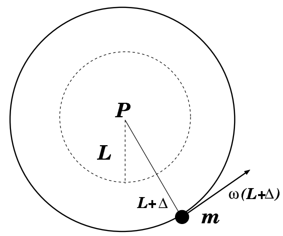
SOLUCION DEL EXAMEN
INTRODUCCION A LA FISICA – PRIMAVERA 2002
Por: H. F. A. (28 de noviembre de 2002)
Departamento de Física, FCFM, Universidad de Chile

PROBLEMA 1



• La energía necesaria para obtener lo descrito es la energía mecánica del sistema (cinética mas potencial elástica). Es necesario obtener la elongación Δ del resorte. Aplicando Newton para un movimiento circunferencial de radio $L+\Delta$ (y proyectando radialmente):

$$\vec{F}_e = m\vec{a} \qquad \to -k\Delta = -m\omega^2(L+\Delta) \Rightarrow \boxed{\Delta = \frac{m\omega^2 L}{k - m\omega^2}}$$

• La energía cinética está dada por $K = m\omega^2(L+\Delta)^2/2 \to$ necesitamos $L+\Delta$:

$$L+\Delta = L + \frac{m\omega^2 L}{k-m\omega^2} \quad \to \quad \boxed{L+\Delta = \frac{kL}{k-m\omega^2}}$$

• Evaluando:

$$\begin{aligned} E = K + U_e &= \frac{1}{2}m\omega^2(L+\Delta)^2 + \frac{1}{2}k\Delta^2 \\ &= \frac{1}{2}m\omega^2\frac{(kL)^2}{(k-m\omega^2)^2} + \frac{1}{2}k\frac{m^2\omega^4L^2}{(k-m\omega^2)^2} \\ &= \frac{mkL^2\omega^2(k+m\omega^2)}{2(k-m\omega^2)^2} \end{aligned} \tag{1}$$

• Se obtiene entonces:

$$E = \boxed{\frac{mkL^2\omega^2(k+m\omega^2)}{2(k-m\omega^2)^2}}$$

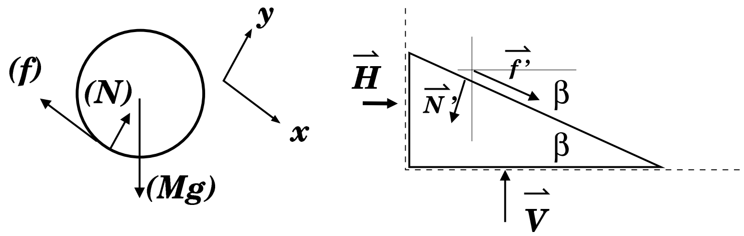
• En el caso extremo $k \to \infty$:

$$E = \frac{mkL^2\omega^2(k+m\omega^2)}{2(k-m\omega^2)^2} \to \frac{mkL^2\omega^2 k}{2k^2} \to \frac{mL^2\omega^2}{2} \Rightarrow E \to \frac{1}{2}m(\omega L)^2$$

que corresponde a la de una partícula de masa m en movimiento circunferencial de radio L (resorte sin deformar).

PROBLEMA 2

• Analizamos la rueda aplicando ecuación de torques (c/r al centro de masas) y ecuación de movimiento para el centro de masas. Sean $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ ejes según el plano de la cuña y perpendicular a éste. Las fuerzas a considerar son: el peso $\boldsymbol{M\vec{g}}$ y contacto –normal + roce– $\boldsymbol{\vec{N} + \vec{f}}$. Puesto que no hay resbalamiento la aceleración lineal y angular de la rueda están relacionadas: $\boldsymbol{a = \alpha R}$.



Para la rotación:

$$\begin{aligned} \vec{\tau}_\circ &= I_\circ \vec{\alpha} \quad \rightarrow \\ \tau(M\vec{g}) + \tau(\vec{N}) + \tau(\vec{f}) &= I_\circ \alpha \quad \rightarrow \\ 0 + 0 + fR &= I\alpha \quad \rightarrow \quad \boxed{fR = I_\circ \alpha} \end{aligned} \tag{2}$$

Para la traslación del CM:

$$\begin{aligned} M\vec{g} + \vec{N} + \vec{f} &= M\vec{a} \quad \rightarrow \\ Mg\sin\beta + 0 - f &= Ma \quad \text{(según x)} \quad \rightarrow \quad \boxed{Mg\sin\beta - f = M\alpha R} \quad (3) \\ -Mg\cos\beta + N + 0 &= 0 \quad \text{(según y)} \quad \rightarrow \quad \boxed{N = Mg\cos\beta} \quad (4) \end{aligned}$$

