EL7025/EL761/CI6308

Control Inteligente para Problemas Dinámicos de Transporte

Dra. Doris Sáez,
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile
Dr. Cristián Cortés
Departamento de Ingeniería Civil – Transporte
Universidad de Chile

Introducción al Control Predictivo

- Control Predictivo
- Modelos de Predicción
- GPC
- Control Predictivo en Variables de Estado
- Control Predictivo con Restricciones.

Camacho, E., Bordons, C. “Model Predictive Control”, Springer-Verlag, 1998.

Control Predictivo basado en Modelos

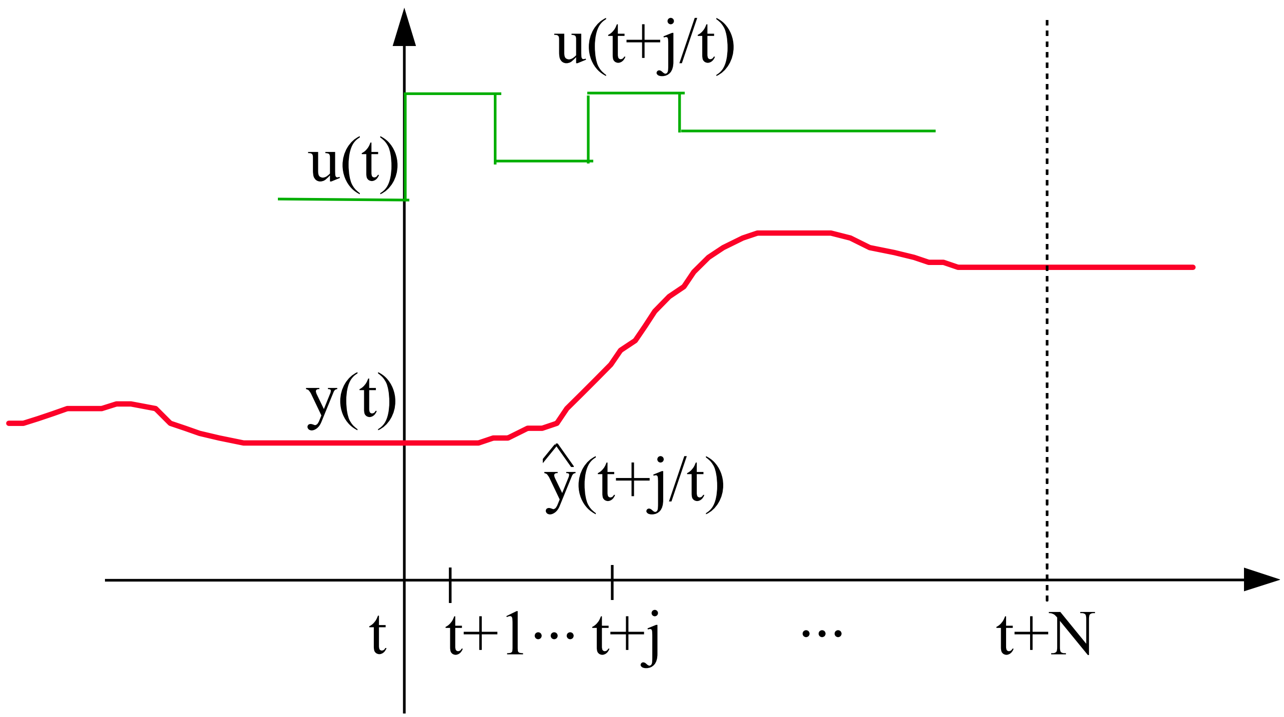
- El uso de un modelo matemático del proceso que se utiliza para predecir la evolución futura de las variables controladas sobre un horizonte de predicción.

- El establecimiento de una trayectoria deseada futura, o referencia, para las variables controladas.

