EL-611

Minimización de Funciones Booleanas

Minimización de Funciones Booleanas

- Método “Algebraico”
  - Se aplican los postulados y teoremas del Álgebra de Boole
- Método Visual
  - Mapa de Karnaugh
  - Mapa de Entrada Variable (MEV)
- Método Tabular
  - Método de Quine
  - Método de Quine-MaCluskey

Ejemplo de una Expresión Booleana

$$f(x,y,z)=\bar{x}y\bar{z}+\bar{x}\bar{y}\bar{z}+x\bar{y}\bar{z}+\bar{x}yz+xyz+x\bar{y}z$$

1 2 3 4 5 6

a) 1 con 2; 2 con 3; 4 con 5 y 5 con 6

$$f(x,y,z)=\bar{x}\bar{z}+\bar{y}\bar{z}+yz+xz$$

Expresión Irredundante o Irreductible

b) 1 con 2; 3 con 6 y 4 con 5

$$f(x,y,z)=\bar{x}\bar{z}+x\bar{y}+yz$$

Expresión Irredundante y Mínima

c) 1 con 4; 2 con 3 y 5 con 6

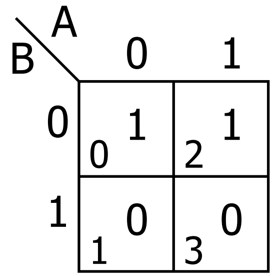
$$f(x,y,z)=\bar{x}y+\bar{x}\bar{z}+xz$$

Expresión Irredundante y Mínima

CONCLUSION: Una expresión **irredundante** no es necesariamente **mínima**, ni una expresión mínima es siempre **única**

Mapas de Karnaugh

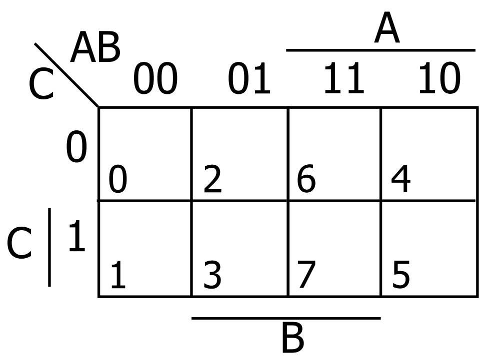
- Mapa en un Plano de cubos Booleanos
  - se pliega en los bordes
  - difícil de dibujar y visualizar para mas de 4 dimensiones
  - virtualmente imposible para mas de 6 dimensiones
- Alternativa a la tabla de verdad para ayudar a visualizar adyacencias
  - se aplica el teorema básico: AB+AB’ = A(B+B’) = A
  - a diferencia en una tabla de verdad, elementos en “1” que difieren en una variable son adyacentes

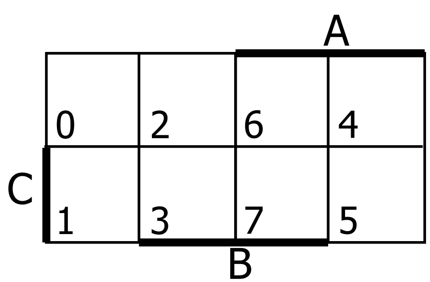


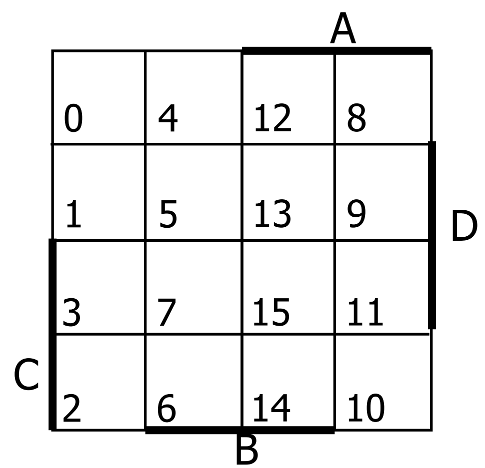
A	B	F
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

Mapas de Karnaugh (cont')

- Esquema numérico basado en código Gray
  - e.g., 00, 01, 11, 10
  - cambios de un solo bit en el código para celdas adyacentes del mapa



