

Sistemas Newtonianos: Estática - Pauta

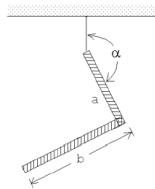
Profesor: Roberto Rondanelli

Auxiliares: Álvaro Aravena, Nicolás Cofré, Francisca Concha

November 8, 2011

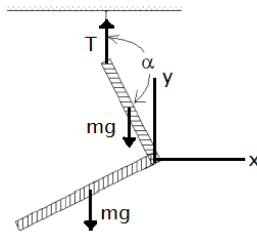
1 Problemas

- P1.** Considere una estructura formada por dos barras uniformes de masa m y largos a y b , unidas de modo tal que forman un ángulo recto. La estructura cuelga con un hilo (ver figura adjunta). Determine al ángulo α que forma la estructura con la vertical si se encuentra en equilibrio estático.



Resolución:

Dibujemos el DCL de la figura:



Imponiendo la primera condición de equilibrio estático:

$$\sum \vec{F} = 0 = T - mg - mg \rightarrow T = 2mg$$

La segunda condición de equilibrio estático es $\sum \vec{\tau} = 0$. Para calcular el torque utilizaremos como eje de rotación el origen del sistema. Podemos notar que:

Torque por tensión:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= T\hat{j} = 2mg\hat{j} \\ \vec{r} &= -a\sin(\alpha)\hat{i} - a\cos(\alpha)\hat{j} \\ \vec{\tau}_T &= \vec{r} \times \vec{F} = -2mg\sin(\alpha)\hat{k}\end{aligned}$$

Torque por peso de barra a :

$$\begin{aligned}\vec{F} &= T\hat{j} = -mg\hat{j} \\ \vec{r} &= -(a/2)\sin(\alpha)\hat{i} - (a/2)\cos(\alpha)\hat{j} \\ \vec{\tau}_a &= \vec{r} \times \vec{F} = mg(a/2)\sin(\alpha)\hat{k}\end{aligned}$$

Torque por peso de barra b :

$$\begin{aligned}\vec{F} &= T\hat{j} = -mg\hat{j} \\ \vec{r} &= -(b/2)\cos(\pi - \alpha)\hat{i} - (b/2)\sin(\pi - \alpha)\hat{j} = (b/2)\cos(\alpha)\hat{i} - (b/2)\sin(\alpha)\hat{j} \\ \vec{\tau}_a &= \vec{r} \times \vec{F} = -mg(b/2)\cos(\alpha)\hat{k}\end{aligned}$$

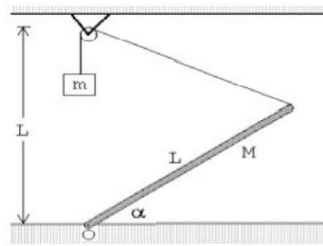
Notar que $\cos(\alpha) < 0$. Luego:

$$\begin{aligned}\vec{\tau} = 0 &= -2mg\sin(\alpha)\hat{k} + mg(a/2)\sin(\alpha)\hat{k} - mg(b/2)\cos(\alpha)\hat{k} \\ (3/2)mg\sin(\alpha)\hat{k} &= -(1/2)mgb\cos(\alpha)\hat{k}\end{aligned}$$

Finalmente:

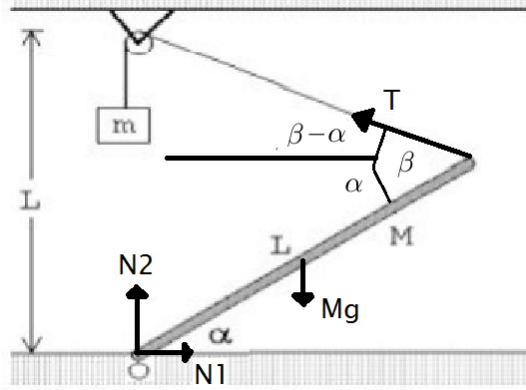
$$\tan(\alpha) = (-b/3a)$$

- P2.** Una barra de masa M y largo L puede girar libremente en torno a su punto de apoyo O en una mesa horizontal. La masa se mantiene en equilibrio estático con una masa m y una cuerda como indica la figura. Encuentre el ángulo α de equilibrio si $\frac{m}{M} = 0.5$.



