

Ejemplo GPC

Encontrar el control G.P.C. para la planta modelada por

$$y(t) = ay(t-1) + bu(t-2) + \frac{w(t)}{\Delta} \quad (*)$$

donde $\Delta = 1 - z^{-1}$. Considerar que $N1 = 1$, $N2 = 2$ y $NU = 2$. La referencia de control es cero. Por lo tanto, se tiene:

$$J = \sum_{j=1}^2 \hat{y}(t+j)^2 + \lambda \sum_{j=1}^2 \Delta u(t+j-1)^2 \quad (**)$$

donde $\lambda = 0.5$.

a) Determinar los predictores de “y” necesarios.

Solución

Los predictores necesarios están dados por los horizontes de predicción $N1 = 1$ y $N2 = 2$, es decir, se requiere

$$\hat{y}(t+1), \hat{y}(t+2)$$

En primer lugar, se calculan los predictores por sustitución, hasta tenerlos en función de las variables medidas hasta “t”.

Multiplicando la ecuación de la planta (*) por el operador Δ , se tiene

$$\Delta y(t) = a\Delta y(t-1) + b\Delta u(t-2) + w(t)$$

$$y(t) = (1+a)y(t-1) - ay(t-2) + b\Delta u(t-2) + w(t)$$

Entonces, los predictores de “y” están dados por

$$\begin{aligned}\hat{y}(t+1) &= E(y(t+1) / t) \\ &= (1+a)y(t) - ay(t-1) + b\Delta u(t-1) + \underbrace{E(w(t+1/t))}_0\end{aligned}$$

$$\boxed{\hat{y}(t+1) = (1+a)y(t) - ay(t-1) + b\Delta u(t-1)}$$

$$\begin{aligned}\hat{y}(t+2) &= E(y(t+2) / t) \\ &= (1+a)\underbrace{E(y(t+1) / t)}_{\hat{y}(t+1)} - ay(t) + b\Delta u(t) + \underbrace{E(w(t+2/t))}_0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{y}(t+2) &= (1+a)[(1+a)y(t) - ay(t-1) + b\Delta u(t-1)] \\ &\quad - ay(t) + b\Delta u(t)\end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\hat{y}(t+2) &= (1+a+a^2)y(t) - a(1+a)y(t-1) \\ &\quad + b(1+a)\Delta u(t-1) + b\Delta u(t)\end{aligned}}$$

Por otra parte, los predictores $\hat{y}(t+1)$, $\hat{y}(t+2)$ también se pueden calcular a través de la ecuación diofántica como se describe a continuación.

La ecuación diofántica está dada por

$$1 = E_j A \Delta + z^{-j} F_j$$

donde E_j y F_j son polinomios con grados $j-1$ y n respectivamente. En este caso, $n = 1$. Además, se tiene

$$A(z^{-1}) = 1 - az^{-1}$$

$$B(z^{-1}) = bz^{-1}$$

Entonces, para $j = 1$

$$1 = E_1 A \Delta + z^{-1} F_1 \quad (***)$$

donde

$$E_1 = 1$$

$$F_1 = f_{10} + f_{11} z^{-1}$$

Reemplazando en la ecuación diofántica (***) , se tiene

$$1 = 1(1 - az^{-1})(1 - z^{-1}) + z^{-1}(f_{10} + f_{11}z^{-1})$$

Por lo tanto igualando coeficientes, se obtiene

$$f_{10} = 1 + a$$

$$f_{11} = -a$$

Para $j = 2$

$$1 = E_2 A \Delta + z^{-2} F_2 \quad (****)$$

donde

$$E_2 = 1 + e_{21} z^{-1}$$

$$F_2 = f_{20} + f_{21} z^{-1}$$

Reemplazando en la ecuación diofántica (****) , se tiene

$$1 = (1 + e_{21} z^{-1})(1 - az^{-1})(1 - z^{-1}) + z^{-2}(f_{20} + f_{21} z^{-1})$$

Por lo tanto igualando coeficientes, se obtiene

$$e_{20} = 1 + a$$

$$f_{20} = 1 + a + a^2$$

$$f_{21} = -a(1 + a)$$

Además, la ecuación de predicción en función de los polinomios E_j y F_j de la ecuación diofántica está dada por:

$$\hat{y}_{t+j} = G_j \Delta u_{t-1+j} + F_j y_t$$

donde $G_j = E_j B$.

