Momentun angular, torque y gravitación

asantis@ing.uchile.cl

11 de agosto de 2006

P1 (Problema N°100, guia 17 Prof. Sergio Rica 2005)

i) Muestre que un sistema de dos partículas que interactuan entre ellas y que están en presencia de un campo de gravedad uniforme, como el de la superficie terrestre, el torque neto en torno del centro de masas es cero. Luego el momentum angular es conservado.

Usando lo anterior, sean dos masas iguales unidas por una barra muy rígida de largo l; ambas masas caen desde el reposo desde una misma altura h.

ii) Muestre que el sistema no gira, que las velocidades de las partículas y del centro de masa al llegar son todas iguales a $\sqrt{2gh}$.

Considere, ahora que ambas masas rebotan en suelos de diferentes propiedades tal que el coeficiente de restitución de la primera masa es r_1 y el de la segunda r_2. (Recuerden que el coeficiente derestitución mide la pérdida de energía en una colisión y se define como la razón entre las velocidades relativas entre dos particulas -suelo y masa- despues y antes, i.e.$v_{rel}^{+} = r_1 v_{rel}^{-}$.)

iii) Calcule la altura h tal que una vez rebotado el sitema de medio giro antes de volver a caer.

iv) Idem. pero un giro, $1\frac{1}{2}$ giro, 2 giros, ...

Resolución:

i) La única fuerza externa, según enunciado es la gravedad, luego

$$\overrightarrow{f_i}^{ext} = m_i \overrightarrow{g} = -m_i g \widehat{k} \quad i = 1, 2 \tag{1}$$

Por definción, el torque es la suma del producto cruz entre la posición de cada partícula i ($\overrightarrow{r_i}$) y la fuerza externa ejercida sobre la partícula i ($\overrightarrow{f_i}^{ext}$). Luego para nuestro caso

$$\tau = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{r_i} \times \overrightarrow{f_i}^{ext} \Rightarrow \tau = \sum_{i=1}^{2} \overrightarrow{r_i} \times \overrightarrow{f_i}^{ext} = \overrightarrow{r_1} \times m_1 \overrightarrow{g} + \overrightarrow{r_2} \times m_2 \overrightarrow{g} \tag{2}$$

Si $\overrightarrow{\rho_i}$ es el vector posición de la partícula i respecto del centro de masas entonces el torque respecto al centro de masas es

$$\tau = \overrightarrow{\rho_1} \times (m_1 \overrightarrow{g}) + \overrightarrow{\rho_2} \times (m_2 \overrightarrow{g}) = (\overrightarrow{\rho_1} m_1) \times \overrightarrow{g} + (\overrightarrow{\rho_2} m_2) \times \overrightarrow{g}$$

$$\Rightarrow \tau = (\overrightarrow{\rho_1} m_1 + \overrightarrow{\rho_2} m_2) \times \overrightarrow{g} \tag{3}$$

Entonces solo nos falta demostrar que $(\overrightarrow{\rho_1} m_1 + \overrightarrow{\rho_2} m_2) = 0$. Para esto recordemos que el vector posición del centro de masas $\overrightarrow{R_G}$ se define como

$$\overrightarrow{R_G} = \frac{m_1 \overrightarrow{r_1} + m_2 \overrightarrow{r_2}}{m_1 + m_2}$$

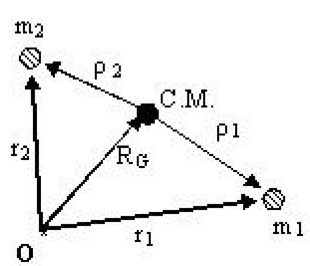
lo que implica que

$$m_1 \overrightarrow{R_G} + m_2 \overrightarrow{R_G} = m_1 \overrightarrow{r_1} + m_2 \overrightarrow{r_2} \tag{4}$$

Ahora, se cumple que

$$\overrightarrow{r_i} = \overrightarrow{R_G} + \overrightarrow{\rho_i} \quad i = 1, 2 \tag{5}$$

Lo que se entiende como muestra la siguiente figura:



Luego multiplicando (4) por m_i

$$m_i \overrightarrow{r_i} = m_i \overrightarrow{R_G} + m_i \overrightarrow{\rho_i} \quad i = 1, 2$$

$$\Rightarrow m_1 \overrightarrow{r_1} = m_1 \overrightarrow{R_G} + m_1 \overrightarrow{\rho_1} \tag{6}$$

