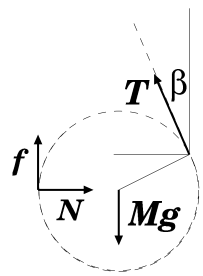
SOLUCION CONTROL No 4
INTRODUCCION A LA FISICA – PRIMAVERA 2003

Por: H. F. Arellano (4 de septiembre de 2003)

Departamento de Física, FCFM, Universidad de Chile

PROBLEMA 1



• Las fuerzas actuando sobre el {tambor+cuerda en contacto} son la tensión $\vec{T}$, el peso $M\vec{g}$ y el contacto de la pared sobre la cinta $\vec{C} = \vec{f} + \vec{N}$. Sumando vectorialmente y proyectando según la horizontal (x) y vertical (y):

$$\vec{T} + M\vec{g} + \vec{f} + \vec{N} = 0 \tag{1}$$

$$\text{y)} \quad T\cos\beta - Mg + f + 0 = 0 \Rightarrow \boxed{T\cos\beta + f = Mg} \tag{2}$$

$$\text{x)} \quad -T\sin\beta + 0 + 0 + N = 0 \Rightarrow \boxed{N = T\sin\beta} \tag{3}$$

• Torque nulo con respecto al centro del tambor (sentido antihorario positivo):

$$\tau_\circ(\vec{T}) + \tau_\circ(M\vec{g}) + \tau_\circ(\vec{f}) + \tau_\circ(\vec{N}) = 0 \longrightarrow \tag{4}$$

$$RT + 0 - Rf + 0 = 0 = \Rightarrow \boxed{T = f} \tag{5}$$

• Sustituyendo $T = f$ en las ecuaciones anteriores obtenemos:

$$\boxed{f = \frac{Mg}{(1+\cos\beta)} \quad ; \quad N = T\sin\beta = \frac{Mg\sin\beta}{(1+\cos\beta)}}$$

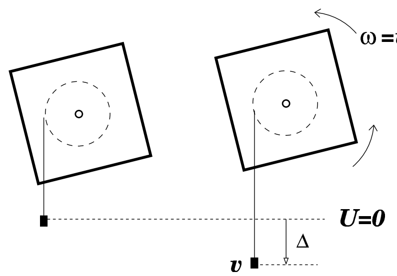
• La condición de no resbalar exige imponer $f \leq \mu N$, o bién

$$\frac{Mg}{(1+\cos\beta)} \leq \mu\frac{Mg\sin\beta}{(1+\cos\beta)} \quad \Rightarrow \quad 1 \leq \mu\sin\beta \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mu \geq 1/\sin\beta \geq 1}.$$

Esta condición no se da para materiales normales. Por lo tanto el proyecto se ve poco viable.

PROBLEMA 2

Resolución por energía



• Considerando que las fuerzas externas no trabajan podemos decir:

$$E_f = E_i + W_{i\to f} \Rightarrow E_f = E_i$$

Para la energía en general escribimos:

$$E = K(\texttt{marco}) + K(\texttt{carga}) + U_g(\texttt{marco}) + U_g(\texttt{carga})$$

INICIAL (considerando nivel cero de U_g la ubicación inicial de la carga):

$$E_i = 0 + 0 + U_g(\texttt{marco}) + 0$$

FINAL:

$$E_f = \frac{1}{2}I_\circ\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 + U_g(\texttt{marco}) - mg\Delta$$

• Igualando e imponiendo $v = \omega r$ obtenemos:

$$0 = \frac{1}{2}I_\circ\frac{v^2}{r} + \frac{1}{2}mv^2 - mg\Delta \qquad \Rightarrow \qquad v^2 = \frac{2mg\Delta}{I_\circ/r^2 + m}.$$

• Necesitamos $I_\circ$. Se trata de cuatro barras, cada una de masa M/4 y longitud b. El momento de inercia se necesita con respecto a un eje por el centro del marco. Usamos Steiner considerando que cada barra dista b/2 del eje central. Además el momento de inercia de una barra de masa m y longitud L con respecto a un eje por su centro de masas es $mL^2/12$. Entonces:

$$I_\circ = 4 \times \left(\frac{1}{12}\left[\frac{M}{4}\right]b^2 + \frac{M}{4}(b/2)^2\right) = 4 \times \left(\frac{1}{48} + \frac{1}{16}\right)Mb^2 = (\frac{1}{12} + \frac{1}{4})Mb^2 = Mb^2/3$$