• Buscamos $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{N}$. Para $\boldsymbol{f}$ sustituir $\boldsymbol{\alpha}$ de Ec. 2 en Ec. 3. Además usar $\boldsymbol{I_\circ = MR^2}$ para el anillo:

$$Mg\sin\beta - f = f\frac{MR^2}{I_\circ} \quad \rightarrow \boxed{f = \frac{1}{2}Mg\sin\beta}$$

• Examinamos la cuña. Sobre ella actúan el contacto con la rueda ($\boldsymbol{\vec{f}' + \vec{N}'}$), la fuerza de la muralla ($\boldsymbol{\vec{H}}$) y la normal desde el piso $\boldsymbol{\vec{V}}$. Estática de la cuña implica

$$\vec{f}' + \vec{N}' + \vec{H} + \vec{V} = \vec{0}$$

Proyectando según la horizontal:

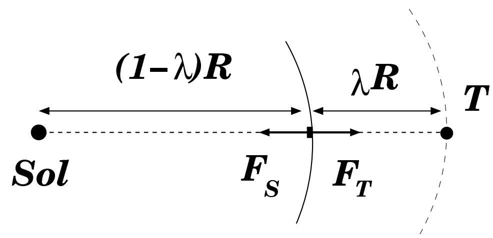
$$f\cos\beta - N\sin\beta + H + 0 = 0 \quad \rightarrow \quad H = N\sin\beta - f\cos\beta$$

Sustituyendo resultados para $\boldsymbol{f}$ y $\boldsymbol{N}$:

$$\boxed{H = \frac{1}{2}Mg\sin\beta\cos\beta}$$

• Cuando $\boldsymbol{\beta = \pi/2}$ H=0; en tal caso la rueda cae verticalmente y la cuña no es presionada contra la pared.

PROBLEMA 3



- Consideramos las fuerzas gravitacionales del Sol y la Tierra sobre el satélite (de masa m), el cual mantiene una órbita de radio $R(1-\lambda)$ alrededor del Sol. El satélite se mueve con velocidad angular ω igual a la de la Tierra. Sean $\vec{F}_S$ y $\vec{F}_T$ las fuerzas sobre el satélite debidas al Sol y Tierra respectivamente, entonces $\vec{F}_S + \vec{F}_T = m\vec{a}$. Evaluando y proyectando radialmente:

$$-G\frac{mM_S}{R^2(1-\lambda)^2} + G\frac{mM_T}{R^2\lambda^2} = -m\omega^2 R(1-\lambda)$$

- Para determinar ω se estudia el movimiento de la Tierra alrededor del Sol en forma separada:

$$-G\frac{M_S M_T}{R^2} = -M_T\omega^2 R \quad \Rightarrow \quad \boxed{\omega^2 = \frac{GM_S}{R^3}}$$

- Reemplazando ω^2 en la primera ecuación y simplificando:

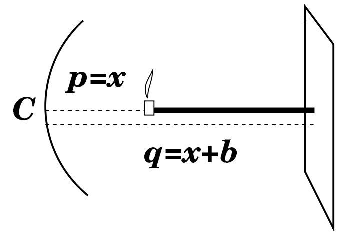
$$M_S\left[(1-\lambda) - \frac{1}{(1-\lambda)^2}\right] = -M_T\frac{1}{\lambda^2} \qquad \rightarrow \qquad \boxed{(1-\lambda)^2 = \left(\frac{M_S}{M_T}\right)\left[1-(1-\lambda)^3\right]\lambda^2}$$

- Una expresión más explícita de lo anterior (no requerida) es

$$\left(\frac{M_T}{M_S}\right)(1-\lambda)^2 = (3-3\lambda+\lambda^2)\lambda^3$$

- En el caso $M_T/M_S \rightarrow 0$ observamos que $(3-3\lambda+\lambda^2)\lambda^3 \rightarrow 0$, o sea $\lambda \rightarrow 0$ (el caso mas simple). Vale decir, mientras mas liviana es la Tierra, más cercano a ésta se ubica el satélite.

