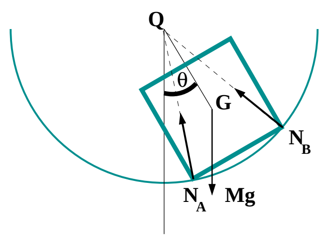
SOLUCION CONTROL No 5
INTRODUCCION A LA FISICA – PRIMAVERA 2001

Por: H. F. A.

Departamento de Física, FCFM, Universidad de Chile

ADVERTENCIA CON RESPECTO A LA PUNTUACION: si bien es cierto se ha asignado puntuación parcial a distintos elementos en la solución de cada problema, el contexto en que ellas se aplican es de suma relevancia en la evaluación. Por ejemplo, si se utilizan dos expresiones para una misma cantidad, una correcta y la otra incorrecta, eso es INCORRECTO y por lo tanto no hay puntaje parcial.

PROBLEMA 1



- La energía es conservada: $\boldsymbol{E = K + U_g}$
- La energía cinética: $\boldsymbol{K = \frac{1}{2} I_Q \dot{\theta}^2}$. Hay que calcular $\boldsymbol{I_Q}$.
- La energía potencial: $\boldsymbol{U_g = Mgh_G}$. Si llamamos $\boldsymbol{D}$ la distancia $\overline{\boldsymbol{QG}}$, y consideramos nivel cero de energía potencial en $\boldsymbol{Q}$, entonces:

$$\boldsymbol{U_g = -MgD\cos\theta \approx -MgD(1 - \frac{1}{2}\theta^2)}$$

- La ecuación de energía lleva a:

$$\boldsymbol{E = \frac{1}{2} I_Q \dot{\theta}^2 - MgD\left(1 - \frac{1}{2}\theta^2\right)}$$

- Limpiando ....

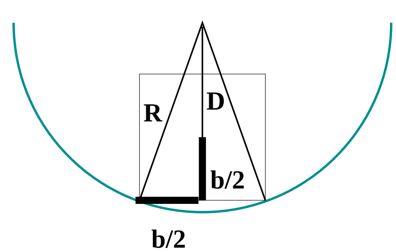
$$\boldsymbol{E - MgD = \frac{1}{2} I_Q \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} MgD\theta^2}$$

y la frecuencia de oscilaciones queda:

$$\boldsymbol{\omega^2 = \frac{MgD}{I_Q}}$$

Hay que calcular $\boldsymbol{D}$ e $\boldsymbol{I_Q}$

- En ambos casos se necesita $\boldsymbol{D}$, la distancia QG (G es el CM). Para ello considerar Pitágoras en la figura siguiente:



Afirmamos: $R^2 = (b/2)^2 + (D + b/2)^2$, con lo cual obtenemos $\boxed{D = \sqrt{R^2 - (b/2)^2} - b/2}$

• Necesitamos el momento de inercia del marco c/r a eje $\perp$ al plano del marco y que pasa por G. Sea m la masa de cada barra y usamos Steiner para cada una $\rightarrow I_G = 4\left(mb^2/12 + m(b/2)^2\right)$. Por lo tanto

$$\boxed{I_G = 4m\left(\frac{b^2}{3}\right) = \frac{Mb^2}{3}}$$

• Para calcular I_Q utilizamos nuevamente Steiner para trasladar $G \rightarrow Q$:

$$\boxed{I_Q = I_G + MD^2 = \frac{Mb^2}{3} + MD^2}$$

• Sustituimos resultados para D e I_Q en expresión para la frecuencia:

$$\boxed{\omega^2 = \frac{MgD}{\frac{Mb^2}{3} + MD^2} = \frac{g}{\frac{b^2}{3D} + D}}$$

donde

$$D = \sqrt{R^2 - (b/2)^2} - b/2$$

• En el caso límite $b \ll R$ se tiene $D \approx R$ y por lo tanto

$$\omega^2 \rightarrow \frac{g}{\sim 0 + R} = \frac{g}{R}$$

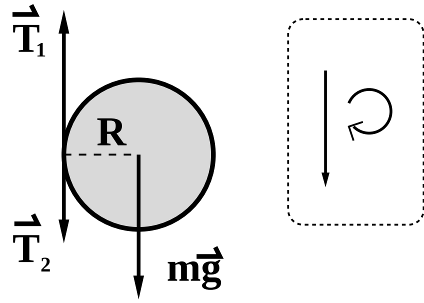
que corresponde al de un péndulo simple.

