SOLUCION CONTROL RECUPERATIVO
INTRODUCCION A LA FISICA – OTOÑO 2001

Por: H. F. A.

Departamento de Física, FCFM, Universidad de Chile

RESOLUCION de PROBLEMA 1

• Resulta útil determinar el número de veces que el bloque pasa por el sector rugoso. Para ello, sea $\boldsymbol{D}$ la distancia neta que desliza el bloque sobre la superficie rugosa. Conservación de energía:

$$K_f - K_i = W(\text{roce}) \qquad \to \qquad 0 - \frac{1}{2} m v_\circ^2 = -(\mu m g) D \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{D = \frac{v_\circ^2}{2\mu g}}$$

• El número entero de veces que el bloque transita por el sector rugoso es la parte entera de la fracción (desplazamiento neto)/(longitud de tramo rugoso):

$$N = \left[\frac{D}{\beta L}\right] = \left[\frac{v_\circ^2}{2\mu\beta g L}\right]$$

donde '[...]' denota 'parte entera de ...'.

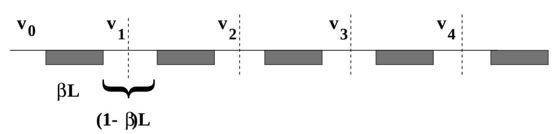
• El lugar donde el bloque queda detenido depende de si $\boldsymbol{N}$ es par ó impar. Para $\boldsymbol{N}$ par (0,2,4,...) la distancia $\boldsymbol{d}$ se mide con respecto al extremo izquierdo del tramo rugoso. Para $\boldsymbol{N}$ impar (1,3,5,...) se mide con respecto al extremo derecho. Para ambos casos

$$d = D - N\beta L \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{d = D - \left[\frac{D}{\beta L}\right]\beta L}$$

• El tiempo del movimiento es [t **sobre tramo rugoso**] + [t **sobre tramo liso**]$\equiv t_R + t_L$.
• El lapso sobre el tramo rugoso t_R se puede obtener considerando los sectores rugosos contiguos cubriendo una distancia neta $\boldsymbol{D}$. Mientras el bloque transita la región rugosa éste frena con aceleración de magnitud μg. El tiempo frenando se obtiene de

$$`v_f = v_i + at' \qquad \to \qquad 0 = v_\circ - (\mu g) t_R \Rightarrow t_R = \frac{v_\circ}{\mu g}$$

• Necesitamos determinar el lapso sobre tramos sin roce (t_L). Sea v_j la velocidad (cte) en el tramo j-ésimo, de longitud $(1-\beta)L$. El tiempo de tránsito en ese tramo es $t_j = (1-\beta)L/v_j$. El tiempo total t_L es $\sum t_j = (1-\beta)L \sum 1/v_j$. Hay que determinar v_j.



• Consideremos $v_1^2 - v_0^2 = -2\mu(g\beta L) \qquad \Rightarrow \qquad v_1^2 = v_0^2 - [2\mu g\beta L]$ (1er tramo).
• Análogamente $v_2^2 - v_1^2 = -[2\mu g\beta L] \qquad \Rightarrow \qquad v_2^2 = v_0^2 - 2[2\mu g\beta L]$ (2do tramo).
• Se extiende resultado para tramo j:

$$v_j^2 = v_0^2 - j[2\mu g\beta L] \qquad \Rightarrow \qquad v_j = v_0\sqrt{1 - j\frac{2\mu g\beta L}{v_0^2}} = v_0\sqrt{1 - j\frac{\beta L}{D}}$$

• Por lo tanto

$$t_L = \sum t_j = (1-\beta)L\sum \frac{1}{v_j} \qquad \Rightarrow \boxed{t_L = \frac{(1-\beta)L}{v_\circ}\sum_{j\le N}\frac{1}{\sqrt{1-j\beta L/D}}}$$

• Se debe considerar el tránsito hacia el tramo rugoso por primera vez ($t_\circ$):

$$t_\circ = \frac{(1-\beta)L/2}{v_\circ}$$

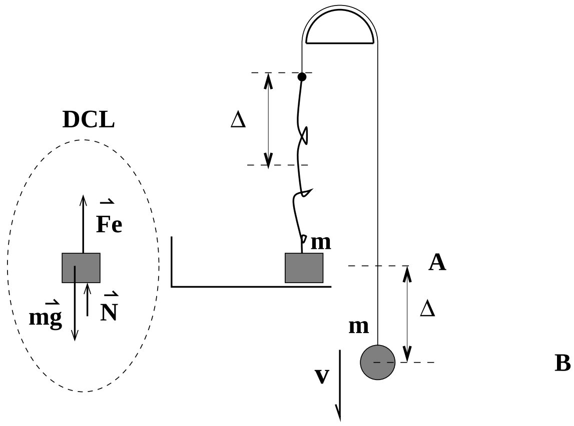
• El tiempo total $T = t_\circ + t_R + t_L$ da

$$\boxed{T = \frac{(1-\beta)L}{2v_\circ} + \frac{v_\circ}{\mu g} + \frac{(1-\beta)L}{v_\circ}\sum_{j\le N}\frac{1}{\sqrt{1-j\frac{\beta L}{D}}}}$$

• Si $\beta = 1$ entonces $T = 0 + \frac{v_\circ}{\mu g} + 0$, vale decir, es el tiempo de un movimiento uniformemente acelerado hasta detenerse.

PUNTUACION: 1Pto obtención de D + 1Pto obtención de d + 1Pto obtención de t_R y $t_\circ$ + 2Ptos obtención de t_L + 1Pto discusión aceptable.