$\boxed{\text{PROBLEMA 4}}$



• Sea $\boldsymbol{x}$ la distancia entre la vela y $\boldsymbol{C}$, entonces la distancia entre la imagen (en la muralla) y $\boldsymbol{C}$ es $\boldsymbol{x+b}$. La distancia focal del espejo es $\boldsymbol{R/2}$. Entonces:

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{f} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{x}+\frac{1}{x+b}=\frac{2}{R} \quad \Rightarrow \quad x^2+x(b-R)-\frac{bR}{2}=0$$

• Resolvemos la ecuación cuadrática:

$$x=\frac{-(b-R)\pm\sqrt{(b-R)^2+2bR}}{2}$$

Consideramos sólo $\boldsymbol{x}$ positivo. Entonces:

$$\boxed{x=\frac{(R-b)+\sqrt{b^2+R^2}}{2}}$$

• Para examinar el caso $\boldsymbol{R/b \equiv \epsilon}$ pequeño conviene expresar la solucion en la forma

$$x=b\frac{(\epsilon-1)+\sqrt{1+\epsilon^2}}{2}$$

• Tomando $\boldsymbol{\epsilon \rightarrow 0}$:

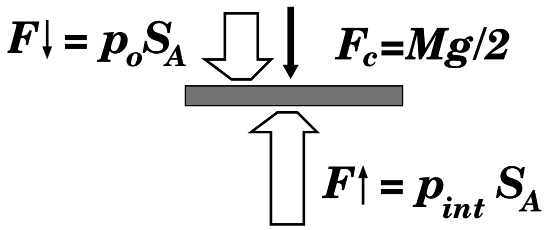
$$x \sim b\frac{(\epsilon-1)+(1+\epsilon^2/2)}{2} \sim \frac{b\epsilon}{2}=\frac{R}{2}.$$

Por lo tanto si la muralla está muy lejana a la vela (en el infinito), la vela hay que ubicarla en el foco del espejo (R/2).

PROBLEMA 5

• Aplicamos Bernoulli a lo largo de la línea ('h=0'):

$$\frac{1}{2}\rho v_A^2 + p_A = \frac{1}{2}\rho v_B^2 + p_B$$



Necesitamos p_A y p_B en términos de datos. Para ello analicemos el émbolo A: las fuerzas hacia abajo debido a la presión atmosférica ($p_\circ S_A$) y carga ($Mg/2$) compensan la fuerza debido a la presión de la columna de líquido sobre el émbolo ($p_{int} S_A$):

$$p_\circ S_A + \frac{Mg}{2} = p_{int} S_A \quad \rightarrow \quad p_{int} = p_\circ + \frac{Mg}{2S_A}.$$

• Determinamos la presión a nivel del flujo en A (Pascal) suponiendo que el émbolo se ubica a una altura H de la línea:

$$p_A = p_{int} + \rho g H \quad \rightarrow \quad p_A = p_\circ + \frac{Mg}{2S_A} + \rho g H\ .$$

Un resultado análogo se obtiene para el émbolo B:

$$p_B = p_\circ + \frac{Mg}{2S_B} + \rho g H.$$

• Sustituyendo en expresión para Bernoulli y simplificando (y usando $v_A = v$):

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \frac{Mg}{2S_A} = \frac{1}{2}\rho v_B^2 + \frac{Mg}{2S_B}$$

• Conservación de flujo permite relacionar v_B con las áreas y v:

$$v\sigma_A = v_B \sigma_B \quad \rightarrow \quad v_B = v\frac{\sigma_A}{\sigma_B}$$

Sustituyendo en expresión anterior y ordenando:

$$\rho v^2 \left[1 - \left(\frac{\sigma_A}{\sigma_B}\right)^2\right] = Mg\left(\frac{1}{S_B} - \frac{1}{S_A}\right)$$

con lo cual:

$$\boxed{\left(\frac{\sigma_A}{\sigma_B}\right)^2 = 1 - \frac{Mg}{\rho v^2}\left(\frac{1}{S_B} - \frac{1}{S_A}\right)}$$

• Puesto que $S_A < S_B$ entonces $1/S_A > 1/S_B$, o sea $1/S_B - 1/S_A < 0$, con lo que $\sigma_A > \sigma_B$: la línea en A es mas ancha que en B. Ciertamente cuando $S_A \rightarrow S_B$ se observa $\sigma_A/\sigma_B \rightarrow 1$: cuando los émbolos son iguales la presión en la línea debe ser uniforme.