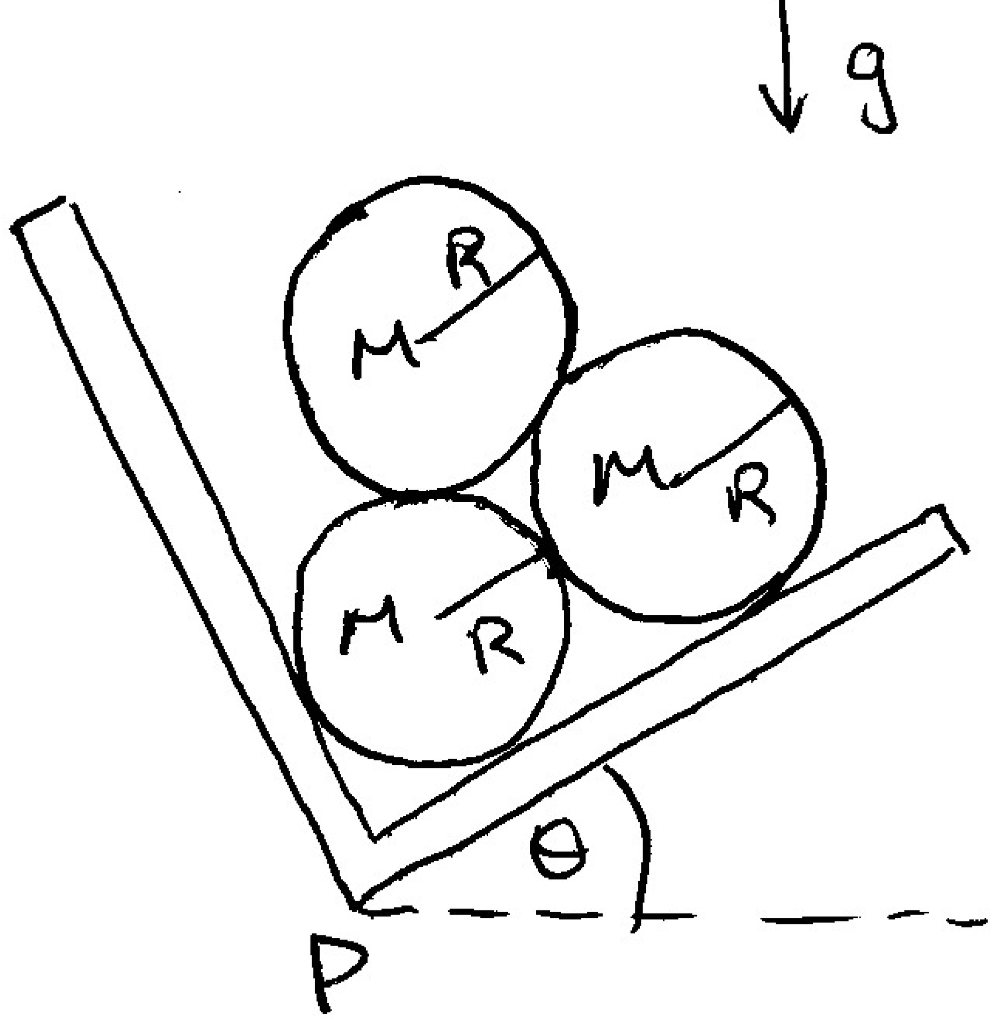
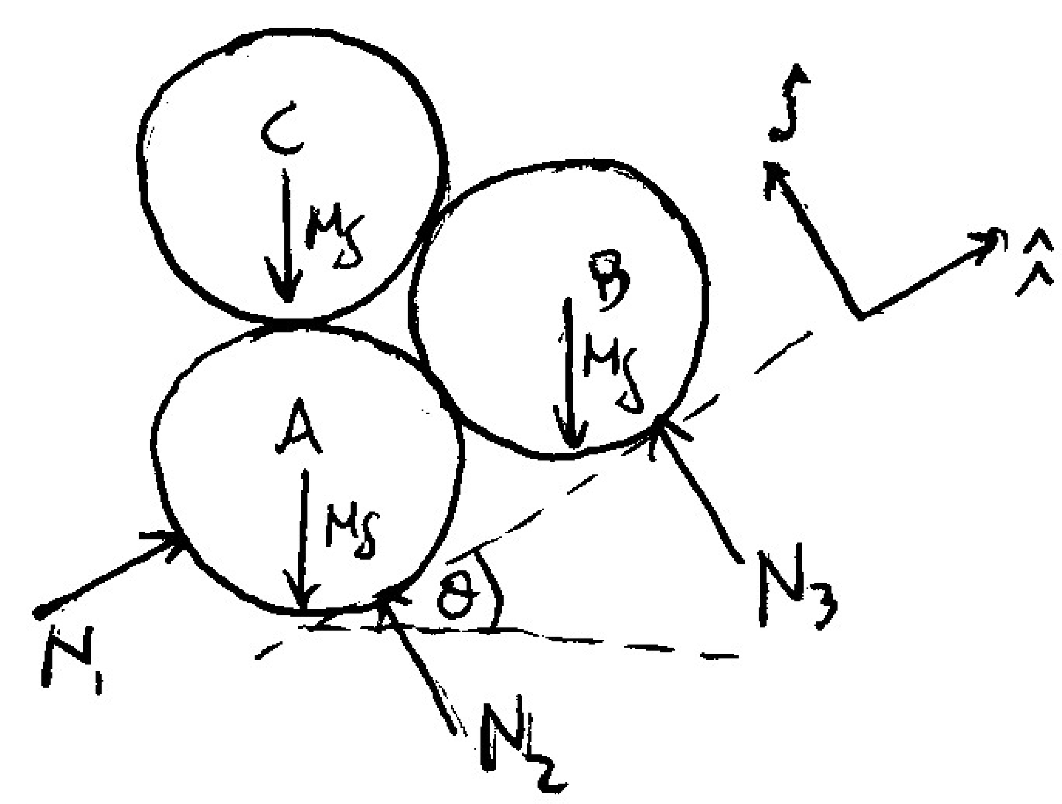
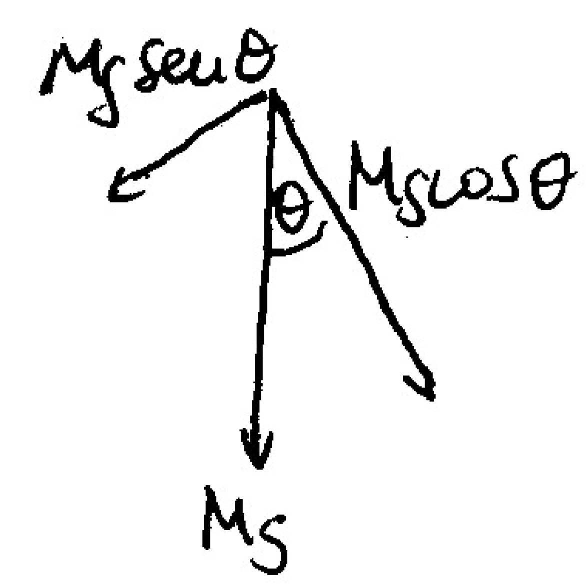
P| Los tres cilindros de la figura están en equilibrio de tal modo que si, por cualquier razón, el ángulo θ decrece, los cilindros comienzan a rodar. Los tres son idénticos. Desprecie el roce entre ellos y con las paredes. Encuentre el valor del ángulo θ



