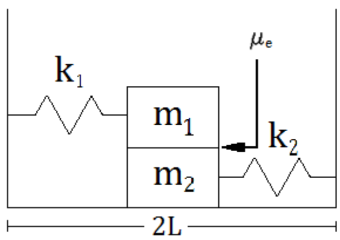
Sistemas Newtonianos: Oscilaciones

Profesor: Roberto Rondanelli
Auxiliares: Álvaro Aravena, Nicolás Cofré, Francisca Concha

December 6, 2011

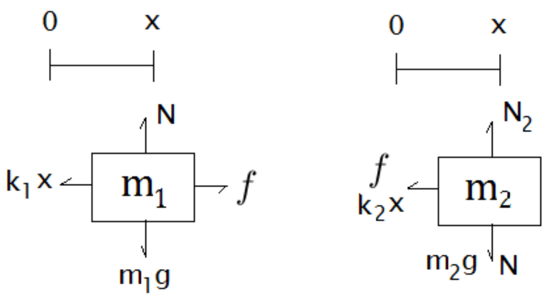
1 Problemas

P1. Se suporponen dos masas en presencia de dos resortes de largo natural L, como se indica en la figura. Calcule la amplitud máxima de oscilación de modo que ambas masas no se separen, gracias a la presencia de una fuerza de roce estático (de constante μ_e).



Resolución:

Consideremos un sistema de referencia cuyo origen se ubica a una distancia L de cada una de las paredes. La fuerza de contacto entre las masas consiste en una fuerza normal N y una fuerza de roce f.



Luego:

$$m_1 a_{1y} = N - m_1 g = 0 \rightarrow N = m_1 g$$
$$m_1 a_{1x} = f - k_1 x$$
$$m_2 a_{2x} = -f - k_2 x$$

Es claro que, como las masas no se separan, la aceleración en el eje x de ambos cuerpos coincide ($a_{1x} = a_{2x} = \ddot{x}$)

$$m_1 \ddot{x} = f - k_1 x$$
$$m_2 \ddot{x} = -f - k_2 x$$

Luego:

$$m_1 \ddot{x} + k_1 x = -k_2 x - m_2 \ddot{x}$$
$$\ddot{x} + \tfrac{k_1+k_2}{m_1+m_2} x = 0$$

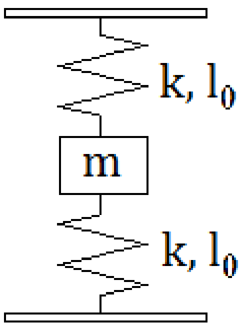
Que corresponde a MAS con $\omega_0^2 = \frac{k_1+k_2}{m_1+m_2}$. Para calcular la amplitud máxima debemos notar que:

$$\tfrac{f}{m_1} - \tfrac{k_1}{m_1} x = -\tfrac{f}{m_2} - \tfrac{k_2}{m_2} x$$

El caso límite se obtiene imponiendo $f_{max} = \mu_e N = \mu_e m_1 g$. Luego:

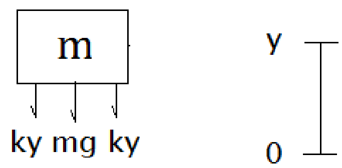
$$\tfrac{\mu_e m_1 g}{m_1} - \tfrac{k_1}{m_1} x_{max} = -\tfrac{\mu_e m_1 g}{m_2} - \tfrac{k_2}{m_2} x_{max}$$
$$x_{max} = \mu_e \cdot m_1 \cdot g \cdot \frac{\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}}{|\frac{k_1}{m_1} - \frac{k_2}{m_2}|}$$
$$x_{max} = \mu_e \cdot m_1 \cdot g \cdot \frac{\frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}}{|\frac{k_1 m_2 - k_2 m_1}{m_1 m_2}|} = \mu_e \cdot m_1 \cdot g \cdot \frac{m_1 + m_2}{|k_1 m_2 - k_2 m_1|}$$

P2. Considerando que inicialmente ($t = 0$), ambos resortes están en su largo natural y el bloque está en reposo. Determinar la ecuación de movimiento del bloque, la frecuencia angular, período de oscilaciones y amplitud.



