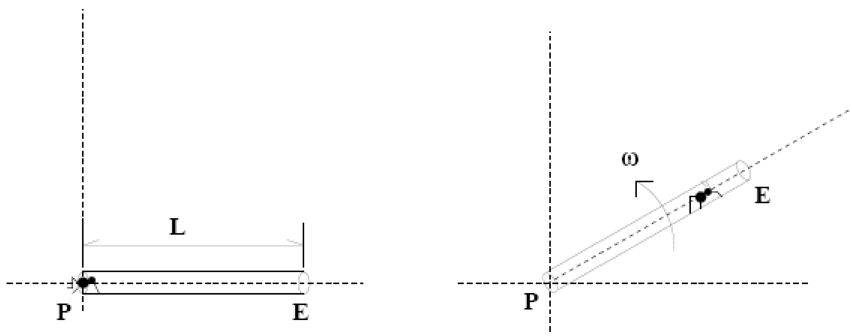
PROBLEMA 3

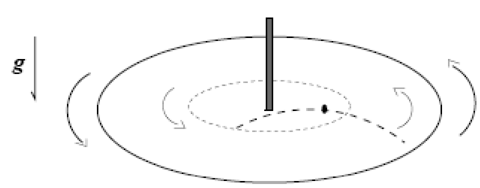
En ausencia de gravedad y sobre una superficie pulida, un tubo de longitud $\underline{L}$ rota en torno a su eje P con velocidad angular constante $\underline{\omega}$. Dentro del tubo una "hormiguita ciega" camina hacia el extremo abierto E del tubo con rapidez constante $\underline{v_\circ}$ relativa al tubo y partiendo desde P. Sin darse cuenta, la "hormiguita ciega" sale disparada del tubo. Determine la posición de la hormiguita en función del tiempo desde el momento en que parte desde P.



PROBLEMA 2 Cada lapsos τ (2,14 años) la distancia entre tierra y marte es mínima. Suponiendo órbitas curcunferenciales, uniformes y coplanares, **determine el período** de órbita de marte en el sistema solar. **Examine** su resultado para el caso τ muuuy grande e interprete concisamente.

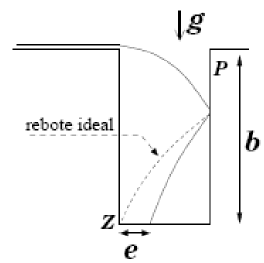
PROBLEMA 3 Un disco de radio R dispuesto horizontalmente gira con velocidad angular constante ω en torno a un eje vertical que pasa por su centro. A una distancia λR del eje ($0 \leq \lambda < 1$) una pulga brinca con una rapidez $v_\circ$ relativa a su posición de salto y perpendicular ésta.

Determine el máximo λ que garantice que la pulga cae sobre el disco después de su salto. **Examine** su resultado en el caso límite $\omega v_\circ \gg g$ e interprete concisamente.



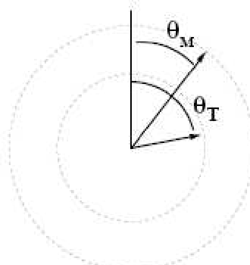
PROBLEMA 2: En la figura se muestra una moneda resbalando por una superficie horizontal la cual tiene una zanja de paredes lisas de ancho $\underline{a}$ y profundidad $\underline{b}$. La rapidez de la moneda es tal que al rebotar elásticamente con la pared frontal P caería justo en la esquina Z indicada. Sin embargo el rebote en P es inelástico, caracterizado por un 'coeficiente de restitución' $\underline{r}$ explicado mas abajo ($r \leq 1$).

- [3pt] Determine la posición y velocidad de la moneda al alcanzar la pared P.
- [2pt] Determine la distancia e con respecto a la esquina Z donde cae la moneda.
- [1Pt] Examine e interprete su resultado para el caso extremo $r \sim 1$.



Solución Problemas

PROBLEMA 2



- Sea $t = 0$ el instante de mayor cercanía entre marte y tierra. Sea $\omega_T = 2\pi/T$ la velocidad angular de tierra con respecto al sistema solar $\Longrightarrow$

$$\theta_T = \left(\frac{2\pi}{T}\right) t.$$

- Sea $\omega_M = 2\pi/T_M$ la velocidad angular de marte con respecto al sistema solar $\Longrightarrow$

$$\theta_M = \left(\frac{2\pi}{T_M}\right) t.$$

- El instante de mayor cercanía (τ) ocurrirá cuando nuevamente marte-tierra-sol estén alineados $\Longrightarrow \theta_T(t) = \theta_M(t) + 2\pi \Longrightarrow$

$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)\tau = \left(\frac{2\pi}{T_M}\right)\tau + 2\pi \quad \Rightarrow \quad \frac{\tau}{T} = \frac{\tau}{T_M} + 1 \quad \Rightarrow \quad T_M = \frac{\tau}{(\frac{\tau}{T}) - 1} \tag{5}$$

