

28/10/11

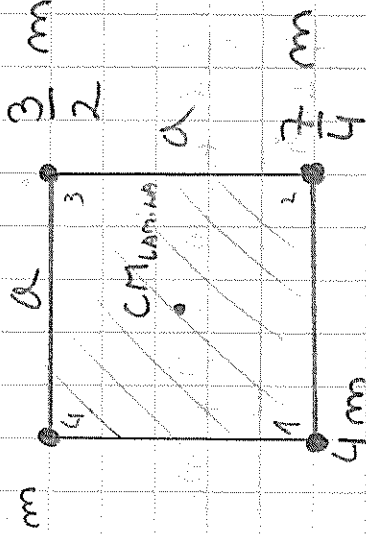
AUX N°2

Fi 1002-5

SISTEMAS NEWTONIANOS

PU

SE TIENE UNA LÁMINA CUADRADA HOMOGÉNEA DE LADO a Y MASA m , EN CADA UNO DE SUS VÉRTICES SE COLOCA UNA BOLITA DE DISTINTA MASA, ENCUENTRE EL CENTRO DE MASAS DEL SISTEMA



SITUAMOS, PUESTO EJE DE COORDENADAS EN EL VÉRTICE 1.

EL CENTRO DE MASAS DE UNA PLACA CUADRADA HOMOGÉNEA SE ENCUENTRA EN

$$R_{CM} = \frac{a}{2} \hat{i} + \frac{a}{2} \hat{j}$$

Luego, calculamos el centro de MASAS de la configuración de bolitas.

$$m \bullet 4 \quad 3 \bullet \frac{3}{2} m$$

$$4m \bullet 1 \quad 2 \bullet \frac{7}{4} m$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 m_i x_i &= 4m + \frac{7}{4}m + \frac{3}{2}m + m \\ &= \frac{16m + 7m + 6m + 4m}{4} \\ &= \frac{33m}{4} \end{aligned}$$

$$\vec{R}_{cm \text{ bolitas}} = \frac{0.4m\hat{i} + a\hat{j} + \frac{7}{4}m\hat{i} + \frac{3m(a\hat{i} + \hat{j})}{2}}{\frac{33m}{4}}$$

$$\vec{R}_{cm \text{ bolitas}} = \frac{\frac{7}{4}a\hat{i} + \frac{3}{2}a\hat{j} + \frac{3}{2}a\hat{j} + a\hat{j}}{\frac{33}{4}}$$

$$\vec{R}_{cm \text{ bolitas}} = \frac{\frac{7+6}{4}a\hat{i} + \frac{3+2}{2}a\hat{j}}{\frac{33}{4}}$$

$$r_{\text{en bolitas}} = \left| \frac{13}{33} a \hat{i} + \frac{10}{33} a \hat{j} \right|$$

Luego el centro de masas del sistema completo es

$$\vec{R}_{CM} = \frac{M_1 R_{CM1} + M_2 R_{CM2}}{M_1 + M_2}$$

$$\vec{R}_{CM} = \frac{\frac{33m}{4} \left(\frac{13a}{33} \hat{i} + \frac{10}{33} a \hat{j} \right) + m \frac{a}{2} (\hat{i} + \hat{j})}{\frac{33m}{4} + m}$$

$$\vec{R}_{CM} = \frac{\frac{13}{4} a \hat{i} + \frac{a}{2} \hat{i} + \frac{5}{2} a \hat{j} + \frac{a}{2} \hat{j}}{\frac{37}{4}}$$

$$\vec{R}_{CM} = \frac{4}{37} \left(\frac{15}{4} a \hat{i} + 3 a \hat{j} \right)$$

$$\vec{R}_{CM} = \frac{15}{37} a \hat{i} + \frac{12}{37} a \hat{j}$$

2) Ahora se agrega otra bolita en la posición $\frac{15}{37} a \hat{i} + \frac{12}{37} a \hat{j}$, la bolita tiene masa 5 m.

¿Cuál es el nuevo centro de masas?