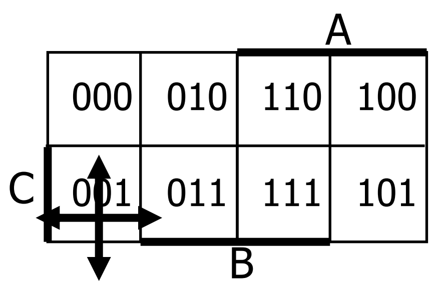


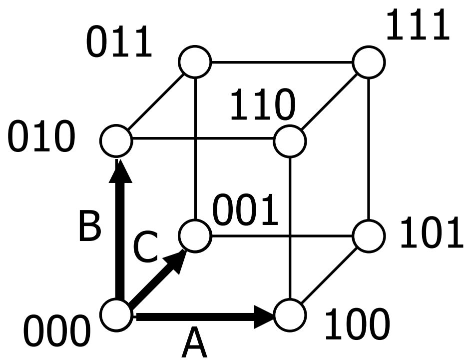


13 = 1101= ABC′D

Adyacencias en mapas de Karnaugh

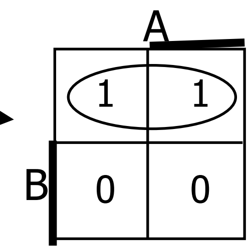
- Pliegue desde la primera a la ultima columna
- Pliegue de la fila superior con la inferior



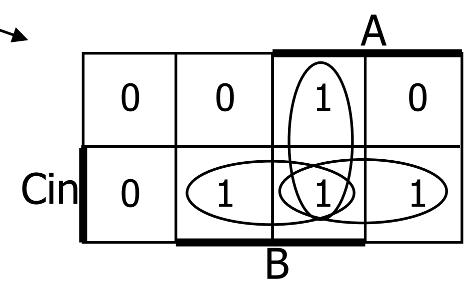


Ejemplos de mapas de Karnaugh

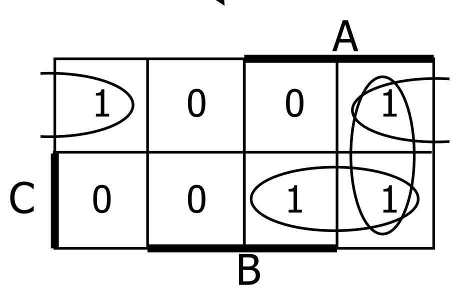
- F =
- Cout =
- f(A,B,C) = Σm(0,4,5,7)



B′



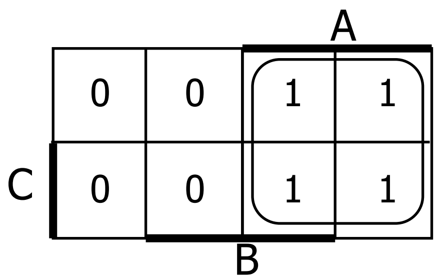
AB+ ACin + BCin



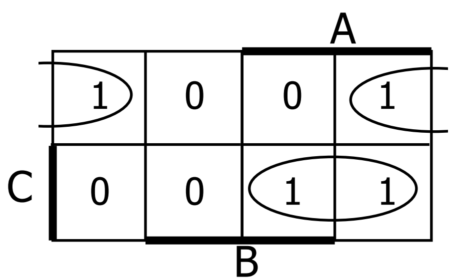
AC + B′C′ + ~~AB′~~

Obtener el complemento de la función cubriendo los 0′s con subcubos

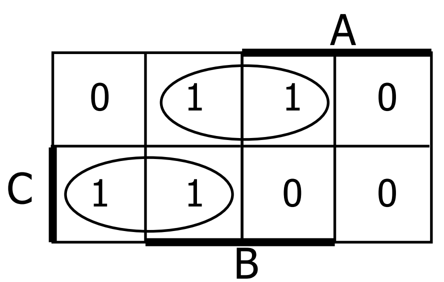
Mas ejemplos de mapas de Karnaugh



G(A,B,C) = A



F(A,B,C) = Σm(0,4,5,7) = AC + B'C'



