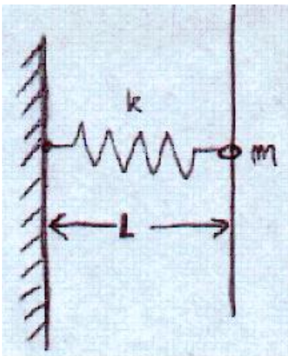
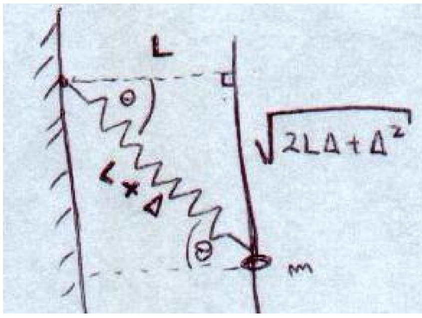
Problemas de Energía

asantis@ing.uchile.cl

20 de mayo de 2006

1.





P1. Un anillo de masa m desliza por una barra vertical sin roce. El anillo tiene atado un resorte de constante elástica k, el cual tiene su otro extremo fijo a una muralla que se encuentra a distancia L de la barra. Si el resorte tiene largo natural nulo y el anillo se suelta inicialmente cuando el resorte está en posición horizontal, determinar la velocidad del anillo cuando llega a su posición de equilibrio.

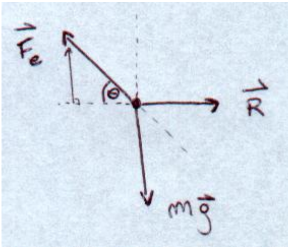
Resolución. No hay fuerzas disipativas (roce) por lo tanto se conserva la energía. Llamemos Δ al estiramiento extra que sufre el resorte al llegar a la posición de equilibrio; la energía inicial del sistema está dada únicamente por el estiramiento L del resorte (largo natural nulo y considerando potencial cero en la horizontal inicial)

$$E_i = \frac{1}{2}kL^2 \tag{1}$$

La energía total entonces del anillo cuando este pasa por su posición de equilibrio está dada por la velocidad que lleve en ese instante, la altura bajo el nivel de potencial cero (negativa) y el nuevo estiramiento $L+\Delta$ del resorte

$$E_{eq} = \frac{1}{2}mv_{eq}^2 - mg\sqrt{\Delta^2 + 2L\Delta} + \frac{1}{2}k(L+\Delta)^2 \tag{2}$$

Tenemos 2 incógnitas y una ecuación... Newton!



Del DCL del anillo se obtienen

$$\begin{aligned} F_e \sin\theta - mg &= ma && (3) \\ F_e \cos\theta - R &= 0 && (4) \end{aligned}$$

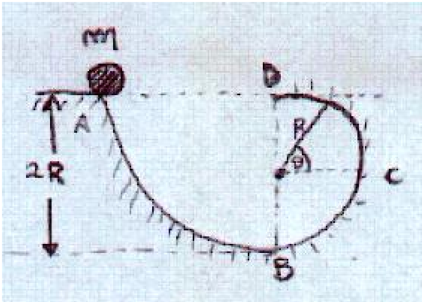
Para encontrar Δ nos sirve (3) imponiendo en la ecuación las condiciones de equilibrio, esto es $a = 0$ y $F_e = -k(L+\Delta)$. Además $\sin\theta = -\frac{\sqrt{\Delta^2+2L\Delta}}{L+\Delta}$ Con esto (3) nos queda

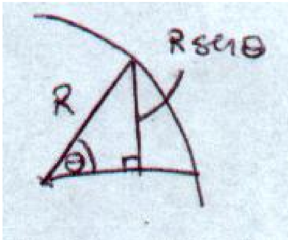
$$\begin{aligned} -k(L+\Delta)\cdot -\frac{\sqrt{\Delta^2+2L\Delta}}{L+\Delta} &= mg && (5) \\ k\sqrt{\Delta^2+2L\Delta} &= mg && (6) \\ \sqrt{\Delta^2+2L\Delta} &= \frac{mg}{k} && (7) \\ \Delta^2 + 2L\Delta - \frac{m^2g^2}{k^2} &= 0 && (8) \\ \Rightarrow \Delta = L\sqrt{1+\frac{m^2g^2}{k^2L^2}} - L & && (9) \end{aligned}$$

