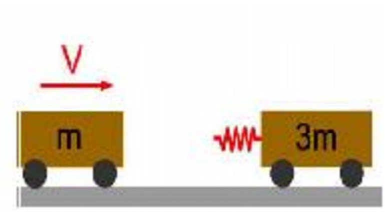
Momentum, energía; Dinámica

asantis@ing.uchile.cl

16 de julio de 2006



P1. En un ambiente libre de roce un carro de masa m_1 avanza con rapidez $v_1 = v$ en dirección a otro carro de masa $m_2 = 3m_1$ que inicialmente se encuentra en reposo. La colisión es amortiguada por un resorte ideal de constante elástica k y largo natural l_o.

a) Encuentre v_2 en el instante de compresión máxima

b) ¿Cuál es la velocidad de los carros después del choque?

c) Encuentre la compresión máxima del resorte

d)¿Cuánto debe valer v para que la compresión máxima sea l_o?

Resolución:

a) Todo es ideal luego se conserva momentum y energía. Es muy importante darse cuenta que en el instante de compresión máxima del resorte ambos carros llevan la misma velocidad. Esto es claro viendo que el resorte se comprime unicamente debido a que $v_1 > v_2$. Pues por ejemplo, si $m_2$en vez de ser un carrito es una muralla, en el instante que el resorte alcanza su compresión máxima $m_1$se detiene, es decir, alcanza la misma velocidad que la muralla, que en ese caso es velocidad nula. Tenemos dos ecuaciones:

$$\frac{1}{2}m_1v^2 = \frac{1}{2}kx_{max}^2 + \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 \tag{1}$$

$$m_1v = m_1v_1 + m_2v_2 \tag{2}$$

Recordando que $m_2 = 3m_1$y que en el instante de compresión máxima $v_1 = v_2$ de (2) obtenemos

$$v = 4v_2 \Rightarrow v_2 = \frac{v}{4}$$

b) Después del choque el resorte ya deja de actuar y solo tenemos velocidades, obteniendo

$$\frac{1}{2}m_1 v^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}(3m_1)v_2^2 \Rightarrow v^2 = v_1^2 + 3v_2^2 \tag{3}$$

$$m_1 v \quad = \quad m_1 v_1 + 3m_1 v_2 \Rightarrow v = v_1 + 3v_2 \tag{4}$$

$$(4) \Rightarrow v^2 = v_1^2 + 6v_1 v_2 + 9v_2^2 \tag{5}$$

$$(4)\&(5) \Rightarrow v_1^2 + 3v_2^2 = v_1^2 + 6v_1 v_2 + 9v_2^2 \Rightarrow v_2(v_2 + v_1) = 0$$

Luego tenemos dos soluciones matemáticas para v_2: $v_2 = 0$ & $v_2 = -v_1$. Pero $v_2 = 0$ no tiene sentido luego nos quedamos con la segunda solución obteniendo así luego de reemplazar en (4)

$$v_2 = \frac{v}{2} = -v_1$$

c) Volviendo a las ecuaciones (1) y (2) y sabiendo que para aquel instante de compresión máxima $v_1 = v_2 = \frac{v}{4}$

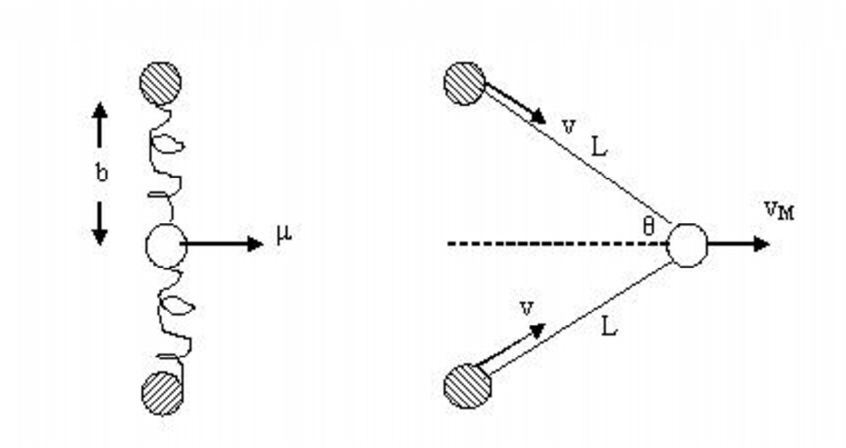
$$v^2 = \frac{k}{m_1}x_{max}^2 + \frac{v^2}{16} + \frac{3v^2}{16}$$