Resolución:

Consideremos un sistema de referencias cuyo origen se encuentra en el punto medio del sistema, creciendo y hacia arriba. Para realizar un DCL genérico, situamos la masa a una distancia del origen y arbitraria. Es fácil notar que la fuerza de ambos resortes va dirigida en el mismo sentido.



Luego:

$$m\ddot{y} = -mg - ky - ky = -mg - 2ky$$
$$\ddot{y} = -g - \frac{2k}{m}y$$

Lo cual no coincide exactamente con la ecuación de MAS. Si efectuamos un cambio de variable:

$$z = y + \frac{gm}{2k} \rightarrow y = z - \frac{gm}{2k}$$
$$\dot{z} = \dot{y}$$
$$\ddot{z} = \ddot{y}$$

Entonces:

$$\ddot{z} = -g - \frac{2k}{m}(z - \frac{gm}{2k})$$
$$\ddot{z} = \frac{2k}{m}z$$

Lo que sí corresponde a MAS, donde $\omega_0^2 = \frac{2k}{m}$. Por otro lado, $T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$.

La ecuación de movimiento será de la forma:

$$z(t) = Acos(\omega_0 t + \theta_0)$$

Pero como $z(t) = y(t) + \frac{gm}{2k}$. Se tiene que:

$$y(t) = Acos(\omega_0 t + \theta_0) - \frac{gm}{2k}$$
$$\dot{y}(t) = -A\omega_0 sin(\omega_0 t + \theta_0)$$

Por condiciones iniciales, $y(0) = 0$ y $\dot{y}(0) = 0$. Entonces:

$$\dot{y}(0) = 0 = -A\omega_0 sin(\theta_0) \rightarrow sin(\theta) = 0 \rightarrow \theta = 0$$

Luego:

$$y(0) = 0 = Acos(0) - \tfrac{gm}{2k} \rightarrow A = \tfrac{gm}{2k}$$

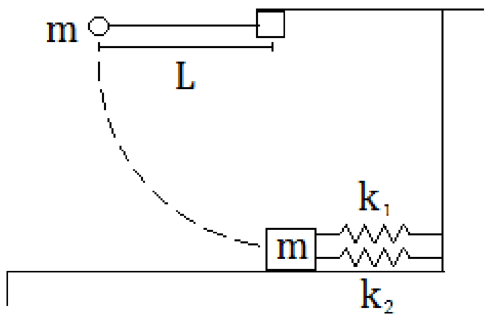
Entonces:

$$y(t) = \tfrac{gm}{2k} cos(\sqrt{\tfrac{2k}{m}} t) - \tfrac{gm}{2k}$$

Si consideramos un sistema de referencias cuyo origen se ubica en la base del sistema:

$$y^*(t) = \tfrac{gm}{2k} cos(\sqrt{\tfrac{2k}{m}} t) - \tfrac{gm}{2k} + l_0$$

P3. Se suelta la masa de un péndulo desde el reposo, de modo tal que desciende y choca elásticamente con un bloque de igual masa m. Encontrar la ecuación de movimiento del bloque tras la colisión, considerando que en $t = 0$ los resortes están en su largo natural l_0. Ignore la presencia del péndulo después del choque.



Resolución:

Por conservación de la energía, podemos calcular la velocidad de la masa unida al péndulo inmediatamente antes del choque.

$$E_i = mgL$$
$$E_f = \tfrac{1}{2} m v^2 \rightarrow v = \sqrt{2gL}$$

Como el choque es elástico, además del momentum lineal, se conserva la energía.

