Ingeniería Eléctrica
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE

CLASE AUXILIAR 7 DE NOVIEMBRE DE 2011– EL605

Prof.: Agustín León T.
Aux.: Pablo Medina C.

MODELACIÓN ELÉCTRICA DE LÍNEAS DE TRANSMISIÓN

PARTE 1: FORMULACIÓN MATRICIAL GENERAL Y COMPONENTES DE SECUENCIA

El objetivo es escribir una formulación matricial general, independiente de qué clase de línea de transmisión sea, a partir de la cual podamos obtener las impedancias de secuencia positiva, negativa y cero. En las próximas clases modelaremos tanto líneas de transmisión aéreas como cables aislados.

1.- Formulación matricial una línea de transmisión aérea de un circuito y con un cable de guardia.

Consideremos este caso sólo para fijar ideas. Esta formulación puede ser rápidamente extendida para otros casos como alimentadores de cables aislados o líneas de transmisión de múltiples circuitos con más de un cable de guardia.

En general, la relación entre voltajes y corrientes de todos los conductores de una línea de transmisión (incluyendo a los cables de guardia) se estable a través de dos "clases" de impedancias:

- Una impedancia propia del conductor (autoinductancia), la cual da cuenta de la caída de tensión debida a la circulación de corriente por el conductor.

- Una impedancia mutua entre un par de conductores A y B, la cual da cuenta de la caída de tensión en A debida a la circulación de una corriente en B. Recordemos además que siempre se tendrá que Zab = Zba.

Si consideramos una tensión fase-tierra por unidad de longitud, se tendrá lo siguiente:

$$\begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{aa} & Z_{ab} & Z_{ac} \\ Z_{ab} & Z_{bb} & Z_{bc} \\ Z_{ac} & Z_{bc} & Z_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_{a\_cg} \\ Z_{b\_cg} \\ Z_{c\_cg} \end{bmatrix} I_{cg}$$

$$[0] = \begin{bmatrix} Z_{a\_cg} & Z_{b\_cg} & Z_{c\_cg} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} + Z_{cg\_cg} I_{cg}$$

Las impedancias están expresadas en "Ohm por unidad de longitud".

El énfasis de esta discusión no está en determinar los coeficientes de las matrices. Las supondremos conocidas por un momento.

Despejando Icg de la última expresión:

$$I_{cg} = -\frac{1}{Z_{cg\_cg}}\begin{bmatrix} Z_{a\_cg} & Z_{b\_cg} & Z_{c\_cg} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix}$$

Es importante destacar que dado que no existe una fem en el cable de guardia, se tiene una corriente inducida en este cable tal que permite anular las fems inducidas por la circulación de corriente por las fases.

Incorporando lo anterior a la relación de los conductores de fases:

$$\begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{aa} & Z_{ab} & Z_{ac} \\ Z_{ab} & Z_{bb} & Z_{bc} \\ Z_{ac} & Z_{bc} & Z_{cc} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} - -\frac{1}{Z_{cg\_cg}}\begin{bmatrix} Z_{a\_cg} \\ Z_{b\_cg} \\ Z_{c\_cg} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Z_{a\_cg} & Z_{b\_cg} & Z_{c\_cg} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} = \left\{\begin{bmatrix} Z_{aa} & Z_{ab} & Z_{ac} \\ Z_{ab} & Z_{bb} & Z_{bc} \\ Z_{ac} & Z_{bc} & Z_{cc} \end{bmatrix} - \frac{1}{Z_{cg\_cg}}\begin{bmatrix} Z_{a\_cg}^{\ 2} & Z_{a\_cg}Z_{b\_cg} & Z_{a\_cg}Z_{c\_cg} \\ Z_{a\_cg}Z_{b\_cg} & Z_{b\_cg}^{\ 2} & Z_{b\_cg}Z_{c\_cg} \\ Z_{a\_cg}Z_{c\_cg} & Z_{b\_cg}Z_{c\_cg} & Z_{c\_cg}^{\ 2} \end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{aa} - \frac{Z_{a\_cg}^{\ 2}}{Z_{cg\_cg}} & Z_{ab} - \frac{Z_{a\_cg}Z_{b\_cg}}{Z_{cg\_cg}} & Z_{ac} - \frac{Z_{a\_cg}Z_{c\_cg}}{Z_{cg\_cg}} \\ Z_{ab} - \frac{Z_{a\_cg}Z_{b\_cg}}{Z_{cg\_cg}} & Z_{bb} - \frac{Z_{b\_cg}^{\ 2}}{Z_{cg\_cg}} & Z_{bc} - \frac{Z_{b\_cg}Z_{c\_cg}}{Z_{cg\_cg}} \\ Z_{ac} - \frac{Z_{a\_cg}Z_{c\_cg}}{Z_{cg\_cg}} & Z_{bc} - \frac{Z_{b\_cg}Z_{c\_cg}}{Z_{cg\_cg}} & Z_{cc} - \frac{Z_{c\_cg}^{\ 2}}{Z_{cg\_cg}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} V_a \\ V_b \\ V_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Z}_{aa} & \bar{Z}_{ab} & \bar{Z}_{ac} \\ \bar{Z}_{ab} & \bar{Z}_{bb} & \bar{Z}_{bc} \\ \bar{Z}_{ac} & \bar{Z}_{bc} & \bar{Z}_{cc} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix}$$