DCL



Mg se descompone según nuestro sistema de referencia como



- Cálculo de las reacciones:

$\Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{N_1} + \vec{N_2} + \vec{N_3} + 3M\vec{g} = 0$

$N_1 \hat{\imath} + N_2 \hat{\jmath} + N_3 \hat{\jmath} + 3(Mg\,\text{sen}\theta(-\hat{\imath}) + Mg\cos\theta(-\hat{\jmath})) = 0$

$\Sigma \vec{F}_{\hat{\imath}} = 0 \Rightarrow N_1 - 3Mg\,\text{sen}\theta = 0$

① $\boxed{\vec{N_1} = 3Mg\,\text{sen}\theta\,\hat{\imath}}$

$\Sigma \vec{F}_{\hat{\jmath}} = 0 \Rightarrow N_2 + N_3 - 3Mg\cos\theta = 0$

② $\boxed{\vec{N}_2 + \vec{N}_3 = 3Mg\cos\theta\,\hat{\jmath}}$

$\Sigma \vec{\tau} = 0$ Escogemos un "punto conveniente" para hacer Torque de manera de determinar de inmediato alguna reacción

$\Sigma \vec{\tau}_B = 0 \Rightarrow -N_2 2\cancel{R} + Mg\cos\theta \cdot 2\cancel{R} + Mg\cos\theta\,\cancel{R} + Mg\,\text{sen}\theta \cdot 2\cancel{R} = 0$

$-2N_2 + 3Mg\cos\theta + 2Mg\,\text{sen}\theta = 0$

③ $\boxed{\vec{N}_2 = \left(\frac{3}{2}Mg\cos\theta + Mg\,\text{sen}\theta\right)\hat{\jmath}}$

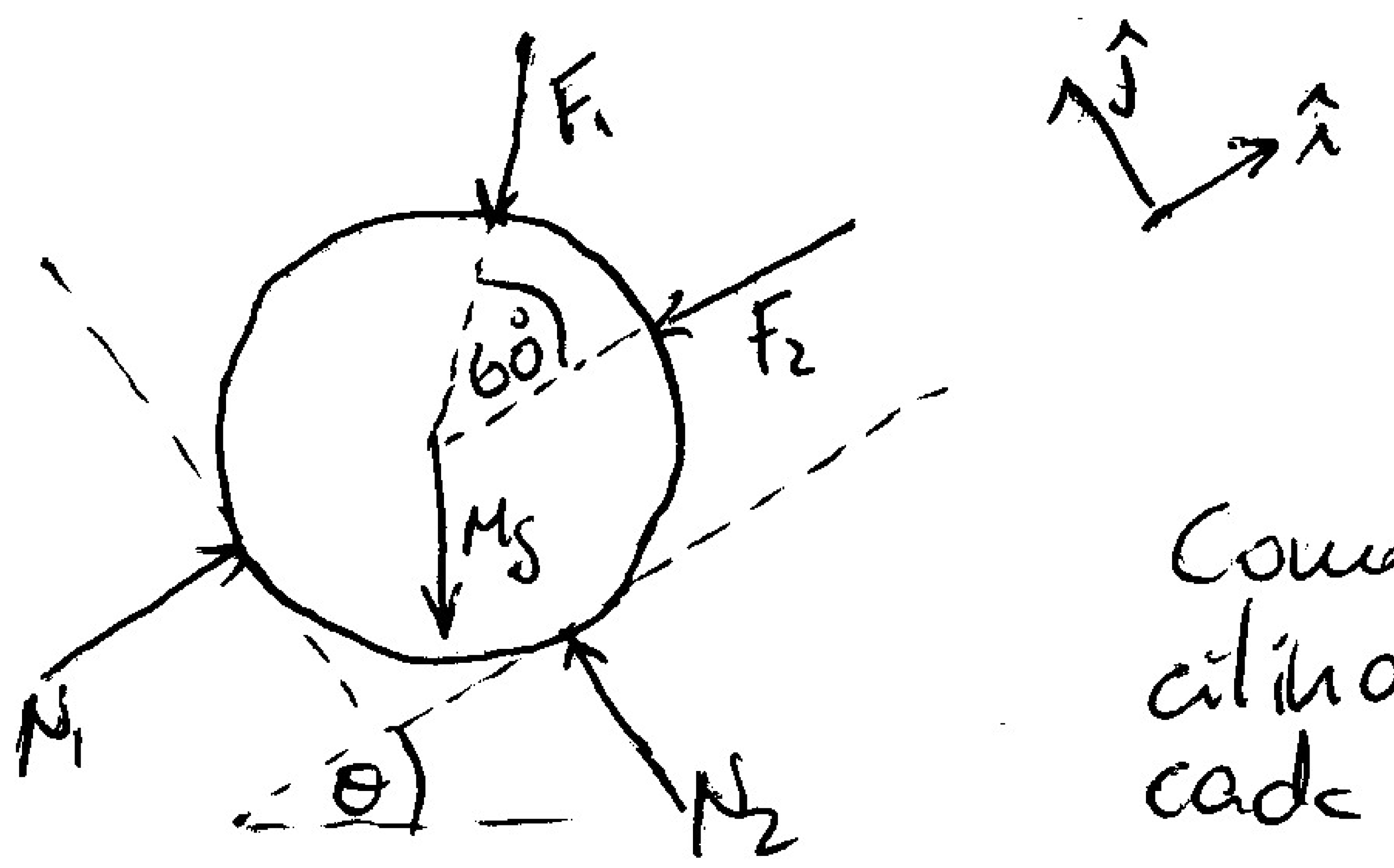
Para calcular $\vec{N}_3$ se puede reemplazar ③ en ② o bien, hacer Torque en otro "punto conveniente" que sería el pto A