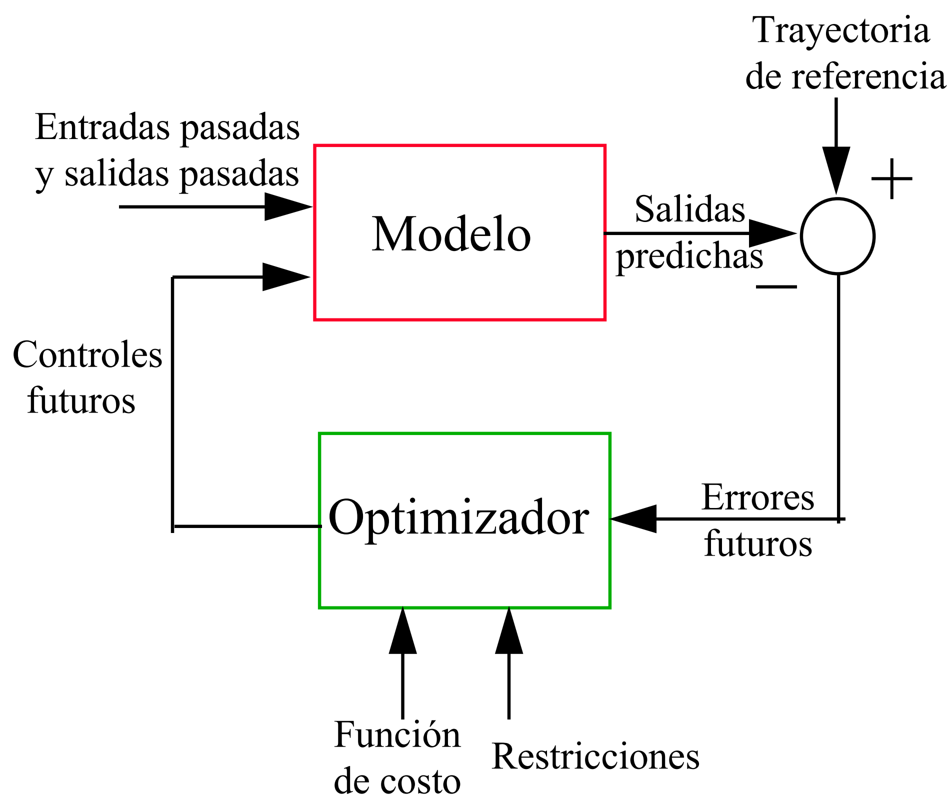
- El cálculo de las variables manipuladas optimizando una cierta función objetivo o función de costos.

- La aplicación del control siguiendo una política de horizonte móvil.

Control Predictivo basado en Modelos



Control Predictivo basado en Modelos



Control Predictivo basado en Modelos

- Los elementos principales del control predictivo son:
  - Modelos de predicción
  - Función objetivo
  - Obtención de la ley de control
  - Restricciones

Modelos de Predicción

- Modelo ARX

$$A(z^{-1})y(t) = B(z^{-1})u(t) + \frac{e(t)}{\Delta}$$

Función Objetivo

$$J = \sum_{j=N_1}^{N_2} \delta(j)\left[w(t+j) - \hat{y}(t+j/t)\right]^2 + \sum_{i=1}^{N_u} \lambda(i)\left[\Delta u(t+i-1)\right]^2$$

- $\delta(j)$ y $\lambda(j)$ son coeficientes de ponderación
- $\hat{y}(t+j/t)$ es la salida predicha en el instante t+j,
- $w(t+j)$ representa la trayectoria de referencia deseada,
- N1 y N2 son los horizontes mínimo y máximo de predicción,
- Nu es el horizonte de control

Obtención de la Ley de Control

- Para obtener los valores u(t+j/t) se minimiza la función de objetivo planteada anteriormente. Para ello se calculan los valores de las salidas predichas, haciendo uso de un modelo de predicción y luego se sustituyen estos valores en la función objetivo.
- Estructura de acción de control futura para $Nu < N2$.

$$\Delta u(t+j-1) = 0$$

para $j > Nu$.

Restricciones

$$u_{\min} \leq u(t) \leq u_{\text{máx}}$$

$$\Delta u_{\min} \leq \Delta u(t) \leq \Delta u_{\text{máx}}$$

$$y_{\min} \leq y(t) \leq y_{\max}$$

Modelos de Predicción

$$Ay_t = Bu_{t-d} + n_t = Bu_{t-d} + \frac{w_t}{\Delta}$$

$$\frac{1}{A\Delta} = \underbrace{E_j}_{\text{Cuociente}} + \underbrace{\frac{F_j}{A\Delta} z^{-j}}_{\text{Resto}}$$

$$y_{t+j} = G_j \Delta u_{t-d+j} + E_j w_{t+j} + F_j y_t \qquad G_j \cong BE_j$$

$$E\left[y_{t+j} / t\right] \equiv \hat{y}_{t+j} = G_j \Delta u_{t-d+j} + F_j y_t$$