- Sustituimos T=1 año y τ=2.14 año $\Longrightarrow$

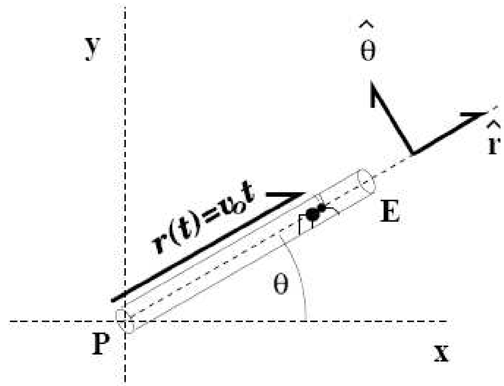
$$T_M = \frac{2.14}{2.14 - 1} = \frac{2.14}{1.14} = \frac{2.14 + 0.14 - 0.14}{1.14} = 1 - \frac{0.14}{1.14} \sim 1.9 \text{ años}$$

- En caso de que $\tau \gg T \Rightarrow \tau/T \gg 1$ y la relación para T_M (Ec. 5)...

$$T_M = \frac{\tau}{(\frac{\tau}{T}) - 1} \sim \frac{\tau}{(\frac{\tau}{T})} = T$$

por lo tanto $T_M \sim T$, indicando que la velocidad de órbita de marte es muy similar a la de tierra (tiene sentido!).

PROBLEMA 3



- Antes de salir del tubo la posición radial está data por $r(t) = v_\circ t$;
- las coordenadas (x, y):

$$x = v_\circ t \cos(\omega t) \quad (18)$$
$$y = v_\circ t \sin(\omega t) \quad (19)$$

- Desde que la hormiga (H) sale del tubo por E en el instante $t_S \rightarrow$ movimiento rectilíneo que pasa por $\vec{r}_{salida} = \vec{r}_S$ con velocidad $\vec{v}_{salida} = \vec{v}_S$:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_S + \vec{v}_S(t - t_S) \quad (20)$$

- El instante de salida: $t_S = \frac{L}{v_\circ}$;
- El ángulo θ al salir: $\theta_S = \omega t_S = \frac{\omega L}{v_\circ}$.
- Coordenadas de salida:

$$x_S = L\cos(\omega L/v_\circ) \quad (21)$$
$$y_S = L\sin(\omega L/v_\circ) \quad (22)$$

- La velocidad de salida (con respecto a la superficie):

$$\vec{v}_{hormiga/superficie} = \vec{v}_{hormiga/E} + \vec{v}_{E/superficie} \quad (23)$$
$$\vec{v}_S = v_\circ \hat{r} + \omega L\hat{\theta} \quad (24)$$

• Proyectando según ejes x e y (notar orientación de vectores unitarios $\hat{r}$ y $\hat{\theta}$ en la figura):

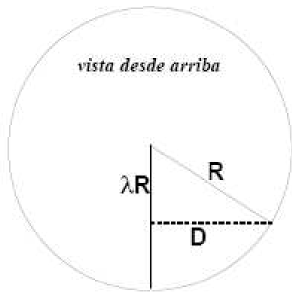
$$
\begin{aligned}
v_x &= v_\circ \cos\theta_S - \omega L \sin\theta_S && (25)\\
v_y &= v_\circ \sin\theta_S + \omega L \cos\theta_S && (26)
\end{aligned}
$$

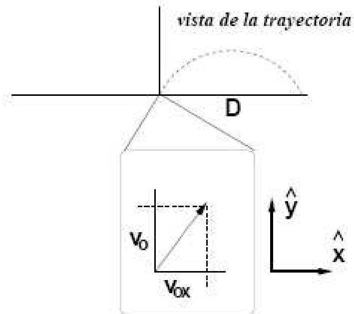
• con lo anterior Ec (20) $\Rightarrow$:

$$
\begin{aligned}
x &= L\cos\theta_S + (v_\circ \cos\theta_S - \omega L \sin\theta_S)(t - t_S) && (27)\\
y &= L\sin\theta_S + (v_\circ \sin\theta_S + \omega L \cos\theta_S)(t - t_S) && (28)
\end{aligned}
$$

• donde $\theta_S = \omega L/v_\circ$ y $t_S = L/v_\circ$.

PROBLEMA 3





velocidad inicial c/r suelo

• Al brincar la pulga (desde $\boldsymbol{\lambda R}$ del centro) su trayectoria vista desde arriba es recta; la condición 'llegar al borde' implica para el alcance horizontal $\boldsymbol{D}$:

$$\boldsymbol{R^2 = (\lambda R)^2 + D^2 \quad \rightarrow \quad D = R\sqrt{1-\lambda^2}} \tag{6}$$

• La velocidad de salida de la pulga <u>con respecto al suelo</u>:

$$\begin{aligned} \vec{v}_{pulga/suelo} &= \vec{v}_{pulga/lugardesalto} + \vec{v}_{lugardesalto/suelo} & (7)\\ v_{\circ x}\hat{x} + v_{\circ y}\hat{y} &= v_{\circ}\hat{y} + \omega(\lambda R)\hat{x} & (8) \end{aligned}$$

