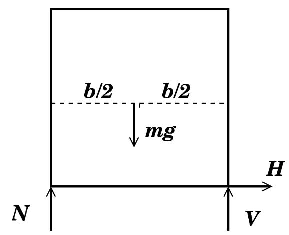
SOLUCION CONTROL No 3
INTRODUCCION A LA FISICA – PRIMAVERA 2003

Por: H. F. Arellano (23 de octubre de 2003)

Departamento de Física, FCFM, Universidad de Chile

PROBLEMA 1



SINOPSIS: Para la determinación del movimiento del oscilador consideramos 'placa+cubo' un solo cuerpo de masa $M+m$. Luego analizamos separadamente el cubo el cual está sujeto a las ecuaciones $\vec{F} = m\vec{a}$ (mov. del c.m.) y $\tau_G = I_G\alpha = 0$ (no hay rotación en torno al c.m.). Usaremos la variable x para la posición del extremo móvil del resorte con respecto a su posición de equilibrio (relajado).

• Para el movimiento del par 'placa+cubo' establecemos

$$-kx = (M+m)\ddot{x} \qquad \Rightarrow \qquad \ddot{x} = -\frac{kx}{m+M}$$

• Estudiamos la placa considerando su peso ($m\vec{g}$), normal en P ($\vec{N}$), reacción vertical en B ($\vec{V}$) y horizontal ($\vec{H}$). Planteamos $m\vec{g} + \vec{N} + \vec{V} + \vec{H} = m\vec{a}$. Proyectamos por componentes:

$$\begin{aligned} \text{según x)} \qquad 0+0+0+H &= m\ddot{x} \qquad \Rightarrow \boxed{H = m\ddot{x}} \\ \text{según y)} \qquad -mg+N+V+0 &= 0 \qquad \Rightarrow \boxed{V+N = mg} \end{aligned}$$

• Para los torques con respecto a G (positivos en el sentido antihorario):

$$\tau(m\vec{g}) + \tau(\vec{N}) + \tau(\vec{V}) + \tau(\vec{H}) = 0 \Rightarrow 0 - \frac{b}{2}N + \frac{b}{2}V + \frac{b}{2}H = 0 \Rightarrow \boxed{N - V = H}$$

• Buscamos N. Para ello utilizamos las dos últimas ecuaciones enmarcadas y obtenemos $2N = mg + H$. De la segunda ecuación obtenemos $2N = mg + m\ddot{x}$. De la primera ecuación sustituimos $\ddot{x}$ y se obtiene lo buscado:

$$\boxed{N(x) = \frac{m}{2}\left(g - \frac{kx}{m+M}\right)}$$

• Exigimos que $N \geq 0$ siempre. Cuando M=0 ésto implica $g - (k/m)x_{\max} \geq 0$, o sea $x_{\max} \leq mg/k$. La pérdida de contacto (N=0) ocurre cuando el torque de V(=mg) compensa el torque de H(=xk/m). Como la energía en este caso está relacionada con $x_{\max}$ *via* $kx_{\max}^2/2 = E$. Entonces, el resultado anterior se reduce a

$$E \leq \frac{m^2g^2}{2k}\ .$$

PUNTUACION: (discriminar hasta medio punto)

1Pt: ecuación del mov. del sistema 'placa+cubo'

1Pt: fuerza horizontal H en función de la posición

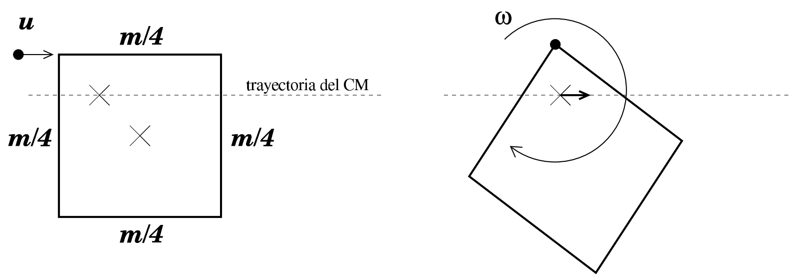
1Pt: balance de fuerzas verticales

1Pt: torques correctos

1Pt: determinación de N(x)

1Pt: (VALIDO SOLO SI PARTE A ESTA CORRECTA) obtención de resultado $E \leq m^2g^2/2k$.

PROBLEMA 2



SINOPSIS: La colisión conserva momentum y momentum angular. Al quedar adherido el dardo la energía cinética no es conservada. Puesto que las masas del dardo y del marco son las mismas, entonces el centro de masas del sistema con el dardo incrustado se ubica en la diagonal del marco, a una distancia $s \equiv L\sqrt{2}/4$ del dardo incrustado.