Modelos de Predicción

- En forma matricial $\hat{y} = G\tilde{u} + f$

$$\hat{y} \equiv \left[\hat{y}_{t+}, \hat{y}_{t+2}, \ldots, \hat{y}_{t+N}\right] \qquad \tilde{u} \equiv \left[\Delta u_t, \Delta u_{t+1}, \ldots, \Delta u_{t+2}, \ldots., \Delta u_{t+N-1}\right]^T$$

$$G = \begin{bmatrix} g_0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ g_1 & g_0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \\ & & & & \\ \vdots & \vdots & & & \\ g_{N-1} & g_{N-2} & \cdots & & g_0 \end{bmatrix}_{N \times N}$$

Control Predictivo Generalizado

- G.P.C. ("Generalized Predictive Control")
- Modelo ARIX $\hat{y}_{t+j} = E[y_{t+j} / t] = G_j \Delta u_{t-d+j} + F_j y_t$
- Función Objetivo

$$J = \sum_{j=N_1}^{N_2} [\hat{y}_{t+j} - r_{t+j}]^2 + \sum_{i=1}^{N_u} \lambda_i [\Delta u_{t+i-1}]^2$$

Control Predictivo Generalizado

- Ley de control GPC $\tilde{u} = (G^T G + \lambda I)^{-1} G^T (r - f)$

$$u_t = u_{t-1} + H_1^T (r - f)$$

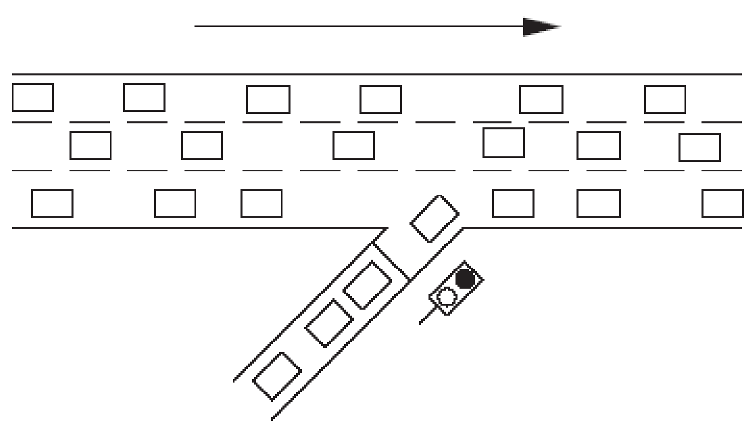
H_1^T la primera fila de $(G^T G + \lambda I)^{-1} G^T$

$G\tilde{u}$ términos desconocidos $\{\Delta u_t, \Delta u_{t+1}, \ldots, \Delta u_{t+N_u-1}\}$

f términos conocidos $\{\Delta u_{t-1}, \Delta u_{t-2}, \ldots, y_t, y_{t-1}, \ldots\}$

Ejemplo

- Control Predictivo para acceso de pistas (Ramp Metering)