RESOLUCION de PROBLEMA 2



• Para determinar levantamiento del cubo considerar fuerzas actuando sobre éste: normal con piso ($\vec{N}$), tiro de resorte ($\vec{F}_e$) y peso ($m\vec{g}$). Bloque detenido $\Rightarrow \vec{N} + \vec{F}_e + m\vec{g} = 0$. Proyectando según vertical hacia arriba:

$$N + k\Delta - mg = 0$$

• A punto de despegarse ($N \to 0$) $\quad\Rightarrow\quad k\Delta = mg \quad\Rightarrow\quad \boxed{\Delta = mg/k}$.

• Velocidad de esfera en A: utilizar energía.

$$\begin{aligned} E_A &= E_B \\ (K + U_g + U_e)_A &= (K + U_g + U_e)_B \\ 0 + 0 + 0 &= \frac{1}{2}mv^2 - mg\Delta + \frac{1}{2}k\Delta^2 \end{aligned}$$

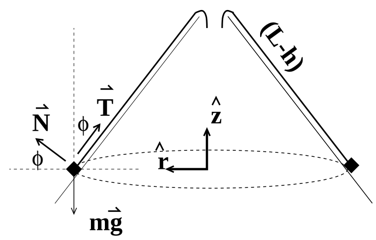
• Despejar v^2 y sustituir valor de Δ

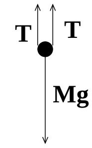
$$v^2 = 2g\Delta - \frac{k}{m}\Delta^2 = \Delta(2g - \frac{k}{m}\Delta) = g\Delta \Rightarrow \boxed{v = g\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

• Si $k \to \infty$ entonces $\Delta \to 0$ y $v \to 0$. Vale decir la esfera al ser soltada ante un resorte rígido no requiere bajar para que el bloque esté a punto de despegarse de la plataforma. Esto siempre y cuendo las masas de ambos cuerpos sean iguales!

PUNTUACION: 1Pto DCL bloque correcto + 1Pto obtención de Δ + 2Ptos ecuación trabajo/energía correcto. + 1Ptos obtención de v + 1Pto discusión aceptable.

RESOLUCION de PROBLEMA 3





• Fuerzas sobre la carga (y pedazo de cuerda adherido): dos tensiones ($\boldsymbol{2T}$; hacia arriba) y peso ($\boldsymbol{Mg}$; hacia abajo). La carga no se mueve por lo tanto $\boldsymbol{2T = Mg}$
• Estudiamos uno de los cubos en movimiento circunferencial de radio $\boldsymbol{r = (L-h)\sin\phi}$.
• Fuerzas actuando sobre los cubos: Peso ($\boldsymbol{mg}$; hacia abajo), normal (N; $\perp$ superficie) y tensión de la cuerda ($\boldsymbol{T}$; según superficie); la aceleración ($\boldsymbol{\omega^2 r}$, centrípeta).
• Ecuación del movimiento y proyecciones según $\hat{r}$ y $\hat{z}$:

$$\begin{aligned} m\vec{g} + \vec{N} + \vec{T} &= m\vec{a} \\ 0 + N\cos\phi - T\sin\phi &= -m\omega^2(L-h)\sin\phi \qquad \text{según } \hat{r} \qquad (1) \\ -mg + N\sin\phi + T\cos\phi &= 0 \qquad \text{según } \hat{z} \qquad (2) \end{aligned}$$

• Utilizar Ec. 2 para despejar $\boldsymbol{N}$ ($\boldsymbol{N = (mg - T\cos\phi)/\sin\phi}$) y sustituir en 2:

$$\left(\frac{mg - T\cos\phi}{\sin\phi}\right)\cos\phi - T\sin\phi = -m\omega^2(L-h)\sin\phi$$

• Limpiando:

$$T - mg\cos\phi = m\omega^2(L-h)\sin^2\phi \qquad (3)$$

• Despejamos $\boldsymbol{h}$ sustituyendo valor de $\boldsymbol{T}$:

$$h = L - \frac{Mg/2 - mg\cos\phi}{m\omega^2\sin^2\phi}$$

• Condiciones para $\boldsymbol{M}$. Notar que los cubos deben estar en contacto con el cono. Por lo tanto la fza normal debe ser positiva: $\boldsymbol{N \geq 0}$. De la solución para $\boldsymbol{N}$ se tiene

$$N = (mg - T\cos\phi)/\sin\phi \geq 0 \quad \rightarrow \quad mg \geq T\cos\phi \quad \rightarrow \quad M \leq m/\cos\phi$$

• Hay otra condición que emana de Ec. 3: $\boldsymbol{(L-h) \geq 0 \Rightarrow}$

$$T - mg\cos\phi = m\omega^2(L-h)\sin^2\phi \geq 0 \quad \rightarrow \quad T - mg\cos\phi \geq 0 \quad \rightarrow \quad M \geq m\cos\phi$$

• Resumimos: $\boldsymbol{m\cos\phi \leq M \leq m/\cos\phi}$
• Tambien notar que $\boldsymbol{h \geq 0}$, por lo tanto

$$h = L - \frac{Mg/2 - mg\cos\phi}{m\omega^2\sin^2\phi} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad L \geq \frac{Mg/2 - mg\cos\phi}{m\omega^2\sin^2\phi} \quad \Rightarrow$$

$$M \leq 2m\left(\left(\frac{\omega^2 L}{g}\right)\sin^2\phi + \cos\phi\right)$$

PUNTUACION: 1Pto determinacion de $\boldsymbol{T = Mg/2}$ + 1Pto DCL correcto para cubos + 1Pto ecuaciones y proyecciones fzas sobre de cubos + 1Pto despeje de $\boldsymbol{h}$ + (1+1)Ptos por cada cota en $\boldsymbol{M}$ (bastan dos!)