Resolución:

Utilizaremos la segunda condición de equilibrio: $\sum \vec{\tau} = 0$. Dibujamos un DCL de la tabla, cabe señalar que se impone un ángulo desconocido β .



Como las fuerzas normales no ejercen torque, las omitiremos del análisis (en eso se fundamenta la utilización de torque en este ejercicio).

Torque por peso de la barra:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= -Mg\hat{j} \\ \vec{r} &= (L/2)\cos(\alpha)\hat{i} + (L/2)\sin(\alpha)\hat{j} \\ \vec{\tau}_P &= \vec{r} \times \vec{F} = -Mg(L/2)\cos(\alpha)\hat{k}\end{aligned}$$

Torque por tensión de la cuerda:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= -T\cos(\beta - \alpha)\hat{i} + T\sin(\beta - \alpha)\hat{j} \\ \vec{r} &= (L)\cos(\alpha)\hat{i} + (L)\sin(\alpha)\hat{j} \\ \vec{\tau}_T &= \vec{r} \times \vec{F} = (L\cos(\alpha)T\sin(\beta - \alpha) + L\sin(\alpha)T\cos(\beta - \alpha))\hat{k}\end{aligned}$$

Como:

$$\begin{aligned}\sin(\beta - \alpha) &= \sin(\beta)\cos(\alpha) - \sin(\alpha)\cos(\beta) \\ \cos(\beta - \alpha) &= \cos(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\alpha)\sin(\beta)\end{aligned}$$

Se tiene:

$$\begin{aligned}\vec{\tau}_T &= \vec{r} \times \vec{F} = LT\sin(\beta)\hat{k} \\ \vec{\tau} &= \vec{\tau}_P + \vec{\tau}_T = 0 = (LT\sin(\beta) - Mg(L/2)\cos(\alpha))\hat{k} \\ T &= \frac{Mg\cos(\alpha)}{2\sin(\beta)}\end{aligned}$$

Ahora, notando que la masa m también está en reposo, es fácil notar que: $T = mg$. Como $m/M = 0.5$, se tiene:

$$mg = \frac{Mg \cos(\alpha)}{2 \sin(\beta)} \rightarrow \sin(\beta) = \cos(\alpha)$$

Notamos que se necesita conocer β para determinar α . Es facil notar que el triángulo que forma la barra, cuerda y la vertical es isósceles y, por lo tanto, sus ángulos internos son: $(\pi/2 - \alpha)$, β y β . . Como los ángulos internos suman π :

$$\alpha = 2\beta - \pi/2$$

Entonces:

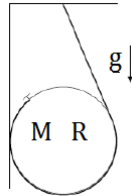
$$\sin(\beta) = \cos(2\beta - \pi/2) = \cos(2\beta)\cos(\pi/2) + \sin(2\beta)\sin(\pi/2) = \sin(2\beta)$$

La única solución con sentido fisico es: $\beta = \pi/3$, y en consecuencia

$$\alpha = 2\pi/3 - \pi/2 = \pi/6$$

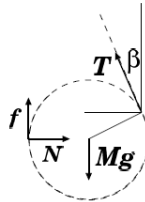
P3. Se desea colgar un tambor cilíndrico macizo de masa M y radio R como se ilustra en la figura. El tambor es apoyado contra una pared vertical mediante una cinta semienrollada como se indica en la figura. La aceleración de gravedad del lugar es g y la cinta se ata al techo formando un ángulo β con la vertical.

- (a) Determine la fuerza de contacto de la pared sobre la cinta (normal y roce).
- (b) Calcule el coeficiente de roce necesario para la configuración deseada y comente acerca de la viabilidad del proyecto.



Resolución:

Se dibuja un DCL de la figura.



Utilizamos las condiciones de equilibrio estático (fuerzas):

$$\begin{aligned}\vec{F}_x = 0 &= N - T \sin(\beta) \rightarrow N = T \sin(\beta) \\ \vec{F}_y = 0 &= T \cos(\beta) + R - Mg \rightarrow Mg = T \cos(\beta) + f\end{aligned}$$

Ahora, empleamos la condición de torque imponiendo como eje de rotación el centro del tambor, y notando que las fuerzas normal y peso no ejercen torque.