La última expresión deja en un segundo plano la circulación de corriente por el cable de guardia, e incorpora el efecto de éste conductor directamente en la expresión de corrientes y voltajes de cada conductor de fase.

En el curso anterior acostumbramos a despreciar el efecto del cable de guardia, por lo que una de nuestras tareas futuras será comparar las expresiones antes formuladas con nuestra nueva expresión.

2.- Formulación matricial general de una línea de transmisión.

La formulación presentada en el punto 1 aún no es digna de ser llamada "general", ya que sólo considera un ordenamiento, por lo que ligeros cambios deberán incorporarse.

Recordemos que una línea de transmisión puede tener más de un circuito y más de un cable de guardia, y este hecho puede ser rápidamente incorporado en la formulación anterior utilizando una notación vectorial y de matrices por bloques.

Si la línea tiene “p” circuitos y “q” cables de guardias:

$$\vec{V}_c = Z_c \vec{I}_c + Z_m \vec{I}_{cg}$$
$$\left[\vec{0}\right] = {Z_m}^T \vec{I}_{cg} + Z_{cg} \vec{I}_{cg}$$

Donde:

$$\vec{V}_c = \begin{bmatrix} V_{a1} \\ V_{b1} \\ V_{c1} \\ \vdots \\ V_{ap} \\ V_{bp} \\ V_{cp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{(1)} \\ \vdots \\ V_{(p)} \end{bmatrix}, \quad \vec{I}_c = \begin{bmatrix} I_{a1} \\ I_{b2} \\ I_{c1} \\ \vdots \\ I_{ap} \\ I_{bp} \\ I_{cp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{(1)} \\ \vdots \\ I_{(p)} \end{bmatrix}, \quad \vec{I}_{cg} = \begin{bmatrix} I_{cg1} \\ \vdots \\ I_{cgq} \end{bmatrix}, \; \vec{0} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{q \;\; filas}$$

$$Z_c = \begin{bmatrix} Z_{a1a1} & Z_{a1b1} & Z_{a1c1} & \cdots & Z_{a1ap} & Z_{a1bp} & Z_{a1cp} \\ Z_{a1}Z_{b1} & Z_{b1b1} & Z_{b1c1} & \cdots & Z_{b1ap} & Z_{b1bp} & Z_{b1cp} \\ Z_{a1c1} & Z_{b1c1} & Z_{c1c1} & \cdots & Z_{c1ap} & Z_{c1bp} & Z_{c1cp} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ Z_{a1ap} & Z_{b1ap} & Z_{c1ap} & \cdots & Z_{apap} & Z_{apbp} & Z_{apcp} \\ Z_{a1bp} & Z_{b1bp} & Z_{c1bp} & \cdots & Z_{apbp} & Z_{bpbp} & Z_{bpcp} \\ Z_{a1cp} & Z_{b1cp} & Z_{c1cp} & \cdots & Z_{apcp} & Z_{bpcp} & Z_{cpcp} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{c(11)} & \cdots & Z_{c(1p)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{c(1p)} & \cdots & Z_{c(pp)} \end{bmatrix}$$