• Con esto,

$$v^2 = \frac{2mg\Delta}{Mb^2/3r^2 + m} = \frac{2g\Delta}{Mb^2/3mr^2 + 1}$$

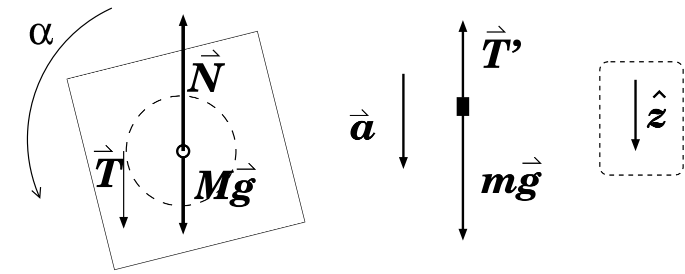
• En el límite $M \ll m$, o bién $M/m \to 0$,

$$v^2 \to 2g\Delta$$

que corresponde a caída libre. Esto es de esperar pues en tal caso el marco, de masa casi nula, no ofrece resistencia a la caída de la carga.

PROBLEMA 2

Resolución por ecuaciones de fuerza y torques



• Ecuación de torques para el marco con respecto a su centro, y considerando las fuerzas externas: su peso $\boldsymbol{M\vec{g}}$, fuerza soporte $\boldsymbol{\vec{N}}$ y la fuerza del cordel $\boldsymbol{\vec{T}}$:

$$\tau_\circ(M\vec{g}) + \tau_\circ(\vec{N}) + \tau_\circ(\vec{T}) = I_\circ\alpha \qquad \Rightarrow \qquad RT = I_\circ\alpha$$

• Sobre la carga actúan su peso $\boldsymbol{m\vec{g}}$ y la tensión de la cuerda $\boldsymbol{\vec{T}'}$. Ecuación de fuerzas y proyectando sobre dirección $\hat{z}$:

$$m\vec{g} + \vec{T}' = m\vec{a} \qquad \Rightarrow \qquad mg - T = ma$$

• Imponiendo restricción de que la cuerda no resbala surge $a/r = \alpha$. Sustituyendo en la ecuación de torques: $T = I_\circ a/r^2$. Reemplazamos T en la ecuación anterior y despejamos a:

$$mg - I_\circ a/r^2 = ma \qquad \Rightarrow \qquad a = \frac{mg}{m + I_\circ/r^2} = \frac{mg}{I_\circ/r^2 + m^2}$$

• La aceleración de la carga es constante. Por lo tanto podemos usar la relación cinemática $v^2 - v_\circ^2 = 2a_z\Delta z$:

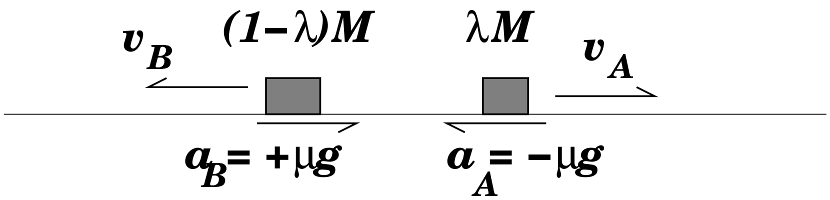
$$v^2 - 0 = 2a_z\Delta \qquad \Rightarrow \qquad v^2 = \frac{2mg\Delta}{I_\circ/r^2 + m^2}$$

Sustituyendo valor calculado de $I_\circ$:

$$v^2 = \frac{2g\Delta}{Mb^2/3mr^2 + 1}$$

• Nuevamente, en el límite $M/m \to 0$, $v^2 \to 2g\Delta$, que corresponde a caída libre.

PROBLEMA 3



• SINOPSIS: luego de la explosión los bloques parten con rapideces distintas debido a que los fragmentos son (en general) de distinto tamaño. Ambos experimentan aceleraciones de frenado de magnitud μg. Puesto que sus rapideces iniciales distintas, se detendrán en instantes diferentes. Conviene entonces identificar los instantes de detención de cada fragmento: t_A y t_B.

• Estudiamos el movimiento en forma unidimensional tomando como dirección positiva la de partida del fragmento A. Conservación de momentum para determinar velocidades inmediatamente después de la explosión ($p_A + p_B = 0$):

$$\lambda M v_A + (1-\lambda) M v_B = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda v_A + (1-\lambda) v_B = 0 \tag{6}$$

La energía cinética inmediatamente después de la exlosión es E:

$$\frac{1}{2}\lambda M v_A^2 + \frac{1}{2}(1-\lambda) M v_B^2 = E \qquad \Rightarrow \qquad \lambda v_A^2 + (1-\lambda) v_B^2 = 2E/M \tag{7}$$