Torque por fricción:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= f \hat{j} \\ \vec{r} &= -R \hat{i} \\ \vec{\tau}_f &= \vec{r} \times \vec{F} = -Rf \hat{k}\end{aligned}$$

Torque por tensión:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= -T \sin(\beta) \hat{i} + T \cos(\beta) \hat{j} \\ \vec{r} &= R \cos(\beta) \hat{i} + R \sin(\beta) \hat{j} \\ \vec{\tau}_T &= \vec{r} \times \vec{F} = (RT \cos^2(\beta) + RT \sin^2(\beta)) \hat{k} = RT \hat{k}\end{aligned}$$

Entonces:

$$\vec{\tau} = 0 = \vec{\tau}_f + \vec{\tau}_T = -Rf + RT \rightarrow T = f$$

Imponiendo este resultado en la ecuación de fuerzas en el eje y.

$$Mg = T \cos(\beta) + T = T(\cos(\beta) + 1) \rightarrow T = \frac{Mg}{1 + \cos(\beta)}$$

Ahora, uniendo la ecuación de torque y la de fuerzas en el eje x.

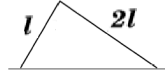
$$N = T \sin(\beta) = \frac{Mg}{1 + \cos(\beta)} \cdot \sin(\beta)$$

Condición de no resbalamiento:

$$f \leq \mu N \rightarrow \mu \rightarrow 1 \leq \mu \sin(\beta) \rightarrow \mu \geq \frac{1}{\sin(\beta)} \geq 1$$

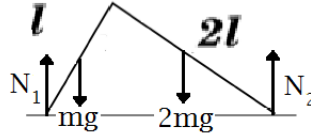
Condición hace el proyecto inviable.

- P4.** La figura adjunta muestra una L recta, formada por dos trozos de alambre uniforme. El más corto es de masa m y largo l , mientras que el más largo es de masa $2m$ y largo $2l$. Si el sistema se encuentra en equilibrio estático, encuentre la razón entre las reacciones normales en cada punto de contacto con el suelo.



Resolución:

Se dibuja un DCL de la figura.



Condiciones de equilibrio estático: suma de fuerzas nula.

$$F_y = 0 = N_1 + N_2 - mg - 2mg \rightarrow N_1 + N_2 = 3mg$$

El ángulo de la barra $2l$ con la horizontal es α y el ángulo de la barra l con la horizontal es β (desconocidos por el momento).

Ahora se impone la segunda condición de equilibrio estático: suma de torques nula. Para ello usaremos como eje de rotación el vértice de la figura: todas las fuerzas ejercen torque

(Escogiendo otro punto, se llega al mismo resultado).

Torque por N_1 :

$$\begin{aligned}\vec{F} &= N_1 \hat{j} \\ \vec{r} &= -l \cdot \cos(\beta) \hat{i} - l \cdot \sin(\beta) \hat{j} \\ \vec{\tau}_{N_1} &= \vec{r} \times \vec{F} = -l \cdot N_1 \cos(\beta) \hat{k}\end{aligned}$$

Torque por P_{mg} :

$$\begin{aligned}\vec{F} &= -mg \hat{j} \\ \vec{r} &= -(l/2) \cdot \cos(\beta) \hat{i} - (l/2) \cdot \sin(\beta) \hat{j} \\ \vec{\tau}_{mg} &= \vec{r} \times \vec{F} = (l/2) \cdot mg \cos(\beta) \hat{k}\end{aligned}$$

Torque por N_2 :

$$\begin{aligned}\vec{F} &= N_2 \hat{j} \\ \vec{r} &= 2l \cdot \cos(\alpha) \hat{i} - 2l \cdot \sin(\alpha) \hat{j} \\ \vec{\tau}_{N_2} &= \vec{r} \times \vec{F} = 2l \cdot N_2 \cos(\alpha) \hat{k}\end{aligned}$$