PUNTUACION:

Si se resuelve por ENERGIA: 1 Pto cálculo correcto de D + 1 Pto momento de inercia correcto + 1 Pto energía cinética correcta + 1 Pto energía potencial correcta + 1 Pto cálculo correcto de frecuencia + 1 Pto verificación aceptable del caso límite.

Si se resuelve por TORQUES: 1 Pto cálculo correcto de D + 1 Pto momento de inercia correcto + 1 Pto DCL y fuerzas correctas + 1 Pto ecuación de torques correcta + 1 Pto cálculo correcto de frecuencia + 1 Pto verificación aceptable del caso límite.

PROBLEMA 2



• Definamos el sistema:"lata $\oplus$ pedazo de cuerda en contacto con la lata". Entonces el DCL es el que se muestra en la figura. las fuerzas sobre el sistema son el peso del conjunto ($m\vec{g}$), y las tensiones en cada corte de cuerda hecho para aislar el sistema ($\vec{T}_1$ hacia arriba y $\vec{T}_2$ hacia abajo).
• Movimiento del centro de masas y proyectando según eje en el recuadro:

$$\begin{aligned} \vec{T}_1 + \vec{T}_2 + m\vec{g} &= m\vec{a} \qquad (1) \\ -T_1 + T_2 + mg &= ma \qquad (2) \end{aligned}$$

• Movimiento de rotación en torno al centro de masas del sistema ('$\circ$') y proyectando según sentido positivo de rotación en el recuadro:

$$\begin{aligned} \vec{\tau}_\circ(\vec{T}_1) + \vec{\tau}_\circ(\vec{T}_2) + \vec{\tau}_\circ(m\vec{g}) &= I_\circ \vec{\alpha} \qquad (3) \\ RT_1 - RT_2 + 0 &= I_\circ \alpha \qquad (4) \\ T_1 - T_2 &= \frac{I_\circ}{R}\alpha \qquad (5) \end{aligned}$$

• Combinando esta ecuación para $T_1 - T_2$ en la ecuación anterior:

$$-\frac{I_\circ}{R}\alpha = ma - mg$$

• El movimiento de la lata cumple la condición $\alpha R = a$. Sustituyendo:

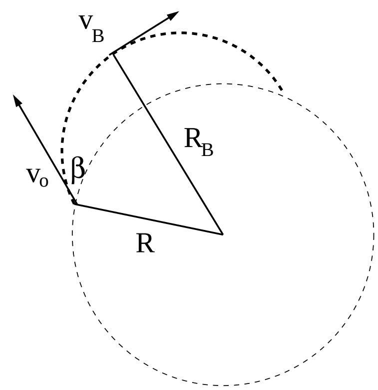
$$-\frac{I_\circ}{R^2}a = ma - mg \rightarrow a\left(1 + \frac{I_\circ}{mR^2}\right) = g$$

• Solo falta $I_\circ$ para una cuerda masiva de masa m (que enrolla la lata). Sabemos que ésta es mR^2, con lo cual $\frac{I_\circ}{mR^2} = 1$ y obtenemos:

$$\boxed{a = \frac{1}{2}g}$$

PUNTUACION: 1 Pto DCL correcto + 1 Pto momento de inercia de aro + 4 ptos planteamiento y solución correcta.