Asi entonces igualando las energías, reemplazando el valor de Δ y ocupando (7)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}kL^2 &= \frac{1}{2}mv_{eq}^2 - mg\cdot\frac{mg}{k} + \frac{1}{2}k\left(L\sqrt{1+\frac{m^2g^2}{k^2L^2}}\right)^2 \\ kL^2 &= mv_{eq}^2 - 2\frac{m^2g^2}{k} + kL^2 + \frac{m^2g^2}{k} \\ \frac{m^2g^2}{k} &= mv_{eq}^2 \\ \Rightarrow v_{eq} &= g\sqrt{\frac{m}{k}} \end{aligned}$$

2.



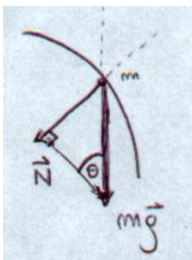


P2. Considere el camino de la figura. El trayecto BD corresponde a un semicírculo de radio R. El punto A se encuentra a una altura 2R respecto al punto B en donde se encuentra una masa m que se deja caer con velocidad inicial nula. No hay fuerzas de fricción.
a) Determinar la posición de la partícula en donde se despega de la superficie.
b) Determinar la velocidad en dicho punto.

Resolución. Nos piden la posición en que se despega, en otras palabras el ángulo θ para el cual la masa pierde contacto con la superficie (normal nula). Como no hay roce conservamos energía.
Supongamos nuestro potencial gravitatorio nulo al nivel del punto B y sabemos que la masa parte en A en reposo, luego

$$E_A = mg(2R) = 2mgR \tag{10}$$

Por asuntos de sencillez e intuición, hacemos $\theta = 0$ en el punto C y positivo en el sentido anti-horario. Como queremos imponer en algún momento que la normal sea cero (condición de despegue), entonces debemos tener una ecuación donde esté metida la normal... Newton!



Del DCL de la masa en la mitad superior de la semi-esfera se obtienen

$$\begin{aligned} N + mg\sin\theta &= ma_c & (11) \\ -mg\cos\theta &= ma_t & (12) \end{aligned}$$

En donde a_c es la aceleración centrípeta debido al movimiento circunferencial que está sometida la masa en el trayecto BD; a_t aceleración tangencial. Claramente nos sirve (11), por lo que imponiendo N = 0 y $a_c = \frac{v_d^2}{R}$

$$gR\sin\theta_d = v_d^2 \tag{13}$$

v_d*: velocidad de despegue*
θ_d*: ángulo de despegue*

Para encontrar θ_d necesitamos v_d y viceversa. Entonces nos acordamos que dejamos un tema pendiente con la conservación de energía. Convenientemente consideramos el instante preciso en que la partícula se despega, esto es

$$E_d = \frac{1}{2}mv_d^2 + mg(R + R\sin\theta_d) \tag{14}$$

Con $R + R\sin\theta_d$ la altura a la que se despega la masa.

Se conserva la energía...

$$\begin{aligned}
E_A &= E_d \\
2mgR &= \frac{1}{2}mv_d^2 + mg(R + R\sin\theta_d) \\
4mgR &= mv_d^2 + 2mgR + 2mgR\sin\theta_d \\
2gR(1-\sin\theta_d) &= v_d^2 \\
2gR(1-\sin\theta_d) &= gR\sin\theta_d \Leftarrow (13) \\
2 - 2\sin\theta_d &= \sin\theta_d \\
\frac{2}{3} &= \sin\theta_d \\
\Rightarrow \theta_d &= \arcsin\frac{2}{3} \\
\Rightarrow v_d &= \sqrt{\frac{2}{3}gR}
\end{aligned}$$