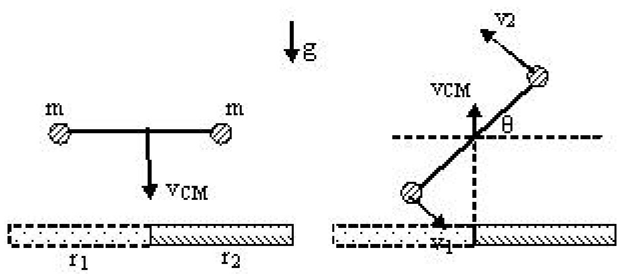
$$\Rightarrow m_2 \overrightarrow{r_2} = m_2 \overrightarrow{R_G} + m_2 \overrightarrow{\rho_2} \tag{7}$$

con lo que finalmente sumando (6) y (7)

$$m_1\overrightarrow{r_1} + m_2\overrightarrow{r_2} = m_1\overrightarrow{R_G} + m_2\overrightarrow{R_G} + (m_1\overrightarrow{\rho_1} + m_2\overrightarrow{\rho_2})$$

$$\Rightarrow por\ (4)\ \ 0 = (m_1\overrightarrow{\rho_1} + m_2\overrightarrow{\rho_2}) \tag{8}$$

ii) Como la única fuerza externa es la gravedad, no existe torque sobre el sistema y luego el momentum angular es conservado, lo que provoca que si su estado inicial era reposo, entonces mientras no sea perturbado por otras fuerzas externas, este sistema no rotará. Ahora como ambas masas parten de una misma altura h, quiere decir que la disposición de la barra inicialmente (y por ende en todo su "vuelo") respecto al suelo es horizontal, por lo que por simple cinemática cada masa, que cae en caída libre de una altura h, y el centro de masa llegan al suelo con velocidad $\sqrt{2gh}$.



iii) Sea $v_o = \sqrt{2gh}$ la velocidad con que llegan las masas al suelo. Inmediatamente después de la colisión con el suelo $v_1 = r_1 v_o$ y $v_2 = r_2 v_o$. (La partícula 1 es la izquierda y la 2 es la derecha). Como las masas son iguales, el centro de masa se encuentra en el punto medio de la barra ($\frac{l}{2}$). Luego el momentum angular del sistema inmediatamente después de rebotar es

$$L = m\frac{l}{2}r_2 v_o - m\frac{l}{2}r_1 v_o = \frac{mlv_o}{2}(r_2 - r_1) \tag{9}$$

La velocidad del centro de masa está dada por

$$v_{CM} = \frac{mr_1v_o + mr_2v_o}{2m} = \frac{v_o}{2}(r_1 + r_2)$$

Por cinemática el tiempo que demora le barra en subir y bajar es $t^* = \frac{v_o}{g}(r_1 + r_2)$. Entonces recordando que $L = I\dot{\theta} = 2m(\frac{l}{2})^2\dot{\theta}$

$$\Rightarrow \dot{\theta} = \frac{2L}{ml^2} = cte \ \ \Rightarrow \ \ \dot{\theta} = \theta$$

$$\Rightarrow \frac{2L}{ml^2}t^* = \pi N \tag{10}$$

En (10), se dijo que para t^* que el ángulo θ tome el valor $\theta^* = \pi N$, es decir, que la barra en t^*de $\frac{N}{2}$ vueltas.

$$(10) \Rightarrow \frac{2}{ml^2} \cdot \frac{mlv_o}{2}(r_2 - r_1) \cdot \frac{v_o}{g}(r_1 + r_2) = \pi N$$

$$\frac{v_o^2}{gl}(r_1^2 - r_2^2) = \pi N \;\Rightarrow\; 2gh = \frac{\pi N gl}{r_1^2 - r_2^2}$$

$$\Rightarrow\; h = \pi N \frac{l}{2(r_2^2 - r_1^2)}$$

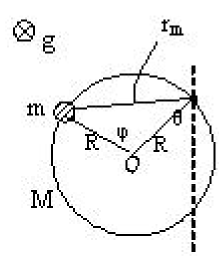
Finalmente, para medio giro solo basta imponer $N = 1$.

