Introducción a la Física - Sección 7
Control 1
Departamento de Física
Escuela de Ingeniería y Ciencias
Universidad de Chile

Autor: Rodrigo Soto

Solución:
P1:
Para resolver el problema, se coloca un sistema de coordenadas con el origen en la rampla, con el eje x hacia la derecha y el eje y hacia arriba.
En la primera parte el movimiento es parabólico. Las condiciones iniciales son:

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 \\ y_0 &= 0 \\ v_{x0} &= V_0\sqrt{2}/2 \\ v_{y0} &= V_0\sqrt{2}/2 \end{aligned}$$

Usando las leyes del movimiento parabólico se encuentra que la posición vertical del auto es:

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 + v_{y0}t - gt^2/2 \\ y(t) &= \frac{V_0\sqrt{2}}{2}t - gt^2/2 \end{aligned}$$

donde el signo $-$ de g se debe a que el eje y se tomó para arriba. El instante en que llega al piso se obtiene de imponer $y = 0$. Hay dos soluciones: $t = 0$ que corresponde al instante inicial y el tiempo buscado que es:

$$t_1 = V_0\sqrt{2}/g$$

El movimiento en x está dado por:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_{x0}t \\ &= \frac{V_0\sqrt{2}}{2}t \end{aligned}$$

de manera que en t_1 la posición horizontal del auto es:

$$x_1 = V_0^2/g$$

Llega al suelo con velocidad horizontal $v_x = v_{x0} = V_0\sqrt{2}/2$ y luego tiene un movimiento uniformemente acelerado con aceleración $\vec{a} = -g/2\hat{\imath}$. Las condiciones iniciales para este movimiento son:

$$\begin{aligned} x_0 &= V_0^2/g \\ v_{x0} &= V_0\sqrt{2}/2 \end{aligned}$$

de manera que su movimiento horizontal se describe por:

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + v_{x0}t + at^2/2 \\ &= V_0^2/g + \frac{V_0\sqrt{2}}{2}t - gt^2/4 \end{aligned}$$

y la velocidad por

$$\begin{aligned} v_x(t) &= v_{x0} + at \\ &= V_0\sqrt{2}/2 - gt/2 \end{aligned}$$

El auto se detiene cuando $v_x = 0$ lo que da un tiempo

$$t_2 = V_0/\sqrt{2}/g$$

que debe ser sumado a t_1. La posición horizontal al momento de detenerse es

$$x_2 = x(t_2) = 3V_0^2/2g$$

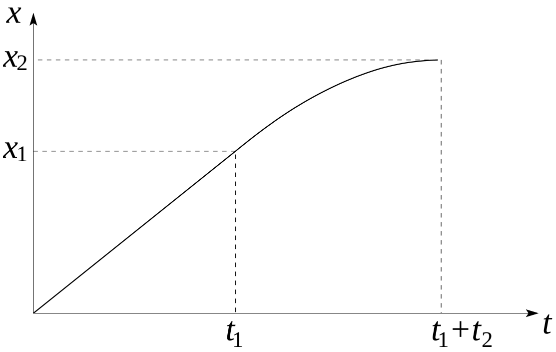
Para obtener valores numéricos se transforma la velocidad al Sistema Internacional. Resulta:

$$V_0 = 144km/h = 40m/s$$

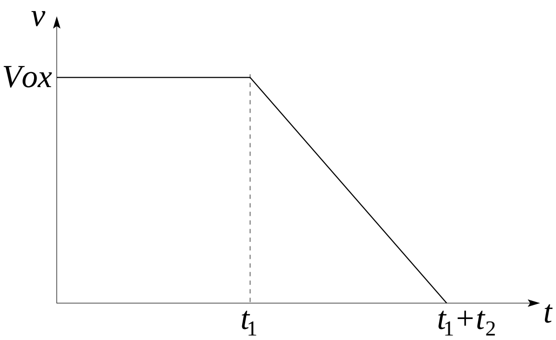
Como se aproxima $g = 10m/s^2$ se obtiene que:

$$\begin{aligned} t_1 &= 4\sqrt{2}m/s \\ x_1 &= 160m \\ t_2 &= 4\sqrt{2}m/s \\ x_2 &= 240m \end{aligned}$$

(a) Para graficar la posición horizontal, se reconoce que hay dos regímenes. Para $t < t_1$ el movimiento es uniforme (velocidad constante) y para $t_1 < t < t_1 + t_2$ es movimiento es uniformemente acelerado, con aceleración negativa. El grafico que incluye todos los hitos relevantes es:



(b) El grafico de la velocidad también se divide en los dos regímenes:



(c) El alcance total del auto está dado por la posición horizontal alcanzada en t_2+t_1. Ya se calculó y resulta ser

$$x_2 = 3V_0^2/2g$$

(d) La aceleración vectorial en la primera parte del movimiento es:

$$\vec{a} = -g\hat{j}$$

y en la segunda parte

$$\vec{a} = -g/2\hat{\imath}$$

Notas de corrección:
Cada parte tiene 1.5 puntos y se bajó puntaje por: error de conversión de unidades, error dimensional, no poner hitos en los gráficos. También se bajó puntaje en la parte (c) si no indicaron explícitamente el resultado tal como se les pedía.

