

EL7025/EL761/CI6308

Control Inteligente para Problemas Dinámicos de Transporte

Dra. Doris Sáez,

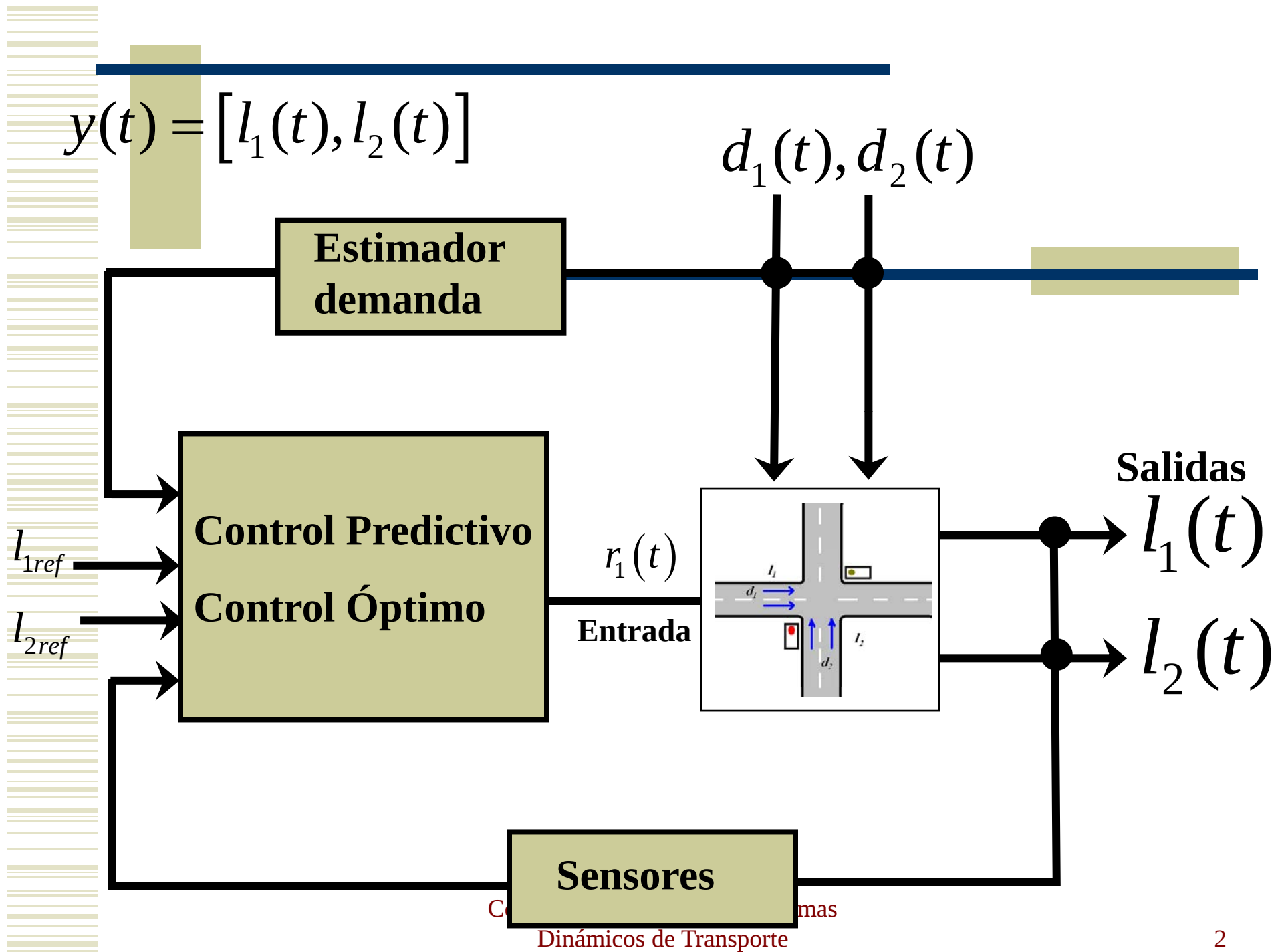
Departamento de Ingeniería Eléctrica

Universidad de Chile

Dr. Cristián Cortés

Departamento de Ingeniería Civil – Transporte

Universidad de Chile



Modelación en Variables de Estado

- ♦ Ecuación de estado. Caracteriza al proceso.