P2. (Problema N°103, guia 17 Prof. Sergio Rica 2005)

Un anillo de masa M y radio R descansa sobre una mesa horizontal sin roce. Está pivoteado sobre la mesa a través de un eje (vertical) que pasa por el borde del anillo. Un insecto de masa m camina alrededor del anillo con velocidad $v_o = cte$, partiendo desde el pivote.

i) Encuentre la velocidad angular del anillo cuando el insecto va pasando por la mitad del anillo (por el punto opuesto al punto de partida).

ii) Haga lo propio cuando el insecto está de regreso en el punto de partida



(visto desde arriba)

Resolución: $||\cdot||$: es la norma o módulo de un vector.

i) Inicialmente, en el dibujo $\theta = 0$ y $\varphi = 0$. Si consideramos el pivote como el origen de coordenadas, entonces $\overrightarrow{r_M}$ es el vector posición del centro de masa del anillo y $\overrightarrow{r_m}$ del bicho, cumpliéndose por la geometría del problema que $||\overrightarrow{r_M}|| = R$ y $||\overrightarrow{r_m}|| = r_m = 2R\sin(\frac{\varphi}{2})$. Como inicialmente $r_m = 0$, entonces

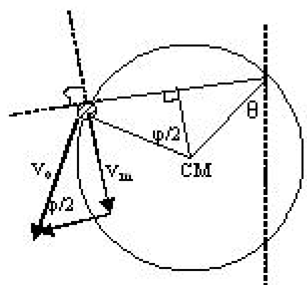
$$||\overrightarrow{L}|| = L_o = 0 \tag{11}$$

para todo instante de tiempo. Busquemos una expresión para L tal que sea función de φ y $\dot{\theta}$para despues igualar a cero (por conservación del momentum angular del sistema), despejar $\dot{\theta}(\varphi)$ e imponer $\varphi = \pi$ que es donde el bicho se encuentra en el punto opuesto al pivote. La expresión general del momentum angular de este sistema para todo instante de tiempo viene dada por

$$||\overrightarrow{L}|| = L_o = I_{anillo}\dot{\theta} + ||\overrightarrow{r_m} \times \overrightarrow{p_m}|| = MR^2\dot{\theta} + mr_m(v_m + r_m\dot{\theta}) \qquad (12)$$

v_m: módulo de la componenente perpendicular a $\overrightarrow{r_m}$ de $\overrightarrow{v_o}$
$r_m\dot{\theta}$: rapidez tangencial a la trayectoria del bicho.

Eventualmente, en (12) se debería poner $(v_m - r_m\dot{\theta})$, pero da lo mismo pues si hacemos bien los calculos el resultado final nos dirá el signo de $\dot{\theta}$, que para nuetro caso debiera ser negativo ya que hemos tomado positivo el sentido en que avanza el bicho. Busquemos v_m, para esto veamos el siguiente "mono":



Así, $v_m = v_o \sin(\frac{\varphi}{2})$ con lo que reemplazando esto en (12) obtenemos que

$$MR^2\dot{\theta} + mr_m(v_o \sin(\frac{\varphi}{2}) + r_m\dot{\theta}) = 0$$

$$\Leftrightarrow MR^2\dot{\theta} + 2mRv_o \sin^2(\frac{\varphi}{2}) + 4mR^2 \sin^2(\frac{\varphi}{2})\dot{\theta} = 0$$

$$(MR^2 + 4mR^2 \sin^2(\frac{\varphi}{2}))\dot{\theta} = -2mRv_o \sin^2(\frac{\varphi}{2})$$

$$\Rightarrow \dot{\theta}(\varphi) = -\frac{2v_o}{R}(\frac{m \sin^2(\frac{\varphi}{2})}{M + 4m \sin^2(\frac{\varphi}{2})})$$

$$\Rightarrow \omega|_{\varphi=\pi} = \dot{\theta}(\pi) = -\frac{2v_o}{R}(\frac{m}{M + 4m})$$

ii) Cuando está de regreso en el pivote $\varphi = 2\pi \Rightarrow \omega|_{\varphi=2\pi} = \dot{\theta}(2\pi) = 0$. Tiene sentido puesto que $r_m = 0$ con lo que la ecuación de momentum angular queda $L_o = MR^2\dot{\theta} = 0 \Rightarrow \dot{\theta} = 0$