→ el centro de masas NO VARIA

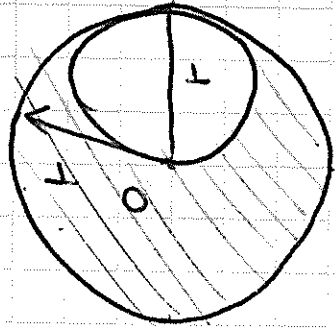
Tomamos el sistema 1 como la placa con las 4 bolitas y sistema 2 la nueva bolita.

$$\vec{R}_{cm} = \frac{\vec{R}_{cm1} \cdot M_1 + \vec{R}_{cm2} \cdot M_2}{M_1 + M_2}$$

en este caso $\vec{R}_{cm1} = \vec{R}_{cm2}$

$$\vec{R}_{cm} = \frac{(M_1 + M_2) \vec{R}_{cm1}}{M_1 + M_2}$$

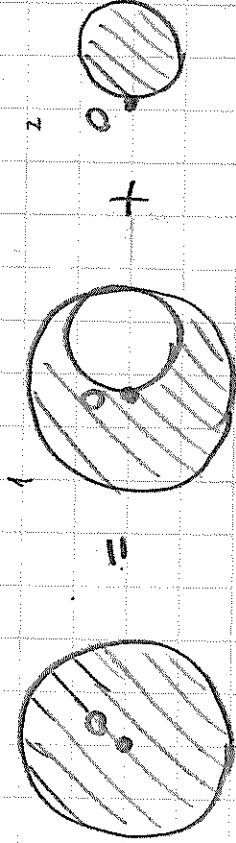
$$\vec{R}_{cm} = \vec{R}_{cm1} = \frac{15}{37} a \hat{i} + \frac{12}{37} a \hat{j}$$



disco homogéneo con
un sacado, de masa
M

calcule el centro de del sistema

basta notar que



como el centro de MASA es
una CANTIDAD ADITIVA.

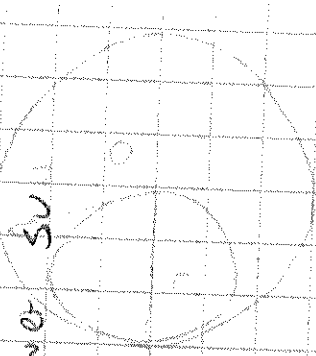
$$\vec{R} = M_1 \vec{R}_1 + M_2 \vec{R}_2$$

$$\vec{R} = M \vec{R} - M_2 \vec{R}_2$$

$$\vec{R} = \frac{M \vec{R} - M_2 \vec{R}_2}{M_1}$$

como tenemos que el disco es homogéneo podemos obtener su densidad de masa por Area

densidad de masa por Area



→ Area Disco 1

$$A_{\text{Area}} = \pi \left(R^2 - \frac{r^2}{4} \right)$$

$$A_{\text{Area}} = \pi \frac{3R^2}{4}$$

$$A \cdot \rho = M$$

$$\rightarrow \rho = \frac{4M}{3\pi R^2}$$

→ Suponemos que el disco que sale es extraído es del mismo material homogéneo

Masa disco 2

$$M_2 = A_2 \rho = \frac{4M}{3\pi R^2} \cdot \pi \frac{r^2}{4}$$

$$M_2 = M \frac{r^2}{R^2}$$

$$\vec{R}_1 = \frac{(M_1 + M_2) \vec{R}}{M}$$

$$\vec{R} = \vec{O}$$

$$\vec{R}_2 = \frac{1}{2} \hat{x} + 0 \hat{y}$$

$$\vec{R}_1 = -\frac{M_2}{M_1} \vec{R}_2$$

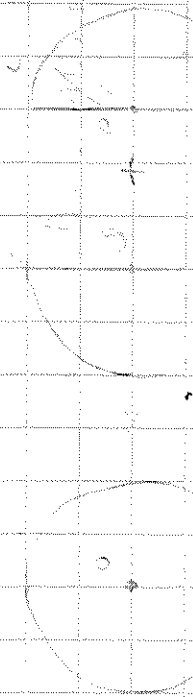
$$\vec{R}_1 = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \hat{x} + 0 \hat{y}$$

$$\vec{R}_1 = -\frac{1}{6} \hat{x} + 0 \hat{y}$$

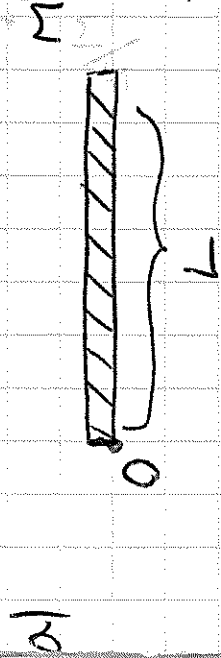
$$\text{com } x = -0,166$$

De onde a posição relativa obtida é o centro de massa de um medidor.

$$\text{Diferença } \Delta x = 1$$



2b) Calcular momento de inercia de una barra de largo L y masa M con respecto a su borde



Subdividimos la barra en $N+1$ partes iguales cada una de masa $M/N+1$ y separadas por L/N . Las consideramos como masas puntuales.