$$Z_m = \begin{bmatrix} Z_{a1\_cg1} & \cdots & Z_{a1\_cgq} \\ Z_{b1\_cg1} & \cdots & Z_{b1\_cgq} \\ Z_{b1\_cg1} & \cdots & Z_{c1\_cgq} \\ \vdots & & \vdots \\ Z_{ap\_cg1} & \cdots & Z_{ap\_cgq} \\ Z_{bp\_cg1} & \cdots & Z_{bp\_cgq} \\ Z_{cp\_cg1} & \cdots & Z_{bp\_cgq} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{m(1\ cg1)} & \cdots & Z_{m(1\ cgq)} \\ \vdots & & \vdots \\ Z_{m(p\ cg1)} & \cdots & Z_{m(p\ cgq)} \end{bmatrix}$$

$$Z_{cg} = \begin{bmatrix} Z_{cg1\_cg1} & \cdots & Z_{cg1\_cgq} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{cg1\_cgq} & \cdots & Z_{cgq\_cgq} \end{bmatrix}$$

$$\vec{I}_{cg} = -Z_{cg}^{\ -1} Z_m^{\ T} \vec{I}_c$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{V}_c = \left[Z_c - Z_{cg}^{\ -1} Z_m^{\ T} Z_m \right] \vec{I}_c$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{V}_c = \overline{Z}\ \vec{I}_c$$

$$\overline{Z} = \begin{bmatrix} \overline{Z}_{(11)} & \cdots & \overline{Z}_{(1p)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{Z}_{(p1)} & \cdots & \overline{Z}_{(pp)} \end{bmatrix}$$

Cada submatriz $Z_{(ij)}$ es de dimensión 3 x 3.

3.- Impedancias de secuencia positiva, negativa y cero.

Para obtener las impedancias de secuencias, se utiliza la transformada de Fortescue. Recordemos que para un circuito k cualquiera:

$$\begin{bmatrix} V_{ak} \\ V_{bk} \\ V_{ck} \end{bmatrix} = \vec{V}_k = A\vec{V}_k^{\sec} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{ak}^{(1)} \\ V_{ak}^{(2)} \\ V_{ak}^{(0)} \end{bmatrix}, \quad \vec{V}_k^{\sec} = A^{-1}\vec{V}_k$$

Lo mismo se tiene para las corrientes.

Si analizamos las primeras 3 filas de la expresión $\vec{V}_c = \overline{Z}\ \vec{I}_c$ (fases a, b y c del circuito 1) y aplicamos lo anterior, se tendrá que:

$$A^{-1}\vec{V}_1 = A^{-1}\overline{Z}_{(11)}\ \vec{I}_1 + A^{-1}\overline{Z}_{(12)}\ \vec{I}_2 + \ldots + A^{-1}\overline{Z}_{(1p)}\ \vec{I}_p$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{V}_1^{\sec} = A^{-1}\overline{Z}_{(11)}A\vec{I}_1^{\sec} + A^{-1}\overline{Z}_{(12)}\ A\vec{I}_2^{\sec} + \ldots + A^{-1}\overline{Z}_{(1p)}A\vec{I}_p^{\sec}$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{V}_1^{\sec} = \overline{Z}_{(11)}^{\sec}\ \vec{I}_1^{\sec} + \overline{Z}_{(12)}^{\sec}\vec{I}_2^{\sec} + \ldots + \overline{Z}_{(1p)}^{\sec}\vec{I}_p^{\sec}$$

En general, para el circuito k-ésimo se tendrá:

$$\vec{V}_k^{\sec} = \sum_{j=1}^{p} \overline{Z}_{(kj)}^{\sec}\ \vec{I}_j^{\sec}, \quad \overline{Z}_{(kj)}^{\sec} = A^{-1}\overline{Z}_{(kj)}A = \begin{bmatrix} \overline{Z}_{(kj)}^{(11)} & \overline{Z}_{(kj)}^{(12)} & \overline{Z}_{(kj)}^{(10)} \\ \overline{Z}_{(kj)}^{(21)} & \overline{Z}_{(kj)}^{(22)} & \overline{Z}_{(kj)}^{(20)} \\ \overline{Z}_{(kj)}^{(01)} & \overline{Z}_{(kj)}^{(02)} & \overline{Z}_{(kj)}^{(00)} \end{bmatrix}$$

Cada coeficiente de la matriz $\overline{Z}_{(kj)}^{\sec}$ es una medida de la caída de tensión en el circuito k de secuencia del primer superíndice, cuando circula una corriente en el circuito j de secuencia del segundo superíndice.

