SOLUCION DEL EXAMEN FINAL
INTRODUCCION A LA FISICA – 2001

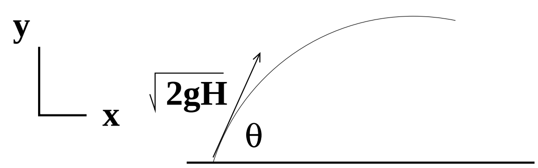
Por: H. F. A.

Departamento de Física, FCFM, Universidad de Chile

ADVERTENCIA CON RESPECTO A LA PUNTUACION: si bien es cierto se ha asignado puntuación parcial a distintos elementos en la solución de cada problema, el contexto en que ellas se aplican es de suma relevancia en la evaluación. Por ejemplo, si se utilizan dos expresiones para una misma cantidad, una correcta y la otra incorrecta, eso es INCORRECTO y por lo tanto no hay puntaje parcial.

PROBLEMA 1

- Sea m la masa de la bolita y $v_\circ$ la rapidez en el punto mas bajo en el plano inclinado, conservación de energía en el resbalamiento inclinado $\rightarrow mgH = mv_\circ^2/2 \rightarrow v_\circ = \sqrt{2gH}$.
- Al rebotar comienza el movimiento de un proyectil (ver figura).



La ecuación para la velocidad según la vertical:

$$v_y = v_{y\circ} - gt$$

- Altura máxima en t^* cuando $v_y = 0$:

$$t \rightarrow t^* = \frac{v_{y\circ}}{g} = \frac{\sqrt{2gH}\sin\theta}{g} = \sqrt{\frac{2H}{g}}\sin\theta$$

- Posición según la vertical en $t = t^*$:

$$y = y_\circ + v_{y\circ}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad \rightarrow \quad y_{max} = v_{y\circ}t^* - \frac{1}{2}gt^{*2}$$

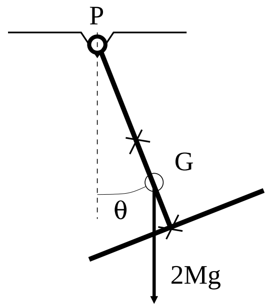
- Sustituyendo $t = t^*$ y valor de $v_\circ$ se obtiene:

$$\boxed{y_{max} = H\sin^2\theta}$$

PUNTUACION:

2 Ptos determinación de rapidez en pto inferior + 2 Ptos identificación correcta condiciones iniciales + 2 Ptos manejo consistente de ecuaciones y resultado final

PROBLEMA 2



• Sea M la masa de cada barra, entonces la masa de la 'T' es $2M$. El centro de masas se ubica en le punto medio entre los centros de cada barra. O sea, a una distancia $R = 3L/4$ de el pivote P.
• Aplicaremos 'torque = I por alfa' con respecto a P. Se necesita entonces el mto de inercia c/r a P. Este es la suma del de cada barra:

$$I_P = I_1 + I_2$$

donde

$$I_1 = \frac{1}{3}ML^2$$

e I_2 se obtiene por Stainer...

$$I_2 = ML^2 + I_{CM} = ML^2 + \frac{1}{12}ML^2.$$

Reemplazando...

$$I_P = \frac{1}{3}ML^2 + ML^2 + \frac{1}{12}ML^2 = \frac{17}{12}ML^2$$

• Ecuación de torque c/r a P:

$$-(2Mg)R\sin\theta = I_P\ddot{\theta}$$

• Sustituyendo valor de R, I_P y tomando oscilaciones armónicas (pequeñas) $\rightarrow \sin\theta \approx \theta$:

$$-2Mg\left(\frac{3L}{4}\right)\theta = \frac{17}{12}ML^2\ddot{\theta} \quad \rightarrow \quad \boxed{\ddot{\theta} + \frac{18g}{17L}\theta}$$

• Con esto la frecuencia de oscilaciones ω resulta:

$$\boxed{\omega^2 = \frac{18g}{17L}}$$

PUNTUACION MUY TENTATIVA; BUSCAR EQUIVALENCIAS SEGUN PROCEDIMIENTOS:
1 Pto identificación de CM de la T + 2 Ptos cálculo correcto del mto de inercia de la T + 2 Ptos planteamiento correcto de ecuaciones de torques (o energía) + 1 Pto resultado final correcto.