$$\dot{x} = f(x, u, t) \qquad x(k+1) = f(x(k), u(k), k)$$

- ♦ Ecuación de salida. Caracteriza a las variables que se miden del proceso.

$$y = g(x, u, t) \qquad y(k) = g(x(k), u(k), k)$$

Control en Variables de Estado

- ◆ Principio de linealización

$$(SNL) \begin{cases} x' = f(x, u) \\ y = g(x, u) \end{cases} \quad (L) \begin{cases} x' = \underbrace{\left[\frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right]_{(\bar{x}, \bar{u})}}_A \cdot x + \underbrace{\left[\frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \right]_{(\bar{x}, \bar{u})}}_B \cdot u \\ y = \underbrace{\left[\frac{\partial g(x, u)}{\partial x} \right]_{(\bar{x}, \bar{u})}}_C \cdot x + \underbrace{\left[\frac{\partial g(x, u)}{\partial u} \right]_{(\bar{x}, \bar{u})}}_D \cdot u \end{cases}$$

Dada una trayectoria $(\bar{x}, \bar{u})$ de (SNL), si el sistema linealizado (L) en torno de la trayectoria $(\bar{x}, \bar{u})$ es controlable
 $\Rightarrow$ el sistema no lineal es localmente controlable.

Control Óptimo

- ◆ En control óptimo se busca resolver problemas del tipo:

$$\underset{u(t), x(t)}{\text{Min}} \quad r(x(T)) + \int_{t_0}^T L(\tau, x(\tau), u(\tau)) d\tau \longrightarrow \text{Función Objetivo}$$

$$\text{s.a.} \quad x' = f(t, x(t), u(t)) \longrightarrow \text{EDO dinámica}$$

$$x(t_0) = x_0 \longrightarrow \text{Condición inicial}$$

$$x(T) \in \Omega \longrightarrow \text{Condición terminal}$$

$$u(t) \in U \longrightarrow \text{Restricción en las variables de control}$$

(Se debe aplicar solo controles factibles)

Control Óptimo

$$\underset{u(t), x(t)}{\text{Min}} \quad r(x(T)) + \int_{t_0}^T L(\tau, x(\tau), u(\tau)) d\tau$$

$$s.a. \quad x' = f(t, x(t), u(t))$$

$$x(t_0) = x_0$$

$$x(T) \in \Omega$$

$$u(t) \in U$$

- ♦ Si $r=0$ se llama Problema de Lagrange
- ♦ Si $L=0$ se llama Problema de Meyer
- ♦ Si ambas funciones son distintas de cero, se llama Problema de Bolza

Control Óptimo

- ◆ Principio del mínimo de Pontryagin:

Se define el hamiltoniano:

$$H(t, x, \lambda, u) = f(t, x(t), u(t)) \cdot \lambda + L(t, x(t), u(t))$$

- ◆ Sea u^* control óptimo, x^* trayectoria optima asociada al control óptimo. Entonces:

$$\exists \lambda^* \text{ tal que: } x'^* = \nabla_{\lambda} H(t, x^*(t), \lambda^*(t), u^*(t)) \longrightarrow \text{EDO}$$

$$\lambda'^* = -\nabla_x H(t, x^*(t), \lambda^*(t), u^*(t)) \longrightarrow \text{Ecuación adjunta}$$

$$H(t, x^*(t), \lambda^*(t), u^*(t)) = \min_{a \in U} H(t, x^*(t), \lambda^*(t), a) \longrightarrow \text{Principio del mínimo}$$

Control Óptimo Cuadrático

- ♦ “Se considera el diseño de sistemas de control basado en los índices de desempeño cuadrático”
- ♦ Modelo:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

- Problema:

Seleccionar el vector de control $\mathbf{u}(t)$ tal que un índice de desempeño determinado se minimice.

$$J = \int_0^{\infty} L(\mathbf{x}, \mathbf{u}) dt$$

Control Óptimo Cuadrático

- Solución:

$$u(t) = -Kx(t)$$

- ♦ Consideremos que:

$$\underset{u}{\text{Min}} J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt$$

donde Q es una matriz simétrica definida positiva, y R es una matriz simétrica definida positiva, u no está restringida.