Ej.: $\overline{Z}_{(kj)}^{(12)}$ es una medida de la caída de tensión en el circuito k de secuencia positiva, cuando circula una corriente en el circuito j de secuencia negativa.

Matricialmente:

$$\vec{V}_c^{\sec} = \overline{Z}^{\sec}\, \vec{I}_c^{\sec}$$

La formulación aquí presentada tal vez pueda ser un poco compleja, y esta se vuelve muy difícil de manejar incluso en casos simples cuando no existe simetría en el tendido de conductores.

4.- Casos de estudio.

4.1.- Caso 1: Línea de transmisión aérea de simple circuito, con un cable de guardia y sin transposición.

Sea ℓ el largo de la línea. Entonces, la caída de tensión entre ambos extremos es:

$$\begin{bmatrix} \Delta V_a \\ \Delta V_b \\ \Delta V_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Z}_{aa}\ell & \overline{Z}_{ab}\ell & \overline{Z}_{ac}\ell \\ \overline{Z}_{ab}\ell & \overline{Z}_{bb}\ell & \overline{Z}_{bc}\ell \\ \overline{Z}_{ac}\ell & \overline{Z}_{bc}\ell & \overline{Z}_{cc}\ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix}$$

Por lo que la caída de tensión en términos de componentes de secuencia es:

$$\begin{bmatrix} \Delta V_a^{(1)} \\ \Delta V_a^{(2)} \\ \Delta V_a^{(0)} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{Z}_{aa}\ell & \overline{Z}_{ab}\ell & \overline{Z}_{ac}\ell \\ \overline{Z}_{ab}\ell & \overline{Z}_{bb}\ell & \overline{Z}_{bc}\ell \\ \overline{Z}_{ac}\ell & \overline{Z}_{bc}\ell & \overline{Z}_{cc}\ell \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a^{(1)} \\ I_a^{(2)} \\ I_a^{(0)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta V_a^{(1)} \\ \Delta V_a^{(2)} \\ \Delta V_a^{(0)} \end{bmatrix} = \frac{\ell}{3} \begin{bmatrix} \overline{Z}_{aa} + a\overline{Z}_{ab} + a^2\overline{Z}_{ac} & \overline{Z}_{ab} + a\overline{Z}_{bb} + a^2\overline{Z}_{bc} & \overline{Z}_{ac} + a\overline{Z}_{bc} + a^2\overline{Z}_{cc} \\ \overline{Z}_{aa} + a^2\overline{Z}_{ab} + a\overline{Z}_{ac} & \overline{Z}_{ab} + a^2\overline{Z}_{bb} + a\overline{Z}_{bc} & \overline{Z}_{ac} + a^2\overline{Z}_{bc} + a\overline{Z}_{cc} \\ \overline{Z}_{aa} + \overline{Z}_{ab} + \overline{Z}_{ac} & \overline{Z}_{ab} + \overline{Z}_{bb} + \overline{Z}_{bc} & \overline{Z}_{ac} + \overline{Z}_{bc} + \overline{Z}_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a^{(1)} \\ I_a^{(2)} \\ I_a^{(0)} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \Delta V_a^{(1)} \\ \Delta V_a^{(2)} \\ \Delta V_a^{(0)} \end{bmatrix} = \frac{\ell}{3} \begin{bmatrix} \overline{Z}_{aa} + \overline{Z}_{bb} + \overline{Z}_{cc} + \left(\overline{Z}_{ab} + \overline{Z}_{ac} + \overline{Z}_{bc}\right)\left(a + a^2\right) & \overline{Z}_{aa} + a^2\overline{Z}_{bb} + a\overline{Z}_{cc} + 2\left(a\overline{Z}_{ab} + \overline{Z}_{bc} + a^2\overline{Z}_{ac}\right) & \overline{Z}_{aa} + a\overline{Z}_{bb} + a^2\overline{Z}_{cc} + \overline{Z}_{ab}\left(a+1\right) + \overline{Z}_{bc}\left(a^2 + a\right) + \overline{Z}_{ac}\left(a^2+1\right) \\ \overline{Z}_{aa} + a\overline{Z}_{bb} + a^2\overline{Z}_{cc} + 2\left(a^2\overline{Z}_{ab} + a\overline{Z}_{ac} + \overline{Z}_{bc}\right) & \overline{Z}_{aa} + \overline{Z}_{bb} + \overline{Z}_{cc} + \left(\overline{Z}_{ab} + \overline{Z}_{ac} + \overline{Z}_{bc}\right)\left(a + a^2\right) & \overline{Z}_{aa} + a^2\overline{Z}_{bb} + a\overline{Z}_{cc} + \overline{Z}_{ab}\left(a^2+1\right) + \overline{Z}_{bc}\left(a^2 + a\right) + \overline{Z}_{ac}\left(a+1\right) \\ \overline{Z}_{aa} + a^2\overline{Z}_{bb} + a\overline{Z}_{cc} + \overline{Z}_{ab}\left(a^2+1\right) + \overline{Z}_{bc}\left(a^2 + a\right) + \overline{Z}_{ac}\left(a+1\right) & \overline{Z}_{aa} + a^2\overline{Z}_{bb} + a\overline{Z}_{cc} + \overline{Z}_{ab}\left(a+1\right) + \overline{Z}_{bc}\left(a^2 + a\right) + \overline{Z}_{ac}\left(a^2+1\right) & \overline{Z}_{aa} + \overline{Z}_{bb} + \overline{Z}_{cc} + 2\left(\overline{Z}_{ab} + \overline{Z}_{ac} + \overline{Z}_{bc}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a^{(1)} \\ I_a^{(2)} \\ I_a^{(0)} \end{bmatrix}$$