F' simplemente reemplaza 1's con 0's y vice versa

F'(A,B,C) = Σ m(1,2,3,6) = BC' + A'C

Mapa de Karnaugh: ejemplo de 4-variables

- $F(A,B,C,D) = \Sigma m(0,2,3,5,6,7,8,10,11,14,15)$

  F =

A

1	0	0	1
0	1	0	0
1	1	1	1
1	1	1	1

D

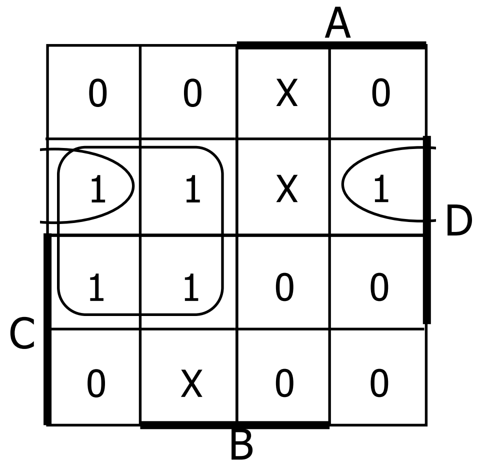
C

B

encontrar el menor numero posible de subcubos mas grandes para cubrir los 1's (menos términos con la menor cantidad de entradas por término)

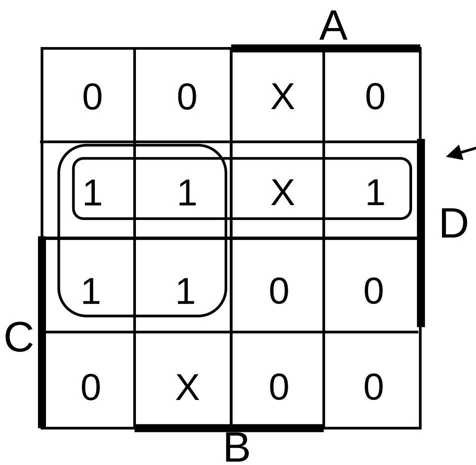
Mapas de Karnaugh: no importa (don’t cares)

- $f(A,B,C,D) = \Sigma\, m(1,3,5,7,9) + d(6,12,13)$
  - sin términos “no importa”
    - f = A′D + B′C′D



Mapas de Karnaugh: no importa (cont')

- $f(A,B,C,D) = \Sigma\, m(1,3,5,7,9) + d(6,12,13)$
  - $f = A'D + B'C'D$ sin "no importa"
  - $f = A'D + C'D$ con "no importa"



Utilizando términos NI como "1" se puede formar un cubo-2 en vez de un cubo-1 para cubrir este nodo

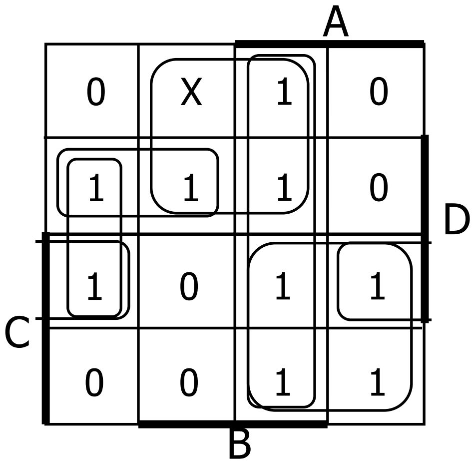
<u>Términos NI</u> pueden ser tratados como 1's o 0's dependiendo de la ventaja que se quiera aprovechar

Ejemplo

- Minimizar la función F = Σ m(0, 2, 7, 8, 14, 15) + d(3, 6, 9, 12, 13)

Semestre Primavera 2011
EL-611 Complemento de Diseño Lógico y Dispositivos Digitales

Implicantes Primos y Esenciales



6 implicantes primos:

A'B'D, BC', AC, A'C'D, AB, B'CD

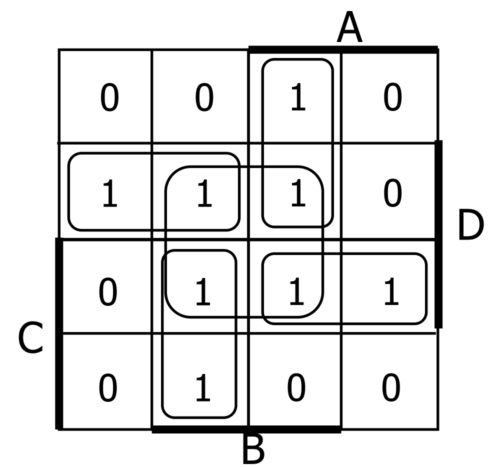
esencial

cobertura minima: AC + BC' + A'B'D

5 implicantes primos :

BD, ABC', ACD, A'BC, A'C'D

esencial



cobertura minima : 4 implicantes esenciales

Mapa de Entrada Variable (MEV)

A	B	C	D	F_1	F_2
0	0	0	0	0	1
0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	1	1
0	0	1	1	1	Ø
0	1	0	0	Ø	1
0	1	0	1	0	0
0	1	1	0	1	Ø
0	1	1	1	0	0
1	0	0	0	1	0
1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	Ø	Ø
1	1	0	1	0	Ø
1	1	1	0	0	0
1	1	1	1	0	0

C \ AB	00	01	11	10
0	^{0} 0	^{2} $\bar{D}Ø$	^{6} $\bar{D}Ø$	^{4} 1
1	^{1} 1	^{3} $\bar{D}$	^{7} 0	^{5} D

F1

C \ AB	00	01	11	10
0	^{0} 1	^{2} $\bar{D}$	^{6} Ø	^{4} D
1	^{1} $\bar{D} + DØ$	^{3} $\bar{D}Ø$	^{7} 0	^{5} 1

F2

Mapa de Entrada Variable (MEV)

Lectura del MEV

Paso 1: Se reemplazan todas las variables 1's por la variable + variable'. Luego aplicar las siguientes reglas:

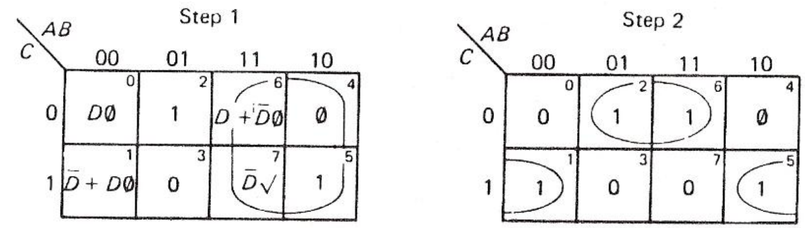
a) Cubrir las variables solas que no puedan cubrirse con otra variable MEV idéntica de una celda adyacente; o con un 1, o con un φ
b) Cubrir todas la variables MEV idénticas en celdas adyacentes
c) Cubrir todas las variables MEV que lo puedan hacer con un 1
d) Ídem a lo anterior pero con un φ
e) Tener precaución cuando la variable MEV se pueda cubrir de más de una forma
f) Continuar cubriendo para grupos de a 4, 8, etc. variables MEV

Mapa de Entrada Variable (MEV)

Lectura del MEV

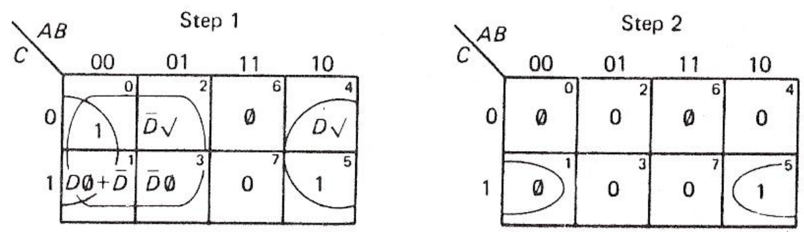
Paso 2: Una vez que todas las variables solas hayan sido cubiertas, se debe transformar el Mapa de acuerdo a las siguientes reglas:

a) Reemplazar las variables MEV y MEV’ por 0
b) Dejar los 0 y φ tal cual
c) Dejar los 1’s tal cual si no fueron cubierto completamente. De lo contrario dejar φ
d) MEV•φ y MEV’•φ quedan en 0
e) (MEV + MEV•φ) y (MEV + MEV’•φ) quedan en 1 si no fue cubierta la parte de la variable necesaria; en caso contrario queda en φ