Ejemplo

Controlador PID

$$r(k) = r(k-1) + K_R(\hat{\rho} - \rho(k)),$$

r(k) es la tasa de metering

ρ(k) es la densidad

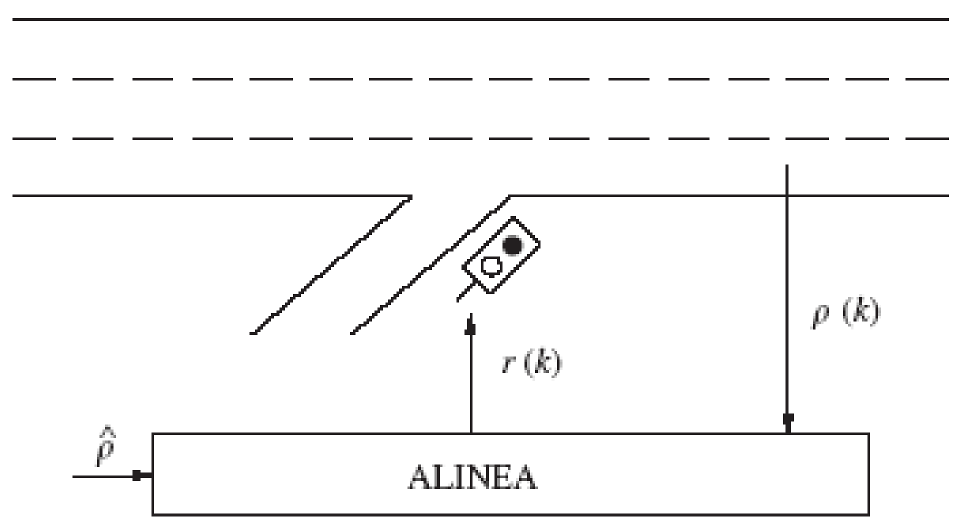


Fig. 3. Control scheme for ALINEA.

Control Predictivo para Acceso de Pistas

Función objetivo dada por el tiempo total gastado por los vehículos en el área estudiada

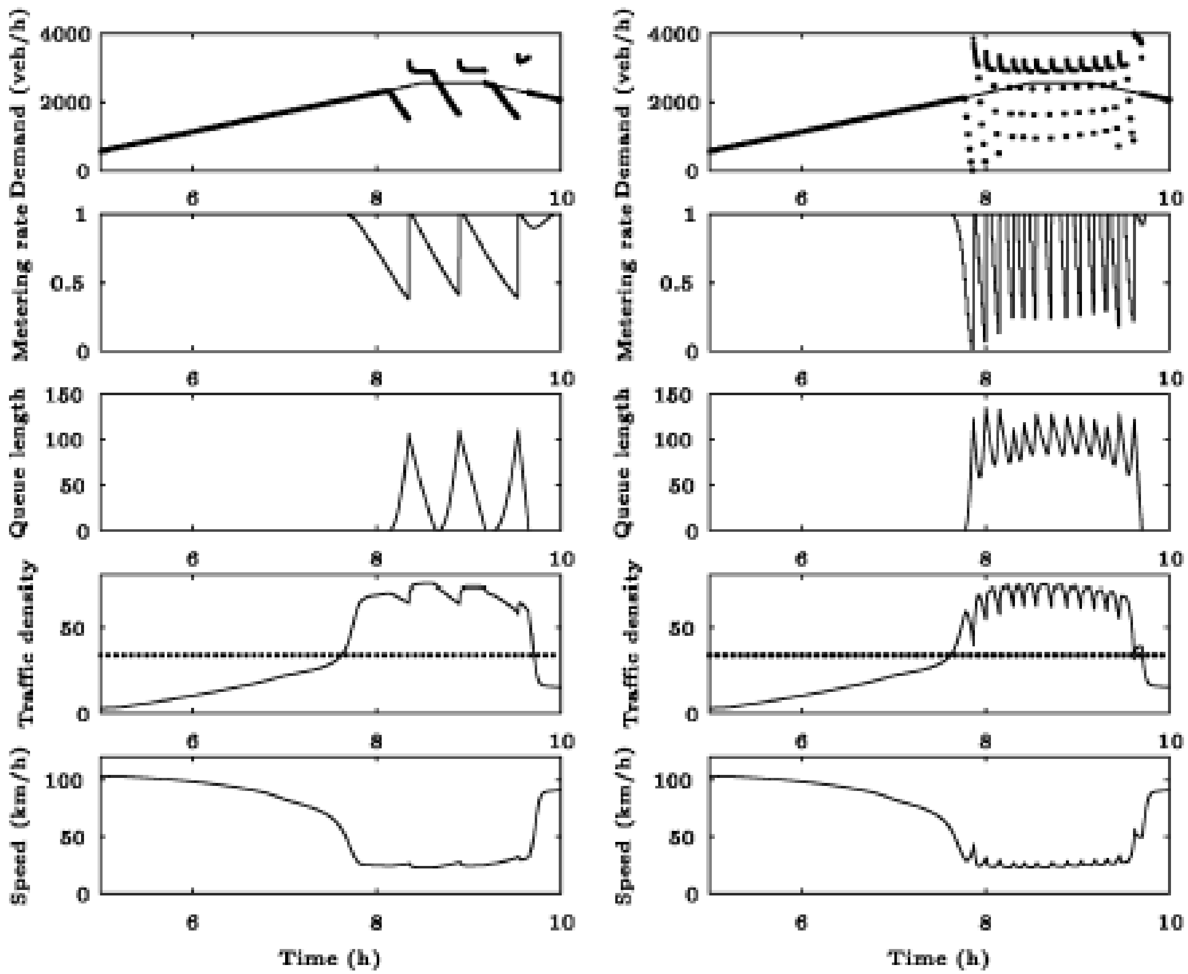
$$J(k_0) = \sum_{k=k_0}^{k_0+N_p-1} \left[\sum_{j \in \mathscr{I}_s} \rho_j(k) l_j n_j + \alpha \sum_{m \in \mathscr{I}_o} w_m(k) + \alpha_{\text{ramp}} (r(k) - r(k-1))^2 \right] \Delta T_{\text{ctrl}},$$