A partir de estas expresiones se puede ver que no podemos estudiar el sistema a través de un equivalente monofásico en régimen permanente, y para el cálculo de cortocircuito no podemos asumir la independencia de las mallas. Por suerte, en algunos casos reales podemos solucionar lo anterior.

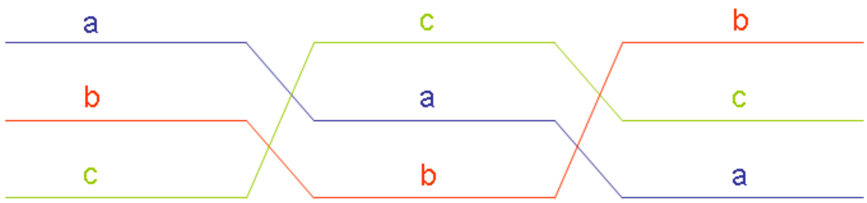
4.2.- Caso 2: Línea de transmisión aérea de simple circuito, con un mismo conductor de fase, con un cable de guardia y con transposición en cada tercio.

Este caso es bastante común, por lo que vale la pena entenderlo bien.

El hecho que el conductor de fase sea el mismo implica que $Z_{aa} = Z_{bb} = Z_{cc}$. Esto no implica que $\overline{Z}_{aa} = \overline{Z}_{bb} = \overline{Z}_{cc}$, dado que la distancia entre el cable de guardia y cada fase no es la misma.

Sea ℓ el largo de la línea. Entonces, la caída de tensión entre ambos extremos es:

$$\begin{bmatrix} \Delta V_a \\ \Delta V_b \\ \Delta V_c \end{bmatrix} = \frac{\ell}{3}\left(\begin{bmatrix} \overline{Z}_{aa} & \overline{Z}_{ab} & \overline{Z}_{ac} \\ \overline{Z}_{ab} & \overline{Z}_{bb} & \overline{Z}_{bc} \\ \overline{Z}_{ac} & \overline{Z}_{bc} & \overline{Z}_{cc} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{Z}_{cc} & \overline{Z}_{ac} & \overline{Z}_{bc} \\ \overline{Z}_{ac} & \overline{Z}_{aa} & \overline{Z}_{ab} \\ \overline{Z}_{bc} & \overline{Z}_{ab} & \overline{Z}_{bb} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{Z}_{bb} & \overline{Z}_{bc} & \overline{Z}_{ab} \\ \overline{Z}_{bc} & \overline{Z}_{cc} & \overline{Z}_{ac} \\ \overline{Z}_{ab} & \overline{Z}_{ac} & \overline{Z}_{aa} \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix}$$



