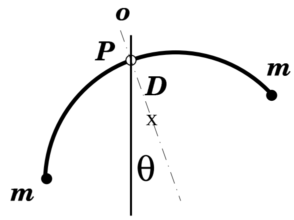
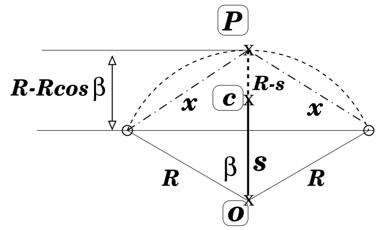
SOLUCION CONTROL No 5
INTRODUCCION A LA FISICA – PRIMAVERA 2002
Por: H. F. A. (24 de octubre de 2002)
Departamento de Física, FCFM, Universidad de Chile

PROBLEMA 1





• Aplicamos $\vec{\tau}_P = I_P \vec{\alpha}$. Si D es la distancia de P al centro de masas (CM) del arco con las dos masas, entonces tenemos (clases):

$$-(M+2m)gD\sin\theta = I_P\ddot{\theta} \qquad \rightarrow \qquad \ddot{\theta} + \frac{(M+2m)gD}{I_P}\theta = 0 \qquad (\theta \text{ pequeño})$$

• Así la frecuencia para pequeñas oscilaciones está dada por:

$$\omega^2 = \frac{(M+2m)gD}{I_P} \tag{1}$$

• Buscamos D, la distancia del CM a P a lo largo de la línea de simetría. Sean d_a y d_b las distancias a P de los CM del arco y bolitas respectivamente. Entonces

$$D = \frac{Md_a + (2m)d_b}{2m+M} = \frac{M(R-s)+2m(R-R\cos\beta)}{2m+M} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{D = \frac{M(R-s)+2mR(1-\cos\beta)}{(2m+M)}}$$

• Necesitamos el momento de inercia $I_P = I_a + I_b$, con I_a e I_b los momentos de inercia con respecto a P del arco y bolitas respectivamente.
• Para el arco es directo observar que su momento de inercia con respecto a o (centro del círculo) es MR^2. Para obtener I_a (arco) nos valemos de Steiner, denotando por I_c su momento de inercia con respecto al CM (desconocido),

$$\begin{aligned} I_o &= I_c + Ms^2 \\ I_a &= I_c + M(R-s)^2 \ . \end{aligned} \tag{2}$$

Con ésto

$$I_a - I_o = M(R-s)^2 - Ms^2 \qquad \rightarrow \qquad \boxed{I_a = 2MR(R-s)} \tag{3}$$

• Para las bolitas es directo ver que la distancia de cada una a P es $x = 2R\sin(\beta/2)$. Así,

$$I_b = 2mx^2 \qquad \rightarrow \qquad \boxed{I_b = 8mR^2\sin^2\beta/2} \tag{4}$$

• Sustituyendo valores de D, I_a (Ec. 3) e I_b (Ec. 4) en Ec. (1) para ω^2 se obtiene:

$$\omega^2 = \frac{(M+2m)gD}{I_a+I_b} \qquad \rightarrow \qquad \omega^2 = g\,\frac{M(R-s)+2mR(1-\cos\beta)}{2MR(R-s)+8mR^2\sin^2\beta/2}; .$$

• Este resultado es completo, con $s = R\cos\beta/\beta$. Sin embargo a esta expresión se le puede sacar un poco mas de lustre si se considera la identidad: $(1 - \cos\beta)/2 = \sin^2\beta/2$. Sustituyendo y factorizando se obtiene (!):

$$\boxed{\omega^2 = \frac{g}{2R}}\,,$$

independiente de M y m.

