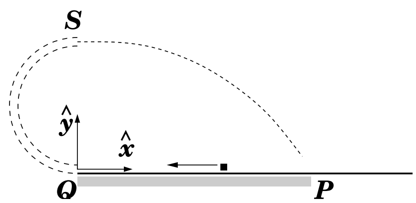
SOLUCION CONTROL No 2
INTRODUCCION A LA FISICA – OTOÑO 2003

Por: H. F. Arellano (junio 19 de 2003)

Departamento de Física, FCFM, Universidad de Chile

PROBLEMA 1



• Determinemos la velocidad que el cubo debe tener en C (v_c) a fin de caer en P. Movimiento parabólico con origen (xy) de la figura. Para esta etapa se toma $t = 0$ a la salida de S; t^* es el instante de llegada al suelo:

$$x = v_c t \quad \rightarrow \quad D = v_c t^* \tag{1}$$

$$y = 2R - \frac{1}{2}gt^2 \quad \rightarrow \quad 0 = 2R - \frac{1}{2}g{t^*}^2 \tag{2}$$

Combinando ambas ecuaciones obtenemos para v_c:

$$\boxed{v_c^2 = \frac{gD^2}{4R}}$$

• Por trabajo-energía podemos relacionar v_c con la velocidad de partida v_p. Suponemos cubo de masa m. Si E representa la energía mecánica total del cubo, entonces:

$$E_S = E_P + W_{P\rightarrow S}(roce) + W_{P\rightarrow S}(normal)$$

• El trabajo debido al roce sobre el cubo es $-\mu mgD$; el trabajo debido a la fuerza normal sobre el cubo es nulo (el piso no se mueve). Por lo tanto:

$$E_S = E_P - \mu mgD$$

• Considerando energía potencial gravitacional en el piso:

$$\left[\frac{1}{2}mv_c^2 + mg(2R)\right] = \left[\frac{1}{2}mv_p^2 + 0\right] - \mu mgD$$

• Sustituir valor encontrado para v_c y despejar:

$$\boxed{v_p^2 = g\left(\frac{D^2}{4R} + 4R + 2\mu D\right)}$$

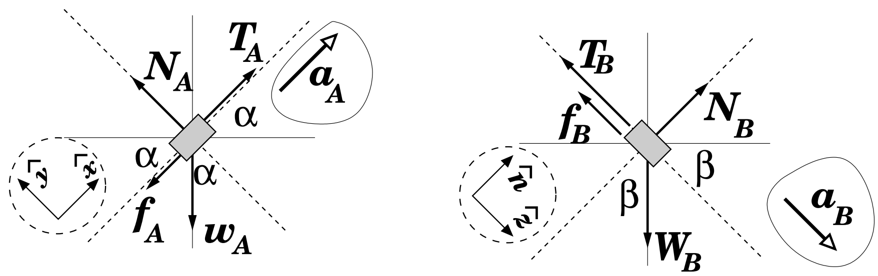
• El caso extremo $D \sim 0$ lleva a

$$v_p^2 \approx g4R \sim 2g \times \text{"altura"} \ ,$$

resultado conocido para que el cubo alcance a penas el extremo S, y caiga verticalmente.

PUNTUACION:
2Pt: parabólico correcto; descontar proporcionalmente
2Pt: trabajo-energía correcto (CERO puntos si usa 'F=ma' en subida por el tubo y lo hace mal)
1Pt: obtención del RESULTADO CORRECTO
1Pt: (VALIDO SOLO SI PARTE A ESTA CORRECTA) discusión razonable del caso descrito

PROBLEMA 2



• La cuerda mantiene una tensión única de magnitud $\boldsymbol{T}$. Puesto que ambos bloques resbalan se satisface la relación fza de roce/normal: "$\boldsymbol{f = \mu N}$". Además, las aceleraciones de ambos bloques son iguales en magnitud; la denotaremos $\boldsymbol{a}$.
• Sobre el cuerpo $\boldsymbol{A}$ actúan la cuerda ($\vec{T}_A$), el peso ($\vec{w}_A = m\vec{g}$) y el contacto ($\vec{C}_A = \vec{f}_A + \vec{N}_A$). La ecuación del movimiento y proyección según los ejes $\hat{x}$ e $\hat{y}$ indicados:

$$\begin{aligned} \vec{T}_A + m\vec{g} + \vec{f}_A + \vec{N}_A &= m\vec{a}_A && (3)\\ T - mg\sin\alpha - \mu N_A + 0 &= ma \quad \text{según } \hat{x} && (4)\\ 0 - mg\cos\alpha + 0 + N_A &= 0 \quad \text{según } \hat{y} && (5) \end{aligned}$$

• Sobre el cuerpo $\boldsymbol{B}$ actúan la cuerda ($\vec{T}_B$), el peso ($\vec{W}_B = M\vec{g}$) y el contacto ($\vec{C}_B = \vec{f}_B + \vec{N}_B$). La ecuación del movimiento y proyección según los ejes $\hat{z}$ y $\hat{n}$ indicados:

$$\begin{aligned} \vec{T}_B + M\vec{g} + \vec{f}_B + \vec{N}_B &= M\vec{a}_B && (6)\\ -T + Mg\sin\beta - \mu N_B + 0 &= Ma \quad \text{según } \hat{z} && (7)\\ 0 - Mg\cos\beta + 0 + N_B &= 0 \quad \text{según } \hat{n} && (8) \end{aligned}$$