Sumando…

$$\begin{bmatrix} \Delta V_a \\ \Delta V_b \\ \Delta V_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\overline{Z}_{aa} + \overline{Z}_{bb} + \overline{Z}_{cc}\right)\frac{\ell}{3} & \left(\overline{Z}_{ab} + \overline{Z}_{ac} + \overline{Z}_{bc}\right)\frac{\ell}{3} & \left(\overline{Z}_{ab} + \overline{Z}_{ac} + \overline{Z}_{bc}\right)\frac{\ell}{3} \\ \left(\overline{Z}_{ab} + \overline{Z}_{ac} + \overline{Z}_{bc}\right)\frac{\ell}{3} & \left(\overline{Z}_{aa} + \overline{Z}_{bb} + \overline{Z}_{cc}\right)\frac{\ell}{3} & \left(\overline{Z}_{ab} + \overline{Z}_{ac} + \overline{Z}_{bc}\right)\frac{\ell}{3} \\ \left(\overline{Z}_{ab} + \overline{Z}_{ac} + \overline{Z}_{bc}\right)\frac{\ell}{3} & \left(\overline{Z}_{ab} + \overline{Z}_{ac} + \overline{Z}_{bc}\right)\frac{\ell}{3} & \left(\overline{Z}_{aa} + \overline{Z}_{bb} + \overline{Z}_{cc}\right)\frac{\ell}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} \Delta V_a \\ \Delta V_b \\ \Delta V_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Z}_a & \overline{Z}_m & \overline{Z}_m \\ \overline{Z}_m & \overline{Z}_a & \overline{Z}_m \\ \overline{Z}_m & \overline{Z}_m & \overline{Z}_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix}$$

Si lo que se tiene es un sistema equilibrado, es decir, si por todas las fases de la línea circula la misma corriente, se tiene que $I_a + I_b + I_c = 0 \Rightarrow I_b + I_c = -I_a$. Esto en la primera fila de la expresión anterior implica que:

$$\Delta V_a = \overline{Z}_a I_a + \overline{Z}_m \left(I_b + I_c\right) \Rightarrow \Delta V_a = \left(\overline{Z}_a - \overline{Z}_m\right) I_a$$

Expresiones similares se tendrán para las otras fases, por lo que en este caso si es posible estudiar un sistema en régimen permanente mediante equivalentes monofásicos.

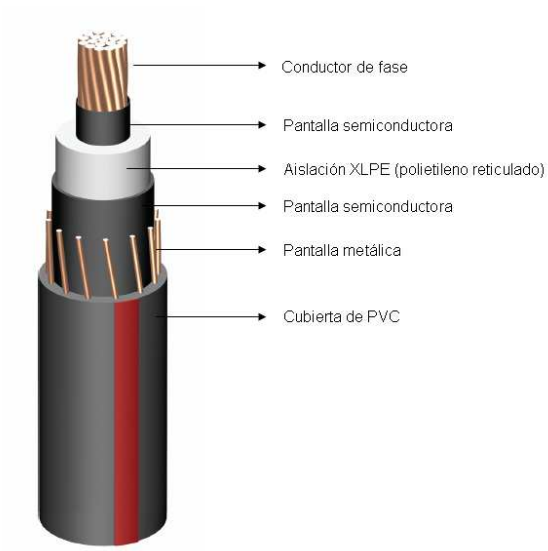
La caída de tensión en términos de componentes de secuencia queda:

$$\begin{bmatrix} \Delta V_a^{(1)} \\ \Delta V_a^{(2)} \\ \Delta V_a^{(0)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{Z}_a - \overline{Z}_m & 0 & 0 \\ 0 & \overline{Z}_a - \overline{Z}_m & 0 \\ 0 & 0 & \overline{Z}_a + 2\overline{Z}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a^{(1)} \\ I_a^{(2)} \\ I_a^{(0)} \end{bmatrix}$$

En este caso, no existen "acoplamientos inductivos" entre las distintas mallas de secuencia, por lo que se puede analizar el sistema separado por cada malla.

4.3.- Caso 3: Un alimentador de cable apantallado sin transposición, con sus pantallas conectadas sólidamente a tierra, y alimentando una carga de impedancia constante.

Haciendo un corte a un cable apantallado, por lo general se ve lo siguiente:



La pantalla metálica es un conductor que se conecta habitualmente a tierra en ambos extremos del cable, y se utiliza para proteger eléctricamente al cable de descargas atmosféricas y para proteger al personal de mantenimiento, al entregar un camino de circulación a tierra a una eventual corriente de falla que atraviese la aislación.