PUNTUACION:
El problema se puede abordar por energía o por torques:

$\boxed{\text{1Pt}}$ identificación correcta de ω^2

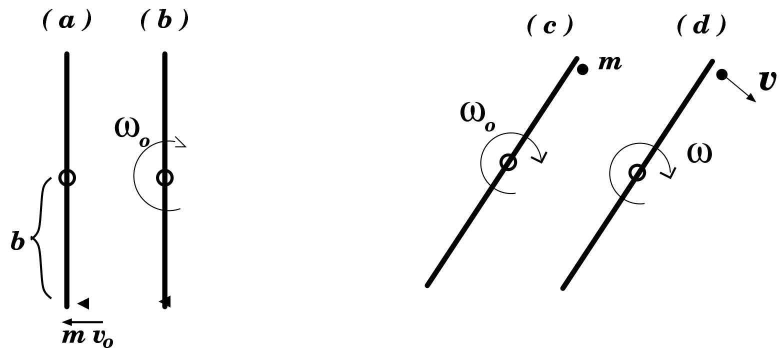
$\boxed{\text{1Pt}}$ cálculo correcto de D

$\boxed{\text{2Pt}}$ cálculo correcto de $I_a + I_b$

$\boxed{\text{1Pt}}$ determinación simplificada de ω^2

$\boxed{\text{1Pt}}$ verificación y comentarios de casos límites.

PROBLEMA 2



• En proceso (a⟶b) se conserva el momentum angular con respecto a $\boldsymbol{P}$. Sea $\omega_\circ$ la velocidad adquirida por la barra una vez que se incrusta el dardo. Así, la velocidad del dardo incrustado es $b\omega_\circ$. Tomando dirección de rotación positiva en el sentido de rotación de los punteros del reloj, y denotando por I_o el momento de inercia de la barra con respecto a su centro,

$$L_a = L_b \qquad \to \qquad b(mv_\circ) + 0 = b(mb\omega_\circ) + I_\circ\omega_\circ \qquad \Rightarrow \qquad \omega_\circ = \frac{bmv_\circ}{I_\circ + mb^2} \tag{5}$$

• En proceso (c⟶d) se conservan el momentum angular con respecto a $\boldsymbol{P}$ y la energía cinética. Para el mtum. angular c/r a $\boldsymbol{P}$, (denotando por $I_1 \equiv I_\circ + mb^2$ para la varilla con dardo):

$$L_c = L_d \qquad \to \qquad I_1\omega_\circ + 0 = I_1\omega + b(mv) \qquad \to \qquad I_1(\omega_\circ - \omega) = bmv \tag{6}$$

• Para la energía cinética,

$$K_c = K_d \qquad \to \qquad \frac{1}{2}I_1\omega_\circ^2 + 0 = \frac{1}{2}I_1\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 \qquad \to \qquad I_1(\omega_\circ^2 - \omega^2) = mv^2 \tag{7}$$

• La ecuación anterior se puede escribir $I_1(\omega_\circ - \omega)(\omega_\circ + \omega) = mv^2$, que combinada con Ec. (6) nos da

$$mvb(\omega_\circ + \omega) = mv^2 \qquad \Rightarrow \qquad (\omega_\circ + \omega)b = v \tag{8}$$

• Para obtener v combinamos Ecs. (6) y (8):

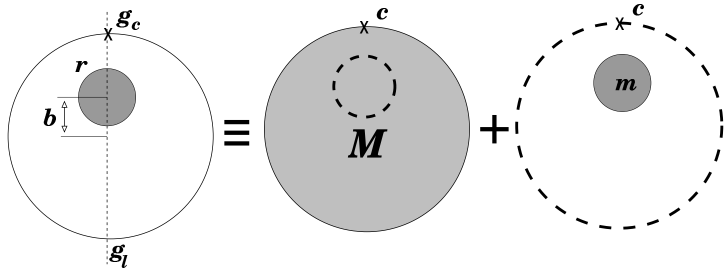
$$(\omega_\circ - \omega) + (\omega_\circ + \omega) = bmv/I_1 + v/b \qquad \Rightarrow \qquad v = \frac{2\omega_\circ}{bm/I_1 + 1/b}\,.$$

Sustituyendo valores de $\omega_\circ$ y de I_1, tomando $b = L/2$, y considerando $I_\circ = ML^2/12$

$$v = \frac{2\omega_\circ}{bm/I_1 + 1/b} \qquad \Rightarrow \qquad v = v_\circ\frac{m}{m + M/6}$$