Para obtener v_A despejamos v_B de 6 y reemplazamos en 7. Encontramos para v_A

$$v_A = \sqrt{\frac{2E(1-\lambda)}{\lambda M}}$$

Utilizamos 6 para obtener v_B:

$$v_B = -\sqrt{\frac{2E\lambda}{(1-\lambda)M}}$$

• Podemos determinar el momentum inicial de A:

$$p_A = \lambda M \sqrt{\frac{2E(1-\lambda)}{\lambda M}} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{p_A = \sqrt{2ME\lambda(1-\lambda)}}$$

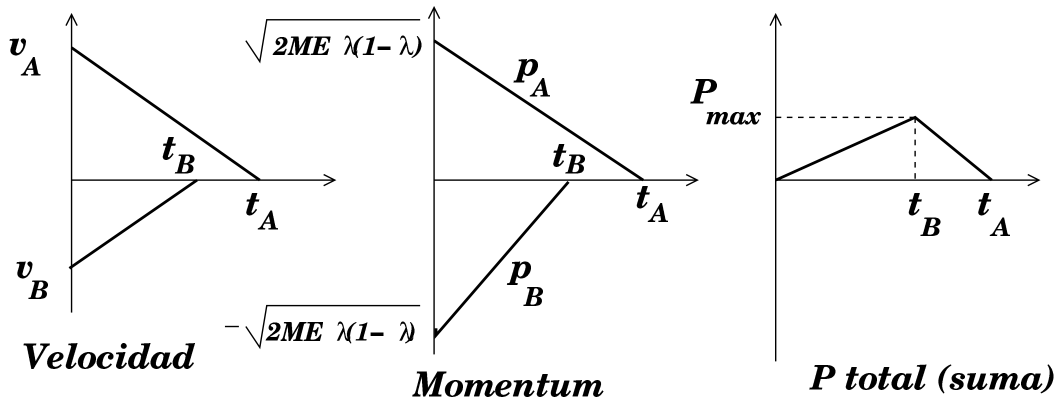
• Supongamos que el fragmento A sale más rápido que B (lo cual se logra con $\lambda \leq 1/2$). Identificamos los instantes en que A y B se detienen. Para el movimiento de A:

$$v_A(t) = \sqrt{\frac{2E(1-\lambda)}{\lambda M}} - \mu g t \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{t_A = \frac{1}{\mu g}\sqrt{\frac{2E(1-\lambda)}{\lambda M}}}$$

• Análogamente para el fragmento B:

$$v_B(t) = -\sqrt{\frac{2E(1-\lambda)}{\lambda M}} + \mu g t \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{t_B = \frac{1}{\mu g}\sqrt{\frac{2E\lambda}{(1-\lambda)M}}}$$

• Puesto que estamos considerando $\lambda \leq 1/2$, entonces t_A es posterior a t_B. Las curvas de velocidades en función del tiempo son las rectas ilustradas en la figura siguiente. Los momenta resultan de multiplicar las velocidades $v_A(t)$ y $v_B(t)$ por sus respectivas masas. En t=0 $p_B = -p_A$. Al sumar ambas rectas ($P(t) = p_A(t) + p_B(t)$) se obtiene el gráfico de más a la derecha (momentum total P).



• El momentum máximo del sistema $P(t) = p_A(t) + p_B(t)$ se logra en t_B. En ese instante sólo se mueve A y el momentum resulta:

$$P(t_B) = P_{\max} = p_A(t_B) = \lambda M\left\{\sqrt{\frac{2E(1-\lambda)}{\lambda M}} - \mu g t_B\right\} = \lambda M\left\{\sqrt{\frac{2E(1-\lambda)}{\lambda M}} - \sqrt{\frac{2E\lambda}{(1-\lambda)M}}\right\}$$

Factorizando y simplificando:

$$\boxed{P_{\max} = \sqrt{\frac{2E(1-\lambda)}{\lambda M}}\left(1 - \frac{\lambda}{1-\lambda}\right) = (1-2\lambda)\sqrt{\frac{2E}{\lambda(1-\lambda)M}}}$$

• Para determinar los caminos recorridos por ambos recordamos la relación '$v^2 = 2a\Delta x$', con la cual (cuidando los signos y considerando aceleraciones de igual magnitud μg):

$$\frac{\Delta x_A}{\Delta x_B} = \frac{v_A^2}{v_B^2} = \frac{2E(1-\lambda)}{\lambda M} \div \frac{2E\lambda}{(1-\lambda)M} = \frac{2E(1-\lambda)}{\lambda M} \times \frac{(1-\lambda)M}{2E\lambda} \quad \Rightarrow$$

$$\boxed{\frac{\Delta x_A}{\Delta x_B} = \frac{(1-\lambda)^2}{\lambda^2}}$$