$$v^2 - \frac{v^2}{4} = \frac{3v^2}{4} = \frac{k}{m}x_{max}^2 \Rightarrow x_{max} = \frac{v}{2}\sqrt{\frac{3m_1}{k}}$$

d) Queremos quqe $x_{max} = l_o$ entonces imponemos esto en el resultado anterior obteniendo

$$l_o^2 = \frac{3m_1 v^2}{4k} \Rightarrow v^2 = \frac{4kl_o^2}{3m_1} \Rightarrow v = 2l_o\sqrt{\frac{k}{3m_1}}$$

P2. Dos particulas iguales de masa m, yacen sobre una mesa horizontal pulida inicialmente en reposo. Estas están unidas mediante una cuerda ideal de largo L a otra partícula de masa M situada en el punto medio entre las partículas iguales a una distancia b <L. Si se impulsa la masa M con una velocidad μ perpendicular a la linea que une las tres partículas, encuentre el tiempo que demoran las masas iguales en chocar considerando que en $t = 0$ las tres están alineadas como muestra la figura de la izquierda.



Resolución:

Este problema tiene toda la cara de momentum y energía. Primero, veamos que la distancia que recorre M desde $t = 0$ hasta $t = t_o$ (instante en que la cuerda se tensa y pega el tirón a las partículas de masa m) es simplemente $d_o = \sqrt{L^2 - b^2}$. Como su velocidad es constante igual a μ en todo ese trayecto, simplemente

$$t_o = \frac{\sqrt{L^2 - b^2}}{\mu} = \frac{L \cos\theta}{\mu} \tag{6}$$

Sea $t_1$el tiempo entre t_o y el instante que las partículas iguales chocan. En t_1 todas las masas llevan velocidad y todas son constantes, en donde por simetría las dos partículas de masa m tienen la misma velocidad v y la mas M velocidad v_M. Como lo que vamos a conservar es momentum lineal, debemos elegir la linea de movimiento en donde vamosa conservar. Pareciera más sencillo proyectar v en la línea de movimiento de la masa M.

$$\frac{1}{2}M\mu^2 = \frac{1}{2}Mv_M^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}Mv_M^2 + mv^2 \tag{7}$$

$$M\mu = Mv_M + mv \cdot \cos\theta + mv \cdot \cos\theta = Mv_M + 2mv \cdot \cos\theta \tag{8}$$

$$\Rightarrow de\,(8) \quad v_M^2 = (\mu - \tfrac{2m}{M} v \cos\theta)^2 = \mu^2 - \tfrac{4m}{M}\mu v \cos\theta + \tfrac{4m^2}{M^2} v^2 \cos^2\theta$$

Despejando v_M^2 de (7) e igualando con el resultado anterior

$$\mu^2 - \frac{2m}{M}v^2 = \mu^2 - \frac{4m}{M}\mu v \cos\theta + \frac{4m^2}{M^2}v^2\cos^2\theta / \cdot \frac{M}{2m}$$

$$-v^2 = -2\mu v \cos\theta + \frac{2m}{M}v^2 \cos^2\theta$$

$$v^2(1 + \frac{2m}{M}\cos^2\theta) - 2\mu v\cos\theta = 0$$

$$\Rightarrow (\frac{M + 2m\cos^2\theta}{M})v - 2\mu\cos\theta = 0 \qquad v \neq 0$$

$$v = \frac{2M\mu\cos\theta}{M + 2m\cos^2\theta} \tag{9}$$

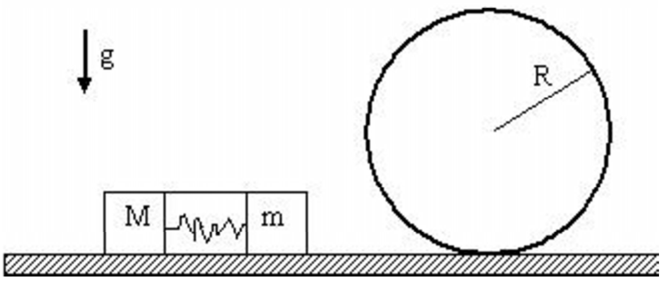
Esta velocidad es constante y tiene 2 componenetes: una perpendicular a la línea de movimiento de M y otra paralelela. Claramente nos interesa la componente perpendicular puesto que con aquella las partículas se desplazan hacia adentro y luego chocan. Luego simplemente queremos que ocurra que

$$v\sin\theta \cdot t_1 = b \tag{10}$$

Pues por la simetría del problema, si una recorre b entonces en $t_1$la otra recorrerá b también y se encontrarán. Ahora $\sin\theta = \frac{b}{L}$, con lo que finalmente

$$t^* = t_o + t_1 = \frac{L}{\mu}\cos\theta + \frac{L}{\mu}(\frac{M + 2m\cos^2\theta}{2M\cos\theta})$$