Torque por P_{2mg} :

$$\begin{aligned}\vec{F} &= -2mg\hat{j} \\ \vec{r} &= l \cdot \cos(\alpha)\hat{i} - l \cdot \sin(\alpha)\hat{j} \\ \vec{\tau}_{2mg} &= \vec{r} \times \vec{F} = -2l \cdot mg\cos(\alpha)\hat{k}\end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned}\vec{\tau} &= 0 = \vec{\tau}_{N_1} + \vec{\tau}_{mg} + \vec{\tau}_{N_2} + \vec{\tau}_{2mg} \\ 0 &= -l \cdot N_1\cos(\beta) + (l/2) \cdot mg\cos(\beta) + 2l \cdot N_2\cos(\alpha) - 2l \cdot mg\cos(\alpha) \\ 0 &= -2 \cdot N_1\cos(\beta) + mg\cos(\beta) + 4 \cdot N_2\cos(\alpha) - 4 \cdot mg\cos(\alpha)\end{aligned}$$

Como $\cos(\beta) = 1/\sqrt{5}$ y $\cos(\alpha) = 2/\sqrt{5}$:

$$0 = -2 \cdot N_1 + mg + 8 \cdot N_2 - 8 \cdot mg$$

Como $N_1 = 3mg - N_2$:

$$\begin{aligned}0 &= -2 \cdot (3mg - N_2) + mg + 8 \cdot N_2 - 8 \cdot mg \\ mg(13) &= N_2(10) \rightarrow N_2 = mg \cdot \frac{13}{10}\end{aligned}$$

Ahora calculamos N_1 :

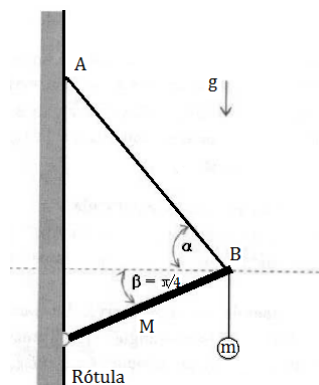
$$N_1 = 3mg - N_2 = 3mg - mg \cdot \frac{13}{10} = mg \cdot \frac{17}{10}$$

Entonces:

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{17}{13}$$

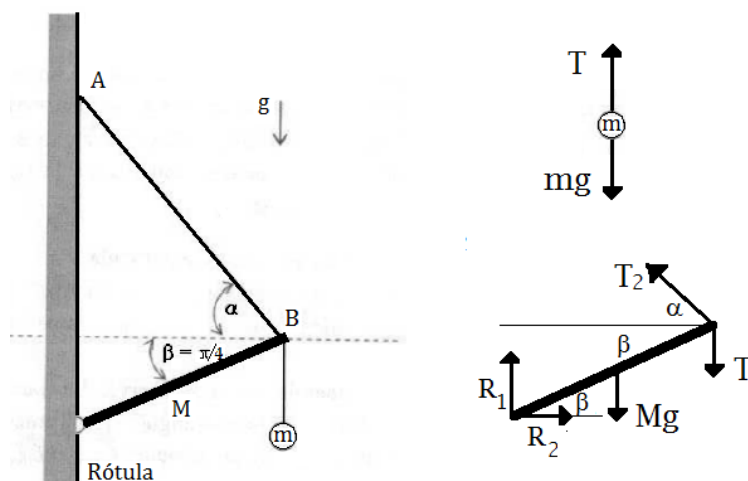
P5. Una barra de masa M está articulada en uno de sus extremos a una pared vertical. Del extremo opuesto pende una carga de masa m unida a la barra mediante una cuerda ideal. La barra se mantiene en reposo en la configuración mostrada en la figura debido a que una segunda cuerda (AB , también ideal) se engancha en el extremo de la barra y la pared vertical. La segunda cuerda es lo suficientemente larga como para poder engancharse en la pared (A) en cualquier posición haciendo variar el ángulo α pero manteniendo el ángulo $\beta = \frac{\pi}{4}$.