$w_m(k)$ largo de cola

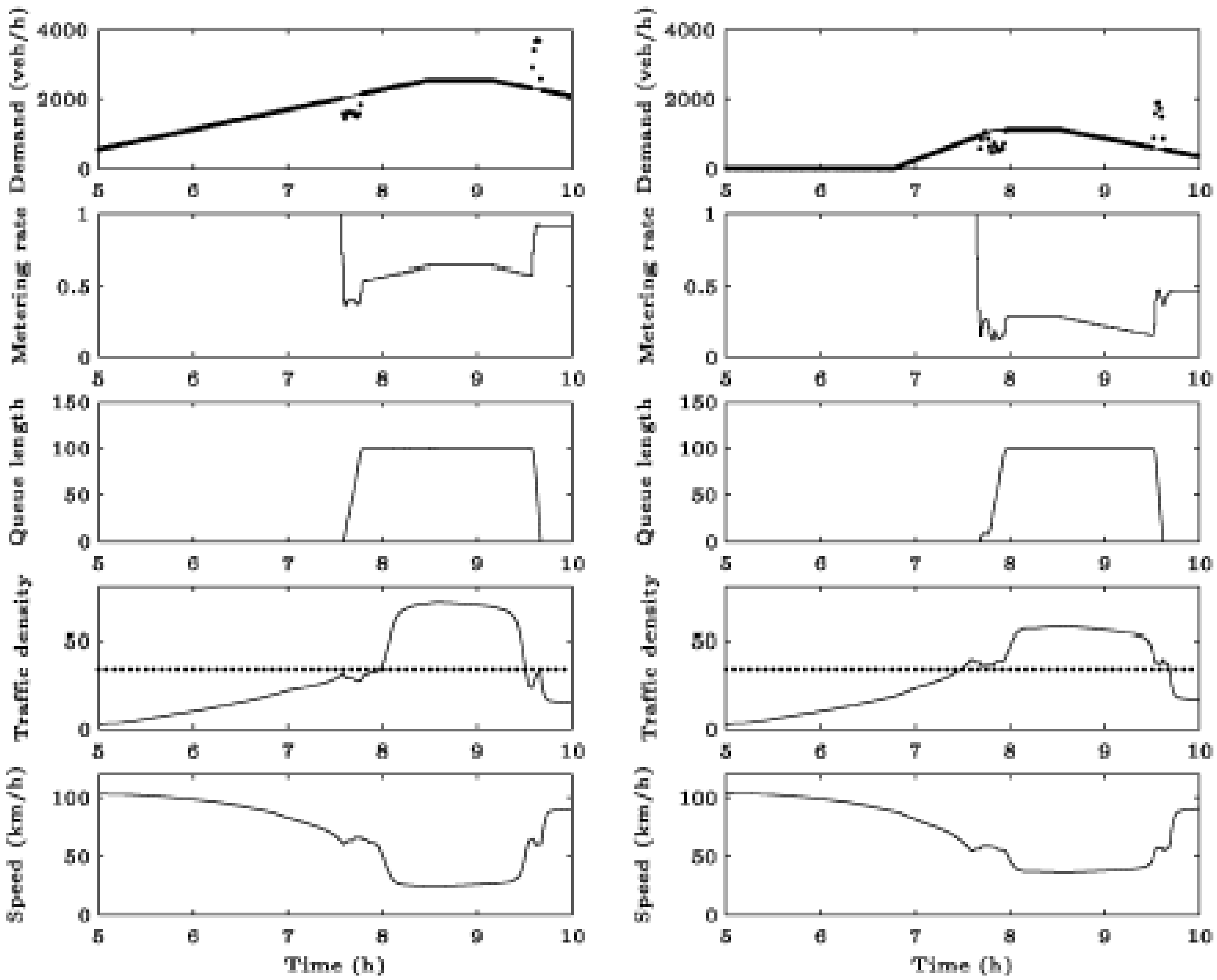
l_j largo de la sección

n_j número de carriles

Resultados: Controlador PID



Resultados: Control Predictivo



Introducción al Control Predictivo

- Control Predictivo √
- Modelos de Predicción √
- GPC√
- Control Predictivo en Variables de Estado
- Control Predictivo con Restricciones.

Camacho, E., Bordons, C. “Model Predictive Control”, Springer-Verlag, 1998.

Control Predictivo en Variables de Estado

- Considere que un proceso con n salidas y m estados puede ser descrito por el siguiente modelo en variables de estado:

$$x(t+1) = Ax(t) + B\Delta u(t) + Gw(t)$$

$$y(t) = Dx(t) + w(t)$$

Control Predictivo en Variables de Estado

- El estado en el instante t+j está dado por

$$x(t+j) = A^{j}x(t) + \sum_{i=1}^{j} A^{j-i} B\Delta u(t+i-1)$$

$$+ \sum_{i=2}^{j} A^{j-i} G w(t+i-1) + A^{j-1} G\big(y(t) - Dx(t)\big)$$

- La predicción de la salida

$$\hat{y}(t+j/t) = DA^{j}\hat{x}(t/t) + \sum_{i=1}^{j} A^{j-i} BD\Delta u(t+i-1)$$

$$DA^{j-1} G\big(y(t) - D\hat{x}(t/t)\big)$$

Control Predictivo en Variables de Estado

- Matricialmente,

