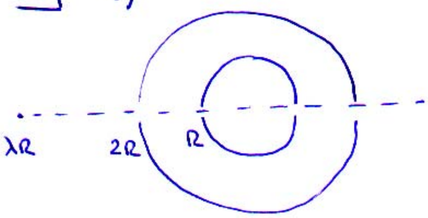
SOLUCIÓN CONTROL 4

P1 i)



En $r = \lambda R$:

$$F = \frac{2MmG}{(\lambda R)^2} = \frac{2}{\lambda^2}\frac{GMm}{R^2}$$

En la superficie del primer cascarón (fuera de él) :

$$F = \frac{G2Mm}{(2R)^2} = \frac{1}{2}\frac{GMm}{R^2}$$

Cuando la nave entra al interior del cascarón externo, deja de sentir su influencia y sólo siente la atracción del cascarón interno. Entonces en la superficie interna del cascarón externo, la fuerza es

$$F = \frac{GMm}{(2R)^2} = \frac{1}{4}\frac{GMm}{R^2}$$

En la superficie del cascarón interno (fuera de él)

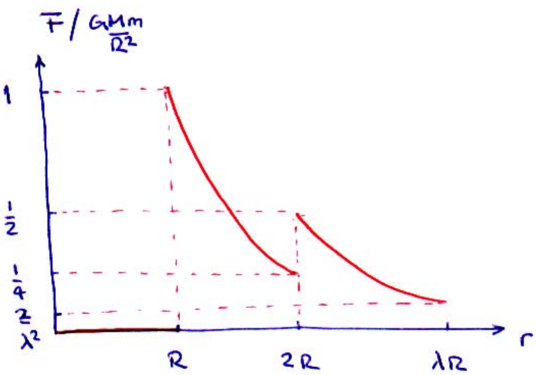
$$F = \frac{GMm}{R^2}$$

Finalmente, cuando la nave entra en el cascarón interno

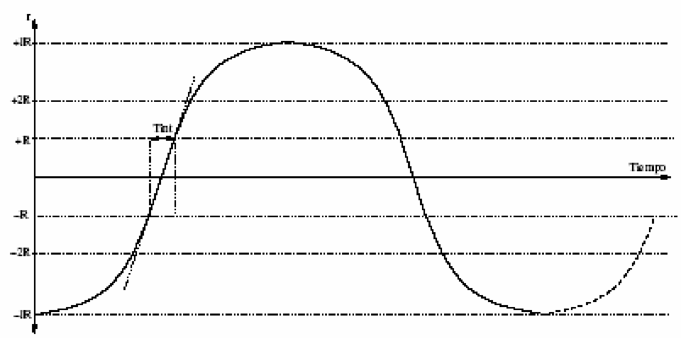
$$F = 0$$

SOLUCIÓN CONTROL 4

Gráfico



ii) La nave experimenta una aceleración variable, excepto en el cascarón interior donde $F = 0$. El movimiento será oscilatorio (pero no armónico) entre $r = -\lambda R$ y $r = \lambda R$.



iii) $T_{int} = \frac{2R}{v_{int}}$ donde v_{int} es la velocidad (constante) que mantiene la nave en el cascarón interno ($F = 0$)

Cons. de energía entre $r = \lambda R$ y la superficie del cascarón externo

$$-\frac{G 2Mm}{\lambda R} = \frac{1}{2} m v_{ext}^2 - \frac{G 2Mm}{2R}$$

SOLUCIÓN CONTROL 4

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{2} v_{ext}^2 = \frac{GM}{R}\left[1 - \frac{2}{\lambda}\right]$$

Cons. de energía entre este punto y la entrada al cascarón interno

$$\frac{1}{2} m v_{ext}^2 - \frac{GMm}{2R} = \frac{1}{2} m v_{int}^2 - \frac{GMm}{R}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{2} v_{int}^2 = \frac{1}{2} v_{ext}^2 + \frac{GM}{2R}$$

$$v_{int}^2 = 2\frac{GM}{R}\left[1 - \frac{2}{\lambda}\right] + \frac{GM}{R}$$

$$v_{int} = \sqrt{\frac{GM}{R}\left[3 - \frac{4}{\lambda}\right]}$$

$$\therefore \qquad \boxed{T_{int} = \frac{2R}{\sqrt{\frac{GM}{R}\left[3 - \frac{4}{\lambda}\right]}}}$$