$$\Sigma \vec{\tau}_A = 0 \Rightarrow N_3 \, 2\cancel{R} - Mg\cos\theta \cdot 2\cancel{R} - Mg\cos\theta \cdot \cancel{R} + Mg\,\text{sen}\,\theta \cdot 2\cancel{R} = 0$$

$$2N_3 - 3Mg\cos\theta + 2Mg\,\text{sen}\,\theta = 0$$

$$④ \quad \boxed{\vec{N}_3 = \left(\frac{3}{2}Mg\cos\theta - Mg\,\text{sen}\,\theta\right)\hat{j}}$$

Analicemos ahora el cilindro A



Donde $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$ son las fuerzas internas que se ejercen entre los cilindros.

Como el sistema formado por los 3 cilindros está en equilibrio, entonces cada cilindro está en equilibrio.

Debemos encontrar el ángulo θ, tal que si éste decrece los cilindros empiezan a rodar, entonces imponemos la condición $\vec{F}_2 = 0$, o sea, cuando θ es crítico (θ^c) la fuerza de contacto entre el cilindro A y B se anula.

$$\Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow \vec{N}_1 + \vec{N}_2 + \vec{F}_1 + M\vec{g} = 0$$

$$N_1\hat{\imath} + N_2\hat{j} + F_1\cos 60°(-\hat{\imath}) + F_1\,\text{sen}\,60°(-\hat{j}) + Mg\,\text{sen}\,\theta^c(-\hat{\imath}) + Mg\cos\theta^c(-\hat{j}) = 0$$

$$\Sigma F_{\hat{\imath}} = 0 \Rightarrow N_1 - F_1\cos 60° - Mg\,\text{sen}\,\theta^c = 0$$

$$⑤ \quad \boxed{N_1 - \frac{F_1}{2} - Mg\,\text{sen}\,\theta^c = 0}$$

N_1 ya no es el calculado anteriormente, porque ahora θ es θ^c

$$\Sigma F_{\hat{j}} = 0 \Rightarrow N_2 - F_1\,\text{sen}\,60° - Mg\cos\theta^c = 0$$

$$⑥ \quad \boxed{N_2 - \frac{\sqrt{3}}{2}F_1 - Mg\cos\theta^c = 0}$$

③ en ⑥

$$\frac{3}{2}Mg\cos\theta^c + Mg\,\text{sen}\,\theta^c - \frac{\sqrt{3}}{2}F_1 - Mg\cos\theta^c = 0$$

$$\frac{1}{2}Mg\cos\theta^c + Mg\,\text{sen}\,\theta^c = \frac{\sqrt{3}}{2}F_1$$

$$⑦ \quad \boxed{\frac{1}{\sqrt{3}}Mg\cos\theta^c + \frac{2}{\sqrt{3}}Mg\,\text{sen}\,\theta^c = F_1}$$