$$\begin{bmatrix} \hat{y}(t+1/t) \\ \hat{y}(t+2/t) \\ \vdots \\ \hat{y}(t+N/t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D \\ DA \\ \vdots \\ DA^{N-1} \end{bmatrix} (A-GD)\hat{x}(t/t) + \begin{bmatrix} D \\ DA \\ \vdots \\ DA^{N-1} \end{bmatrix} Gy(t)$$

$$+ \begin{bmatrix} DB & & & \\ DAB & DB & & \\ \vdots & \vdots & & \\ DA^{N-1}B & DA^{N-2}B & \cdots & DB \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u(t) \\ \vdots \\ \\ \Delta u(t+N-1) \end{bmatrix}$$

Control Predictivo en Variables de Estado

- Matricialmente $\hat{Y} = S_N \Delta U + F$

$$\hat{Y} = \begin{bmatrix} \hat{y}(t+1/t) & \hat{y}(t+2/t) & & \hat{y}(t+N/t) \end{bmatrix}^T$$

$$\Delta U = \begin{bmatrix} \Delta u(t) & \Delta u(t+1) & & \Delta u(t+N-1) \end{bmatrix}^T$$

$$S_N = \begin{bmatrix} DB & & & \\ DAB & DB & & \\ \vdots & \vdots & & \\ DA^{N-1}B & DA^{N-2}B & \cdots & DB \end{bmatrix} \quad F = \begin{bmatrix} D \\ DA \\ \vdots \\ DA^{N-1} \end{bmatrix} \left[(A - GD)\hat{x}(t/t) + Gy(t) \right]$$

Control Predictivo en Variables de Estado

- Matricialmente, la función objetivo

$$J = \left(\hat{Y} - R\right)^T \Lambda_e \left(\hat{Y} - R\right) + \Delta U \Lambda_u \Delta U$$

con R es la matriz de referencia y Λ_u, Λ_e son las matrices de ponderación.

