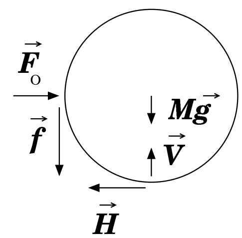
SOLUCION DEL EXAMEN
INTRODUCCION A LA FISICA – PRIMAVERA 2003

Por: H. F. Arellano (27 de noviembre de 2003)

Departamento de Física, FCFM, Universidad de Chile

PROBLEMA 1



SINOPSIS: Al ser empujada la esfera por el émbolo ésta se desplaza hacia la derecha. El roce del piso (desconocido) es el que permite la rotación de la esfera. Las ecuaciones de torque y Newton para el centro de masas determinan la aceleración buscada.

• Las fuerzas actuando sobre la esfera son su peso ($M\vec{g}$), contacto con el émbolo ($\vec{F}_\circ + \vec{f}$) y contacto con el piso ($\vec{V} + \vec{H}$). Planteamos ecuación del movimiento para el centro de masas: $M\vec{g} + \vec{F}_\circ + \vec{f} + \vec{V} + \vec{H} = M\vec{a}$. Descomponemos según eje horizontal (x) y vertical (y):

según x) $\quad 0 + F_\circ + 0 + 0 - H = Ma \quad \Rightarrow \boxed{F_\circ - H = Ma}$

según y) $\quad -Mg + 0 - f + V + 0 = 0 \quad \Rightarrow \boxed{V - f = Mg}$

• Para describir la rotación aplicamos ecuación de torques con respecto al CM (conveniente): $\tau_\circ(M\vec{g}) + \tau_\circ(\vec{F}_\circ) + \tau_\circ(\vec{f}) + \tau_\circ(\vec{V}) + \tau_\circ(\vec{H}) = I_\circ\alpha$. Evaluando (tomando sentido positivo el de los punteros del reloj) y considerando $I_\circ = 2MR^2/5$:

$$0 + 0 - Rf + 0 + RH = \frac{2}{5}MR^2\alpha \qquad \Rightarrow \boxed{H - f = \tfrac{2}{5}MR\alpha}$$

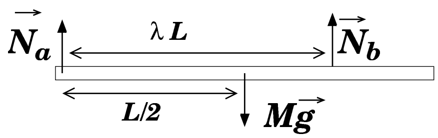
• La esfera rueda sin resbalar en el piso ($a = \alpha R$) y resbala en su contacto con el émbolo ($f = \mu F_\circ$). Con lo anterior obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

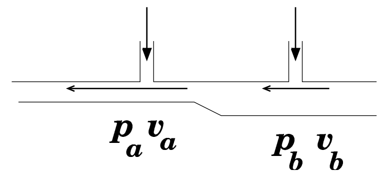
$$F_\circ - H = Ma \qquad (1)$$
$$V - \mu F_\circ = Mg \qquad (2)$$
$$H - \mu F_\circ = \frac{2}{5}Ma \qquad (3)$$

• Sumamos las Ecs. 1 y 2 para obtener

$$F_\circ(1-\mu) = Ma(1+\frac{2}{5}) \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{a = \frac{5(1-\mu)F_\circ}{7M}}$$

PROBLEMA 2





SINOPSIS: La vara se mantiene estática en forma horizontal y presiona los émbolos hacia abajo. Estas fuerzas quedan determinadas por las ecuaciones de estática de la vara y condicionan las presiones al interior de la cañería. Por otra parte, Bernoulli relaciona las presiones al interior de la cañería, lo que permite determinar la sección transversal de los émbolos.

• Estática de la vara: las fuerzas sobre la vara son su peso ($M\vec{g}$) y las normales en ambos apoyos ($\vec{N}_a + \vec{N}_b$). Imponemos suma nula para fuerzas y torques:

$$\left.\begin{array}{l} M\vec{g} + \vec{N}_a + \vec{N}_b = 0 \\ \\ \tau_a(M\vec{g}) + \tau_a(\vec{N}_a) + \tau_a(\vec{N}_b) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} N_a + N_b = Mg \\ \\ \frac{L}{2}Mg = \lambda L N_b \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \boxed{N_a = Mg\left(1 - \frac{1}{2\lambda}\right)} \\ \\ \boxed{N_b = \frac{Mg}{2\lambda}} \end{array}\right\} \tag{4}$$

• Sobre el émbolo a actúa la carga N_a (hacia abajo), la fuerza debida a la presión del aire $P_\circ A$ (hacia abajo) y la fuerza debida a la presión del agua $p_a A$ (hacia arriba). Todas ellas se equilibran. Algo análogo ocurre con el émbolo b. Entonces,

$$\left.\begin{array}{l} N_a + P_\circ A = p_a A \\ \\ N_b + P_\circ A = p_b A \end{array}\right] \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \boxed{p_a = P_\circ + N_a/A} \\ \\ \boxed{p_b = P_\circ + N_b/A} \end{array}\right] \tag{5}$$

