EL-611

Álgebra de Boole y Conceptos Básicos

Álgebra de Boole (1)

Un Álgebra *Booleana* es un conjunto de elementos *B* con dos operaciones binarias (+) y (•), satisfaciendo los siguientes postulados o axiomas:

1. Si a, b Є B, entonces:

   (i) a + b = b + a

   (ii) a • b = b • a

   esto es, + y • son ***Conmutativos***

2. Si a, b, c Є B, entonces:

   (i) a + (b • c) = (a + b) • (a + c)

   (ii) a • (b + c) = (a • b) + (a • c)

   esto es, +(•) es ***Distributiva*** sobre •(+)

Álgebra de Boole (2)

3. El conjunto *B* tiene dos ***elementos identidad*** diferentes, denominados como 0 y 1, de tal manera que para cada elemento en *B*:

   $$(i)\ a + 0 = 0 + a = a$$

   $$(ii)\ a \bullet 1 = 1 \bullet a = a$$

   Estos elementos 0 y 1 son el *elemento identidad aditivo* y el *elemento identidad multiplicativo*, respectivamente. No confundir con los enteros 0 y 1

4. Para cada elemento a Є *B*, existe un elemento a’, llamado ***complemento***, tal que:

   $$(i)\ a + a' = 1$$

   $$(ii)\ a \bullet a' = 0$$

Teoremas

- *Teorema A.1* (***Principio de Dualidad***)

  Toda identidad algebraica deducible de los postulados del Algebra de Boole permanecen válidas si:

  - Se intercambian las operaciones (+) y (•), y
  - Se intercambian los elementos identidades 0 y 1

- *Teorema A.2*

  Todo elemento en *B* tiene un ***único*** complemento

- *Teorema A.3*

  Para cualquier a Є *B* se tiene:

$$(1)\ a + 1 = 1$$

$$(2)\ a \bullet 0 = 0$$

Teoremas

- *Teorema A.4*
  El complemento del elemento 1 es 0 y vice versa:
  (1) $0' = 1$
  (2) $1' = 0$
- *Teorema A.5 (**Ley de Idempotencia**)*
  Para cualquier a Є *B* se tiene:
  (1) $a + a = a$
  (2) $a \bullet a = a$
- *Teorema A.6 (**Ley de Involución**)*
  Para todo a Є *B* se tiene:
  $(a')' = a$
- *Teorema A.7 (**Ley de Absorción**)*
  Para cada par de elementos a y b en *B:*
  (1) $a + a \bullet b = a$
  (2) $a \bullet (a + b) = a$

Teoremas

- *Teorema A.8*

  Para cada par de elementos a y b en *B:*

  (1) $a + a' \bullet b = a + b$

  (2) $a \bullet (a' + b) = a \bullet b$

- *Teorema A.9 (**Asociatividad**)*

  En un Álgebra Booleana, cada una de las operaciones (+) y (•) es asociativa. Esto es, para cada a, b, c Є *B* se tiene:

  (1) $a + (b + c) = (a + b) + c$

  (2) $a \bullet (b \bullet c) = (a \bullet b) \bullet c$

- *Teorema A.10 (**Ley de DeMorgan**)*

  Para cada par de elementos a y b en *B:*

  (1) $(a + b)' = a' \bullet b'$

  (2) $(a \bullet b)' = a' + b'$

- *Teorema A.11* (***Generalización Ley de DeMorgan***)

  (1) $(a + b + \ldots + c + d)' = a' \bullet b' \ldots c' \bullet d'$

  (2) $(a \bullet b \bullet \ldots c \bullet d)' = a' + b' \ldots c' + d'$

- *Teorema A.12*

  El Álgebra de Switching es un Álgebra de Boole

Algebra de Switching

- Es un sistema algebraico que es utilizado para describir funciones de switching por medio de expresiones de switching
- Análogo a las funciones aritméticas con el álgebra común
- El Álgebra de Switching consiste de un conjunto de dos elementos 0 y 1, y dos operaciones *AND* y *OR* definidas como sigue:

AND	0	1
0	0	0
1	0	1

OR	0	1
0	0	1
1	1	1

Conceptos Básicos

- Formas Canónicas
  - Término Producto --------- Minitérmino
  - Término Suma ------------- Maxitérmino

$$f(x,y,z)=\bar{x}\bar{y}\bar{z}+\bar{x}y\bar{z}+\bar{x}yz+xy\bar{z}+xyz$$

$$f(x,y,z)=(\bar{x}+\bar{y}+\bar{z})(\bar{x}+y+\bar{z})(\bar{x}+y+z)(x+y+\bar{z})(x+y+z)$$

Suma de Productos Canónica o Expresión Normal Disjunta

Productos de Suma Canónica o Expresión Normal Conjuntiva

- Teorema de Shannon

f(x1, x2, … ,xn) = x1• f1(1, x2, x3, … , xn) + x1’ • f0(0, x2, x3, … , xn)

y así sucesivamente para las demás variables

Conceptos Básicos

- **Implicantes**

  f(x1, x2, … ,xn) ***cubre a*** g(x1, x2, …,xn) si asume el valor 1 cuando g lo hace

  Si f *cubre a* g y g *cubre a* f, entonces f y g son equivalentes

  Si f es una función y h un producto de literales y si f *cubre a* h, entonces h *implica a* f o h es un ***implicante*** de f

  Ej. $f = wx + yz$; $h = wxy'$ es un *implicante* de f

Conceptos Básicos

- **Implicantes Primos o Primarios**

  Un implicante primo *p* de una función *f* es un término producto el cual es cubierto por *f* de tal manera que al borrar cualquier literal de *p* resulta un término producto nuevo, no cubierto por *f*.

  Ej. f = x'y + xz + y'z ; h = x'y es un *implicante primo* de *f* porque ni *x'* ni *y* implican a *f* independientemente.

- **Implicante Primo Esencial**

  Cubre al menos un minitérmino y no es cubierto por ningún otro implicante primo de la función

- **Funciones Parcialmente Especificadas**

  f(x, y, z) = f(x, y, z) + φ(x, y, z)