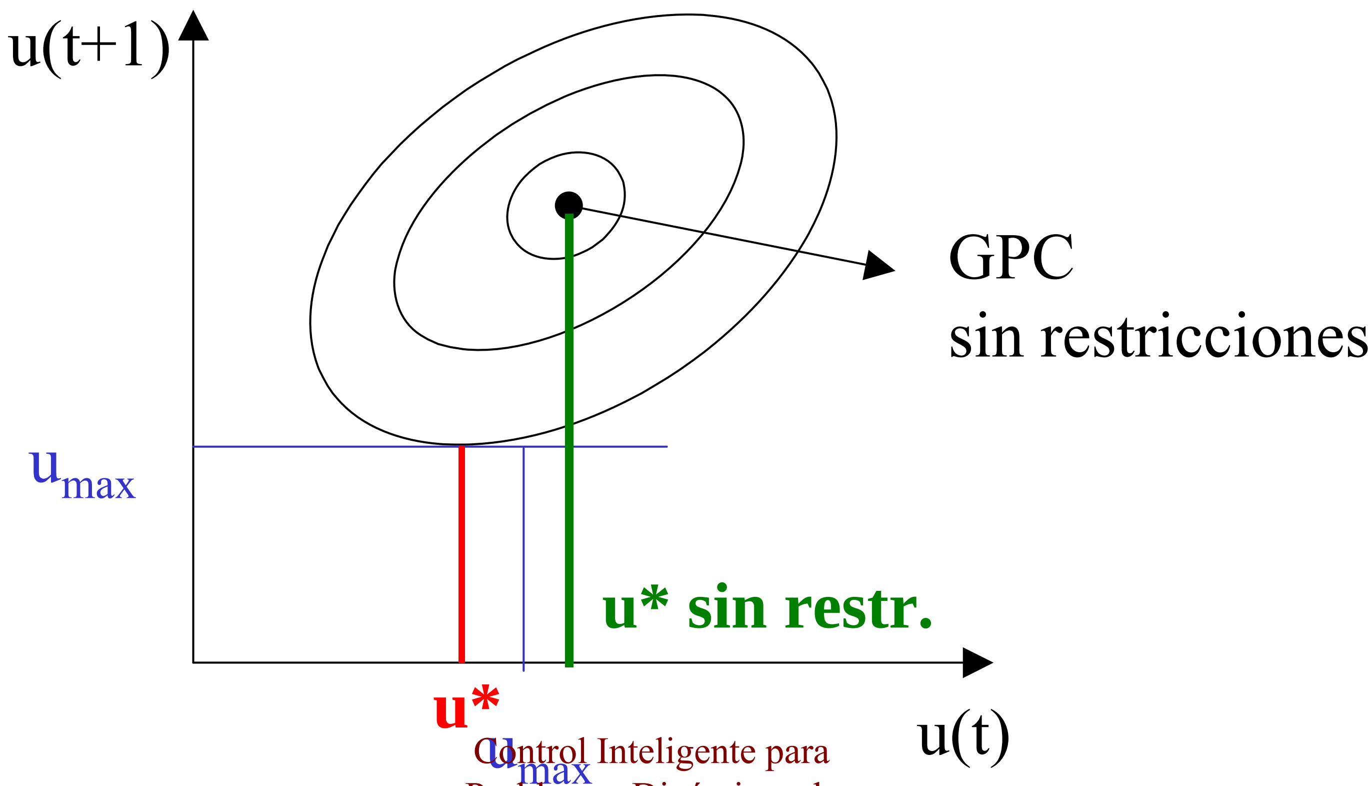
- Acción de control

$$\Delta U = \left(S_N^T \Lambda_e S_N + \Lambda_u\right)^{-1} S_N^T \Lambda_e \left(R - F\right)$$

Control Predictivo con Restricciones

- En la práctica, se requiere mantener las variables del proceso en rangos que aseguren el buen comportamiento de los equipos y evitar situaciones críticas.
- Además, la operación del proceso está determinada por objetivos económicos, que usualmente llevan al proceso a operar cerca de las restricciones.
- Los sistemas de control, en especial, los sistemas de control predictivo se anticipan a estas restricciones y corrigen las acciones de control.

Control Predictivo con Restricciones



Control Predictivo con Restricciones

- Restricciones de rango en las variables manipuladas

$$u_{min} \leq u(t+i-1) \leq u_{máx}$$

$i = 1, \ldots, N_u$. Matricialmente,

$$u_{min}\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix}u(t)\\u(t+1)\\\vdots\\u(t+N_u-1)\end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}u_{max}$$