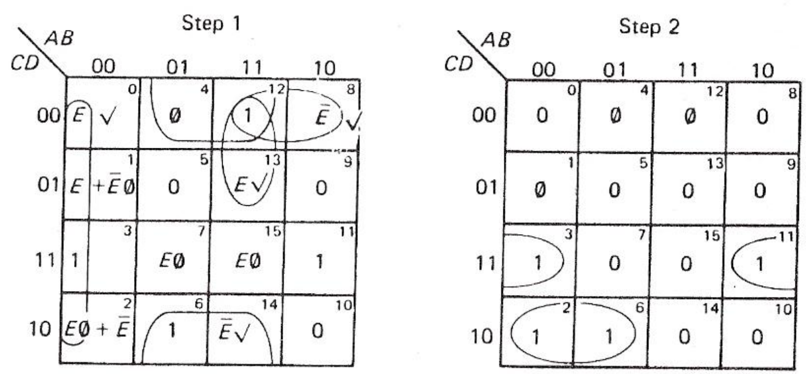
$$F = A\bar{D} + B\bar{C} + \bar{B}C$$

(a)



$$F = \bar{B}D + \bar{A}\bar{D} + \bar{B}C$$

(b)



√ implies the single entries of interest

$$F = AB\bar{C}E + A\bar{C}\bar{D}\bar{E} + \bar{A}\bar{B}E + B\bar{D}\bar{E} + \bar{A}C\bar{D} + \bar{B}CD$$

(c)

Aplicaciones del MEV

Ejemplo:

$$F(A,B,C,G,H)=\overline{A}\overline{B}\overline{C}\overline{H}+\overline{A}\overline{B}C\overline{H}+\overline{A}BC+A\overline{B}\overline{C}\overline{G}+A\overline{B}C\overline{G}+AB\overline{C}+ABC$$

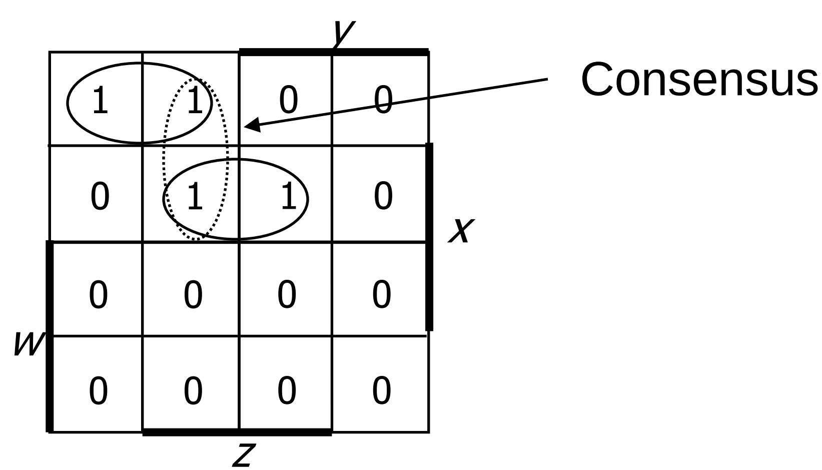
$$F(A,B,C,G,H)=(\overline{A}\overline{B}\overline{C})\overline{H}+(\overline{A}\overline{B}C)\overline{H}+(\overline{A}BC)+(A\overline{B}\overline{C})\overline{G}+(A\overline{B}C)\overline{G}+(AB\overline{C})+(ABC)$$

C\AB	00	01	11	10
0	$\overline{H}$	0	1	$\overline{G}$
1	$\overline{H}$	1	1	$\overline{G}$

$$F(A,B,C,G,H)=\overline{A}\overline{B}\overline{H}+A\overline{G}+AB+BC$$

Método de Quine

- **Consensus**: cuando dos términos productos difieren en un literal, el consensus se obtiene al considerar el resto de los literales de ambos términos productos
- Ejemplo: $\overline{w}xz$ y $\overline{w}x\overline{y}$ El Consensus seria: $\overline{w}\overline{y}z$