$$I = \sum_{i=1}^N m_i \cdot r_i^2$$

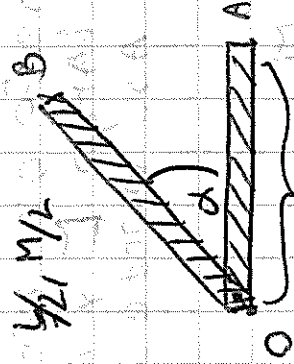
$$I = \sum_{i=1}^N \frac{M}{N+1} \left(\frac{Li}{N} \right)^2$$

$$= \sum_{i=1}^N \frac{ML^2 i^2}{N^3(N+1)} = \frac{ML^2}{N^2(N+1)} \frac{N(N+1)(2N+1)}{6}$$

$$I_n = \frac{ML^2}{6} \frac{(2N+1)(N+1)}{N} \quad \text{para formar el continuo de la barra tomamos límite}$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} I_n = \frac{ML^2}{6} \cdot 2 = \frac{ML^2}{3}$$

b)



$L/2 \quad M/2$

subdividimos en N trozos las dos
barras y suponemos masas puntuales

cada punto tiene masa $\frac{M}{2(N+1)}$ y

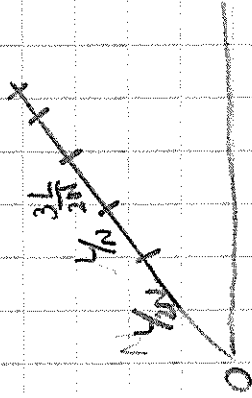
y su separacion es de $\frac{L}{2N}$

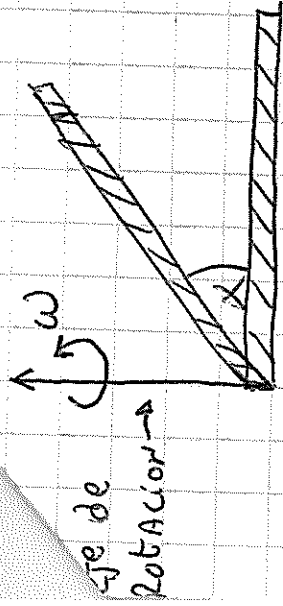
$$I = \sum_{\text{todas}} m(i) (r(i))^2 = \sum_{i \in A} m(i) (r(i))^2 + \sum_{i \in B} m(i) (r(i))^2$$

para la barra horizontal

$$r(i) = \frac{iL}{2N}$$

y para la barra oblicua





cada barra tiene masa $\frac{M}{2}$ y largo $\frac{L}{2}$

subdividimos cada barra en $N+1$ masas puntuales cada una de masa $\frac{M}{2(N+1)}$ y separadas por $\frac{L}{2N}$

$$I = \sum_{\text{todas}} m(i) (r(i))^2 = \sum_{i \in \text{barra 1}} m(i) (r(i))^2 + \sum_{i \in \text{barra 2}} m(i) (r(i))^2$$

para la barra horizontal

$$I = \frac{ML^2}{48} \frac{(2N+1)}{N} \quad (\text{por parte anterior})$$

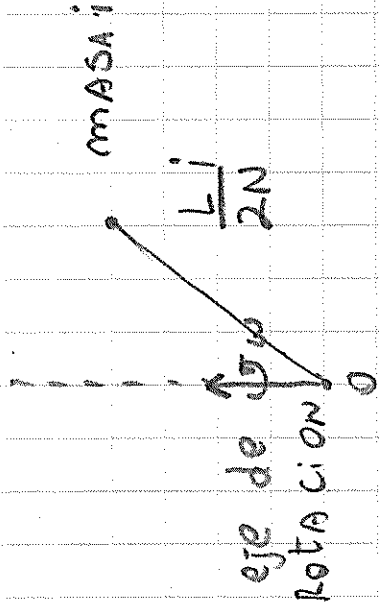
para la barra oblicua

$$I = \frac{ML^2}{24} (1 + \cos^2 \alpha)$$

si elegimos $\alpha = 180^\circ$

se ve que LA INERCIA de una
barra girando entorno a su
punto medio es

$$I = \frac{ML^2}{12}$$



La distancia al eje de giro es

$$r = \cos(\alpha) \frac{L_i}{2N}$$

entonces su inercia es

$$I = \sum_{i=0}^N \cos^2(\alpha) \frac{L_i^2}{4N^2} \frac{m}{2N+1}$$

$$= \frac{ML^2 \cos^2(\alpha)}{48} \frac{(2N+1)}{N}$$

Luego la inercia del sistema entero es

$$I = \frac{ML^2 (2N+1)}{48 N} (1 + \cos^2(\alpha))$$

Luego Tomando Limite