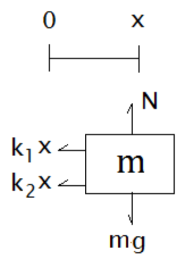
$$\vec{p_i} = m\sqrt{2gL}$$
$$\vec{p_f} = mv_{f1} + mv_{f2} \rightarrow v_{f1} + v_{f2} = \sqrt{2gL}$$

$$E_i = \frac{1}{2}mv^2 = mgL$$
$$E_f = \frac{1}{2}m(v_{f1}^2 + v_{f2}^2) \rightarrow 2gL = v_{f1}^2 + v_{f2}^2$$

Luego:

$$2gL = (\sqrt{2gL} - v_{f2})^2 + v_{f2}^2$$
$$0 = -2\sqrt{2gL}v_{f2} + 2v_{f2}^2$$
$$\sqrt{2gL} = v_{f2}$$

Nos olvidamos del péndulo. Consideramos un sistema cuyo origen se presenta en el largo natural de los resortes. Para realizar un DCL genérico, situamos la masa a una distancia del origen x arbitraria.



$$m\ddot{x} = -k_1x - k_2x = -(k_1 + k_2)x$$
$$\ddot{x} = -\frac{k_1+k_2}{m}x$$

Corresponde a MAS con $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}$. La ecuación es de la forma:

$$x(t) = Acos(\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}t + \theta_0)$$
$$\dot{x}(t) = -A\omega_0 sin(\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}t + \theta_0)$$

Sabemos que $x(0) = 0$. Luego:

$$x(0) = Acos(\theta_0) = 0 \rightarrow cos(\theta) = 0 \rightarrow \theta_0 = \frac{\pi}{2}$$

Entonces, como $\dot{x}(0) = \sqrt{2gL}$:

$$\dot{x}(0) = -A\omega_0 sin(\frac{\pi}{2}) = \sqrt{2gL} \rightarrow A = -\sqrt{\frac{2gLm}{k_1+k_2}}$$

La ecuación es:

$$x(t) = -\sqrt{\frac{2gLm}{k_1+k_2}}cos(\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}t + \frac{\pi}{2})$$

P4. Un oscilador formado por un resorte y un cuerpo de masa m está inmerso en un medio viscoso. Las oscilaciones resultan amortiguadas de forma tal que, partiendo de una amplitud A, al cabo de cinco ciclos su amplitud es $A/3$. El lapso de cada ciclo es de 0.2 $[s]$.

(a) Calcule la frecuencia natural ω_0 del oscilador

(b) Determine la velocidad terminal de caida del mismo cuerpo, si es dejado caer libre y verticalmente en el mismo medio, bajo acción de la gravedad

Resolución:

La solución para oscilaciones amortiguadas es de la forma:

$$x(t) = Ae^{-t/2\tau} cos(\Omega t + \phi_0)$$

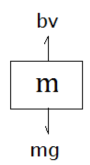
Sabemos que al cabo de cinco ciclos ($t = 1$ $[s]$), la amplitud es $A/3$. Luego:

$$A/3 = Ae^{-1/2\tau} \rightarrow 3 = e^{1/2\tau} \rightarrow \tau = \frac{1}{2ln(3)}$$

Como tarda 0.2 $[s]$ en realizar un ciclo, $\Omega = \frac{2\pi}{0.2} = 10\pi$. Finalmente:

$$\Omega^2 = \omega_0^2 - \frac{1}{4\tau^2} \rightarrow \omega_0 = \sqrt{\Omega^2 + \frac{1}{4\tau^2}} = \sqrt{100\pi^2 + (ln(3))^2}$$

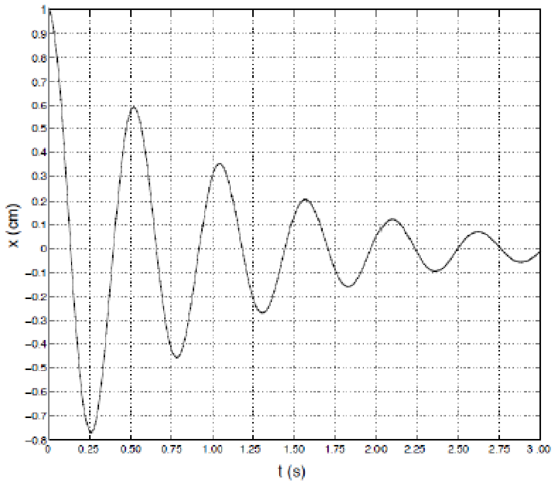
Se presenta el DCL de una masa m cayendo en presencia de un roce viscoso.



