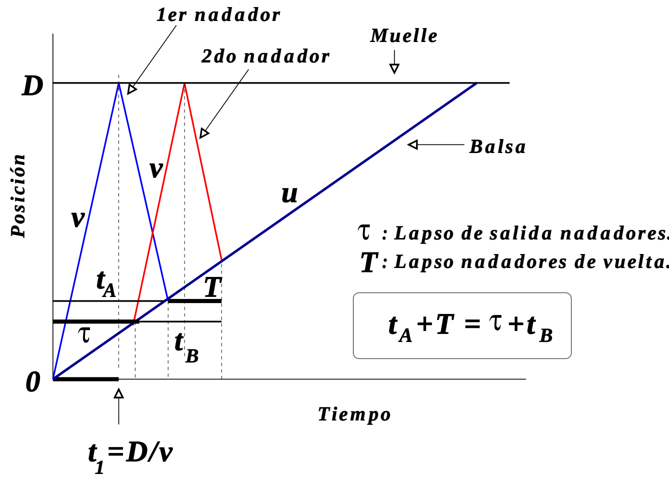
INTRODUCCION A LA FISICA – OTOÑO 2003

Por: H. F. Arellano (julio 28 de 2003)

Departamento de Física, FCFM, Universidad de Chile

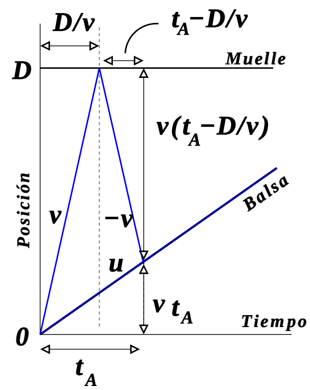
PROBLEMA 1

• Representación gráfica del movimiento. Muelle a distancia D de la balsa desde el instante en que salta el primer nadador.



• De acuerdo al gráfico denotamos:
t_A: Lapso ida-vuelta primer nadador.
t_B: Lapso ida-vuelta segundo nadador.
τ: Lapso de partida entre dos nadadores.
T: Lapso de llegada entre dos nadadores.
Entonces, del gráfico:

$$t_A + T = \tau + t_B \ .$$



• Necesitamos entonces calcular el lapso de ida-vuelta de un nadador cuando parte desde cierta distancia D del muelle.

• Del gráfico se obtiene

$$D = ut_A + v(t_A - \frac{D}{v}) \Rightarrow \boxed{t_A = \frac{2D}{u+v}}$$

• Para calcular t_B cambiamos distancia inicial al muelle: $D \to D - u\tau$, con lo cual

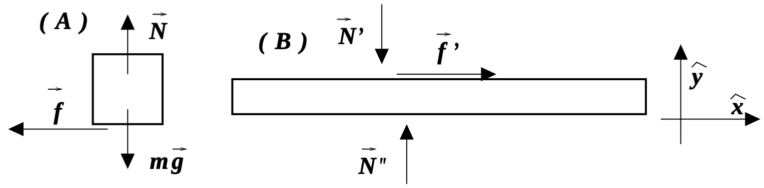
$$\boxed{t_B = \frac{2(D-u\tau)}{u+v}}$$

• Entonces,

$$t_A + T = \tau + t_B \quad \Rightarrow \quad \frac{2D}{u+v} + T = \tau + \frac{2(D-u\tau)}{u+v} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = \frac{v-u}{v+u}\tau}$$

• En el caso $u = 0 \Rightarrow T = \tau$, que es de esperar pues si la balsa está inmóvil los lapsos de partida deben ser los mismos que de llegada.

PUNTUACION:
1Pt: gráfico razonablemente rotulado.
2Pt: Determinación lapso ida-vuelta cualquier nadador.
2Pt: Determinación correcta de T. Descuento proporcional por errores.
1Pt: (VALIDO SOLO SI PARTE A ESTA CORRECTA) discusión razonable del caso descrito.



• Determinamos las aceleración del bloque ($\vec{a}$) y la del tablón ($\vec{b}$).
• Sobre el bloque actúan: Contacto (normal $\vec{N}$ + roce $\vec{f}$) y gravedad ($m\vec{g}$). Newton: $\vec{N}+\vec{f}+m\vec{g}=m\vec{a}$. Proyectando según componentes (y,x) y resolviendo:

$$\left.\begin{array}{ll} y) & N+0-mg=0 \\ x) & 0-f+0=ma_x \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} N=mg \\ \underline{\underline{a_x=-\mu g}} \end{array}\right. \tag{1}$$

• Sobre el tablón actúan: Contacto normal con bloque $\vec{N}'$ (mg); contacto tangencial con bloque $\vec{f}'$ (μmg); gravedad $M\vec{g}$ (Mg) y contacto con el piso $\vec{N}$" (N"). Newton: $\vec{N}'+\vec{f}'+M\vec{g}+\vec{N}" = M\vec{b}$. Proyectando según componentes (y,x) y resolviendo:

$$\left.\begin{array}{ll} y) & -mg+0-Mg+N"=0 \\ x) & +\mu mg+0+0=Mb_x \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} N"=(m+M)g \\ \underline{\underline{b_x=+\mu g\frac{m}{M}}} \end{array}\right. \tag{2}$$

• Con estas aceleraciones determinamos las coordenadas del bloque (x_b) y la punta del tabón (x_T) considerando inicialmente: bloque con rapidez u y tablón detenido. Entonces

$$\begin{aligned} x_b &= 0+ut-\frac{1}{2}\mu g t^2 \\ x_T &= L+0+\frac{1}{2}\mu g\frac{m}{M}t^2 \end{aligned}$$