P2:
(a) La rueda gira con velocidad angular ω_0 de manera que su periodo es

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Los rayos están equiespaciados, separados por un ángulo $\theta = 2\pi/6 = \pi/3$ entre sí. Para que la foto salga completamente movida, durante el tiempo de exposición los rayos deben haber alcanzado a girar el ángulo que los separa del sieguiente. Es decir La rueda tiene que haber dado $1/6$ de giro.
Entonces, el mínimo tiempo de exposición para que la foto salga completamente movida es:

$$\begin{aligned} \tau &= T/6 \\ &= \frac{\pi}{3\omega_0} \end{aligned}$$

(b) Se escogen ejes x e y de manera que x es horizontal hacia la derecha e y es vertical hacia arriba. En ese sistema, el centro de la rueda se mueve con velocidad

$$\vec{V}_{\text{centro}} = R\omega_0\,\hat{\imath}$$

La velocidad de los puntos A, B y C respecto al centro es de magnitud constante $V = \omega_0 R$, pero sus direcciones son diferentes, apuntando según el sentido de giro de la rueda (sentido horario). Usando el mismo sistema de ejes, las velocidades de A, B y C respecto al centro de la rueda son:

$$\begin{aligned} \vec{V}_{A/\text{centro}} &= -\omega_0 R\hat{\imath} \\ \vec{V}_{B/\text{centro}} &= \omega_0 R\hat{\imath} \\ \vec{V}_{C/\text{centro}} &= \omega_0 R(-\cos\pi/6\hat{\imath} + \sin\pi/6\hat{j}) \\ &= \omega_0 R(-\sqrt{3}/2\hat{\imath} + 1/2\hat{j}) \end{aligned}$$

donde se usó que $\cos\pi/6 = \sqrt{1-\sin^2\pi/6} = \sqrt{3}/2$.
Las velocidades de estos puntos respecto a un observador exterior se obtienen de las leyes de movimiento relativo:

$$\begin{aligned} \vec{V}_A &= V_{A/\text{centro}} + \vec{V}_{\text{centro}} = 0 \\ \vec{V}_B &= V_{B/\text{centro}} + \vec{V}_{\text{centro}} = 2\omega_0 R\hat{\imath} \\ \vec{V}_C &= V_{C/\text{centro}} + \vec{V}_{\text{centro}} \\ &= \omega_0 R((1-\sqrt{3}/2)\hat{\imath} + 1/2\hat{j}) \end{aligned}$$

P3:
(a) El movimiento de la partícula A ocurre en un plano inclinado de ángulo $\alpha = \pi/4$. En ese caso, el movimiento es 1D uniformemente acelerado con aceleración

$$a = g\sin\alpha = a\sqrt{2}/2$$

La distancia total que debe recorrer la partícula es, por trignometría,

$$d = 2H/\sin\alpha = 2\sqrt{2}H$$

La ley del movimiento uniformemente acelerado es:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + at^2/2$$

como parte del reposo, poniendo el origen en el punto más alto, se obtiene que

$$x(t) = at^2/2$$

El tiempo en llegar al suelo corresponde a cuando $x = d$. Reemplazando el valor de d y de a se obtiene

$$t_A = 2\sqrt{2}\sqrt{H/g}$$

(b) El movimiento de la partícula B tiene dos partes, primero es un movimiento 1D uniformemente acelerado, con aceleración $a = g\sin\beta = g/2$ y luego es un movimiento parabólico.
La primera parte es análoga a la parte (a), salvo que la distancia a recorrer es $d = H/\sin\beta = 2H$ y la aceleración es $a = g/2$. El resultado para el tiempo de caída de esta primera parte es:

$$t_{1B} = 2\sqrt{2}\sqrt{H/g}$$

La velocidad con que ter'mino esta primera parte del moviemiento se obtiene de la ley cinemática

$$\begin{aligned} v(t) &= v_0 + at \\ &= 0 + g/2t \end{aligned}$$

Reemplazando t_{1B} se obtiene que terminó con

$$v_{1B} = \sqrt{2gH}$$

En la segunda parte el movimiento es parabólico y la condición inicial está dada por la proyección de la velocidad v_{1B} en ejes x e y orientados de manera horizontal y vertical. Entonces la condición inicial es

$$\begin{aligned} x_0 &= 0 \\ y_0 &= H \\ v_{x0} &= v_{1B}\cos\beta \\ v_{y0} &= -v_{1B}\sin\beta = -\sqrt{gH/2} \end{aligned}$$

donde el signo $-$ en v_{y0} es porque la partícula cae.
El movimiento vertical es entonces:

$$\begin{aligned} y(t) &= y_0 + v_{y0}t - gt^2/2 \\ &= H - \sqrt{gH/2}t - gt^2/2 \end{aligned}$$

Toca el suelo cuando $y = 0$ lo que da como solución

$$t_{2B} = -\sqrt{\frac{H}{2g}} \pm \sqrt{\frac{5H}{2g}}$$

La solución que se busca es la positiva. Luego

$$t_{2B} = -\sqrt{\frac{H}{2g}} + \sqrt{\frac{5H}{2g}}$$

Finalmente el tiempo total de caida es la suma de los dos tiempos

$$t_B = t_{1B} + t_{2B}$$

(c) Como se obtuvo que $t_A = t_{1B}$ entonces ambas partículas se demoran lo mismo en recorrer los planos inclinados, pero la partícula B debe, además, caer luego en movimiento parabólico. Entonces la partícula A llega primero al suelo.