Método de Quine

1. Se parte de la expresión **Suma de Productos**

$$f(x,y,z) = \bar{x}(z + \bar{y}\bar{z}) + x\bar{y}\bar{z} + xy\bar{z}$$

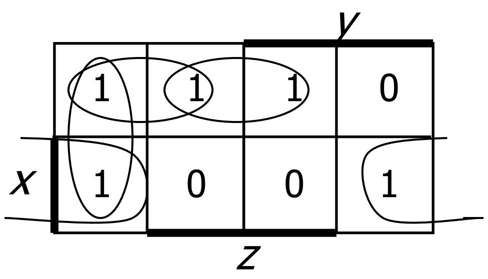
$$f(x,y,z) = \bar{x}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + xy\bar{z}$$

2. Se obtienen los **consensus** entre cada par de términos productos

$$f(x,y,z) = \underbrace{\bar{x}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z} + x\bar{y}\bar{z} + xy\bar{z}}_{\text{Términos Originales}} + \underbrace{\bar{x}\bar{y} + \bar{y}\bar{z} + x\bar{z}}_{\text{Consensus}}$$

3. Se aplican propiedades básicas para **eliminar términos redundantes** y así obtener una expresión con los implicantes primarios de la función

$$f(x,y,z) = \bar{x}z + \bar{x}\bar{y} + \bar{y}\bar{z} + x\bar{z}$$



Método de Quine

4. Se determina el conjunto de implicantes **esenciales**. Para ello se analizan cada uno de los implicantes primos o primarios obtenidos, de la siguiente manera:

$$f(x,y,z) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Se elimina}}}{\bar{x}z} + \bar{x}\bar{y} + \bar{y}\bar{z} + x\bar{z}$$

Se obtiene: $f_1(x,y,z) = \bar{x}\bar{y} + \bar{y}\bar{z} + x\bar{z}$ y se calcula para $\bar{x}z = 1 \Rightarrow x = 0; z = 1$

$f_1(0,y,1) = \bar{y} + 0 + 0 = \bar{y} \Rightarrow \bar{x}z$ **es esencial**

5. Se analizan los demás implicantes de la función para **cubrir todos los minitérminos** y determinar la(s) expresión(es) mínima(s) final(es)

$$\bar{x}z = \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z$$

$$x\bar{z} = xy\bar{z} + x\bar{y}\bar{z}$$

$$\bar{x}\bar{y} = \cancel{\bar{x}\bar{y}}z + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$$

$$\bar{y}\bar{z} = \cancel{x\bar{y}}\bar{z} + \bar{x}\bar{y}\bar{z}$$

$$f(x,y,z) = \bar{x}z + x\bar{z} + \frac{\bar{x}\bar{y}}{\bar{y}\bar{z}}$$

Método de Quine-McCluskey

$$f(w,x,y,z)=\sum m(0,1,4,5,9,11,13,14,15)$$

1. Expresión Suma de Productos
2. Se representa cada minitérmino en forma binaria agrupados de acuerdo a la cantidad de unos en orden ascendente

Método de Quine-McCluskey

$$f(w,x,y,z)=\sum m(0,1,4,5,9,11,13,14,15)$$

Minitérmino Cubo-0	Número Binario	Cantidad de 1's
0	0000 √	0
1 4	0001 √ 0100 √	1
5 9	0101 √ 1001 √	2
11 13 14	1011 √ 1101 √ 1110 √	3
15	1111 √	4

Método de Quine-McCluskey

$$f(w,x,y,z)=\sum m(0,1,4,5,9,11,13,14,15)$$

Minitérmino Cubo-1	Número Binario
0,1	000− √
0,4	0−00 √
1,5	0−01 √
1,9	−001 √
4,5	010− √
5,13	−101 √
9,11	10−1√
9,13	1−01 √
11,15	1−11 √
13,15	11−1 √
14,15	111−

3.- Se buscan los ***consensus*** entre cada par de minitérminos. Estos se encontrarán entre grupos adyacentes solamente, lo que simplifica la búsqueda.

