^2\,\hat{\imath} - x^2\,\hat{\jmath})$ pero $y = \frac{x^2}{L}$ sobre $\mathscr{C}$

$\Rightarrow \vec{F}_2 = B\left(\frac{x^4}{L^2}\hat{\imath} - x^2\hat{\jmath}\right)$

$\Rightarrow W_2 = \int_{i\,\mathscr{C}}^{f} B\left(\frac{x^4}{L^2}\hat{\imath} - x^2\hat{\jmath}\right) \circ dx\left(\hat{\imath} + \frac{2x}{L}\hat{\jmath}\right) = \int_L^0 B\left[\frac{x^4}{L^2} - \frac{2x^3}{L}\right]dx$

$= B\left[\frac{1}{5}\frac{x^5}{L^2} - \frac{2}{4}\frac{x^4}{L}\right]_L^0 = B\left[-\frac{1}{5}L^3 + \frac{1}{2}L^3\right] = \underline{\underline{\frac{3}{10}BL^3}}$

c) $EMT_f - EMT_i = W^{FNC} = W_2 + \cancel{W_N}^{\,0}$

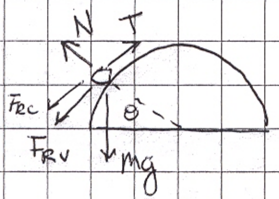
$\boxed{\frac{1}{2}mv_f^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{AL^3}{3}\cdot 2^{3/2} + \frac{3}{10}BL^3}$

$W_2$

$V_1(r = \sqrt{2}L)$

②

a)




$\hat{r}$) $m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = N - mg\,\text{sen}\,\theta$

$r = R \qquad \dot{\theta} = \dfrac{v_0}{R}$

$$\Rightarrow \boxed{N(\theta) = mg\,\text{sen}\,\theta - \frac{m v_0^2}{R}}$$

el menor valor de N se encuentra en $\theta = 30°$

$$\Rightarrow mg\,\frac{1}{2} - \frac{m v_0^2}{R} \geq 0 \Rightarrow \boxed{v_0^2 \leq \frac{Rg}{2}}$$

b)

$$W_{\vec{mg}_{A\to B}} = V_{\vec{mg}}(A) - V_{\vec{mg}}(B) = mgz_A - mgz_B = -mg\frac{R}{2}$$

$$W_{R.visc_{A\to B}} = -C v_0 R\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) \quad \text{ya que } |\vec{v}| \text{ es cte.}$$

$$W_{\vec{N}_{A\to B}} = 0 \quad \text{por ser } \perp \text{ al mto.}$$

$$W_{F_{RC}\,A\to B} = \int_A^B (-\mu N \hat{\theta}) \circ R\,d\theta\,\hat{\theta} = -\mu R \int_{30°}^{90°} N(\theta)\,d\theta$$

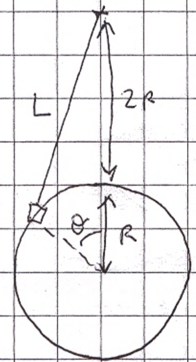
$$= -\mu R \int_{30}^{90°} \left(mg\,\text{sen}\,\theta - \frac{m v_0^2}{R}\right) d\theta = -\mu R \left[-mg\cos\theta - \frac{m v_0^2}{R}\theta\right]_{\pi/6}^{\pi/2}$$

$$W_{F_{RC}\,A\to B} = -\mu R\left(mg\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{m v_0^2}{R}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)\right)$$

$K_A = K_B$

$$K_B - K_A = W_{mg} + W_{Rvisc} + W_N + W_{FRC} + W_T \Rightarrow W_T = -(W_{mg} + W_{RV} + W_N + W_{FRC})$$

P3




$$V = mgR\cos\theta + \frac{1}{2}k(L-L_0)^2$$

$$L^2 = (R\,\text{sen}\,\theta)^2 + (3R - R\cos\theta)^2$$

$$= R^2\left[\text{sen}^2\theta + 9 + \cos^2\theta - 6\cos\theta\right]$$

$$L^2 = R^2(10 - 6\cos\theta)$$

$$\Rightarrow 2LL' = R^2 6\,\text{sen}\,\theta \rightarrow L' = \frac{3R^2\,\text{sen}\,\theta}{L}$$

$$L'' = \frac{3R^2(\cos\theta\, L - \text{sen}\,\theta\, L')}{L^2}$$

a) equilibrio:

$$V' = -mgR\,\text{sen}\,\theta + k(L-L_0)L'$$

$$= -mgR\,\text{sen}\,\theta + k(L-L_0)\frac{3R^2\,\text{sen}\,\theta}{L} \rightarrow \theta = 0 \text{ es siempre equilibrio}$$

$$V'' = -mgR\cos\theta + kL'^2 + k(L-L_0)L''$$

$$V''(0) = -mgR + 0 + k(L-L_0)L''\Big|_{\theta=0}$$

$$L(\theta=0) = 2R \qquad L''(\theta=0) = \frac{3R^2(2R)}{4R^2} = \frac{3}{2}R$$

$$V''(0) = -mgR + k(2R-L_0)\frac{3}{2}R < 0$$ para Eq. inestable

$$\Rightarrow \frac{3}{2}k\cancel{R}(2R-L_0) < mg\cancel{R}$$

$$2R - L_0 < \frac{2}{3}\frac{mg}{k} \Rightarrow \boxed{L_0 > 2R - \frac{2}{3}\frac{mg}{k}}$$

b) $L_0 = 2R$ $\rightarrow$

$\theta_{*_1} = 0$ eq. inestable

$$V'(0) = 0 \Rightarrow -mgR + k(L - 2R)\frac{3R^2}{L} = 0$$

y $\theta \neq 0, 180°$

$$\Rightarrow L(-mgR + 3R^2 k) = 6kR^{3}$$

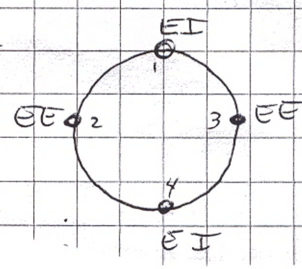
$mg = kR$ $\rightarrow$ $L(2kR) = 6kR^2$

$$\Rightarrow \boxed{L_* = 3R}$$

$$L_*^2 = R^2(10 - 6\cos\theta_*) \rightarrow 9\cancel{R^2} = \cancel{R^2}(10 - 6\cos\theta_*)$$

$\boxed{\cos\theta_{*_{2,3}} = \frac{1}{6}}$ $\rightarrow$ Eq. Estables (ya que $\theta = 0$ era inestable)

$\Rightarrow$ $\theta_{*_4} = 180°$ es inestable



falta evaluar frec de peq oscilaciones en $\theta_{*2,3}$

$$V'' = -mgR\cos\theta + kL'^2 + k(L-L_0)L''$$

en $\theta_{*2,3}$: $\cos\theta = \frac{1}{6} \rightarrow \operatorname{sen}\theta_* = \frac{\sqrt{35}}{6}$ ✓

$$L = 3R \qquad L' = \frac{3R^2 \operatorname{sen}\theta_*}{3R} = R\frac{\sqrt{35}}{6}$$

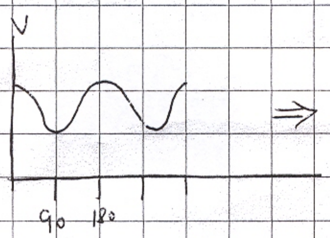
$$L'' = \frac{3R^2}{9R^2}\left(\frac{1}{6}3R - \frac{\sqrt{35}}{6}\frac{R\sqrt{35}}{6}\right) = \frac{R}{18}\left(3-\frac{35}{6}\right) = \frac{-17}{108}R$$

$$\therefore\ V'' = -mgR\frac{1}{6} + kR^2\frac{35}{36} + k(R)\left(-\frac{17}{108}R\right)$$

$$mg = kR \Rightarrow V'' = kR^2\left(-\frac{1}{6}+\frac{35}{36}-\frac{17}{108}\right) = kR^2\left(\frac{-18+105-17}{108}\right) = \frac{70}{108}kR^2$$

$$V'' = \frac{35}{54}kR^2 \Rightarrow \boxed{\omega_0^2 = \frac{35}{54}\frac{k}{m}}$$

c)




$\Rightarrow$ Para que dé 1 o + vuelta hay que superar la barrera de potencial planteada por los equilibrios Inestables

$\therefore$

$$V(90°) + K_i \geq V(0°)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_i^2 \geq V(0°) - V(90°) = mgR + \cancel{\frac{1}{2}k(2R-2R)^2}^{\,0}$$

$$-\left(0 + \frac{1}{2}k(\sqrt{10}R-2R)^2\right)$$

$$v_i^2 \geq 2gR + 0 - \frac{kR^2}{m}(\sqrt{10}-2)^2 = \frac{kR^2}{m}\left(2-(\sqrt{10}-2)^2\right)$$