

EL7025/EL761/CI6308

Control Inteligente para Problemas Dinámicos de Transporte

Dra. Doris Sáez,

Departamento de Ingeniería Eléctrica

Universidad de Chile

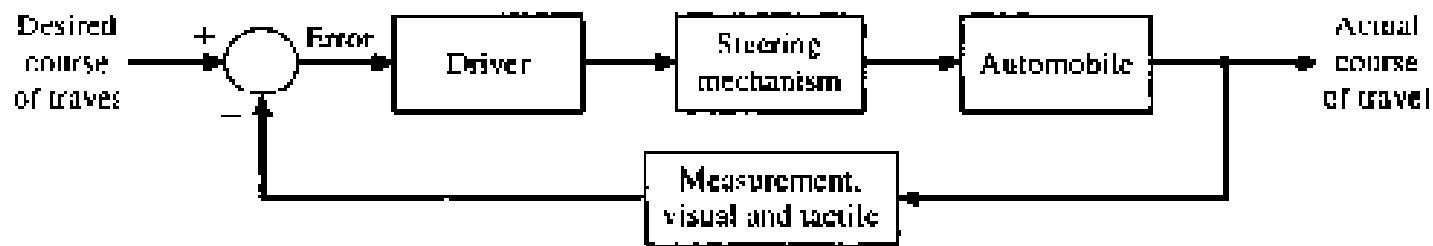
Dr. Cristián Cortés

Departamento de Ingeniería Civil – Transporte

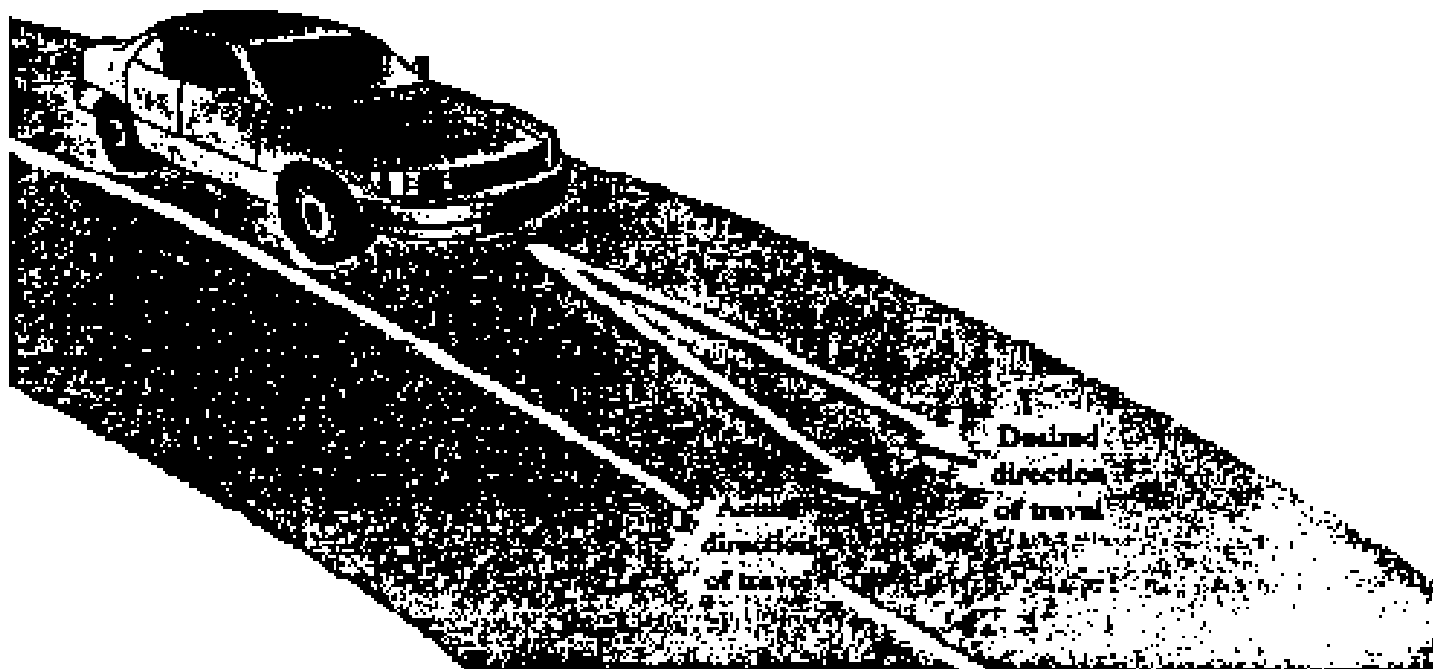
Universidad de Chile

Sistema de Control

- ◆ Interconexión de componentes, que en su conjunto, presenta un comportamiento deseado. Asume relaciones de causa-efecto.



(a)



(b)

FIGURE 1.7

(a) Automobile steering control system. (b) The driver uses the difference between the actual and desired direction of travel to generate a controlled adjustment of the steering wheel.

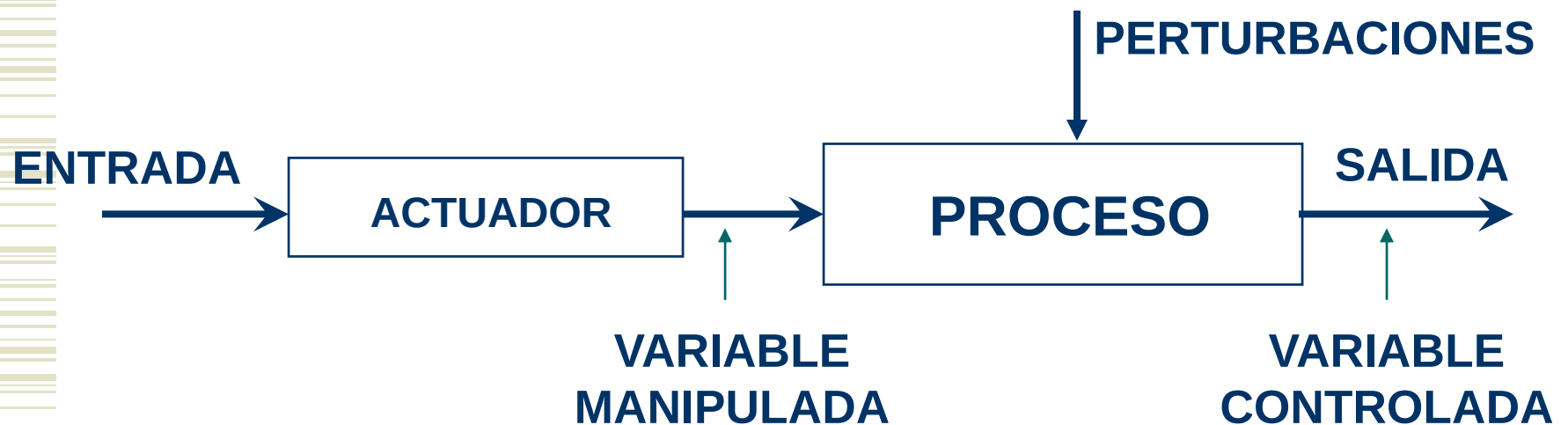
Control en Lazo Abierto

Proceso

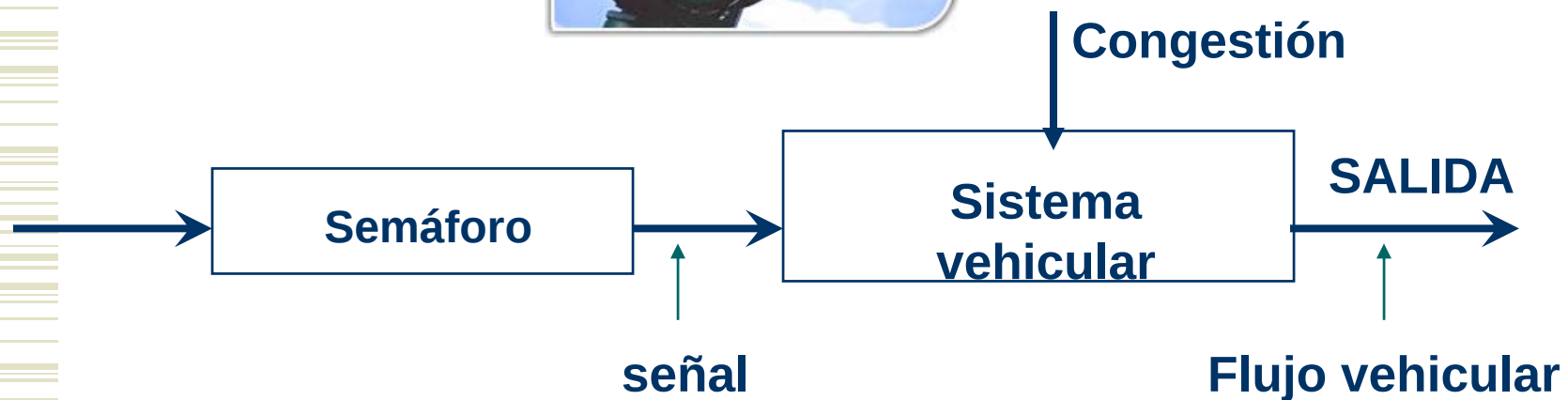
Dispositivo de acción (actuador)