Control Predictivo con Restricciones

$$[u_{min} - u(t-1)]\begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix} \le \begin{bmatrix}1 & 0 & & 0\\1 & 1 & & \\\vdots & & \ddots & \\1 & \cdots & 1 & 1\end{bmatrix}\Delta u \le \begin{bmatrix}1\\1\\\vdots\\1\end{bmatrix}[u_{max} - u(t-1)]$$

$$[u_{min} - u(t-1)]\mathbf{1} \le T\Delta u \le \mathbf{1}[u_{max} - u(t-1)]$$

$$\Delta u = [\Delta u(t), \Delta u(t+1), \ldots, \Delta u(t+N_u+1)]^T$$

Control Predictivo con Restricciones

- Restricciones de variación de las variables manipuladas

$$\Delta u_{min} \leq \Delta u(t+i-1) \leq \Delta u_{máx}$$

con $i = 1,\ldots,N_u$.

$$\Delta u_{min} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \Delta u \leq \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \Delta u_{máx}$$

$$\Delta u_{min} \mathbf{1} \leq \mathbf{I} \Delta u \leq \mathbf{1} \Delta u_{máx}$$

Control Predictivo con Restricciones

- Restricciones de rango en las variables controladas

$$y_{min} \leq \hat{y}(t+j) \leq y_{máx}$$

$j = 1, \ldots, N_y$.

$$y_{min}\mathbf{1} \leq G\Delta u + f \leq \mathbf{1}y_{máx}$$

$$\Delta y_{min} - \mathbf{D}f + \mathbf{1_0}\, y(t) \leq \mathbf{D}G\Delta u \leq \Delta y_{máx} - \mathbf{D}f + \mathbf{1_0}\, y(t)$$

Control Predictivo con Restricciones

1. Si no existen restricciones o si éstas no se consideran, la minimización de la función objetivo genera una solución analítica.
2. Si se consideran restricciones, la solución, en general, se obtiene utilizando un algoritmo numérico de optimización con restricciones.

Control Predictivo con Restricciones

- Para esta segunda clase de problemas, en que la función objetivo es cuadrática, se cumple:
  - Para que exista solución al problema sin restricciones, la función objetivo debe ser convexa.
  - Para que exista solución al problema de optimización con restricciones, debe haber al menos un valor para el cual las variables de optimización cumplan todas las restricciones impuestas.
  - Para asegurar la existencia de una solución única, el espacio de restricciones debe ser convexo

Control Predictivo con Restricciones

- Cuando se incorporan restricciones lineales, el problema de optimización para el GPC queda definido por:

$$\text{Min } J = (G\Delta u + f - r)^T (G\Delta u + f - r) + \lambda \Delta u^T \Delta u$$

$$A\Delta u \leq b$$

Control Predictivo con Restricciones

- Programación cuadrática (QP): Función objetivo cuadrática y restricciones lineales.
  - Caso. Restricciones de igualdad.

$$\mathrm{Min}\ J = \frac{1}{2}\Delta u^T H \Delta u + b^T \Delta u + f_0$$

$$A\Delta u = a$$

Control Predictivo con Restricciones

Si $A\Delta u = a$, entonces:

$$\Delta u = Ya + Zv$$

donde Y, Z son matrices de nxm y nx(n-m) respectivamente tal que

$$AY = I \qquad AZ = 0$$

Control Predictivo con Restricciones

$$J(v) = \frac{1}{2}[Ya + Zv]^T H[Ya + Zv] + b^T[Ya + Zv] + f_0$$

$$J(v) = \frac{1}{2} v^T Z^T HZv + [b^T + a^T Y^T]Zv + \left[b^T + \frac{1}{2} a^T Y^T H\right] Ya + f_0$$

- Entonces, el óptimo global se encuentra resolviendo:

$$Z^T HZv = -z^T[b + HYa]$$

Control Predictivo con Restricciones

- Nótese que Δu^k es un punto que satisface la restricción
$$A\Delta u^k = a$$
- Cualquier otro punto u que satisface la restricción se puede expresar como:

$$\Delta u = \Delta u^k + Zv$$

$$A\Delta u = A\Delta u^k + AZv = A\Delta u^k$$

Control Predictivo con Restricciones

- Entonces, el vector v se puede expresar como la solución de:

$$Z^T H Z v = -Z^T g(\Delta u^k)$$

con $g(\Delta u^k) = H\Delta u^k + b$ que es el gradiente de $J(\Delta u)$ en Δu^k. Obtenido v, se encuentra

$$\Delta u^* = Ya + Zv$$