Por lo tanto, en este caso

$$G_1 = E_1 B = 1(bz^{-1}) = bz^{-1}$$

$$G_2 = E_2 B = (1 + (1 + a)z^{-1})(bz^{-1}) = bz^{-1} + b(1 + a)z^{-2}$$

Entonces,

$$\hat{y}(t + 1) = G_1 \Delta u(t) + F_1 y(t)$$

$$\hat{y}(t + 1) = bz^{-1} \Delta u(t) + ((1 + a) - az^{-1})y(t)$$

$$\boxed{\hat{y}(t + 1) = (1 + a)y(t) - ay(t - 1) + b\Delta u(t - 1)}$$

$$\hat{y}(t + 2) = G_2 \Delta u(t + 1) + F_2 y(t)$$

$$\begin{aligned} \hat{y}(t + 2) = & \left[bz^{-1} + b(1 + a)z^{-2} \right] \Delta u(t + 1) \\ & + \left[(1 + a + a^2) - a(1 + a)z^{-1} \right] y(t) \end{aligned}$$

$$\hat{y}(t+2) = (1+a+a^2)y(t) - a(1+a)y(t-1) + b(1+a)\Delta u(t-1) + b\Delta u(t)$$

- b) Calcular el control óptimo que se debe aplicar en el instante “t”.

Solución

En primer lugar, se desarrolla la función de costos (**), considerando los horizontes de predicción $N1 = 1$, $N2 = 2$ y el horizonte de control $NU = 2$, y además $\lambda = 0.5$. Es decir,

$$J = \hat{y}(t+1)^2 + \hat{y}(t+2)^2 + 0.5\Delta u(t)^2 + 0.5\Delta u(t+1)^2$$

Reemplazando en esta última ecuación, los predictores $\hat{y}(t+1)$, $\hat{y}(t+2)$ obtenidos, se tiene

$$J = [(1+a)y(t) - ay(t-1) + b\Delta u(t-1)]^2 + [(1+a+a^2)y(t) - a(1+a)y(t-1) + b(1+a)\Delta u(t-1) + b\Delta u(t)]^2 + 0.5\Delta u(t)^2 + 0.5\Delta u(t+1)^2$$

Entonces, derivando la ecuación anterior con respecto a $\Delta u(t)$, se tiene

$$\frac{\partial J}{\partial \Delta u(t)} = 0 = 2b[(1+a+a^2)y(t) - a(1+a)y(t-1) + b(1+a)\Delta u(t-1) + b\Delta u(t)] + \Delta u(t)$$

Por lo tanto, el control óptimo es

$\Delta u(t) = \frac{-2b(1+a+a^2)y(t) + 2ab(1+a)y(t-1) - 2b^2(1+a)\Delta u(t-1)}{1+2b^2}$

donde $\Delta u(t) = u(t) - u(t-1)$

Por otra parte, se pueden utilizar las ecuaciones derivadas para el Control Predictivo Generalizado (G.P.C.), como se describe a continuación.

De esta manera, en este caso, la matriz G está dada por

$$G = \begin{bmatrix} g_0 & 0 \\ g_1 & g_0 \end{bmatrix}$$

donde $g_0 = g_{10} = g_{20}$, $g_1 = g_{21}$, y

$$G_1 = bz^{-1} = g_{10} + g_{11}z^{-1}$$

$$G_2 = bz^{-1} + b(1+a)z^{-2} = g_{20} + g_{21}z^{-1} + g_{22}z^{-2}$$

Entonces, $g_0 = 0$, $g_1 = b$, es decir

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix}$$

Además, las componentes del vector f están dadas por

$$f_{t+1} = [G_1(z^{-1}) - g_{10}] \Delta u_t + F_1 y_t$$

$$f_{t+2} = [G_2(z^{-1}) - g_{21}z^{-1} - g_{20}] \Delta u_{t+1} + F_2 y_t$$

Entonces, se tiene

$$f(t+1) = bz^{-1}\Delta u(t) + ((1+a) - az^{-1})y(t)$$

$$f(t+1) = (1+a)y(t) - ay(t-1) + b\Delta u(t-1)$$

$$f(t+2)$$

$$= b(1+a)z^{-2}\Delta u(t+1) + ((1+a+a^2) - a(1+a)z^{-1})y(t)$$

$$f(t+2) = (1+a+a^2)y(t) - a(1+a)y(t-1) + b(1+a)\Delta u(t-1)$$

Por lo tanto, la acción de control óptimo $\Delta u(t)$ está dada por

$$\Delta u_t = H_1^T (r - f)$$

con H_1^T la primera fila de $(G^T G + \lambda I)^{-1} G^T$

En este caso,

$$\begin{aligned} & (G^T G + \lambda I)^{-1} G^T \\ &= \left[\begin{bmatrix} 0 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 \end{bmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ & (G^T G + \lambda I)^{-1} G^T = \frac{\begin{bmatrix} 0 & 2b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}{1 + 2b^2} \end{aligned}$$

Entonces,

$$\Delta u(t) = \frac{\begin{bmatrix} 0 & 2b \end{bmatrix}}{1 + 2b^2} \times \begin{bmatrix} -(1+a)y(t) + ay(t-1) - b\Delta u(t-1) \\ -(1+a+a^2)y(t) + a(1+a)y(t-1) - b(1+a)\Delta u(t-1) \end{bmatrix}$$

con $r = 0$.

Por lo tanto, el control óptimo es:

$\Delta u(t) = \frac{-2b(1+a+a^2)y(t) + 2ab(1+a)y(t-1) - 2b^2(1+a)\Delta u(t-1)}{1+2b^2}$