PROBLEMA 3

- Conservación de energía en el salto:

$$(K+U_g)_{salto} = (K+U_g)_\infty \to 0+0$$

por lo tanto

$$K_{salto} + U_g = 0$$

- La energía cinética del salto por 'El Principito' (de masa m) es mgh.
- La energía potencial en el salto en superficie de ψ:

$$U_g = -G\frac{mM_\psi}{R_\psi}$$

Por lo tanto....

$$mgh = G\frac{mM_\psi}{R_\psi} \quad \to \quad gh = G\frac{M_\psi}{R_\psi} \tag{1}$$

- Usando $g = GM_T/R_T^2$, con M_T la masa de Tierra, y que la masa de ψ es 'densidad por volumen', o sea...

$$M_\psi = \left(\frac{M_T}{\frac{4}{3}\pi R_T^3}\right) \times \frac{4}{3}\pi R_\psi^3 \quad \to \quad M_\psi = M_T\frac{R_\psi^3}{R_T^3}$$

- Remplazando expresiones para g y M_ψ en Ec. (1)

$$G\frac{M_T}{R_T^2}h = G\frac{(M_T R_\psi^3/R_T^3)}{R_\psi} \quad \to \quad \boxed{R_\psi^2 = hR_T}$$

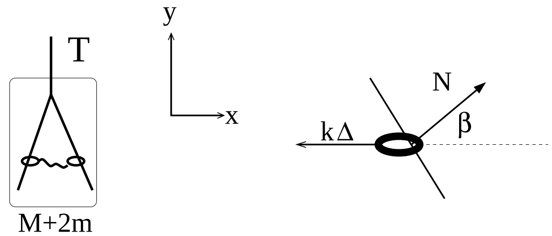
- Sustituyendo datos numéricos...

$$R_\psi = \sqrt{0.5 \times 6.4 \times 10^6}\ \mathtt{m} = \sqrt{3.2} \times 10^3\ \mathtt{m} \approx 1.8\ \mathtt{km}$$

PUNTUACION:

1 Pto planteamiento de ecuación de energía + 2 Ptos identificación de la energía cinética del salto. + 1 Ptos cálculo de masa de ψ en función de masa de Tierra y radios + 1 Pto resultado correcto + 1 Pto resultado numérico al 20%.

PROBLEMA 4



• Ecuación de Newton para el conjunto { V + resorte + anillos } proyectada según la línea de la cuerda de remolque:

$$\vec{F} = M_{sist}\vec{a} \quad \rightarrow \quad T = (M + 2m)a \quad \rightarrow \quad a = \frac{T}{M + 2m}$$

• Analizamos un anillo separadamente. Sobre éste actúa la normal $\vec{N}$ y la fza del resorte de magnitud $k\Delta$ hacia la izquierda. La aceleración del anillo es a hacia arriba (y).

$$\vec{N} + k\vec{\Delta} = m\vec{a}$$

• Proyectando según (y):

$$N \sin\beta + 0 = ma \quad \rightarrow \quad N \sin\beta = ma \tag{2}$$

y según (x)

$$N \cos\beta - k\Delta = 0 \quad \rightarrow \quad N \cos\beta = k\Delta \tag{3}$$

• El cuociente entre Ecs. 2 y 3 lleva a...

$$\tan\beta = \frac{ma}{k\Delta} \quad \rightarrow \quad \Delta = \frac{mT/(M + 2m)}{k \tan\beta}$$

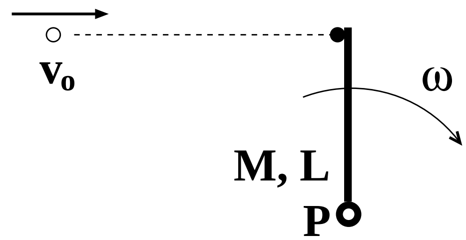
• La separación $S = L + \Delta$ entre los anillos:

$$S = L + \frac{mT}{k(M + 2m)\tan\beta}$$

• OJO: La separación es $L + \Delta$ y NO $L + 2\Delta$. Este último resultado no lleva puntaje parcial.

PUNTUACION:
1 Pto determinación de la aceleración del sistema + 1 Pto DCL correcto y geometría + 2 Ptos ecuaciones de movimiento en componentes para un anillo + 1 Pto obtención de Δ + 1 Pto obtención de separación $L + \Delta$ (0 Ptos si indica $L + 2\Delta$).