Principio del Máximo

- Problema:

$$\dot{x} = \rho(x, u)$$

$$x \in \mathbb{R}^n \quad u \in \mathbb{R}^n$$

$$J = \int_{t_0}^{t_f} L(x, u) dt$$

$$x(t_0) = x_0 \quad x(t_f) = x_f$$

Principio del Máximo

- Solución:

$$1) \dot{\lambda} = -\frac{\partial H}{\partial x}$$

con $H = L(x, u) + \lambda f(x, u)$ Hamiltoniano

$$2) \frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

Aplicación del Principio del Máximo al Control Óptimo Cuadrático

- Problema:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$$

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u}) dt$$

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t)$$

- Solución:

$$H = \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u} + \lambda(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u})$$

Aplicación del Principio del Máximo al Control Óptimo Cuadrático

• Solución: $H = \mathbf{x}^T \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{u}^T \mathbf{R} \mathbf{u} + \lambda (\mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u})$

$$1) \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = -\dot{\lambda} = \mathbf{Q} \mathbf{x} + \mathbf{A}^T \lambda$$

$$2) \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{R} \mathbf{u} + \mathbf{B}^T \lambda = 0$$

Aplicación del Principio del Máximo al Control Óptimo Cuadrático

- Se define $\lambda = P\mathbf{x}$
con P matriz positiva definida
- Entonces $\dot{\lambda} = P\dot{\mathbf{x}} = P(\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u})$
- De 1) y con $\dot{\lambda} = \mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{u}$
 $-\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{P}\mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{Q}\mathbf{x} + \mathbf{A}^T \mathbf{P}\mathbf{x}$ 3)

Aplicación del Principio del Máximo al Control Óptimo Cuadrático

- De 2) $u = -\underbrace{R^{-1}B^T P}_{K} X$ 4) $u = -KX$

$$K = R^{-1}B^T P$$

- Reemplazando 4) en 3) se tiene:

$$-PAx + PBR^{-1}B^T Px - Qx - A^T Px = 0$$

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$

**Ecuación
de Ricatti**

Diseño de un Controlador Óptimo Cuadrático (LQR)

- 1.- Resolver la ecuación matricial de Ricatti para la matriz P .
(Si existe una matriz P definida positiva, el sistema es estable o la matriz $A-BK$ es estable).
- 2.- Sustituya la matriz P en la ecuación 4). La matriz K resultante es la matriz óptima.