• Encuentro: $x_b(t)=x_T(t) \Rightarrow$

$$ut-\frac{1}{2}\mu g t^2 = L+\frac{1}{2}\mu g\frac{m}{M}t^2 \quad \Rightarrow \quad \mu g\left(1+\frac{m}{M}\right)t^2-2ut+2L=0$$

Denotando $A=\mu g(1+m/M)$ y resolviendo (y simplificando) el instante $\bar{t}$ de encuentro:

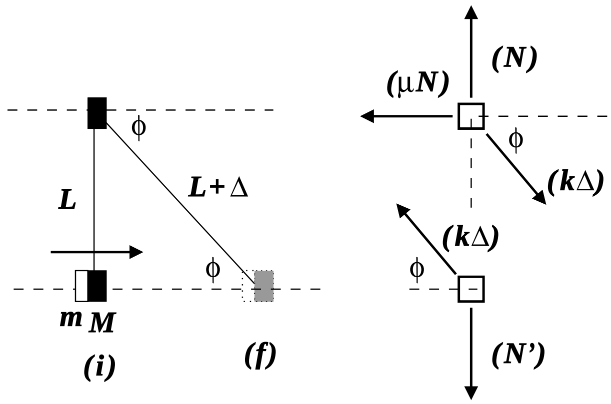
$$\bar{t}=\frac{u\pm\sqrt{u^2-2AL}}{A}$$

De las dos soluciones tomamos la menor de las positivas (primer encuentro a $t>0$). Así, el desplazamiento Δx_T de la punta del tabón es:

$$\Delta x_T=\frac{1}{2}\mu g\frac{m}{M}\bar{t}^2=\frac{\mu g m}{2M}\left\{\frac{u-\sqrt{u^2-2AL}}{A}\right\}^2 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{\Delta x_T=\frac{\mu g m}{MA^2}\left(u^2-AL-u\sqrt{u^2-2AL}\right)}}$$

• La rapidez u mínima posible es para la cual existe un instante de llegada al extremo delantero. Se observa el término dentro de la raiz cuadrada para $\bar{t}$ y exigimos $u^2-2AL=0$, por lo tanto $u^2=2\mu g(1+m/M)L$. Su forma es del tipo $u^2=2a_{rel}L$.

PUNTUACION:
1Pt: aceleración bloque.
2Pt: aceleración tabón.
1Pt: Determinación Δx_T.
1Pt: Bono a la limpieza en resultado Δx_T.
1Pt: (VALIDO SOLO SI PARTE A ESTA CORRECTA) constatar que caso límite no es absurdo.



• Conservación de momentum en la colisión (conjunto sale con rapidez v):

$$mu = (m+M)v \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = \frac{m}{m+M}u} .$$

• Conservación de energía (i) $\rightarrow$ (f), denotando por Δ la elongación del resorte y sustituyendo valor de v en términos de u:

$$\frac{1}{2}(m+M)v^2 = \frac{1}{2}k\Delta^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\Delta^2 = \frac{m^2u^2}{k(m+M)}}$$

• Una vez elongado el resorte se analiza el tirón sobre el anillo superior. La situación es estática. Las fuerzas sobre el anillo superior son: contacto (roce $\vec{f}$ y normal $\vec{N}$) y fuerza elástica del resorte $\vec{f}_e$. Entonces: $\vec{f} + \vec{N} + \vec{f}_e = 0$. Proyecciones según ejes y-x (con ϕ indicado en la figura) e imponiendo condición a punto de resbalar ($f = \mu N$):

$$\left.\begin{array}{ll} y) & 0 + N - k\Delta\sin\phi = 0 \\ x) & -\mu N + 0 + k\Delta\cos\phi = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad \boxed{\mu = \cot\phi} \tag{3}$$

• Hay que relacionar ϕ con Δ (geometría):

$$\sin\phi = \frac{L}{L+\Delta} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\sin\phi} = 1 + \frac{\Delta}{L}$$

• Usando la identidad $1 + \cot^2\phi = 1/\sin^2\phi$, sustituyendo y despejando u:

$$1 + \mu^2 = \left(1 + \frac{\Delta}{L}\right)^2 \quad \Rightarrow \Delta^2 = L^2(\sqrt{1+\mu^2} - 1)^2 \quad \Rightarrow \frac{m^2u^2}{k(m+M)} = L^2(\sqrt{1+\mu^2} - 1)^2$$

$$\Longrightarrow \qquad \boxed{u = \frac{L}{m}\left(\sqrt{1+\mu^2} - 1\right)\sqrt{k(m+M)}}$$

• Cuando $M = 0$ se tiene que $u = L\sqrt{k/m}\left(\sqrt{1+\mu^2} - 1\right)$: a pesar de que la masa de los anillos en los rieles son nulas el roce de los rieles sigue actuando. La condición $\mu = cot\phi$ no depende de las masas involucradas.

PUNTUACION (descuentos proporcionales):
1Pt: conservación de mtum en choque ($\Rightarrow v$).
1,5Pt: conservación de energía <u>después</u> del choque ($\Rightarrow \Delta^2$).
1,5Pt: Estática anillo superior.
1Pt: Obtención de la solución (limpia).
1Pt: (VALIDO SOLO SI PARTE A ESTA CORRECTA) constatar que caso límite no es absurdo.
NOTA MAXIMA 2 si conserva energía en el choque inelástico.