La velocidad terminal se alcanza cuando la aceleración es nula: $bv = mg \rightarrow v = mg/b = \tau g$. Luego:

$$V_T = g\tau = \frac{g}{2ln(3)}$$

P5. Se tiene un oscilador mecánico amortiguado, compuesto por un carro de masa $m = 0.54$ $[Kg]$ y un resorte de constante de rigidez k. El carro se mueve sobre un riel lubricado, de modo que el roce está bien descrito por una ley de roce viscoso lineal. Dadas ciertas condiciones iniciales, se obtiene una serie de medidas de la posición x del carro en función del tiempo t. Estos resultados se presentan en el gráfico adjunto. A partir de él, obtenga el valor de k para el sistema.



Resolución:

Las fuerzas en x que siente el oscilador son: fuerza elástica del resorte y la fuerza de roce viscoso. Luego:

$$m\ddot{x} = -kx - b\dot{x}$$
$$\ddot{x} + \frac{b}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

En general, si se tiene que $\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega^2 x = 0$, la solución para oscilaciones amortiguadas es de la forma:

$$x(t) = Ae^{-t/2\tau}cos(\Omega t + \phi_0)$$

Donde $\Omega^2 = \omega^2 - \frac{1}{4\tau^2}$.

Luego:

$$\tau = m/b$$
$$\omega^2 = k/m$$

A partir del gráfico intentamos encontrar ω para despejar k. Es fácil notar que aproximadamente $T = 0.52[s]$, luego, $\Omega = \frac{2\pi}{0.52[s]} = 12.08s^{-1}$.

Para calcular τ notamos que la amplitud inicial es $A = 1$ $[cm]$ y en $t = 5T$, la amplitud es 0.07 $[cm]$. Entonces:

$$x(5T) = x(2.6[s]) = 0.07$$

Como dicho punto se presenta en el punto máximo de las oscilaciones: $(cos(\Omega t + \phi_0) = 1)$

$$x(5T) = x(2.6[s]) = 0.07 = 1e^{-2.6/2\tau}$$
$$ln(\frac{1}{0.07}) = \frac{2.6}{2\tau}$$
$$\tau = \frac{2.6}{2ln(\frac{1}{0.07})} = 0.49[s]$$

Entonces:

$$\omega^2 = \Omega^2 + \frac{1}{4\tau^2}$$
$$\omega^2 = (12.08[s^{-1}])^2 + \frac{1}{4(0.49[s])^2} = 146.96[s^{-2}]$$

Luego:

$$k = m\omega^2 = 0.54 \cdot 146.96[s^{-2}] = 79.36[Kg \cdot s^{-2}]$$

P6. Considere una partícula de masa m que está apoyada sobre un resorte de constante k y largo natural l_0 bajo la acción de la gravedad. El punto B de donde se sostiene el resorte se encuentra en $t = 0$ al nivel de la mesa.

(a) Encuentre la altura de equilibrio de la masa

(b) En $t = 0$, cuando la masa está quieta y en la posición de equilibrio, el punto B comienza a oscilar verticalmente. El movimiento de B puede ser descrito como $\vec{r}_B(t) = A_0 sin(\omega t)\hat{j}$. Encuentre la ecuación que describe el movimiento de la masa

(c) Resuelva la ecuación de movimiento para las condiciones iniciales dadas

(d) Manteniendo la amplitud A_0 fija, considere que la frecuencia ω es menor que la frecuencia de resonancia. ¿Cuál es la frecuencia máxima para que la masa nunca choque con la mesa?