Variable manipulada o de control

Variable controlada o salida

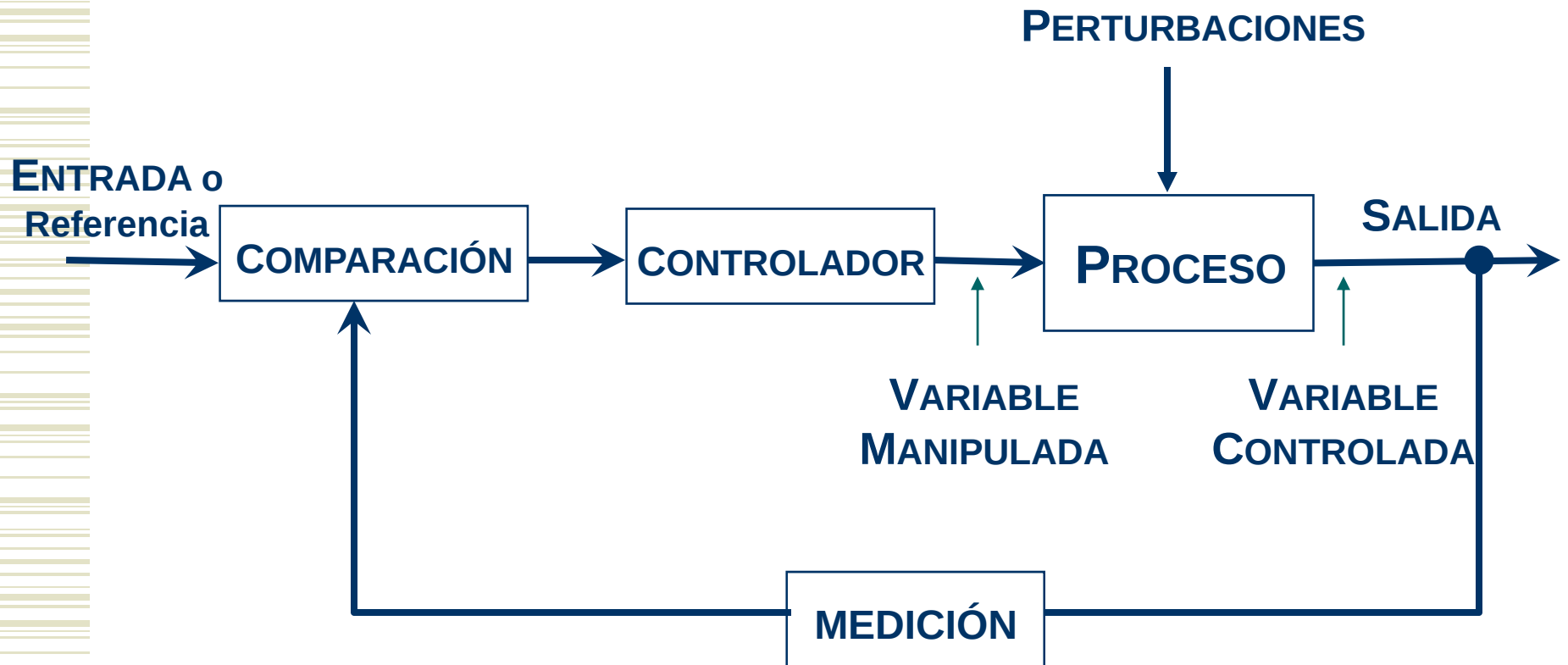


Ejemplo: Control en Lazo Abierto

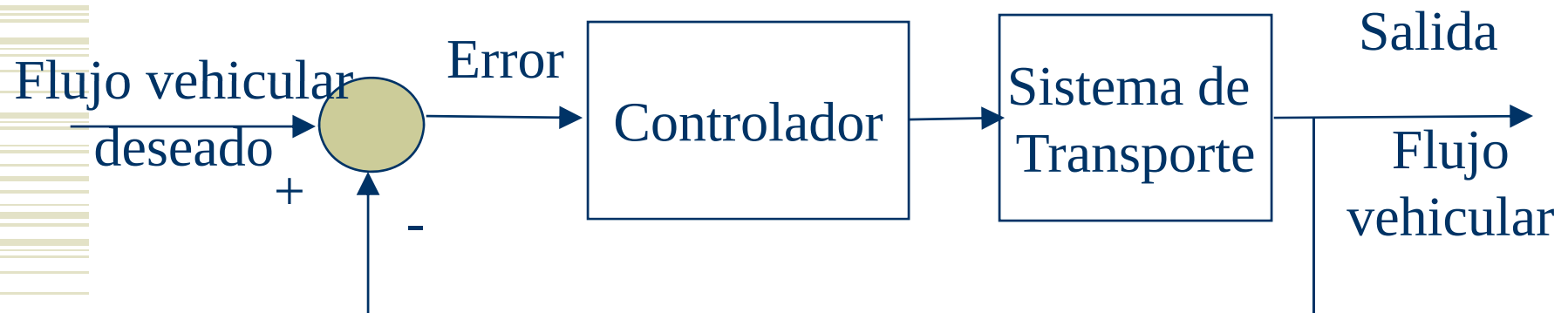


Control Inteligente para Problemas
Dinámicos de Transporte

Control en Lazo Cerrado



Ejemplo: Control en Lazo Cerrado

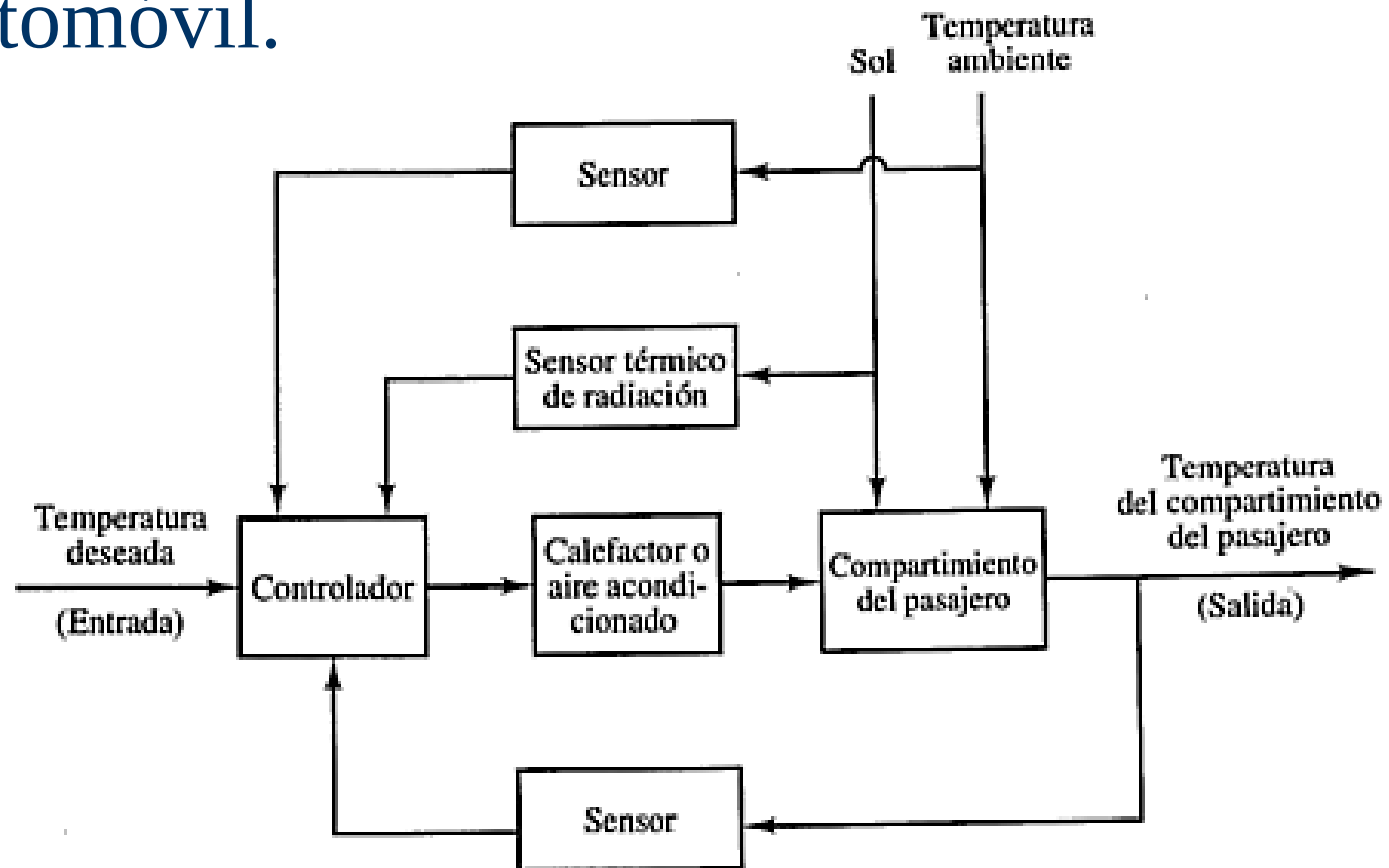


CONTROL PREALIMENTADO

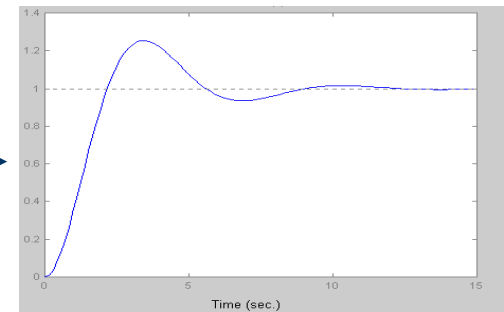
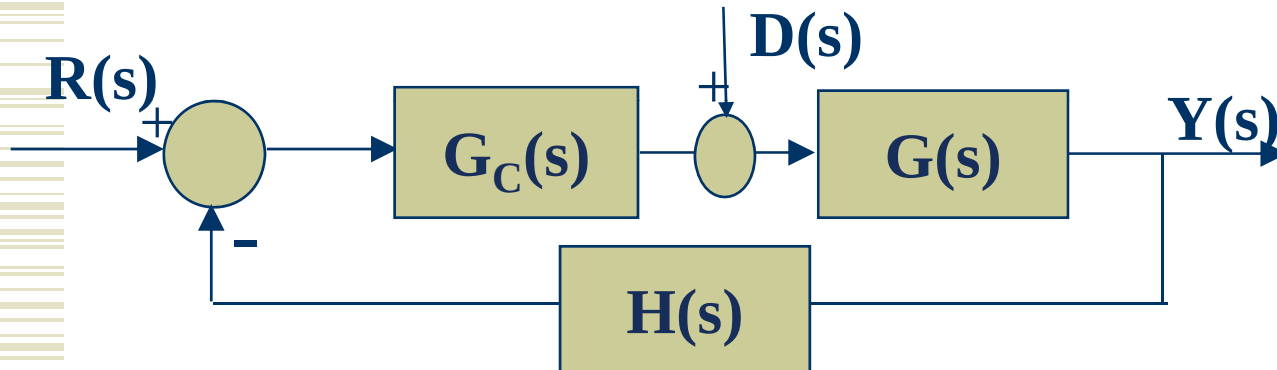
- ♦ El control prealimentado establece una acción correctiva antes de que las perturbaciones afecten el resultado (una perturbación es una señal que tiende a afectar negativamente el valor de la salida de un sistema.).

CONTROL PREALIMENTADO

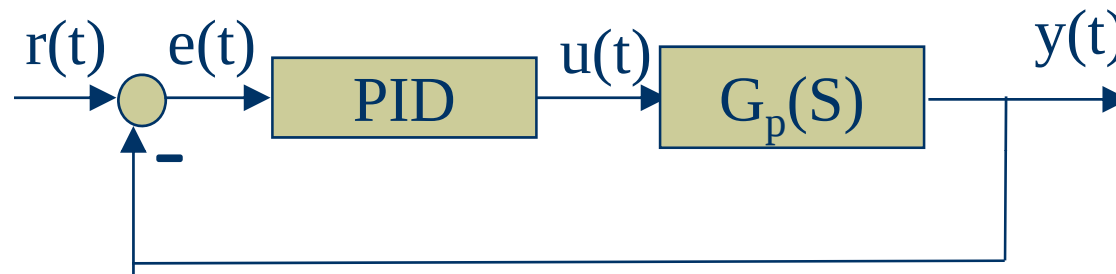
- ♦ Control de temperatura del interior de un automóvil.