• Analizamos la cañería. Denotamos por v_a y v_b las rapideces del fluído en la línea (ver figura), y por p_a y p_b las presiones respectivas. Aplicamos Bernoulli a lo largo de la cañería y obtenemos:

$$p_a + \frac{1}{2}\rho v_a^2 = p_b + \frac{1}{2}\rho v_b^2$$

Sustituímos p_a y p_b con los valores correspondientes de N_a y N_b. Además la conservación del flujo exige que $v_a = 2v_b$, con lo cual

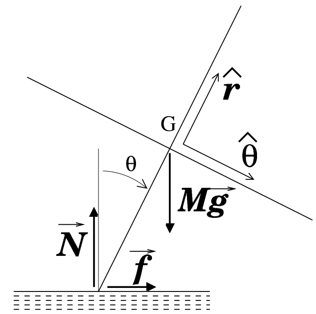
$$\frac{Mg}{A}\left(1 - \frac{1}{2\lambda}\right) + \frac{1}{2}\rho 4 v_b^2 = \frac{Mg}{A}\frac{1}{2\lambda} + \frac{1}{2}\rho v_b^2 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{Mg}{A}\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) = \frac{1}{2}\rho v_b^2 (1 - 4)$$

Despejamos A y obtenemos

$$\boxed{A = \frac{2Mg}{3\rho v_b^2}\left(\frac{1}{\lambda} - 1\right)}$$

PROBLEMA 3

SINOPSIS: La cruz cae por efecto de la gravedad. Su movimiento queda descrito por las ecuaciones de torques (para determinar la aceleración angular) y enegía (para determinar la rapidez del centro de masas). Estas dos contribuciones determinan la aceleración del centro de masas. Mediante la ecuación de Newton para el centro de masas se obtiene la normal.



• Calculemos el momento de inercia con respecto al punto en contacto con el piso (I_c). Se trata de dos barras de masa M/2 cada una. La que se apoya al piso contribuye con $\frac{1}{3}(\frac{M}{2})b^2$. La perpendicular a la anterior contribuye con (usando Steiner) $\frac{1}{12}(\frac{M}{2})b^2 + (\frac{M}{2})(\frac{b}{2})^2$. La suma de ambas da $\boxed{I_c = \frac{1}{3}Mb^2}$

• El centro de masas G describe un arco de circunferencia de radio r=b/2. Entonces su aceleración $\vec{a}$ queda convenientemente expresada por

$$\vec{a} = -\frac{v^2}{r}\hat{r} + \alpha r\hat{\theta} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\vec{a} = -\frac{2v^2}{b}\hat{r} + \frac{\alpha b}{2}\hat{\theta}}$$

• Las fuerzas sobre la cruz son su peso ($M\vec{g}$) y contacto con el piso ($\vec{N} + \vec{f}$). La ecuación del movimiento del centro de masas es $M\vec{g} + \vec{N} + \vec{f} = M\vec{a}$. Esta relación vectorial es proyectada sólo según la vertical ($\hat{y}$) (no es necesario proyectar según la horizontal):

$$-Mg + N + 0 = M\left[-\frac{2v^2}{b}(\hat{r}\cdot\hat{y}) + \frac{\alpha b}{2}(\hat{\theta}\cdot\hat{y})\right]$$

Considerando $(\hat{r}\cdot\hat{y}) = \cos\theta$, $(\hat{\theta}\cdot\hat{y}) = -\sin\theta$, y sustituyendo en la expresión anterior obtenemos

$$N = Mg - M\left[\frac{2v^2}{b}\cos\theta + \frac{\alpha b}{2}\sin\theta\right]$$

• Determinamos α por torques: $\tau_c = I_c\alpha$. Con respecto al contacto c sólo la gravedad ejerce torque:

$$Mg\left(\frac{b}{2}\right)\sin\theta = I_c\alpha \to Mg\left(\frac{b}{2}\right)\sin\theta = \frac{1}{3}Mb^2\alpha \Rightarrow \boxed{\alpha b = \frac{3}{2}g\sin\theta}$$

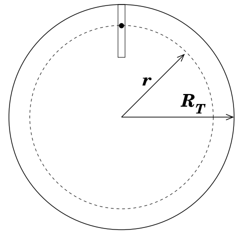
• Para determinar $v^2 = \omega^2 b^2$ conservamos energía. Evaluando y sustituyendo $I_c = Mb^2/3 \to$

$$Mg\frac{b}{2} + 0 = Mg\frac{b}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}I_c\omega^2 \Rightarrow \boxed{\omega^2 b^2 = 3gb(1-\cos\theta)}$$

Los resultados para αb y $\omega^2 b^2 = v^2$ son sustituidos en la expresión para N y obtenemos:

$$N = Mg - M\left[6g(1-\cos\theta)\cos\theta + \frac{3g\sin\theta}{4}\sin\theta\right]$$

$\boxed{\text{PROBLEMA 4}}$



SINOPSIS: La fuerza gravitacional al interior de la tierra es proporcional a la distancia al centro de ella. La fuerza es como la de un resorte, de modo que encontrando la ecuación del movimiento resolvemos considerando el movimiento armónico simple respectivo. Podemos incluso aplicar conservación de la energía.