• De Ecs. 5 y 8 obtenemos

$$\boxed{N_A = mg\cos\alpha \qquad N_B = Mg\cos\beta}$$

• Sumando las Ecs. 4 y 7, y sustituyendo resultado para las normales:

$$-mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha + Mg\sin\beta - \mu Mg\cos\beta = (m+M)a$$

• Despejamos $\boldsymbol{\mu}$:

$$\mu = \frac{Mg\sin\beta - mg\sin\alpha - (m+M)a}{mg\cos\alpha + Mg\cos\beta}$$

• Si los bloques recorren $\boldsymbol{D}$ en un lapso $\boldsymbol{\tau}$ con aceleración $\boldsymbol{a}$, entonces $D = (1/2)a\tau^2 \Longrightarrow$

$$\boxed{\mu = \frac{M\sin\beta - m\sin\alpha - (m+M)\frac{2D}{g\tau^2}}{m\cos\alpha + M\cos\beta}}$$

• En el caso extremo $m = 0$ y $D \sim 0$ se tiene $\mu \to \frac{M\sin\beta}{m\cos\alpha} = \tan\beta$, un resultado conocido para el caso de un bloque a punto de resbalar sobre un plano inclinado, o resbalando casi sin acelerar.

PUNTUACION:

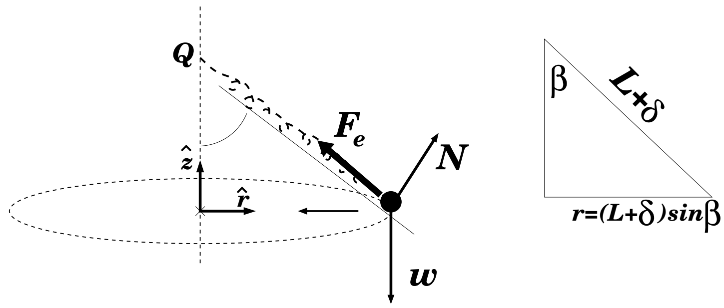
2Pt: Ec. del movimiento cuerpo A (según ambas componentes); descontar proporcionalmente; bajo puntaje ante errores 'graves'

2Pt: Ec. del movimiento cuerpo B (según ambas componentes); descontar proporcionalmente; bajo puntaje ante errores 'graves'

1Pt: Obtención del resultado correcto

1Pt: (VALIDO SOLO SI PARTE A ESTA CORRECTA) discusión razonable del caso descrito.

PROBLEMA 3



• Las fuerzas actuando sobre la bolita sostenida por el resorte son el peso ($\vec{w} = m\vec{g}$), la fuerza del resorte ($\vec{F}_e$, de magnitud $k\delta$), y el contacto sin roce ($\vec{N}$). El movimiento del objeto es circunferencial uniforme y por lo tanto su aceleración es del tipo $\omega^2\times$radio. La ecuación del movimiento y proyecciones correspondientes segun los vectoners unitarios $\hat{r}$ y $\hat{z}$ indicados:

$$\begin{aligned}
m\vec{g} + \vec{F}_e + \vec{N} &= m\vec{a} && (9)\\
0 - k\delta\sin\beta + N\cos\beta &= -m\omega^2 r \qquad \text{según } \hat{r} && (10)\\
-mg + k\delta\cos\beta + N\sin\beta &= 0 \qquad \text{según } \hat{z} && (11)
\end{aligned}$$

• Despejar N de Ec. 11 y sustituir en Ec. 10; usar resultado geométrico $r = (L+\delta)\sin\beta$ y despejar δ. Se obtiene:

$$\delta = \frac{m(g\cos\beta + \omega^2 L\sin^2\beta)}{k - m\omega^2\sin^2\beta}$$

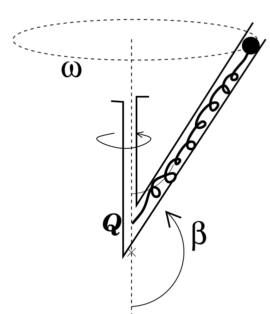
• Si se examina el caso $\delta = 0$ se observa que es necesario que

$$g\cos\beta + \omega^2 L\sin^2\beta = 0$$

Sean $b \equiv g/\omega^2 L$ y $x \equiv \cos\beta$, entonces la ecuación anterior se reduce a

$$x^2 - bx - 1 = 0 \qquad \to \qquad x = \frac{b \pm \sqrt{b^2+4}}{2} = \frac{b}{2} \pm \sqrt{1 + \left(\frac{b}{2}\right)^2}$$

• La solución con signo '+' implica $\cos\beta > 1$ la cual es inaceptable; sólo queda la solución con signo '–': $\cos\beta = (b/2) - \sqrt{1 + (b/2)^2}$, la cual, bajo valores adecuados de $g/\omega^2 L$ llevan a soluciones $\beta > \pi/2$, como se ilustra en la figura.



PUNTUACION:

3Pt: Ecuación del movimiento y proyecciones según ejes –esta parte contempla reconocimiento de fuerza y aceleración– descontar proporcionalmente; bajo puntaje ante errores 'graves'

2Pt: obtención del resultado correcto.

1Pt: (VALIDO SOLO SI PARTE A ESTA CORRECTA) reconocimiento de configuración posible para δ=0.