7 en 5

$$N_1 - \frac{1}{2\sqrt{3}} Mg\cos\theta^c - \frac{1}{\sqrt{3}} Mg \operatorname{sen}\theta^c - Mg\operatorname{sen}\theta^c = 0$$

$$(8) \quad \boxed{\vec{N}_1 = \left(\frac{1}{2\sqrt{3}} Mg\cos\theta^c + \frac{(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}} Mg\operatorname{sen}\theta^c\right)\hat{\imath}}$$

Finalmente hacemos Torque en el punto donde gira el sistema o sea el polo P.

$$\Sigma \vec{\tau}_P = 0$$

$$-N_1 R + N_2 R + N_3 3R + \overbrace{Mg\operatorname{sen}\theta \cdot R - Mg\cos\theta\cdot R}^{\text{Torque cilindro A}} + \overbrace{Mg\operatorname{sen}\theta\cdot R - Mg\cos\theta\cdot 3R}^{\text{Torque cilindro B}} + \overbrace{Mg\operatorname{sen}\theta\left(2+\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\cdot R - Mg\cos\theta\,(2 + \cancel{\ })\,R}^{\text{Torque cilindro C}} = 0$$

$$-N_1\cancel{R} + N_2\cancel{R} + N_3\cdot 3\cancel{R} + 4Mg\cancel{R}\operatorname{sen}\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}Mg\cancel{R}\operatorname{sen}\theta - 6Mg\cancel{R}\cos\theta = 0$$

$$(9) \quad \boxed{-N_1 + N_2 + N_3 + 4Mg\operatorname{sen}\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}Mg\operatorname{sen}\theta - 6Mg\cos\theta = 0}$$

reemplazando 8, 3 y 4 en 9 tenemos

$$\frac{-1}{2\sqrt{3}}Mg\cos\theta^c + \frac{(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}}Mg\operatorname{sen}\theta^c + \frac{3}{2}Mg\cos\theta^c + Mg\operatorname{sen}\theta^c + \frac{9}{2}Mg\cos\theta^c - 3Mg\operatorname{sen}\theta^c + 4Mg\operatorname{sen}\theta^c + \frac{\sqrt{3}}{2}Mg\operatorname{sen}\theta^c$$
$$-6Mg\cos\theta^c = 0$$

$$\left(-\frac{1}{2\sqrt{3}} + \frac{3}{2} + \frac{9}{2} - 6\right)\cancel{Mg}\cos\theta^c + \left(-\frac{(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}} + 1 - 3 + 4 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\cancel{Mg}\operatorname{sen}\theta^c = 0$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{3}}\cos\theta^c + \left(2 - 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\operatorname{sen}\theta^c = 0$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{3}}\cos\theta^c + \left(1 + \frac{(-2+3)}{2\sqrt{3}}\right)\operatorname{sen}\theta^c = 0$$

$$-\frac{1}{\cancel{2\sqrt{3}}}\cos\theta^c + \frac{(2\sqrt{3}+1)}{\cancel{2\sqrt{3}}}\operatorname{sen}\theta^c = 0$$

$$(2\sqrt{3}+1)\operatorname{sen}\theta^c = \cos\theta^c$$

$$\operatorname{tg}\theta^c = \frac{1}{2\sqrt{3}+1} = 0,224$$

$$\boxed{\theta^c = 12,63^\circ}$$

dudas a.
josrodri@ing.uchile.cl