P3. Un resorte ideal de constante k se encuetra inicialmente comprimido una distancia x_o por medio de un hilo. Dos masas M y m se colocan en ambos extremos del resorte. Al cortar el hilo el resorte se expande y ambas masas salen disparadas en direcciones opuestas por un suelo sin roce. La masa m hace un loop circunferencial de radio R como muestra la figura. Encuentre la masa máxima m con tal de que nunca pierda contacto con la pista circunferencial. Analice el caso M $>>$1.



Resolución:

Primero que todo al no existir roce podemos conservar energía. Casi siempre cuando los problemas son de cosas que se se pueden "despegar" del trayecto en que van, uno impone que las fuerzas de contacto desaparezcan, es decir, uno impone que valgan cero. Esto se hace tanto para las preguntas que piden que se despegue como las preguntas que piden que no se despegue, pues es el caso límite... donde todo puede pasar.

Volviendo al problema, supongamos que m sale disparada con velocidad v_{om} y que alcanza a dar una vuelta entera. Cuando llega al punto más alto de su recorrido (que por lo general es el punto más crítico) se cumple que

$$N + mg = m\frac{v_*^2}{R} \tag{11}$$

Para que no se despegue analiazmos $N = 0$ obteniendo que la velocidad en ese punto debe cumplir que

$$v_* = \sqrt{gR} \tag{12}$$

Lamentablemente se nos cancelaron las masas y precisamente nos piden por ella. La única forma de que aparezca m en la condición (2) es que v_*dependa de m. Lo más probable es que haciendo bien los cálculos y aplicando bien la física lleguemos a lo esperado.

$$\underbrace{\frac{1}{2}kx_o^2}_{E.inicial} = \underbrace{\frac{1}{2}Mv_{oM}^2 + \frac{1}{2}mv_{om}^2}_{E.final} \tag{13}$$

$$0 = Mv_{oM} + mv_{om} \quad (Momentum) \tag{14}$$

De (14) $v_{oM} = -\frac{m}{M}v_{om}$ y reemplazando en (13)

$$kx_o^2 = M\frac{m^2}{M^2}v_{om}^2 + mv_{om}^2 \Rightarrow mv_{om}^2(1+\frac{m}{M}) = kx_o^2 \Rightarrow v_{om}^2 = \frac{kx_o^2}{m(1+\frac{m}{M})}$$

Tenemos entonces la velocidad con que entra al loop. Conservando energía podemos encontrar la velocidad con que llega al puntos más alto (v_*). Considerando potencial gravitatorio cero a ras de suelo:

$$\frac{1}{2}m\frac{kx_o^2}{m(1+\frac{m}{M})} = \frac{1}{2}mv_*^2 + 2mgR \Rightarrow \frac{kx_o^2}{m(1+\frac{m}{M})} = v_*^2 + 4gR \Rightarrow v_*^2 = \frac{kx_o^2}{m(1+\frac{m}{M})} - 4gR$$

Bingo!, encontramos v_*en función de m. Igualando con la condición (12)

$$\frac{kx_o^2}{m(1+\frac{m}{M})} - 4gR = gR$$

$$kx_o^2 = 5gRm(1+\frac{m}{M}) \Rightarrow kx_o^2 = 5gRm + \frac{5gR}{M}m^2$$

$$m^2 + Mm - \frac{kMx_o^2}{5gR} = 0$$

$$\Rightarrow m = -\frac{M}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{M^2 + \frac{4kMx_o^2}{5gR}}$$

Ahora no existen masas negativas por lo que elegimos la solución positiva.