Sistema de Control Realimentado



Controlador Proporcional, Integral, Derivativo



$$u(t) = K_p e(t) + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(t) dt + K_p T_d \frac{de(t)}{dt}$$

$$\frac{U(S)}{E(S)} = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i S} + T_d S \right)$$

Controlador PID discreto

$$U(S) = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i S} + T_d S \right)$$

$$U(Z) = \left[K_{pd} + \frac{K_{Id}}{1 - Z^{-1}} + K_{Dd} (1 - Z^{-1}) \right] E(Z)$$

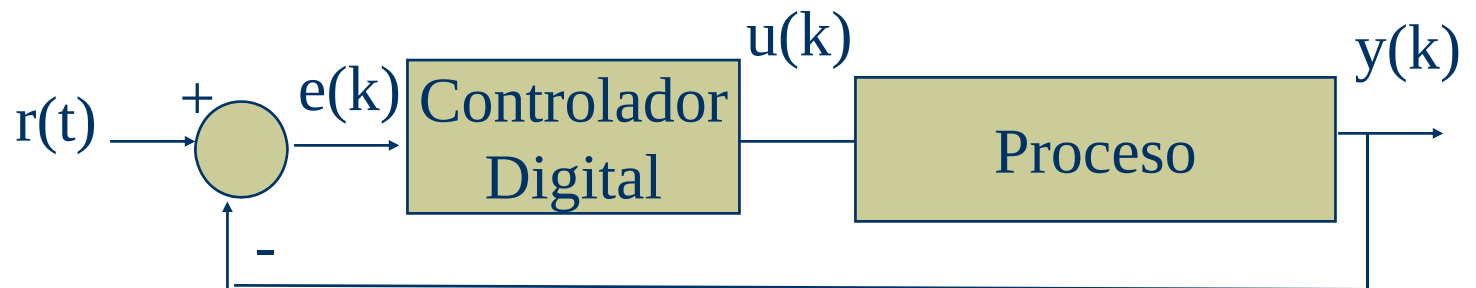
$$K_{pd} = K_p - \frac{K_p T}{2T_i}$$

$$K_{Id} = \frac{K_p T}{T_i}$$

$$K_{Dd} = \frac{K_p T_d}{T}$$

T: tiempo de muestreo

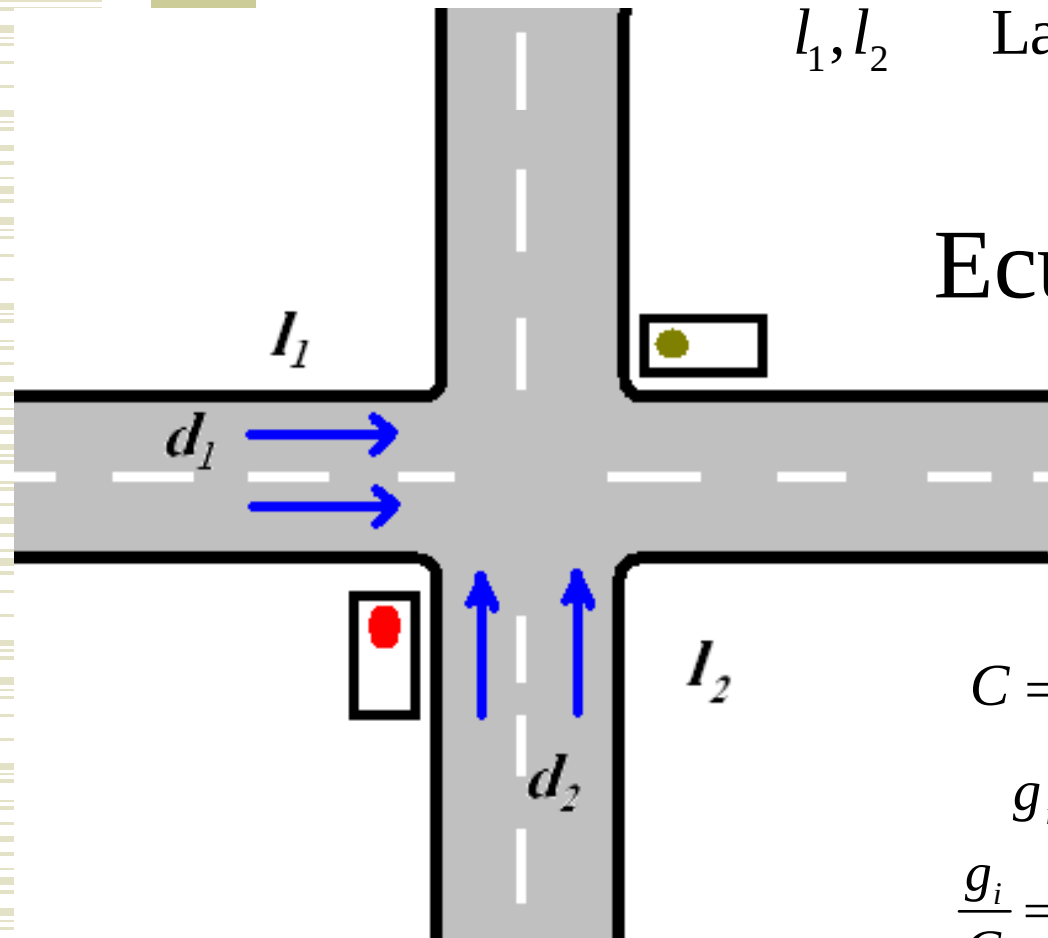
Sistemas de Control Realimentado: Tiempo Discreto