Control Óptimo Cuadrático para Sistemas Discretos

$$x(k+1) = Gx(k) + Hu(k)$$

Índice de desempeño

$$J = \frac{1}{2} \sum_0^{\infty} [x(k)^T Q x(k) + u(k)^T R u(k)]$$

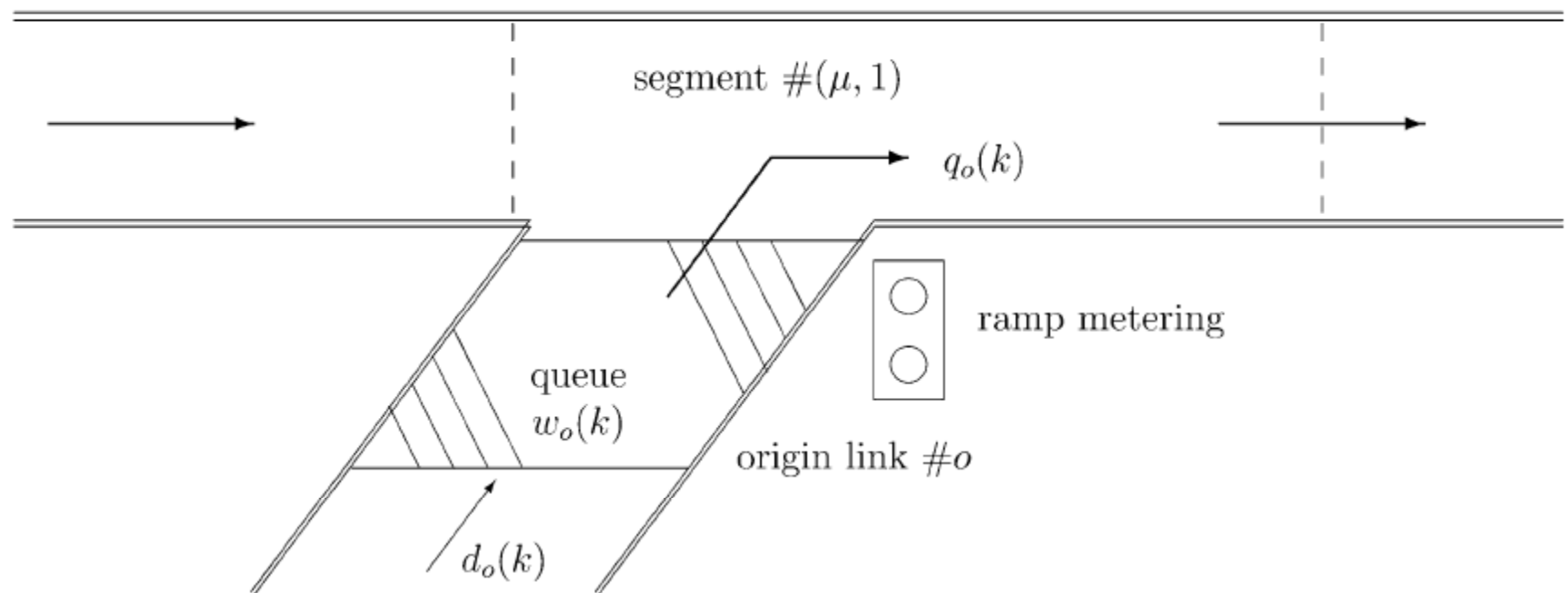
Solución: Ecuación de Ricatti

$$P = Q + G^T P G - G^T P H (R + H^T P H)^{-1} H^T P G \quad (*)$$

con P simétrica positiva definida

$$u(k) = -Kx(k) \quad K = (R + H^T P H)^{-1} H^T P G$$

Control Óptimo Ramp-metering



Kotsialos, A.; Papageorgiou, M.; , "Nonlinear optimal control applied to coordinated ramp metering," *Control Systems Technology, IEEE Transactions on* , vol.12, no.6, pp. 920- 933, Nov. 2004

Control Óptimo Ramp-metering

Modelo dinámico de la densidad (veh/km-vía) y velocidad (km/h)

$$\rho_{m,i}(k+1) = \rho_{m,i}(k) + \frac{T[q_{m,i-1}(k) - q_{m,i}(k)]}{L_m \Lambda_m}$$

$$q_{m,i}(k) = \rho_{m,i}(k) v_{m,i}(k) \Lambda_m$$

$$v_{m,i}(k+1) = v_{m,i}(k) + \frac{T\{V[\rho_{m,i}(k)] - v_{m,i}(k)\}}{\tau} + \frac{T[v_{m,i-1}(k) - v_{m,i}(k)]v_{m,i}(k)}{L_m}$$

$$- \frac{\nu T}{\tau L_m} \frac{\rho_{m,i+1}(k) - \rho_{m,i}(k)}{\rho_{m,i}(k) + \kappa}$$

$$V[\rho_{m,i}(k)] = v_{f,m} \exp \left[-\frac{1}{a_m} \left(\frac{\rho_{m,i}(k)}{\rho_{cr,m}} \right)^{a_m} \right]$$

arco m
segmento i
tiempo de
muestreo T

Control Óptimo Ramp-metering

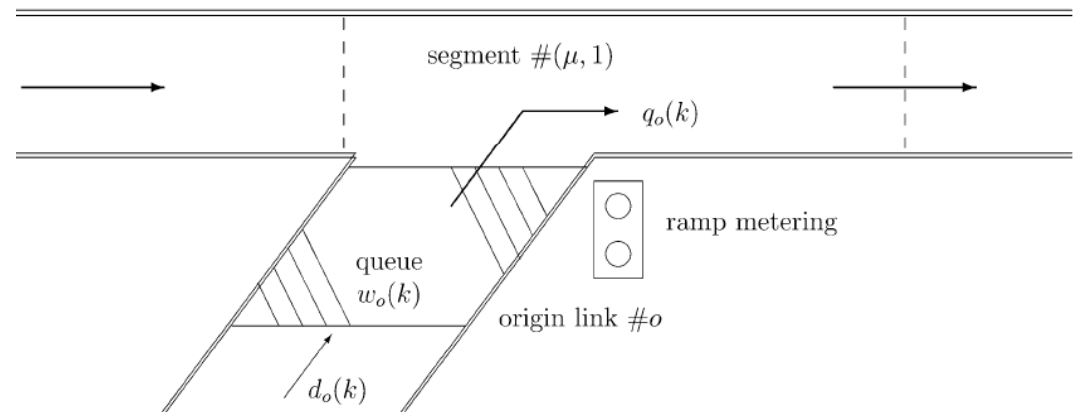
Modelo dinámico de la cola (veh).

