Introducción a la Física Fi10a

Ejercicio 23

26 octubre 2004, 1:30 hora

Profesor: Sergio Rica

Auxiliares: Mauricio Cerda, Carlos Orellana y Nicolas Reyes

Sea una cuerda de densidad de masa lineal σ, que está sometida a una tensión τ. Si $c^2 = \frac{\tau}{\sigma}$, entonces

i) La cuerda admite soluciones del tipo onda estacionaria $\zeta(x,t) = \phi(x)\cos(\omega t)$. Para ello muestre que $\phi(x)$ satisface el problema de valores propios (1 pto):

$$T\phi = -\frac{d^2\phi}{dx^2} = k^2\phi$$

ii) Recordando el Movimiento armónico simple, encuentre y la solución general que satisface $\phi(x)$. (1 pto)

iii) Suponga que la cuerda está atada en $x = 0$ y en $x = L$, i.e. $\zeta(x = 0, t) = \zeta(x = L, t) = 0 \quad \forall t$, encuentre los valores y vectores propios (o si prefiere frecuencia y modos normales). (2 ptos)

iv) Encuentre la energía E_n de cada modo. (1 pto)

v) Cuál es el flujo de energía del lado izquierdo al derecho de la cuerda en $x = L/2$ de cada modo? Qué modos transfieren energía ? (1 pto)

Recuerde, la energía es:

$$E = \frac{\sigma}{2}\int_0^L \left[\left(\frac{\partial\zeta}{\partial t}\right)^2 + c^2\left(\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)^2\right] dx,$$

mientras que el flujo es

$$S = \sigma c^2 \frac{\partial\zeta}{\partial x}\frac{\partial\zeta}{\partial t}.$$