PROBLEMA 5



• En la colisión sólo se conserva momentum angular con respecto al pivote. NO SE CONSERVAN ENERGIA, NI MOMENTUM LINEAL. El sistema rota uniformemente con velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ despues de la colisión. El momento de inercia de la barra c/r a $\boldsymbol{P}$ es $\boldsymbol{I_P = ML^2/3}$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{antes} &= \mathcal{L}_{desp} \\
L(mv_\circ) &= \mathcal{L}_{bola} + \mathcal{L}_{barra} \\
&= Lm(\omega L) + I_P\omega \\
&= (mL^2 + I_P)\omega \\
&= (mL^2 + ML^2/3)\omega
\end{aligned} \tag{4}$$

Despejando la velocidad angular:

$$\omega = \frac{mv_\circ}{L(m + M/3)}$$

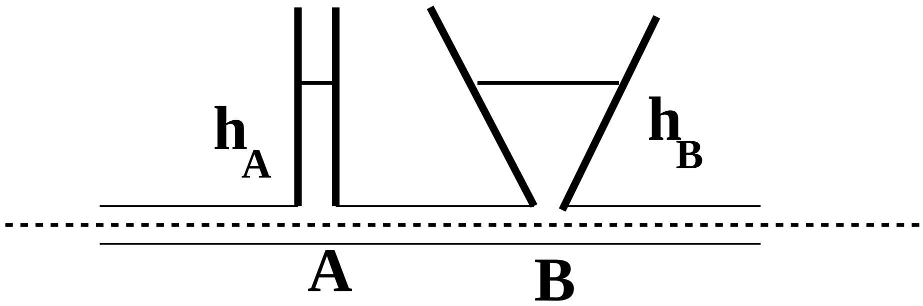
• El tiempo de giro en 90 grados ($\boldsymbol{\pi/2}$): $\boldsymbol{\Delta t = \Delta\theta/\omega}$. Reemplazando $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{\Delta\theta}$:

$$\Delta t = \frac{\pi(m + M/3)L}{2mv_\circ}$$

PUNTUACION:

0 PUNTOS NETO si utiliza conservaciones que no correspondan: mtum lineal o energía. 4 Ptos conservación de mtum angular (bolita antes, bolita despues y barra) + 1 Pto cálculo de $\boldsymbol{\omega}$ + 1 Pto cálculo lapso en giro 90 grados.

PROBLEMA 6



• Aplicamos Bernoulli a lo largo de la línea. Nos damos 'h=0' a ese nivel:

$$p_A + 0 + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = p_B + 0 + \frac{1}{2}\rho v_B^2$$

• Las presiones en la boca inferior del tubo vertical y copa son, respectivamente, $p_A = \rho g h_A$ y $p_B = \rho g h_B$.
• $S_A = b^2$ y $S_B = \pi b^2/4$ son las areas transversales en la sección cuadrada y circular respectivamente.
• El flujo y las secciones transversales se relacionan con el área: $Q = v \times \texttt{area}$. Entonces $v_a = Q/S_A$ y $v_B = Q/S_B$. Sustituyendo lo anterior en Bernoulli:

$$\rho g h_A + \frac{1}{2}\rho\frac{Q^2}{S_A^2} = \rho g h_B + \frac{1}{2}\rho\frac{Q^2}{S_B^2}$$

• Por lo tanto:

$$h_B - h_A = \frac{Q^2}{2g}\left(\frac{1}{S_A^2} - \frac{1}{S_B^2}\right)$$

• Sustituyendo las areas en cada sector:

$$\begin{aligned} h_B - h_A &= \frac{Q^2}{2g}\left(\frac{1}{b^4} - \frac{16}{\pi^2 b^4}\right) \\ &= \frac{Q^2}{2gb^4}\left(1 - \frac{16}{\pi^2}\right) \end{aligned} \tag{5}$$

Por lo tanto:

$$h_B - h_A = \frac{Q^2}{2gb^4}\left(1 - \frac{16}{\pi^2}\right) < 0$$

con lo cual la columna en A está mas alta (en la línea de sección cuadrada).

PUNTUACION:
1 Ptos Bernoulli correcto + 1 Pto geometría (áreas) correcta + 1 Pto relaciones Area-Q-velocidad correctas + 1 Pto identificación correcta presiones p_A y p_B + 1 Pto resultado final correcto + 1 Pto indicación de nivel mayor.