La marca √ en la tabla correspondiente al cubo-0 significa que el minitérmino marcado está cubierto por el implicante formado en el cubo-1.

Implicante primario

Método de Quine-McCluskey

$$f(w,x,y,z) = \sum m(0,1,4,5,9,11,13,14,15)$$

Minitérmino Cubo-2	Número Binario
0,1,4,5	0−0−
0,4,1,5	0−0−
1,5,9,13	−−01
1,9,5,13	−−01
9,11,13,15	1−−1
9,13,11,15	1−−1

4.- El procedimiento se repite para el cubo-1. En este caso habrá combinación cuando difieren en una posición y además el guión (-) está en la misma posición para ambos términos a combinar.

Implicantes redundantes

En la tabla del cubo-1, el último implicante quedó sin marca (√). Esto significa que dicho Implicante debe incluirse como implicante primario de la función.
Se eliminan los términos redundantes. El procedimiento continúa hasta que no se puedan hacer más combinaciones.

Se han obtenido los siguientes Implicantes:

111- wxy
0-0- w'y'
--01 y'z
1--1 wz

Método de Quine-McCluskey

$$f(w,x,y,z)=\sum m(0,1,4,5,9,11,13,14,15)$$

	0	1	4	5	9	11	13	14	15
(14,15) wxy								$\underline{\surd}$	√
(0,1,4,5) w'y'	$\underline{\surd}$	√	$\underline{\surd}$	√					
(1,5,9,13) y'z		√		√	√		√		
(9,11,13,15) wz					√	$\underline{\surd}$	√		√
	√	√	√	√	√	√	√	√	√

$$f(w,x,y,z)=wxy+\overline{w}\,\overline{y}+wz$$ Expresión mínima y única

Método de Quine-McCluskey

Notación Simplificada

Se aprovecha la propiedad siguiente: dos números binarios se "combinan" cuando están en grupos adyacentes, es decir, cuando difieren en una potencia de 2.

Ejemplo: 0000 y 0001 difieren en 2^0 y queda:

(0,1) 000− ó bien: 0,1 (1)

diferencia

1	0001	1,5 (4) porque: 4 = 5−1
5	0101	

La regla es: se resta el que tiene menos 1's al que tiene más 1's

$$f(w,x,y,z) = \sum m\,(0,1,4,5,7,10,11,14,15)$$

caso-0	caso-1	caso-2	
0 ✓	0,1 (1) ✓ 0,4 (4) ✓	0,1,4,5 (1,4) - 0,4,1,5 (1,4) ←	 redundante
1 ✓ 4 ✓	1,5 (4) ✓ 4,5 (1) ✓	10,11,14,15 (1,4) - 10,14,11,15 (1,4) ←	 redundante
5 ✓ 10 ✓	5,7 (2) - 10,11 (1) ✓ 10,14 (4) ✓		
7 ✓ 11 ✓ 14 ✓	7,15 (8) - 11,15 (4) ✓ 14,15 (1) ✓		
15 ✓			

El conjunto mínimo de Implicantes primos se obtiene de la siguiente Tabla:

Implicantes Primos \ Minitérminos	0	1	4	5	7	10	11	14	15
(5,7 (2) $\bar{w}xz$				✓	✓				
7,15 (8) xyz					✓				✓
0,1,4,5 (1,4) $\bar{w}\bar{y}$	✓	✓	✓	✓					
10,11,14,15 (4,1) wy						$\boxed{✓}$	$\boxed{✓}$	$\boxed{✓}$	✓
	✓	✓	✓	✓	•	✓	✓	✓	✓

$$f(w,x,y,z) = \bar{w}\bar{y} + wy + \left\{ \begin{array}{l} \bar{w}xz \\ xyz \end{array} \right.$$