- (a) Determine la tensión de la cuerda AB como función del ángulo α y grafique esta función. En el gráfico, identifique el rango posible del ángulo α y evalúe el valor de la tensión en los extremos de ese rango. Identifique el valor de α que produce la mínima tensión.
- (b) Si la tensión máxima que soporta la cuerda es $T = \sqrt{2}(\frac{M}{2} + m) \cdot g$, identifique el rango posible del ángulo α para el cual la cuerda no se corta. Identifíquelo en el gráfico.



Resolución:

Se dibuja un DCL de la figura.



Utilizando la primera condición de equilibrio estática sobre la masa m , es evidente que: $T = mg$.

Ahora, aplicamos la segunda condición (suma de torques nula) de la barra, utilizando como eje de rotación el contacto con la pared (notamos que las reacciones R_1 y R_2 no ejercen torque). Usaremos longitud de barra L (desconocida):

Torque por P_{Mg} :

$$\begin{aligned}\vec{F} &= -Mg\hat{j} \\ \vec{r} &= (L/2) \cdot \cos(\beta)\hat{i} + (L/2) \cdot \sin(\beta)\hat{j} \\ \vec{\tau}_{Mg} &= \vec{r} \times \vec{F} = -(L/2) \cdot Mg\cos(\beta)\hat{k}\end{aligned}$$

Torque por T :

$$\begin{aligned}\vec{F} &= -T\hat{j} \\ \vec{r} &= (L) \cdot \cos(\beta)\hat{i} + (L) \cdot \sin(\beta)\hat{j} \\ \vec{\tau}_T &= \vec{r} \times \vec{F} = -LT\cos(\beta)\hat{k}\end{aligned}$$

Torque por T_2 :

$$\begin{aligned}\vec{F} &= -T_2\cos(\alpha)\hat{i} + T_2\sin(\alpha)\hat{j} \\ \vec{r} &= (L) \cdot \cos(\beta)\hat{i} + (L) \cdot \sin(\beta)\hat{j} \\ \vec{\tau}_{T_2} &= \vec{r} \times \vec{F} = (LT_2\sin(\alpha)\cos(\beta) + LT_2\sin(\beta)\cos(\alpha))\hat{k}\end{aligned}$$

Como $\sum \vec{\tau} = 0$, $\beta = \pi/4$ y $T = mg$:

$$\begin{aligned}0 &= (-\frac{L}{2} \cdot Mg\cos(\beta) - LT\cos(\beta) + (LT_2\sin(\alpha)\cos(\beta) + LT_2\sin(\beta)\cos(\alpha)))\hat{k} \\ 0 &= -\frac{1}{2} \cdot Mg\frac{\sqrt{2}}{2} - mg\frac{\sqrt{2}}{2} + (T_2\sin(\alpha)\frac{\sqrt{2}}{2} + T_2\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(\alpha)) \\ 0 &= -Mg - 2mg + 2T_2\sin(\alpha) + 2T_2\cos(\alpha)\end{aligned}$$

Entonces:

$$T_2 = \frac{Mg + 2mg}{2(\sin(\alpha) + \cos(\alpha))}$$

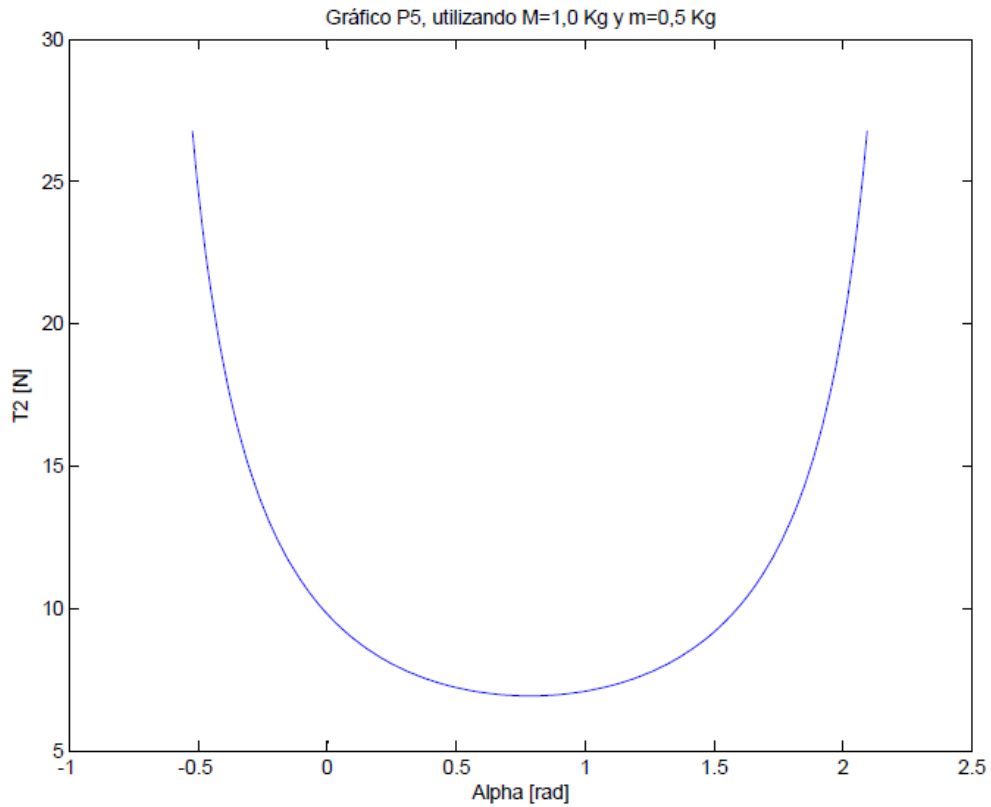
Imponemos que $T_2 > 0$, luego, $\cos(\alpha) + \sin(\alpha) > 0 \rightarrow -\pi/4 \leq \alpha \leq 3\pi/4$.

En los límites del rango, claramente T_2 tiende a infinito pues $\sin(\alpha) + \cos(\alpha)$ tiende a cero.

El valor mínimo:

$$\begin{aligned}T_2'(\alpha) &= K \cdot \left(\frac{1}{\cos(\alpha) + \sin(\alpha)}\right)' = K \cdot \left(\frac{\sin(\alpha) - \cos(\alpha)}{(\cos(\alpha) + \sin(\alpha))^2}\right) = 0 \\ \cos(\alpha) &= \sin(\alpha) \rightarrow \alpha = \pi/4\end{aligned}$$

(Coincidente con el gráfico - siguiente página -, me da lata comprobar que es un mínimo matemáticamente, pero con en el gráfico es evidente)



Como $T_{2-max} = \sqrt{2}(M/2 + m)g$

$$T_2 = \frac{Mg + 2mg}{2(\sin(\alpha) + \cos(\alpha))} \leq \sqrt{2}(M/2 + m)g$$

$$T_2 = \frac{1}{\sin(\alpha) + \cos(\alpha)} \leq \sqrt{2}$$

$$\sin(\alpha) + \cos(\alpha) \geq \sqrt{2}/2$$

Busquemos los casos límite (alteramos soluciones por la función raíz, necesita análisis posterior):

$$\begin{aligned} \sin(\alpha) + \cos(\alpha) &= \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{1 - \sin^2(\alpha)} &= \sqrt{2}/2 - \sin(\alpha) \\ 1 - \sin^2(\alpha) &= 1/2 + \sin^2(\alpha) - \sqrt{2}\sin(\alpha) \\ 0 &= 2\sin^2(\alpha) - \sqrt{2}\sin(\alpha) - 1/2 \end{aligned}$$

Resolviendo la ecuación cuadrática:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha) &= \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2+4}}{4} \\ \alpha_1 &= \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right) = \frac{5}{12}\pi \\ \alpha_2 &= \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right) = -\frac{1}{12}\pi \end{aligned}$$

Notamos que $T_{2-max} > T(\alpha = 0) = T(\alpha = \pi/2)$. Observando el gráfico, claramente $5\pi/12$ no es una solución real, fue producto del desarrollo algebraico con función raíz. Por simetria, la solución, aparte de $-\pi/12$ es $\pi/2 + \pi/12 = 7\pi/12$. Luego:

$$-\frac{1}{12}\pi \leq \alpha \leq \frac{7}{12}\pi$$