Ejemplo:

d_1, d_2 Flujos [veh/hr]

l_1, l_2 Largo de las colas [veh]



Ecuaciones de estado:

$$\frac{dl_i}{dt} = d_i - \frac{s_i g_i}{C}$$

C = Largo del ciclo

g_i = Tiempo de verde para d_i

$\frac{g_i}{C}$ = Reparto de Verde

$\frac{s_i g_i}{C}$ = Capacidad

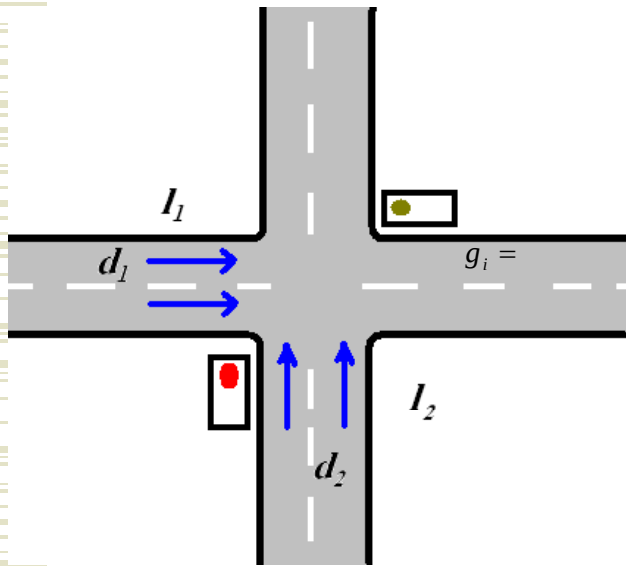
Ecuación de control: $\rightarrow u_i(t) = r_i = \frac{s_i g_i}{C}$

En este caso:

$$\frac{r_1}{s_1} + \frac{r_2}{s_2} = 1 - \frac{L}{C}$$

L es tiempo
muerto/perdido

$\Rightarrow$ Solo hay 1 variable de control

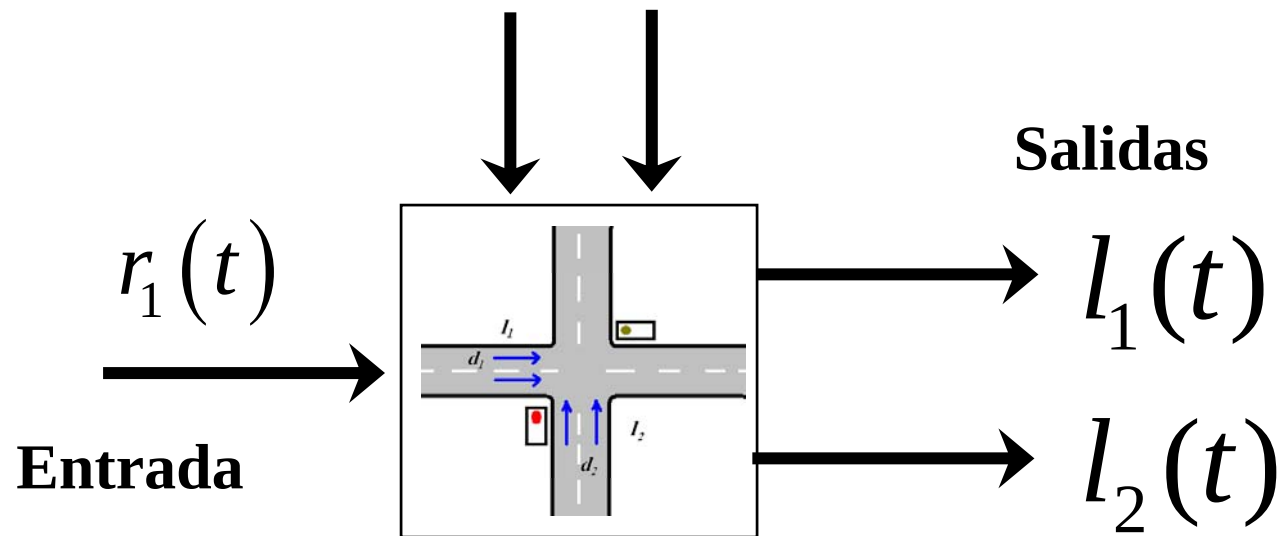


$$r_2 = s_2 \left(1 - \frac{L}{C} \right) - \frac{s_2}{s_1} r_1$$

Tiempo Continuo

$$\begin{aligned} \frac{dl_1}{dt} &= d_1 - r_1 \\ \frac{dl_2}{dt} &= d_2 - s_2 \left(1 - \frac{L}{C} \right) - \frac{s_2}{s_1} r_1 \end{aligned} \Rightarrow \dot{l} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{dl_1}{dt} \\ \frac{dl_2}{dt} \end{bmatrix}}_{f(x(t))} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -s_2 \left(1 - \frac{L}{C} \right) \end{bmatrix}}_{g(u(t))} + \underbrace{\begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{s_2}{s_1} \end{bmatrix}}_{g(u(t))} r_1 + \underbrace{\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}}_{\eta(t)}$$

$d_1(t), d_2(t)$ Perturbaciones

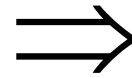
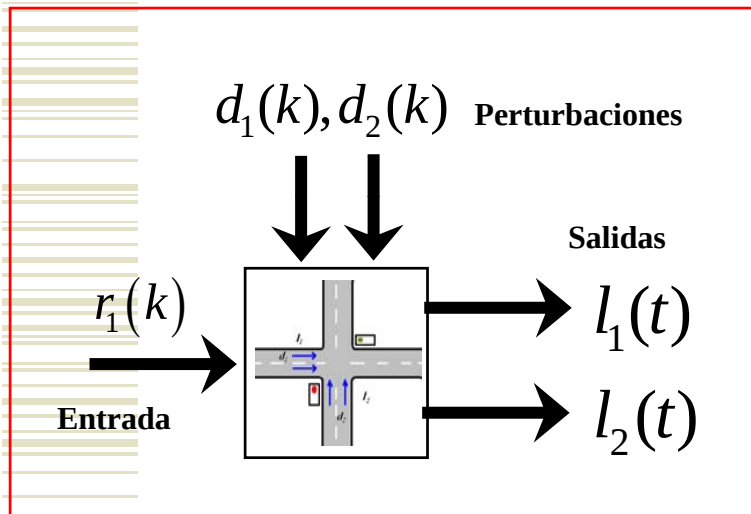