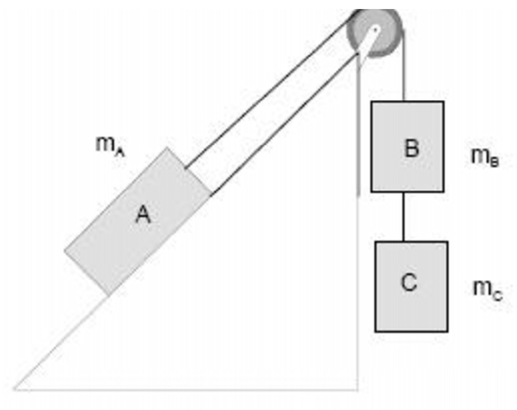
$$\Rightarrow m = \frac{M}{2}(\sqrt{1 + \frac{4kx_o^2}{5MgR}} - 1)$$

- Si M $>>$1 $\frac{m}{M} \to 0$ y por lo tanto $v_* \to \frac{k}{m}x_o^2 - 4gR$ y esto hubiera significado que $m = \frac{kx_o^2}{5gR}$.

P4. Tres cuerpos de masas m_A, m_B, m_C en presencia de la gravedad terrestre, se encuentran como muestra la figura, de tal manera que cualquier pequeña perturbación haría que el bloque A deslizara hacia arriba por el plano. Las cuerdas son de masa despresiable e inextensibles. El plano tiene una inclinación en α grados.

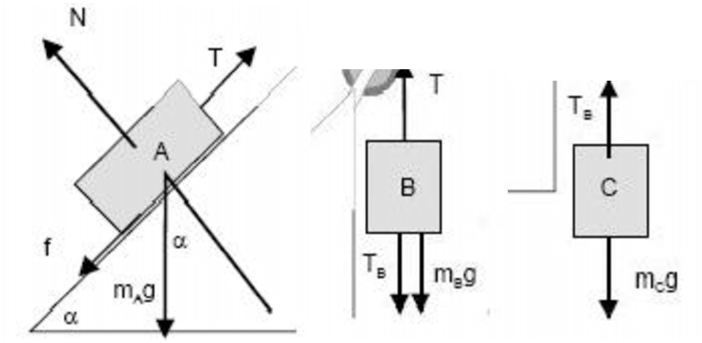
a) Encuentre el coeficiente de roce estático en el plano inclinado μ_e

b) Encuentre el coeficiente de roce dinamico si el bloque A sube con velocidad constante debido a una pequeña perturbación.



Resolución:

a) Como el sistema está en equilibrio, como siempre hacemos $\sum \vec{F} = \vec{0}$. Veamos el DCL de cada actor en el equilibrio.



De esta manera tenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$N - m_A g \cos\alpha = 0$$

$$T - f_r - m_A g \sin\alpha = 0$$

$$T - T_B - m_B g = 0$$

$$T_B - m_C g = 0$$

$$\Rightarrow T_B = m_C g \Rightarrow T = (m_B + m_C)g \Rightarrow f_r = (m_B + m_C)g - m_A g \sin\alpha = \mu_e |N| = \mu_e m_A g \cos\alpha$$

$$\Rightarrow \mu_e = \frac{m_B + m_C}{m_A \cos\alpha} - \tan\alpha$$

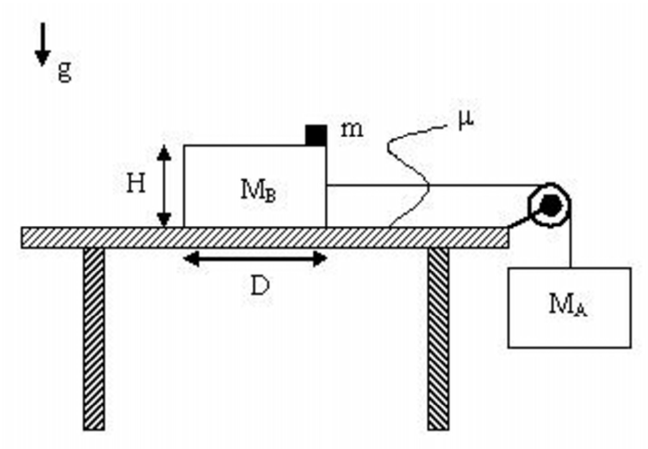
b) Si el sistema debido a una pequeña perturbación se mueve con velocidad constante las ecuaciones no cambian, luego $\mu_d = \mu_e$

P5. (P2 Control 1 2005)

Una masa puntual m descansa sobre un bloque de masa M_B altura H y largo D. El bloque desliza sobre la superficie horizontal de una mesa con coeficiente de roce dinámico μ. El coeficiente de roce entre la masa m y el bloque M_B es nulo. Uno de los extremos de una cuerda ideal se ata al bloque M_B, mientras que el otro extremo se ata a una masa M_A que cuelga de una polea de masa despresiable. Si en $t = 0$ la masa puntual m se encuentra en el borde del bloque M_B(ver figura):

i) ¿Cuánto demora la masa m en chocar contra la mesa?

ii) Calcule el desplazamiento de la masa M_B entre $t = 0$ y el instante en que m choca contra la mesa.