• Para el cálculo del momentum angular necesitaremos el momento de inercia del sistema compuesto con respecto a su centro de masas. El momento de inercia del marco c/r a su centro C es (por Steiner):

$$I_C = 4\left[\frac{m}{4} \times \frac{L^2}{12} + \frac{m}{4}\left(\frac{L}{2}\right)^2\right] \quad \rightarrow \quad I_C = \frac{mL^2}{3}.$$

Calculamos ahora el momento de inercia del sistema 'marco+dardo' con respecto a su centro de masas G (usar Steiner):

$$I_G = I_{dardo} + I_{marco} = ms^2 + (\frac{mL^2}{3} + ms^2) \Rightarrow \boxed{I_G = \frac{7}{12}mL^2}$$

• Conservamos momentum lineal del choque. Denotemos V la componente $(\rightarrow)$ de la velocidad del centro de masas del sistema compuesto. Entonces $P_{antes} = P_{desp}$ conlleva a

$$mu = (m+m)V \quad \Rightarrow \quad \boxed{V = u/2}$$

• Conservamos momentum angular, el cual es conveniente calcular con respecto a un punto a lo largo de la la trayectoria del centro de masas del sistema (para que el término $\vec{R} \times \vec{P}$ sea nulo). Así, $\vec{L}_{antes} = \vec{L}_{desp} \rightarrow \vec{L}_{dardo} = \vec{R} \times \vec{P} + \vec{L}_G$. Explícitamente:

$$(mu)s\cos(45°) = 0 + I_G\omega \qquad \rightarrow \qquad \omega = \frac{mus}{\sqrt{2}I_G}$$

Sustituyendo valores de s e I_G y simplificando,

$$\omega = \frac{muL\sqrt{2}}{4\sqrt{2}(7mL^2/12)} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\omega = \frac{3u}{7L}}$$

• La energía antes es $mu^2/2$. La energía cinética K_f después del choque es

$$K_f = \frac{1}{2}(m+m)\left(\frac{u}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2 = \frac{17}{56}mu^2 \Rightarrow \boxed{K_f - K_i = -\frac{11}{56}mu^2 \leq 0}$$

AUXILIARES: verifcar este resultado antes de corregir

PUNTUACION: (discriminar hasta medio punto)

NOTA MAXIMA 2 si conserva energía !!

1Pt: cálculo correcto de I_C

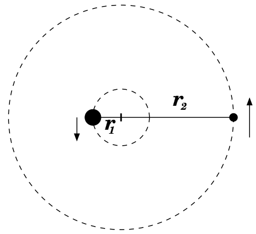
1Pt: cálculo correcto de I_G

1Pt: obtención de $V = u/2$

2Pt: obtención de ω

1Pt: resultado final correcto.

PROBLEMA 3



SINOPSIS: podemos analizar el movimiento de ambos astros en su centro de masas. Puesto que la separación entre el planeta y su satélite es constante, entonces ambos ecperimentan movimientos circunferenciales en torno a su centro de masas. El radio de órbita del planeta lo denotamos r_1 y el del satélite por r_2. La frecuencia angular del movimiento es $\omega = 2\pi/T$, con T el período.

• La ecuación de movimiento del planeta ($\vec{F} = M\vec{a}$) para la componente radial en trayectoria de radio r_1 conduce a:

$$G\frac{Mm}{(r_1+r_2)^2} = M\omega^2 r_1 \qquad \Rightarrow \qquad G\frac{m}{(r_1+r_2)^2} = \omega^2 r_1$$

• Análogamente para el movimiento del satélite con órbita de radio r_2:

$$G\frac{Mm}{(r_1+r_2)^2} = m\omega^2 r_2 \qquad \Rightarrow \qquad G\frac{M}{(r_1+r_2)^2} = \omega^2 r_2$$

• Sumando ambas los lados correspondientes de ambas ecuaciones:

$$G\frac{M+m}{(r_1+r_2)^2} = \omega^2(r_1+r_2) \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{G(M+m) = \omega^2(r_1+r_2)^3}$$

• El centro de la órbita se ubica en el centro de masas. Entonces $Mr_1 = mr_2$, con lo cual $r_2 = (M/m)r_1$. Sustituyendo en la ecuación anterior:

$$G(M+m) = \omega^2(1+(M/m))^3 r_1^3 \qquad \rightarrow \qquad GM(1+m/M) = \omega^2(1+(M/m))^3 r_1^3$$

• El dato es que $GM/R^2 = \gamma$, con lo cual

$$\gamma R^2(1+m/M) = \omega^2(1+(M/m))^3 r_1^3 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{r_1^3 = \frac{\gamma R^2(1+m/M)}{\omega^2(1+(M/m))^3}}\,.$$

Una pequeña cosmética (no necesaria) permite escribir

$$r_1 = \frac{R}{(1+(M/m))}\left[\frac{\gamma(1+m/M)}{\omega^2 R}\right]^{1/3}$$

• Sustituyendo (unidades SI) γ=10, R=6,4$\times 10^6$, (m/M)=1.2$\times 10^{-2}$, $\omega = 2\pi/(27\times 24\times 3600)$ se obtiene $r_1 \approx$3,28$\times R$, o sea, $r_1 \approx$20100 km.

PUNTUACION: (discriminar hasta medio punto)

NOTA MAXIMA 2 si conserva energía !!

2Pt: identificación de órbitas circunferenciales alrededor del CM.

2Pt: ecuaciones del mov. correctas para ambos cuerpos.

1Pt: resultado correcto en términos de cantidades conocidas

1Pt: estimación correcta al 20%.