PROBLEMA 3



• Tanto la energía como el momentum angular son conservados. Consideramos los casos A) lanzamiento y B) alejamiento máximo. La distancia al centro de la tierra en el caso B es $\boldsymbol{R_B}$ y la velocidad respectiva es $\boldsymbol{v_B}$ (perpendicular a la radial); ambas cantidades por ser determinadas.

• Conservación de mtum angular (proyectil de masa $\boldsymbol{m}$):

$$\vec{r} \times \vec{p}|_A = \vec{r} \times \vec{p}|_B \quad \rightarrow \quad Rmv_\circ \cos\beta = mR_B v_B \quad \rightarrow$$

$$\boxed{v_B = v_\circ \cos\beta \left(\frac{R}{R_B}\right)} \tag{6}$$

• Conservación de energía:

$$(K+U)_A = (K+U)_B \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}mv_\circ^2 - G\frac{Mm}{R} = \frac{1}{2}mv_B^2 - G\frac{Mm}{R_B} \quad \rightarrow$$

$$\boxed{v_\circ^2 - 2G\frac{M}{R} = v_B^2 - 2G\frac{M}{R_B}}$$

• Valiéndose de $\boldsymbol{g = GM/R^2}$ para la aceleración de gravedad:

$$v_\circ^2 - 2gR = v_B^2 - 2gR\frac{R}{R_B} \tag{7}$$

• Reemplazando $\boldsymbol{v_B}$ de Ec. (6) en la ecuación anterior:

$$v_\circ^2 - 2gR = \left(v_\circ \cos\beta \frac{R}{R_B}\right)^2 - 2gR\frac{R}{R_B}$$

• Denotando la incógnita $\boldsymbol{(R/R_B) \equiv x}$ y la cantidad $\boldsymbol{(v_\circ^2/gR) \equiv b}$:

$$0 = b\cos^2\beta x^2 - 2x + (2-b)$$

• Resolviendo para x:

$$x = \frac{R}{R_B} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4b\cos^2\beta(2-b)}}{2b\cos^2\beta} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{R_B}{R} = \frac{b\cos^2\beta}{1 \pm \sqrt{1 - b\cos^2\beta(2-b)}}}$$

• El radio máximo ocurre para el signo (-); racionalizando la expresión anterior:

$$\frac{R_B}{R} = \frac{b\cos^2\beta(1+\sqrt{1-b\cos^2\beta(2-b)})}{1-(1-b\cos^2\beta(2-b))} = \frac{b\cos^2\beta(1+\sqrt{1-b\cos^2\beta(2-b)})}{b\cos^2\beta(2-b)}$$

por lo tanto:

$$\boxed{\frac{R_B}{R} = \frac{(1+\sqrt{1-b\cos^2\beta(2-b)})}{(2-b)}}$$

la altura máxima es: $h = R_B - R \rightarrow$

$$h = R\left(\frac{(1+\sqrt{1-b\cos^2\beta(2-b)})}{(2-b)} - 1\right)$$

con lo cual:

$$\boxed{h = R\frac{(b-1+\sqrt{1-b\cos^2\beta(2-b)})}{(2-b)}}$$

• En el caso $v_\circ^2 \ll gR$ se tiene $b \ll 1$ y por lo tanto b^2 es despreciable frente a 1; en la expresión anterior aproximamos: $\sqrt{1-b\cos^2\beta(2-b)} \approx \sqrt{1-2b\cos^2\beta} \approx 1-b\cos^2\beta$. Entonces

$$h \approx R\frac{(b-1+(1-b\cos^2\beta))}{(2-b)} \approx R\frac{b-b\cos^2\beta}{(2-b)} = bR\frac{1-\cos^2\beta}{2-b} \approx \frac{bR\sin^2\beta}{2}$$

• Con la notación original:

$$h \approx \frac{Rv_\circ^2/gR}{2}\sin^2\beta = \frac{(v_\circ\sin\beta)^2}{2g}$$

el resultado conocido en el primer semestre para lanzamiento en la superficie terrestre.