• Separando por componentes:

$$v_{\circ x} = \omega\lambda R \qquad v_{\circ y} = v_{\circ}$$

• Las coordenadas de la pulga una vez en vuelo:

$$x = 0 + v_{\circ x}t \quad \rightarrow \quad x = \omega\lambda R t \tag{9}$$

$$y = 0 + v_{\circ y}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad \rightarrow \quad y = v_{\circ}t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{10}$$

• Instante de llegada de pulga al suelo... $y(t) = 0 \longrightarrow$

$$0 = v_{\circ}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \quad t \rightarrow t_s = \frac{2v_{\circ}}{g} \tag{11}$$

• Puesto que en t_s la distancia recorrida según x es $D \longrightarrow$

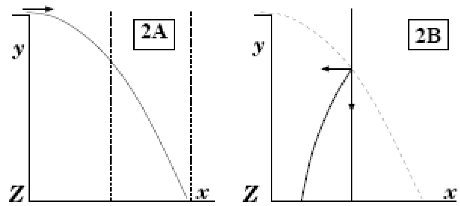
$$D = x(t_s)$$

• Sustituyendo expresión para D (Ec. 6) y $x(t = t_s)$ con t_s dado por Ec. 11,

$$R\sqrt{1-\lambda^2} = \omega\lambda R\left(\frac{2v_{\circ}}{g}\right) \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 = \frac{1}{1 + 4(\omega v_{\circ}/g)^2}$$

• Cuando $\omega v_{\circ} \gg g$ se encuentra que $\lambda \sim 0$. Vale decir, el brinco de la pulga debe ocurrir muy cerca del eje del disco. La condición $\omega v_{\circ} \gg g$ se da cuando: i.- rapidez de salto muy grande ($v_{\circ} \gg g/\omega$); ii.- velocidad de rotación del disco muy grande ($\omega \gg g/v_{\circ}$).

PROBLEMA 2



• Para determinar velocidad $\boldsymbol{u}$ de la moneda en el plano antes de saltar e imponer que llega a $\boldsymbol{Z}$ results útil estudiar el problema equivalente mostrado en la figura (2A). Tomar origen en Z para movimiento parabólico e imponer que cuando $\boldsymbol{y=0}$ se cumple $\boldsymbol{x=2a}$:

$$\boldsymbol{y = b - \frac{1}{2}gt^2 \quad \rightarrow \quad 0 = b - \frac{1}{2}gt^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2b}{g}}}$$

$$x = ut \quad \rightarrow \quad 2a = u\sqrt{\frac{2b}{g}} \quad \Rightarrow \quad u = a\sqrt{\frac{2g}{b}}$$

• Hemos encontrado la velocidad de salto de la moneda. Determinamos lugar de impacto y velocidad al llegar a la pared ($x = a$). Tiempo t_p en llegar a la pared:

$$x = ut \quad \rightarrow \quad a = ut_p \quad \Rightarrow \quad t_p = \frac{a}{u}$$

• Coordenada y en ese instante t_p:

$$y = b - \frac{1}{2}gt^2 \quad \rightarrow \quad y_p = b - \frac{1}{2}gt_p^2 = b - \frac{ga^2}{2u^2} = b - \frac{ga^2}{2(2a^2g/b)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{y_p = \frac{3}{4}b}$$

• Velocidades en t_p:

$$\boxed{v_x = u}; \qquad v_y = -gt_p \quad \Rightarrow \quad \boxed{v_y = -\frac{bg}{u}}$$

• Analizamos la caída en el segundo trecho con la posición y velocidad inicial encontradas. El cronómetro se ajusta $t \rightarrow 0$ en el instante del rebote. Determinamos el instante t_s de llegada al suelo:

$$y = \frac{3b}{4} - \frac{bg}{u}t - \frac{1}{2}gt^2 \quad \rightarrow \quad 0 = \frac{3b}{4} - \frac{bg}{u}t_s - \frac{1}{2}gt_s^2 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}gt_s^2 + \frac{bg}{u}t_s - \frac{3b}{4} = 0$$

Resolvemos:

$$t_s = \frac{-\frac{bg}{u} \pm \sqrt{(\frac{bg}{u})^2 + 4\frac{1}{2}g\frac{3b}{4}}}{g}$$

Sustituyendo resultado $u = a\sqrt{2g/b}$, considerando la solución positiva (llegada despues de t=0) y simplificando...

$$t_s = \sqrt{\frac{2b}{g}} - \sqrt{\frac{b}{2g}}$$

• Para la coordenada x en t_s, partiendo de $x = a$ hacia Z con rapidez ru:

$$x = a - rut \quad \rightarrow \quad e = a - rut_s \quad \rightarrow \quad e = a - ra\sqrt{\frac{2g}{b}}\left(\sqrt{\frac{2b}{g}} - \sqrt{\frac{b}{2g}}\right)$$

Por lo tanto

$$\boxed{e = a(1 - r)}$$

• Si $r \sim 1$ entonces $e \sim 0$, lo que indica que si el rebote es elástico, la moneda cae justo en Z, como era de esperar!