PUNTUACION:
NOTA MAXIMA 2.0 en caso de aplicar conservaciones que no correspondan
$\boxed{\text{1Pt}}$ determinación de $\omega_\circ$
+ $\boxed{\text{1.5Pt}}$ conservación correcta $L_c = L_d$
+ $\boxed{\text{1.5Pt}}$ conservación correcta $K_c = K_d$
+ $\boxed{\text{1Pt}}$ expresión de v en términos de cantidades conocidas
+ $\boxed{\text{1Pt}}$ resultado limpio.

PROBLEMA 3



• Podemos aplicar el principio de superposición considerando $\mathbf{\Pi}$ como dos esferas uniformes, una de radio $\boldsymbol{R}$, masa $\boldsymbol{M}$ y densidad $\boldsymbol{D_\circ}$, y la otra más pequeña de radio $\boldsymbol{r}$, masa $\boldsymbol{m}$ y densidad $\boldsymbol{\lambda D_\circ}$. Así la aceleración de gravedad en el punto más cercano (c) se debe a ambas esferas y es:

$$g_c = \frac{GM}{R^2} + \frac{Gm}{(R-b)^2} \ ,$$

con las masas dadas por las densidades respectivas:

$$M = \frac{4}{3}\pi R^3 D_\circ \ ; \qquad\qquad m = \frac{4}{3}\pi r^3 \lambda D_\circ$$

• Sustituyendo en expresión para g_c:

$$g_c = G\frac{4}{3}\pi D_\circ \left(\frac{R^3}{R^2} + \frac{\lambda r^3}{(R-b)^2} \right) = G\frac{4}{3}\pi D_\circ \left(R + \frac{\lambda r^3}{(R-b)^2} \right) \ ,$$

• Claramente el resultado para g_l se obtiene intercambiando $R-b$ por $R+b$. Con ello:

$$g_l = G\frac{4}{3}\pi D_\circ \left(R + \frac{\lambda r^3}{(R+b)^2} \right) \ .$$

• El cuociente pedido:

$$C = \frac{\left(R + \frac{\lambda r^3}{(R-b)^2}\right) - \left(R + \frac{\lambda r^3}{(R+b)^2}\right)}{\left(R + \frac{\lambda r^3}{(R-b)^2}\right) + \left(R + \frac{\lambda r^3}{(R+b)^2}\right)} = \frac{\left(\frac{\lambda r^3}{(R-b)^2} - \frac{\lambda r^3}{(R+b)^2}\right)}{\left(2R + \frac{\lambda r^3}{(R-b)^2} + \frac{\lambda r^3}{(R+b)^2}\right)}$$

• Limpiando un poco...

$$\begin{aligned} C &= \lambda r^3 \frac{(R+b)^2 - (R-b)^2}{2R(R-b)^2(R+b)^2 + \lambda r^3 (R+b)^2 + \lambda r^3 (R-b)^2} \\ &= \lambda r^3 \frac{4Rb}{2R(R^2-b^2)^2 + 2\lambda r^3 (R^2+b^2)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{C = \frac{2\lambda r^3 Rb}{R(R^2-b^2)^2 + \lambda r^3 (R^2+b^2)}} \end{aligned}$$

• Cuando $\lambda = 0$ y $b = 0$ se obtiene $g_c = g_l$. En el primer caso es representa una densidad del metal igual a la de la arena $\Rightarrow$ el metal no es perceptible desde el punto de vista gravitacional. De igual modo, si el metal se ubica en el centro (b=0) no se observaría diferencia el la gravedad de los polos.

Este problema se puede resolver de múltiples formas. Estas son consideraciones MUY generales respecto de la puntuación:

1Pt determinación de masas de las componentes
+ 1Pt gravedad debido a esfera mayor
+ 1Pt gravedad debido a esfera menor
+ 1Pt expresión completa (pero no limpia) de C
+ 1Pt expresión limpia de C
+ 1Pt verificación y discusión adecuada para los casos límites