$$w_o(k+1) = w_o(k) + T[d_o(k) - q_o(k)]$$

d_o demanda (veh/h)
 q_o flujo (veh/h)

$$q_o(k) = r_o(k)\hat{q}_o(k)$$

$$\hat{q}_o(k) = \min\{\hat{q}_{o,1}(k), \hat{q}_{o,2}(k)\}$$



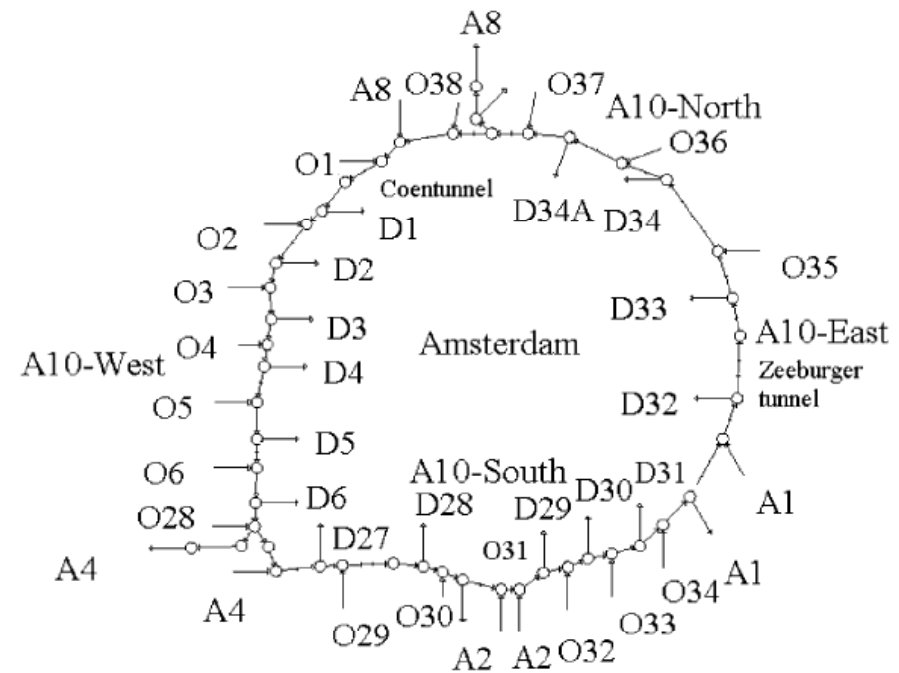
Control Óptimo Ramp-metering

Se minimiza el tiempo de viaje total de todos los vehículos incluyendo el tiempos de espera en las colas; las variaciones de variable manipulada y se penaliza los largos, fijándolos en un nivel deseado.

$$J = T \sum_k \left\{ \sum_m \sum_i \rho_{m,i}(k) L_m \Lambda_m + \sum_o w_o(k) \right. \\ \left. + a_f \sum_o [r_o(k_1) - r_o(k_1 - 1)]^2 \right. \\ \left. + a_w \sum_o \psi[w_o(k)]^2 \right\} \quad \psi[w_o(k)] = \max\{0, w_o(k) - w_{o,\max}\}$$

Control Óptimo Ramp-metering

Implementado en una carretera de circunvalación en Amsterdam 32 km.



Control Óptimo Ramp-metering

Se definieron cuatro escenarios para esta implementación:

- 1.- Sin control
- 2.- Límite de 40 veh en rampas urbanas y 100 veh en rampas de autopistas.
- 3.- Límite de 80 veh en rampas urbanas y 120 veh en rampas de autopistas.
- 4.- No hay límites.

Control Óptimo Ramp-metering

Resultados en tiempo viaje total

TTS FOR EACH SCENARIO

Scenario	TTS (veh·hours)	Improvement
No control	13,226	—
1	9,032	31.7%
2	8,230	37.8%
3	7,466	43.5%