Funciones Parcialmente Especificadas

$f(w,x,y,z) = \sum m(0,2,3,4,5,7,8,10) + \phi(w,x,y,z)$

$\phi(w,x,y,z) = \sum m(12,14)$

caso - 0	caso - 1	caso - 2
0 ✓	0, 2 (2) ✓	0, 2, 8, 10 (2,8)
2 ✓	0, 4 (4) ✓	0, 4, 8, 12 (4,8)
4 ✓	0, 8 (8) ✓	0, 8, 2, 10 (8,2) ← Redundante
8 ✓		0, 8, 4, 12 (8,4) ←
3 ✓	2, 3 (1) ·	8, 10, 12, 14 (2,4)
5 ✓	2, 10 (8) ✓	8, 12, 10, 14 (4,2) ← Redundante
10 ✓	4, 5 (1) ·	
12 ✓	4, 12 (8) ✓	
7 ✓	8, 10 (2) ✓	
14 ✓	8, 12 (4) ✓	
	3, 7 (4) ·	
	5, 7 (2) ·	
	10, 14 (4) ✓	
	12, 14 (2) ✓	

Implicantes Primos \ Minitérminos	0	2	3	4	5	7	8	10
2, 3 (1) $\bar{w}\bar{x}y$		✓	✓					
4, 5 (1) $\bar{w}x\bar{y}$				✓	✓			
3, 7 (4) $\bar{w}yz$			✓			✓		
5, 7 (2) $\bar{w}xz$					✓	✓		
0, 2, 8, 10 (2,8) $\bar{x}\bar{z}$ (*)	✓	✓					✓	✓
0, 4, 8, 12 (4,8) $\bar{y}\bar{z}$	✓			✓			✓	
8, 10, 12, 14 (2,4) $w\bar{z}$							✓	✓

Implicantes \ Minitérminos	3	4	5	7	
2,3 (1) $\bar{w}\bar{x}y$	✓				
4,5 (1) $\bar{w}x\bar{y}$		✓	✓		(*)
3,7 (4) $\bar{w}yz$	✓			✓	(*)
5,7 (2) $\bar{w}xz$			✓	✓	✓
0, 4, 8, 12 (4) $\bar{y}\bar{z}$		✓			

$f(w,x,y,z) = \bar{x}\bar{z} + \bar{w}x\bar{y} + \bar{w}yz$

Funciones con Salidas Múltiples

caso-0	caso-1
0 $\alpha\gamma$ ✓	0,1 (1) $\alpha\gamma$
1 $\alpha\gamma$ ✓ 2 β ✓	1,3 (2) α 1,5 (4) α 2,3 (1) β 2,6 (4) β
3 $\alpha\beta$ · 5 $\alpha\beta$ · 6 $\beta\gamma$ ·	

$$f_\alpha(x,y,z) = \sum m(0,1,3,5)$$
$$f_\beta(x,y,z) = \sum m(2,3,5,6)$$
$$f_\gamma(x,y,z) = \sum m(0,1,6)$$

Implicantes \ Minitérminos	f_α 0	1	3	5	f_β 2	3	5	6	f_γ 0	1	6	
0,1 (1) $\alpha\gamma$ $\bar{x}\bar{y}$	✓	✓							✓	✓		(*)
1,3 (2) α		✓	✓									
1,5 (4) α		✓		✓								
2,3 (1) β					✓	✓						
2,6 (4) β					✓			✓				
3 $\alpha\beta$			✓			✓						
5 $\alpha\beta$ $x\bar{y}z$				✓			$\boxed{✓}$					(*)
6 $\beta\gamma$ $xy\bar{z}$								✓			✓	(*)
	✓	✓		✓			✓	✓	✓	✓	✓	

Implicantes \ Minitérminos	f_α 3	f_β 2	3	
1,3 (2) α	✓			(*)
2,3 (1) β		✓	✓	(*)
2,6 (4) β		✓		
3 $\alpha\beta$	✓		✓	

$$f_\alpha(x,y,z) = \bar{x}\bar{y} + \bar{x}z + x\bar{y}z$$
$$f_\beta(x,y,z) = \bar{x}y + x\bar{y}z + xy\bar{z}$$
$$f_\gamma(x,y,z) = \bar{x}\bar{y} + xy\bar{z}$$