Tiempo Discreto

Discretización tipo Euler

$$\frac{dl_i}{dt} \approx \frac{l_i(k+1) - l_i(k)}{T_s}$$

T_s tiempo de muestreo (sampling time)



$$l_1(k+1) = l_1(k) + T_s(d_1 - r_1)$$

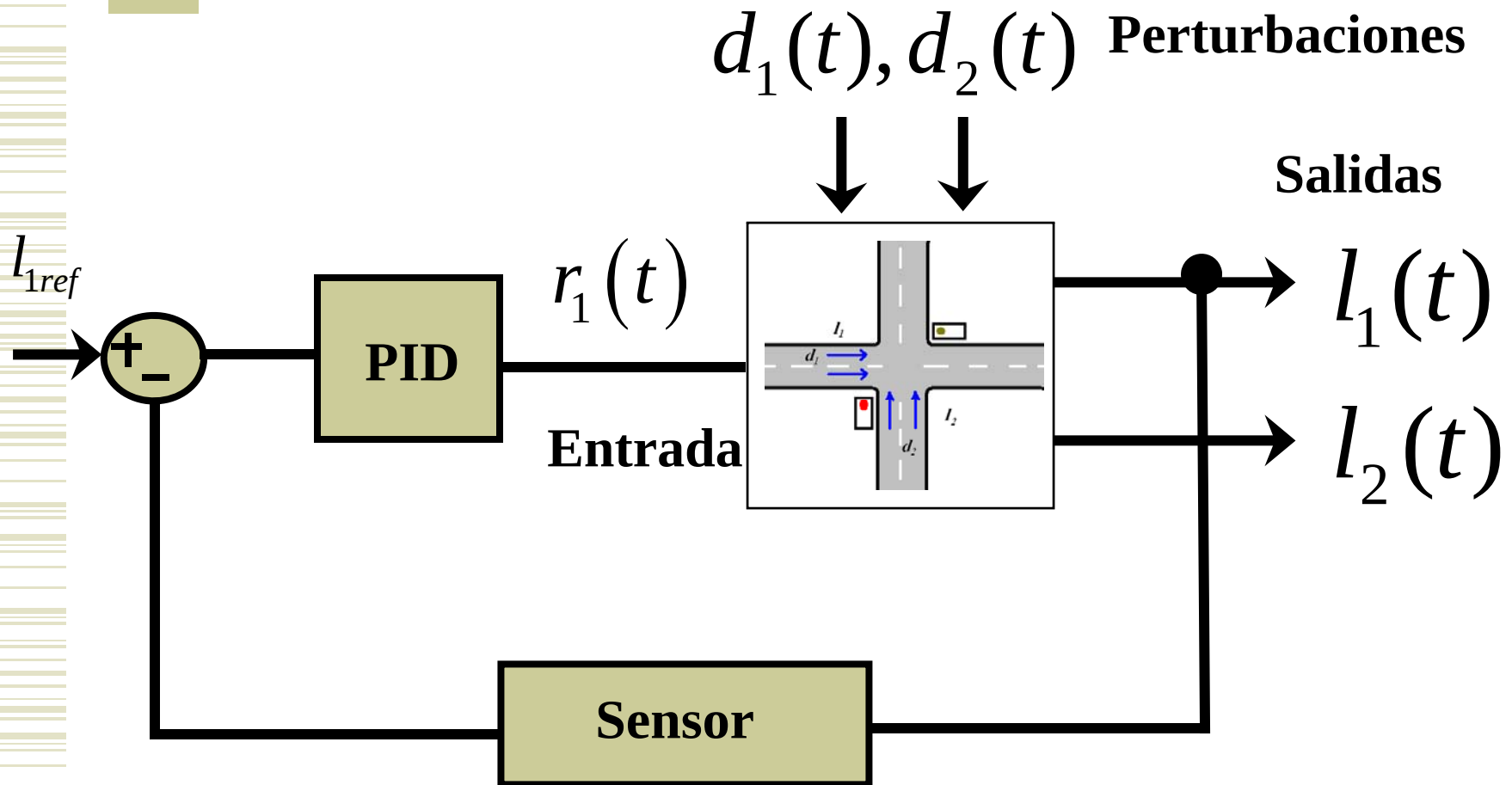
$$l_2(k+1) = l_2(k) + T_s \left(d_2 - s_2 \left(1 - \frac{L}{C} \right) - \frac{s_2}{s_1} r_1 \right)$$

$$\underbrace{l(k+1)}_{x(k+1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} l_1(k) \\ -T_s s_2 \left(1 - \frac{L}{C} \right) \end{bmatrix}}_{f(x(k))} + \underbrace{\begin{bmatrix} -T_s \\ -T_s \frac{s_2}{s_1} \end{bmatrix}}_{g(u(k))} r_1 + \underbrace{\begin{bmatrix} T_s d_1 \\ T_s d_2 \end{bmatrix}}_{\eta(k)}$$

Control Inteligente para Problemas
Dinámicos de Transporte

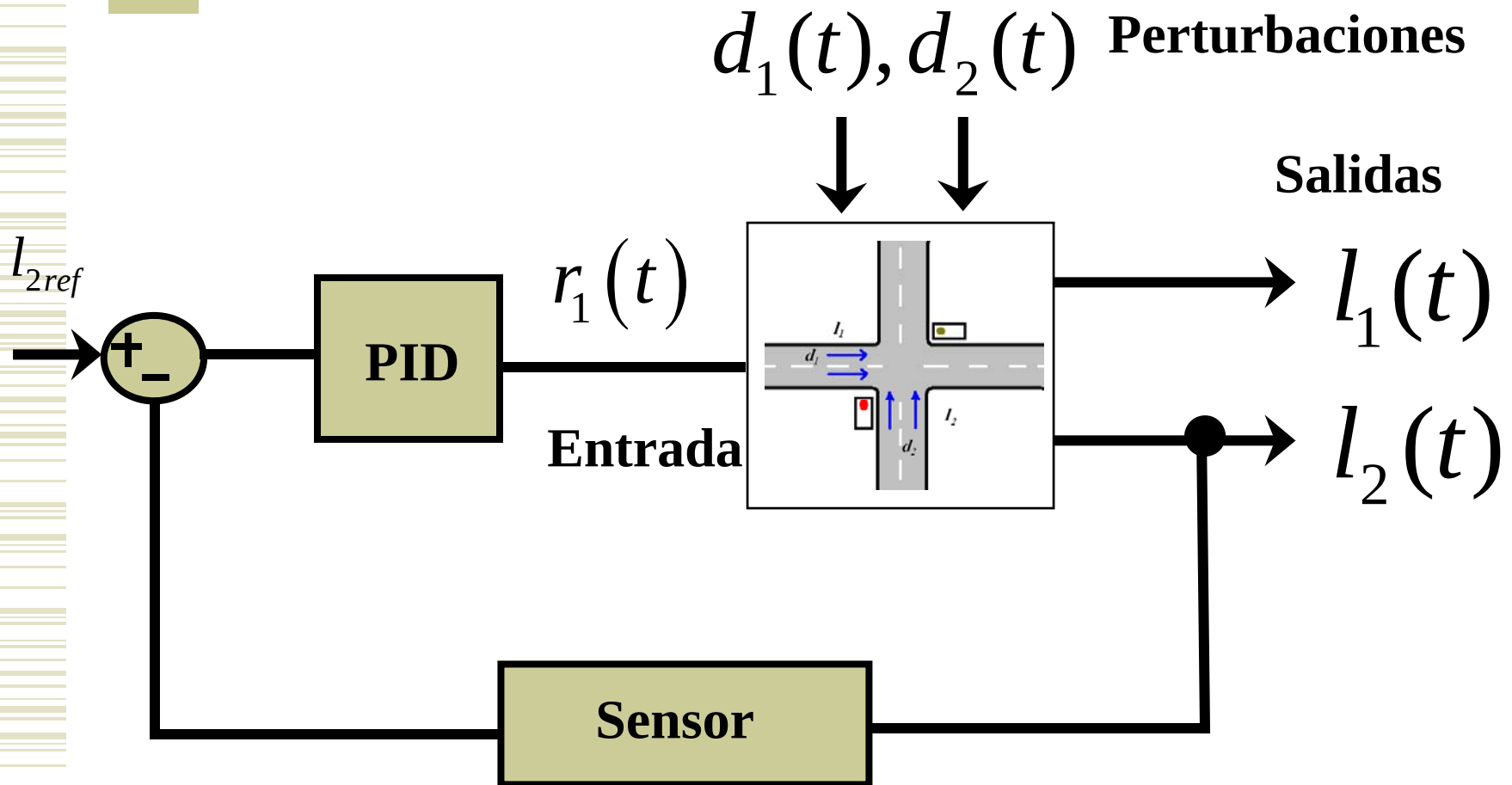
Esquemas de control con PID:

$$y(t) = l_1(t)$$



Esquemas de control con PID:

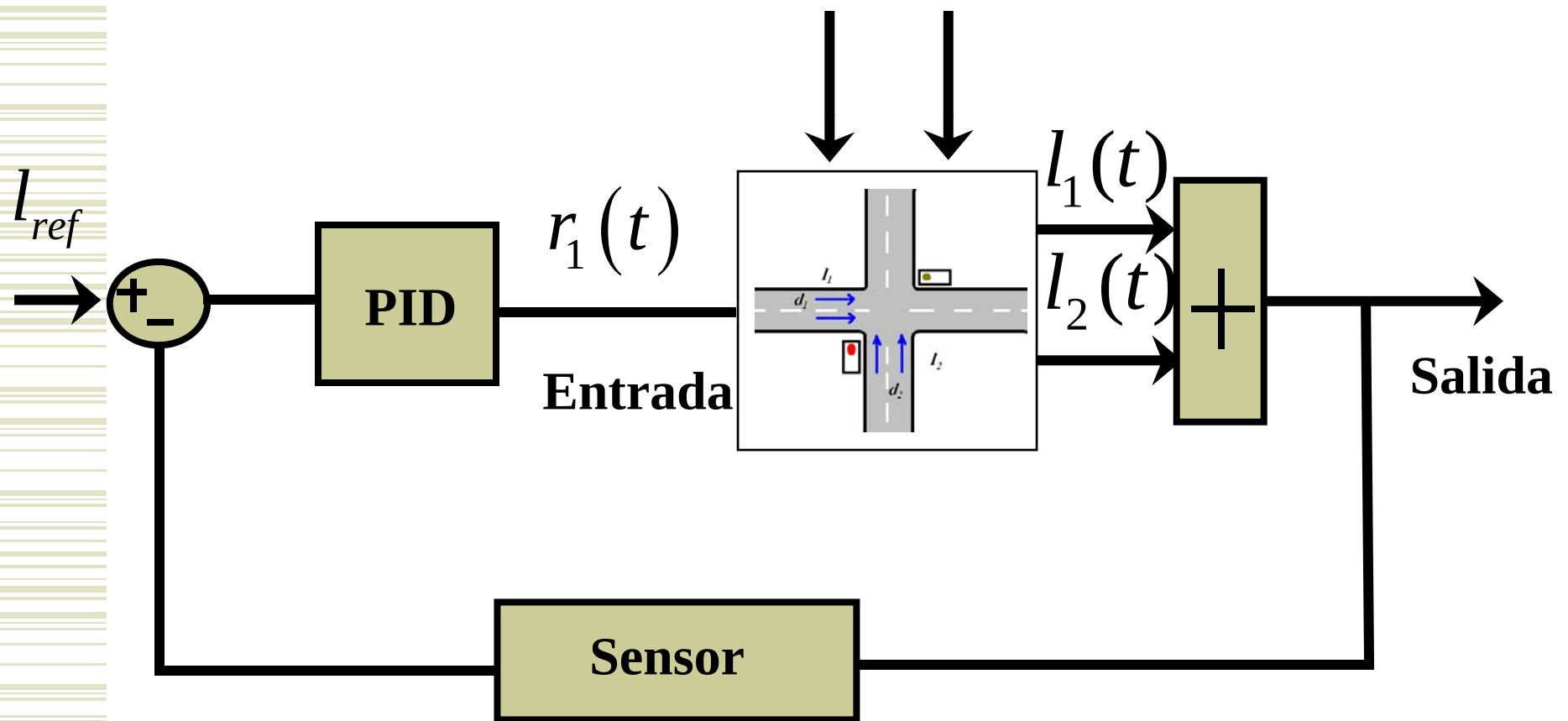
$$y(t) = l_2(t)$$



Esquemas de control con PID:

$$y(t) = c_1 l_1(t) + c_2 l_2(t)$$

$d_1(t), d_2(t)$ Perturbaciones

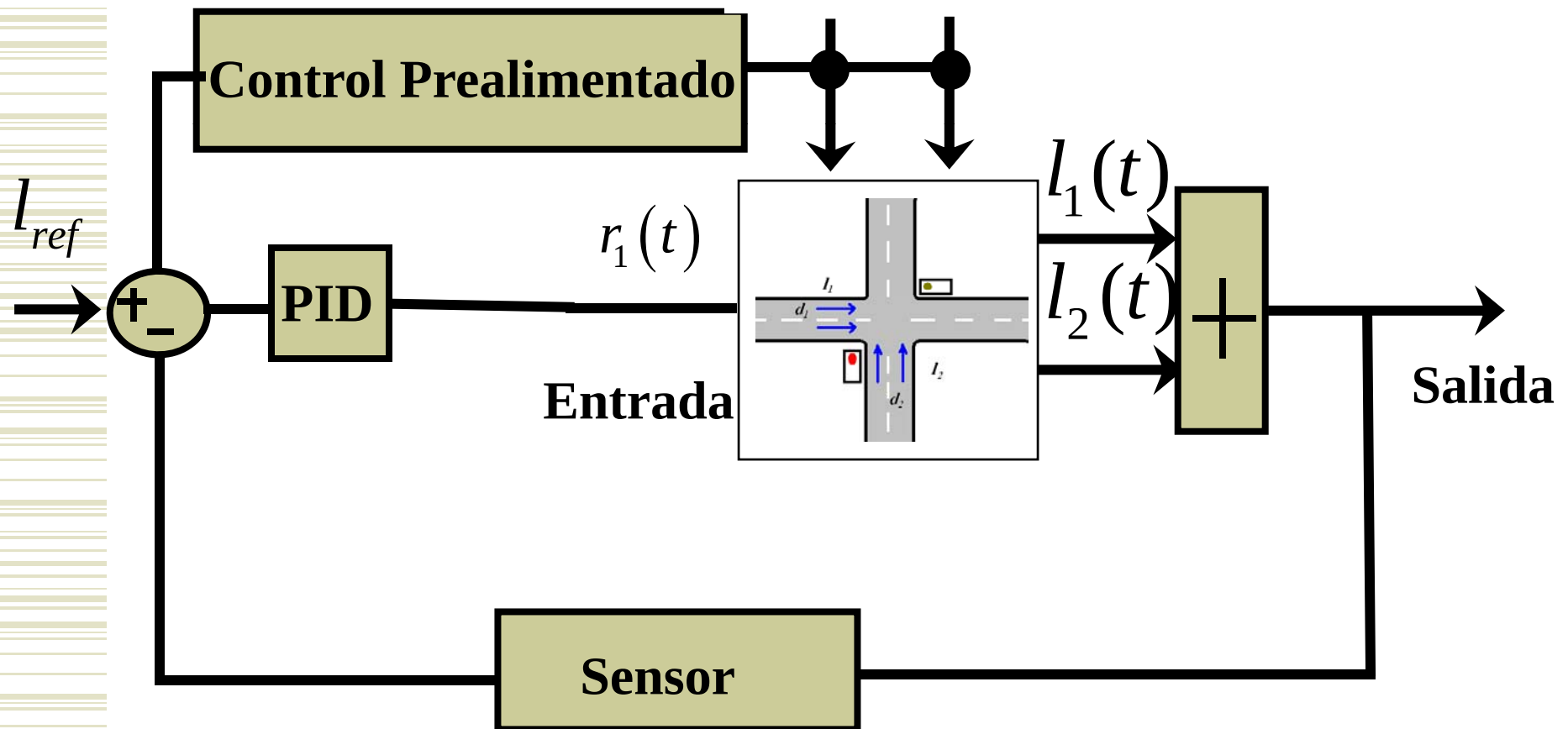


Control Inteligente para Problemas
Dinámicos de Transporte

Esquemas de control con PID y prealimentado:

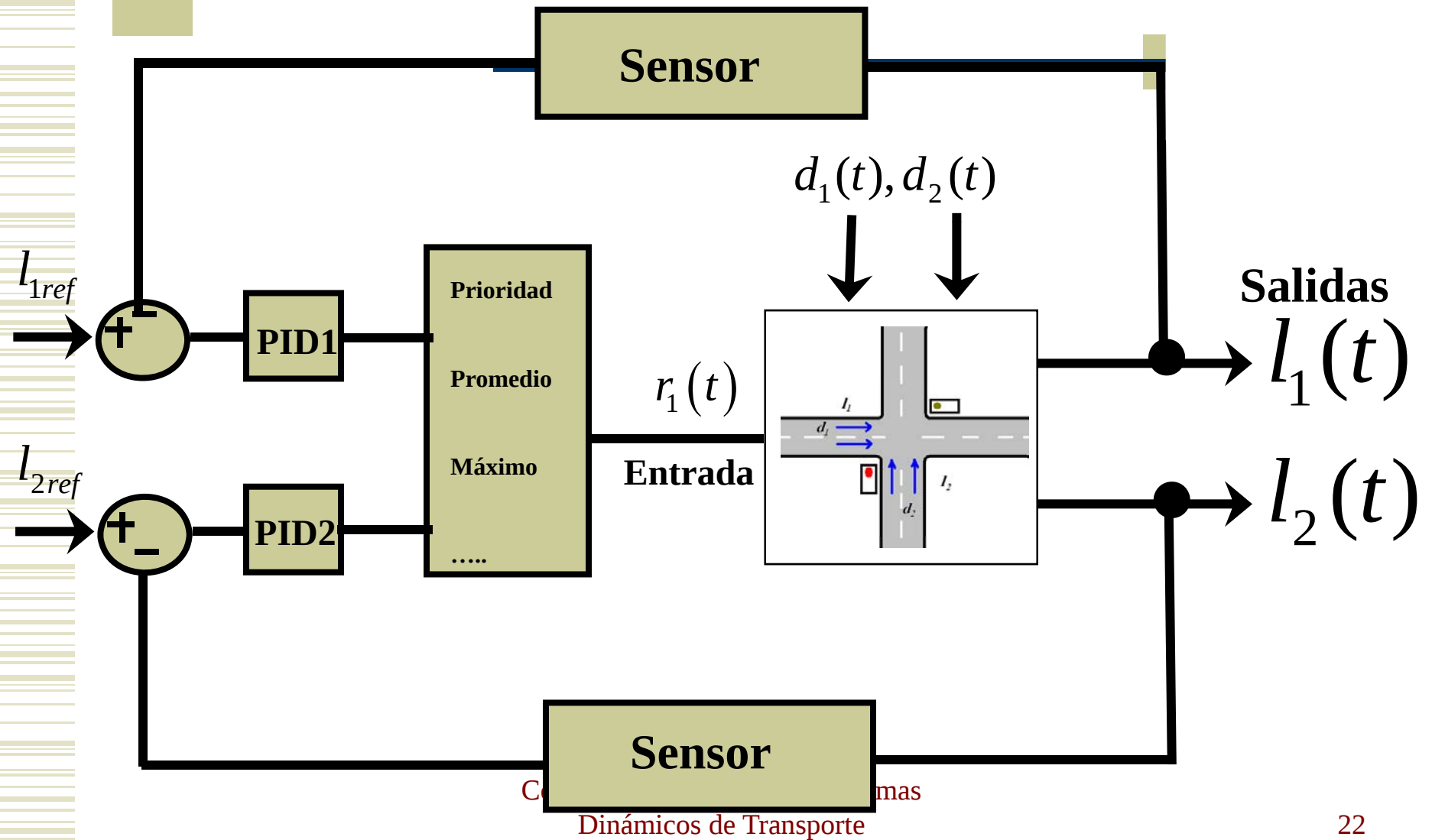
$$y(t) = c_1 l_1(t) + c_2 l_2(t)$$

$d_1(t), d_2(t)$ Perturbaciones



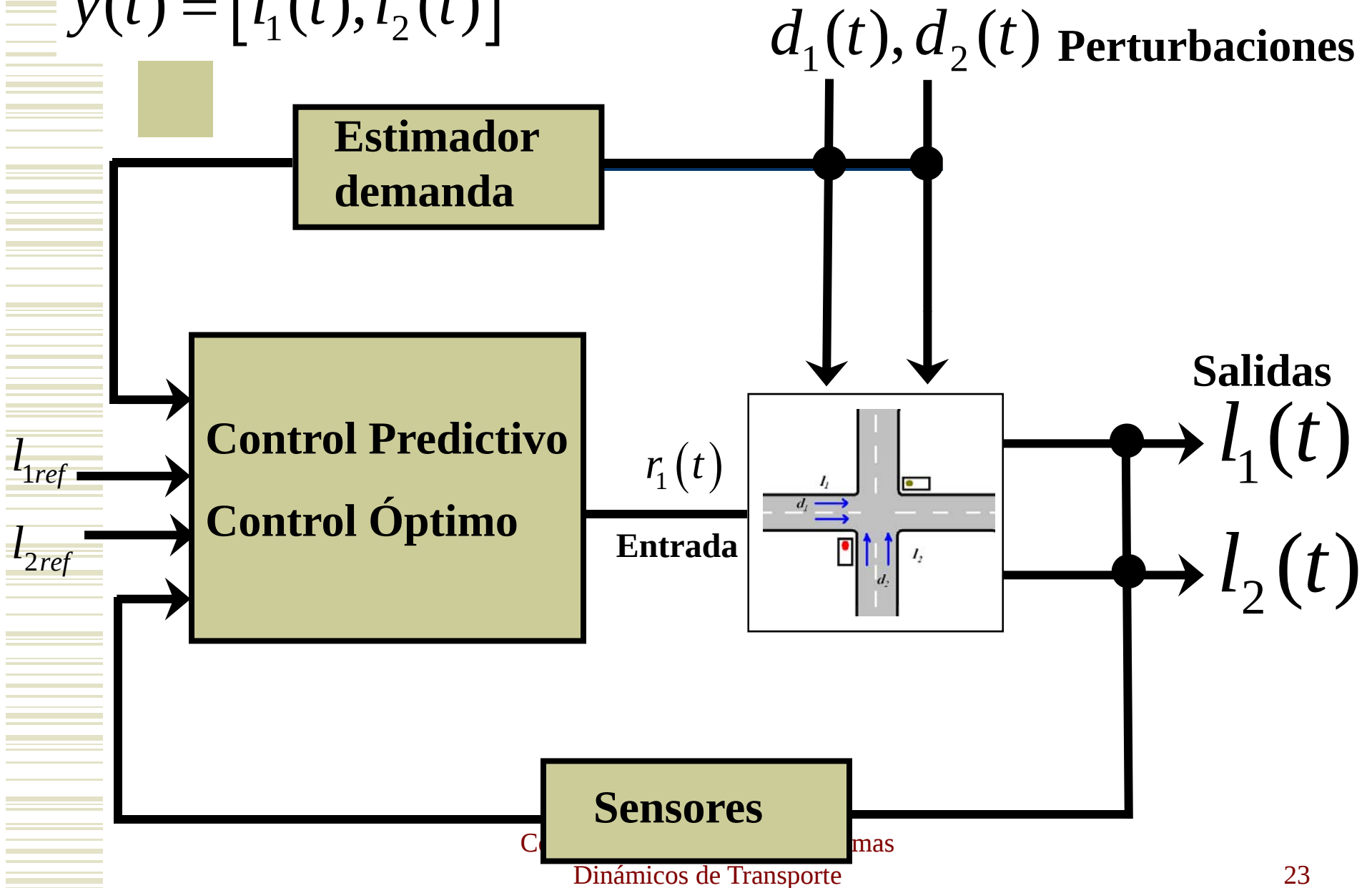
Esquemas de control con PID:

$$y(t) = [l_1(t), l_2(t)]$$



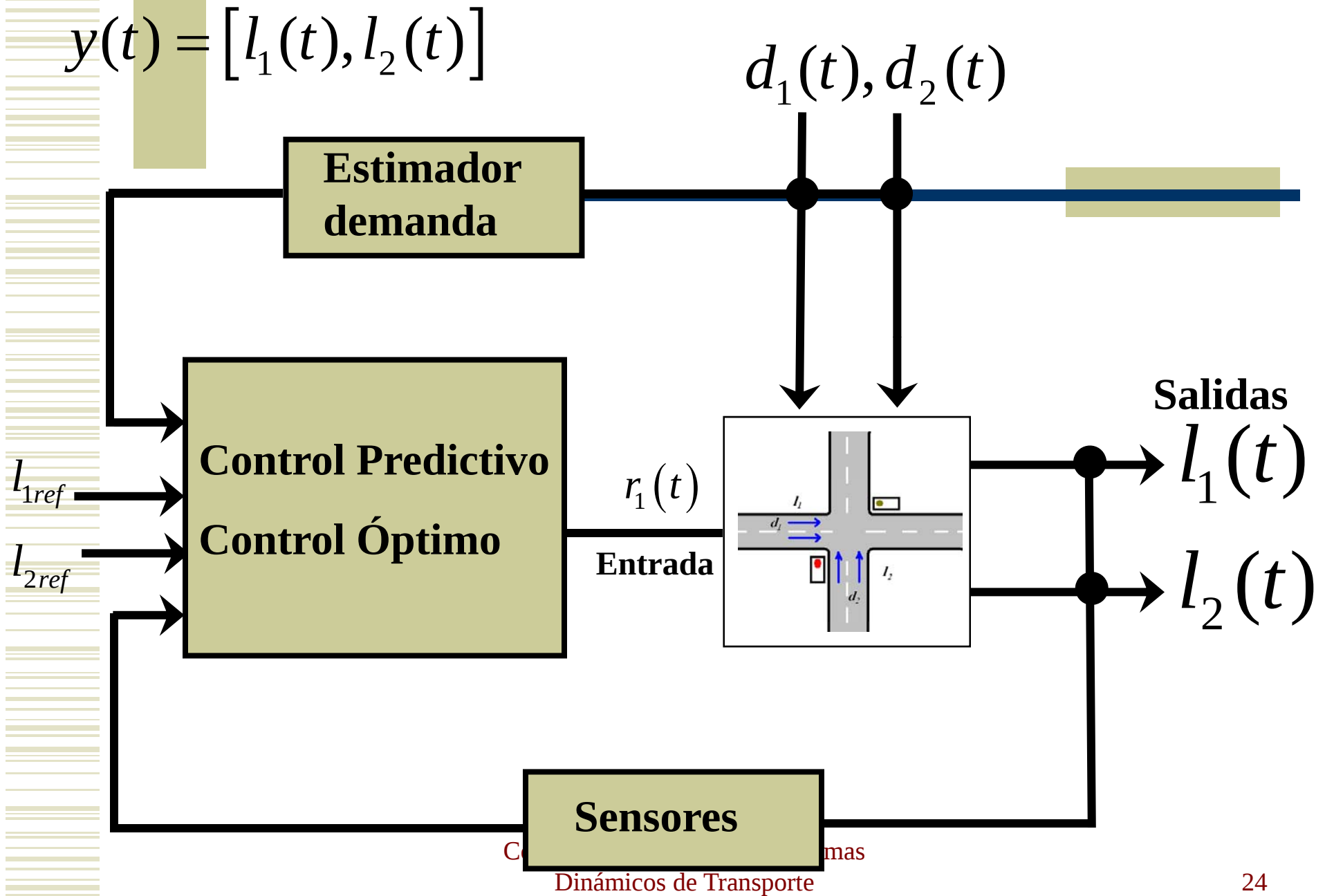
Esquema de control avanzado:

$$y(t) = [l_1(t), l_2(t)]$$



Esquema de control avanzado:

$$y(t) = [l_1(t), l_2(t)]$$



Modelación en variables de estado

- ◆ Variables de estado: Representan a las variables que caracterizan de manera única a un sistema o proceso. $x \in R^n$
- ◆ Variables de control o variables manipuladas: Son las variables sobre las cuales podemos decidir y afectar al sistema. $u \in R^r$
- ◆ Variables de salida: Variables que se miden.

$$y \in R^m$$

Modelación en variables de estado

- ♦ Ecuación de estado. Caracteriza al proceso.

$$\dot{x} = f(x, u, t) \qquad x(k+1) = f(x(k), u(k), k)$$

- ♦ Ecuación de salida. Caracteriza a las variables que se miden del proceso.

$$y = g(x, u, t) \qquad y(k) = g(x(k), u(k), k)$$

Modelación en variables de estado

- ◆ Caso Lineal, invariante, tiempo continuo.

$$(SL) \begin{cases} x' = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

$$x_0 \in R^n, A \in R^{n \times n}, B \in R^{n \times r}$$

$$C \in R^{m \times n}, D \in R^{m \times r}$$

Control Inteligente para Problemas
Dinámicos de Transporte

Modelación en variables de estado

- ◆ Dado $u(t)$ (estrategia de control).

$$x(t) = \underbrace{e^{A(t-t_0)} x_0}_{\text{Respuesta a entrada cero (Solución homogénea)}} + \underbrace{e^{At} \int_{t_0}^t e^{-A\tau} B u(\tau) d\tau}_{\text{Respuesta a estado cero (Solución particular)}}$$

$$y(t) = C e^{A(t-t_0)} x_0 + C e^{At} \int_{t_0}^t e^{-A\tau} B u(\tau) d\tau + D u$$

Modelación en variables de estado

- ♦ Controlabilidad.

$$\begin{cases} x' = Ax + Bu \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{♦ Este sistema es controlable si existe} \\ \text{u(t) tal que } x(T)=x_T \text{ dado.} \end{array}$$



- ♦ Criterio de Kalman:

La matriz de controlabilidad $[B, AB, \dots, A^{n-1}B]$ tiene rango n

Modelación en variables de estado

- ♦ Observabilidad.

$$\begin{cases} x' = Ax \\ y = Cx \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

- ♦ Este sistema es observable si conocido $y(t)$ y $u(t)$ en $[0, T]$, es posible recuperar la condición inicial $x(0)=x_0$ dado.



- ♦ Criterio de Kalman:

La matriz de observabilidad

$$\begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

tiene rango n

Control en variables de estado

- ♦ Caso Lineal, invariante, tiempo continuo.

Teorema de Localización de polos:

Si (A,B) controlable, existe K tal que el control $u(t)=-Kx(t)$ ubica los polos del sistema en lazo cerrado en los requerimientos.

$$(SL) \begin{cases} x' = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad \Rightarrow u = -Kx \Rightarrow x' = (A - BK)x$$

Dado un conjunto de valores propios,
el espectro de $(A - BK)$ se puede ubicar

Control Inteligente para Problemas
Dinámicos de Transporte en ese o en cualquier conjunto de valores propios.

Control en variables de estado

Ajustando K , se hace que los vp de $(A - BK)$ queden estables y cumpliendo requerimientos de diseño (ts, mov, etc...)

- ◆ Caso no lineal, invariante, tiempo continuo.

$$(SNL) \begin{cases} x' = f(x, u) \\ y = g(x, u) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad \text{si } u = -Kx \Rightarrow x' = f(x, -Kx)$$

¿Qué ocurre con SNL en
lazo cerrado?, ¿es posible

Control Inteligente para Problemas
Dinámicos de Transporte **controlarlo?**

Control en variables de estado

◆ Principio de linealización

$$(SNL) \begin{cases} x' = f(x, u) \\ y = g(x, u) \end{cases}$$

$$(L) \begin{cases} x' = \underbrace{\left[\frac{\partial f(x, u)}{\partial x} \right]_{(\bar{x}, \bar{u})}}_A \cdot x + \underbrace{\left[\frac{\partial f(x, u)}{\partial u} \right]_{(\bar{x}, \bar{u})}}_B \cdot u \\ y = \underbrace{\left[\frac{\partial g(x, u)}{\partial x} \right]_{(\bar{x}, \bar{u})}}_C \cdot x + \underbrace{\left[\frac{\partial g(x, u)}{\partial u} \right]_{(\bar{x}, \bar{u})}}_D \cdot u \end{cases}$$

Dada una trayectoria $(\bar{x}, \bar{u})$ de (SNL), si el sistema linealizado (L) en torno de la trayectoria $(\bar{x}, \bar{u})$ es controlable

$\Rightarrow$

el sistema no lineal es **localmente controlable**.

Control Óptimo

- ◆ En control óptimo se busca resolver problemas del tipo:

$$\underset{u(t), x(t)}{\text{Min}} \quad r(x(T)) + \int_{t_0}^T L(\tau, x(\tau), u(\tau)) d\tau \longrightarrow \text{Función Objetivo}$$

$$\text{s.a.} \quad x' = f(t, x(t), u(t)) \longrightarrow \text{EDO dinámica}$$

$$x(t_0) = x_0 \longrightarrow \text{Condición inicial}$$

$$x(T) \in \Omega \longrightarrow \text{Condición terminal}$$

$$u(t) \in U \longrightarrow \text{Restricción en las variables de control}$$

(Se debe aplicar solo controles factibles)

Control Óptimo

$$\underset{u(t), x(t)}{\text{Min}} \quad r(x(T)) + \int_{t_0}^T L(\tau, x(\tau), u(\tau)) d\tau$$

$$\text{s.a.} \quad x' = f(t, x(t), u(t))$$

$$x(t_0) = x_0$$

$$x(T) \in \Omega$$

$$u(t) \in U$$

- ♦ Si $r=0$ se llama Problema de Lagrange
- ♦ Si $L=0$ se llama Problema de Meyer
- ♦ Si ambas funciones son distintas de cero, se llama Problema de Bolza

Control Óptimo

- ◆ Principio del mínimo de Pontryagin:

Se define el hamiltoniano:

$$H(t, x, \lambda, u) = f(t, x(t), u(t)) \cdot \lambda - L(t, x(t), u(t))$$

- ◆ Sea u^* control óptimo, x^* trayectoria optima asociada al control óptimo. Entonces:

$\exists \lambda^*$ tal que:

$$x'^* = \nabla_{\lambda} H(t, x^*(t), \lambda^*(t), u^*(t)) \longrightarrow \text{EDO}$$

$$\lambda'^* = -\nabla_x H(t, x^*(t), \lambda^*(t), u^*(t)) \quad \text{Ecuación adjunta}$$

$$H(t, x^*(t), \lambda^*(t), u^*(t)) = \min_{a \in U} H(t, x^*(t), \lambda^*(t), a) \longrightarrow \text{Principio del mínimo}$$