SOLUCIÓN CONTROL 4

P2 i) $y(s,t) = A \operatorname{sen}(ks+\varphi)\cos\omega t$ (onda estacionaria)

Condición de borde periódica :

$$y(s,t) = y(s+2\pi R, t)$$

$$\Rightarrow \quad A \operatorname{sen}(ks+\varphi) = A \operatorname{sen}(k(s+2\pi R)+\varphi)$$

$$\Rightarrow \quad \cancel{ks+\varphi} + 2\pi n = \cancel{ks+\varphi} + k\,2\pi R$$

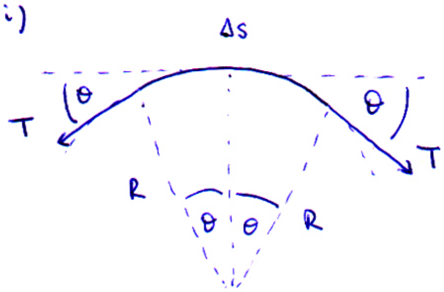
con $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$\therefore \quad \boxed{k_n = \frac{n}{R}}$$

Por lo tanto

$$y(s,t) = A \operatorname{sen}\left(\frac{ns}{R}+\varphi\right)\cos\omega t$$

ii)



Ec. de movimiento del elemento Δs

$$2T \operatorname{sen}\theta = \underbrace{\mu\,\Delta s}_{\Delta m}\,\frac{v^2}{R}$$

pero $\Delta s = 2\theta R$ y $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$ (ángulo pequeño)

$$\Rightarrow \quad 2T\theta = 2\mu\,\theta R\,\frac{(\Omega R)^2}{R}$$

$v = \Omega R$ es la velocidad del elemento de cuerda

SOLUCIÓN CONTROL 4

$$\therefore \quad \boxed{T = \mu \Omega^2 R^2}$$

iii) velocidad de la onda $= c = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$

$$\Rightarrow \quad c = \sqrt{\frac{\mu \Omega^2 R^2}{\mu}} = \Omega R$$

Modo fundamental $\rightarrow$ $n = 1$ $\Rightarrow$ $\omega_1 = c k_1$

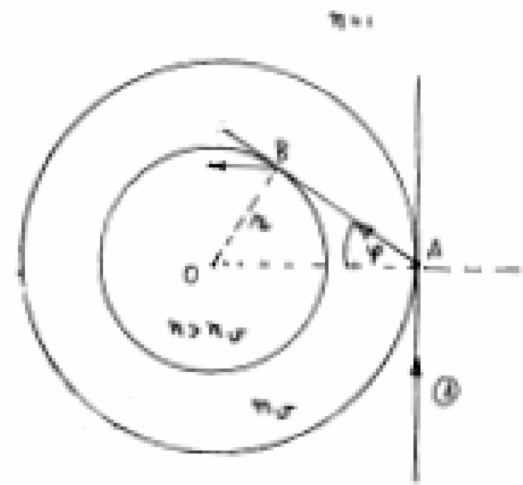
$$\omega_1 = \Omega R \frac{1}{R} = \Omega$$

Para $\nu_1 = 400$ Hz $\Rightarrow$ $\omega_1 = 2\pi \nu_1 = 800\pi$

$$\therefore \quad \Omega = 800 \ \frac{rev}{s}$$

Note que la velocidad de propagación de las ondas resulta ser igual a ΩR (la velocidad tangencial de la cuerda)

SOLUCIÓN CONTROL 4



OA = R ; OB = r

Rayo ① en posición más desfavorable

Snell : $1 \cdot \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} = n_L \cdot \operatorname{sen} \varphi$

$$\therefore \boxed{\operatorname{sen} \varphi = \frac{1}{n_L}} \qquad (1)$$

Rayo AB, tangente círculo interior. Como $n > n_L$, el rayo refractado penetra en el líquido.

En ΔOAB : $\operatorname{sen} \varphi = \dfrac{r}{R}$

Luego, $\boxed{\dfrac{r}{R} = \dfrac{1}{n_L}}$

Geometría : 2 pts
Snell en A : 1 pto
Cálculo de φ : 1 pto
Resto : 2 pts