• Resolvemos en forma breve. Sabemos que la fuerza sobre un cuerpo de masa m a una distancia r del centro de la tierra es proporcional al radio:

$$F_g(r) \propto r \qquad \Rightarrow \qquad F_g(r) = \kappa r$$

Para determinar κ recordamos que en la superficie de la tierra ($r = R_T$) la fuerza vale mg. De modo que

$$F_g(R_T) = \kappa R_T \qquad \to \qquad mg = \kappa R_T \qquad \Rightarrow \qquad \kappa = \frac{mg}{R_T}$$

Queda entonces para la fuerza

$$F_g(r) = \left(\frac{mg}{R_T}\right) r \equiv \kappa r$$

• Procedemos en analogía con el resorte y conservamoes energía cinética (K) + elástica (U_g): $(K + U_e)_i = (K + U_e)_f \to$

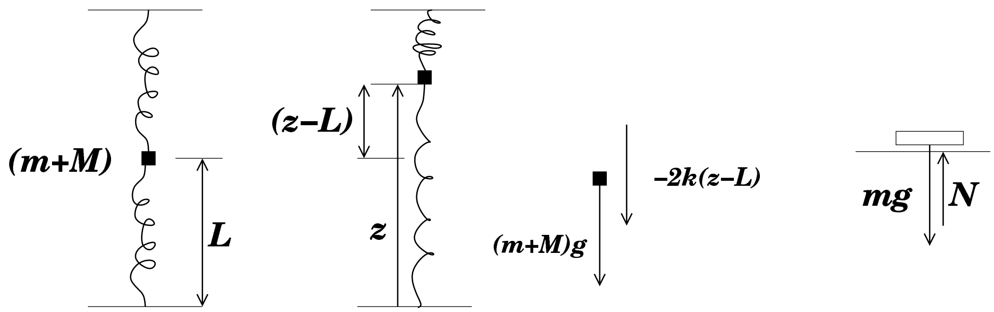
$$\frac{1}{2}m0^2 + \frac{1}{2}\kappa R_T^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\kappa(R_T/2)^2 \quad \to \quad mv^2 = \kappa(1-1/4)R_T^2 = 3mgR_T/4 \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = \sqrt{3gR_T}/2}$$

En el último pase se reemplazó $\kappa = mg/R_T$. Evaluando numéricamente en unidades SI:

$$v = 0.5\sqrt{3 \times 10 \times 64 \times 10^5} = 0.5 \times 8 \times \sqrt{3} \times 10^3 = 4 \times \sqrt{3} \times 10^3 \approx 4 \times 1.7 \times 10^3$$

Por lo tanto, $\boxed{v \approx 6.800 \text{ m/s}}$

PROBLEMA 5



SINOPSIS: El tamaño de la caja es irrelevante. Analizamos el par caja+moneda como un solo objeto y determinamos su comportamiento oscilatorio. Luego analizamos la moneda como un solo objeto y exigimos que la normal del piso sobre ella nunca se anule.

• Consideremos los resortes de longitud natural L, una magnitud que eventualmente debiera desaparecer de nuestro resultado. Siguiendo el esquema de la figura (vector $\hat{z}$ hacia arriba), las fuerzas sobre la (caja+moneda) son el peso ($(m+M)\vec{g}$) y la fuerza de ambos resortes ($\vec{F}_e = -2k(z-L)\hat{z}$). Aplicando Newton y proyectando según $\hat{z}$ tenemos:

$$(m+M)\vec{g} + \vec{F}_e = (M+m)\vec{a} \rightarrow -(m+M)g - 2k(z-L) = (M+m)\ddot{z} \Rightarrow$$

$$\boxed{\ddot{z} + \tfrac{2k}{m+M} z + g - \tfrac{2kL}{m+M} = 0} \tag{6}$$

• La ubicación z de equilibrio se puede determinar exigiendo $\ddot{z} = 0$, con lo cual $\boxed{z_\circ = L - (m+M)g/2k}$

Analizamos la moneda por si sola. Sobre ella actúan la gravedad ($m\vec{g}$) y la normal ($\vec{N}$). La ecuación del movimiento y su proyección según $\hat{z}$ llevan a

$$m\vec{g} + \vec{N} = m\vec{a} \Rightarrow \boxed{-mg + N = m\ddot{z}}$$

• Sustituyendo valor de $\ddot{z}$ de la Ec. 6 obtenemos

$$N + \frac{2km}{m+M} z - \frac{2kLm}{m+M} = 0$$

La pérdida de contacto ocurre cuando $N = 0$, con lo cual $\frac{2km}{m+M} z = \frac{2kLm}{m+M}$. Despejando z se tiene

$$z = L$$

• Las oscilaciones ocurren en torno a la posición de equilibrio. La amplitud es la resta $z - z_\circ$ (que con la elección de ejes es positiva). Por lo tanto la amplitud máxima A para que nunca se despegue la moneda es

$$\boxed{A = z - z_\circ = (m+M)g/2k}$$