Resolución:

i) Como no hay roce entre M_B y m entonces la masa m nunca se mueve. Es decir, lo que va a hacer la masa m es lo siguiente: Esperará que el bloque recorra una disntaica D (t_D) para luego caer en caída libre desde una altura H en un tiempo t_H. Por simple cinemática calculamos t_H

$$0 = H + 0 - \frac{1}{2}gt_H^2 \Rightarrow t_H = \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

Así, solo nos falta encontrar el tiempo que demora el bloque en recorrer una distancia D.

Por fuerzas tenemos que:

$$T - f_r = M_B a_B \tag{15}$$

$$N - M_B g - mg = 0 \tag{16}$$

$$-T + M_A g = M_A a_A \tag{17}$$

Como la cuerda es inextensible $a_A = a_B = a$ y además de (16) $N = (m + M_B)g$, luego sumando (17) y (18) y reemplazando el valor de la normal

$$-f_r + M_A g = M_A a + M_B a \Rightarrow -\mu g(m + M_B) + M_A g = (M_A + M_B)a$$

$$[M_A - \mu(m + M_B)]g = (M_A + M_B)a \Rightarrow a = \frac{M_A - \mu(m + M_B)}{M_A + M_B}g$$

Como conocemos la aceleración del bloque y su velocidad inicial (reposo), podemos conocer el tiempo que demora en recorrer D, pues se cumple que

$$D = 0 + 0 + \frac{1}{2}at_D^2 = \frac{M_A - \mu(m + M_B)}{2(M_A + M_B)}gt_D^2$$

$$\Rightarrow t_D = \sqrt{\frac{2D(M_A + M_B)}{g[M_A - \mu(m + M_B)]}}$$

Con lo que finalemtne $t_{tot} = t_H + t_D$

ii) Ya sabemos que en $t_D$el bloque recorre una distancia D. Solo necesitamos saber cuánto recorre en t_H.

En el instante en que la masa m comienza a caer el bloque lleva una cierta velocidad no nula. Ese instante será nuestro instante inicial y el isntante final será cuando la m choque con la mesa en t_H. El úncio gran problema es que la masa m ya no está sobre el bloque y luego cambia la reacción de la mesa sobre este y por lo mismo su aceleración. Calculémosla con estas nuevas condiciones de la misma forma que antes.

$$T - f_r = M_B a^* \tag{18}$$

$$N - M_B g = 0 \tag{19}$$

$$-T + M_A g = M_A a^* \tag{20}$$

Con esto $f_r = \mu M_B g$ y nuevamente restando (20) y (18) obtenemos

$$-\mu M_B g + M_A g = (M_A + M_B)a^* \Rightarrow a^* = \frac{M_A - \mu M_B}{M_A + M_B}g$$

Obteniendo lo mismo que si hubieramos simplemente impuesto para a que $m = 0$. Así entonces

$$\Delta x = v_o t_H + \frac{1}{2}a^* t_H^2 = (a \cdot t_D) \cdot t_H + \frac{1}{2}a^* t_H^2$$

$$= \frac{M_A - \mu(m + M_B)}{M_A + M_B}g \cdot \sqrt{\frac{2D(M_A + M_B)}{g[M_A - \mu(m + M_B)]}} \cdot \sqrt{\frac{2H}{g}} + \frac{M_A - \mu M_B}{2(M_A + M_B)}g \cdot \frac{2H}{g}$$

$$= 2\sqrt{HD}\sqrt{\frac{M_A - \mu(m + M_B)}{M_A + M_B}} + H\frac{M_A - \mu M_B}{M_A + M_B}$$

Con lo que finalmente

$$D_{tot} = D + 2\sqrt{HD}\sqrt{\frac{M_A - \mu(m + M_B)}{M_A + M_B}} + H\frac{M_A - \mu M_B}{M_A + M_B}$$