Eléctricamente, se tiene un sistema de tres conductores de fase y tres conductores de tierra, por lo que se tiene:

$$\begin{bmatrix} \Delta V_a \\ \Delta V_b \\ \Delta V_c \end{bmatrix} = \ell \begin{bmatrix} Z_{aa} & Z_{ab} & Z_{ac} \\ Z_{ab} & Z_{bb} & Z_{bc} \\ Z_{ac} & Z_{bc} & Z_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} + \ell \begin{bmatrix} Z_{a\,ap} & Z_{a\,bp} & Z_{a\,cp} \\ Z_{a\,bp} & Z_{b\,bp} & Z_{b\,cp} \\ Z_{a\,cp} & Z_{b\,cp} & Z_{c\,cp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{ap} \\ I_{bp} \\ I_{cp} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \ell \begin{bmatrix} Z_{a\,ap} & Z_{a\,bp} & Z_{a\,cp} \\ Z_{a\,bp} & Z_{b\,bp} & Z_{b\,cp} \\ Z_{a\,cp} & Z_{b\,cp} & Z_{c\,cp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} + \ell \begin{bmatrix} Z_{ap\,ap} & Z_{ap\,bp} & Z_{ap\,cp} \\ Z_{ap\,bp} & Z_{bp\,bp} & Z_{bp\,cp} \\ Z_{ap\,cp} & Z_{bp\,cp} & Z_{cp\,cp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{ap} \\ I_{bp} \\ I_{cp} \end{bmatrix}$$

Y para obtener las impedancias de régimen permanente y de secuencia, se procede como siempre.

Ahora, si queremos relacionar la circulación de corrientes con la carga, se tendrá entonces:

$$\begin{bmatrix} \Delta V_a \\ \Delta V_b \\ \Delta V_c \end{bmatrix} = \ell \begin{bmatrix} Z_{aa} & Z_{ab} & Z_{ac} \\ Z_{ab} & Z_{bb} & Z_{bc} \\ Z_{ac} & Z_{bc} & Z_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} + \ell \begin{bmatrix} Z_{a\,ap} & Z_{a\,bp} & Z_{a\,cp} \\ Z_{a\,bp} & Z_{b\,bp} & Z_{b\,cp} \\ Z_{a\,cp} & Z_{b\,cp} & Z_{c\,cp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{ap} \\ I_{bp} \\ I_{cp} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \ell \begin{bmatrix} Z_{a\,ap} & Z_{a\,bp} & Z_{a\,cp} \\ Z_{a\,bp} & Z_{b\,bp} & Z_{b\,cp} \\ Z_{a\,cp} & Z_{b\,cp} & Z_{c\,cp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} + \ell \begin{bmatrix} Z_{ap\,ap} & Z_{ap\,bp} & Z_{ap\,cp} \\ Z_{ap\,bp} & Z_{bp\,bp} & Z_{bp\,cp} \\ Z_{ap\,cp} & Z_{bp\,cp} & Z_{cp\,cp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{ap} \\ I_{bp} \\ I_{cp} \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} I_{ap} \\ I_{bp} \\ I_{cp} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} Z_{ap\,ap} & Z_{ap\,bp} & Z_{ap\,cp} \\ Z_{ap\,bp} & Z_{bp\,bp} & Z_{bp\,cp} \\ Z_{ap\,cp} & Z_{bp\,cp} & Z_{cp\,cp} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Z_{a\,ap} & Z_{a\,bp} & Z_{a\,cp} \\ Z_{a\,bp} & Z_{b\,bp} & Z_{b\,cp} \\ Z_{a\,cp} & Z_{b\,cp} & Z_{c\,cp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} V_A - Z_L I_a \\ V_B - Z_L I_a \\ V_C - Z_L I_a \end{bmatrix} = \ell \begin{bmatrix} Z_{aa} & Z_{ab} & Z_{ac} \\ Z_{ab} & Z_{bb} & Z_{bc} \\ Z_{ac} & Z_{bc} & Z_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix} + \ell \begin{bmatrix} Z_{a\,ap} & Z_{a\,bp} & Z_{a\,cp} \\ Z_{a\,bp} & Z_{b\,bp} & Z_{b\,cp} \\ Z_{a\,cp} & Z_{b\,cp} & Z_{c\,cp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{ap} \\ I_{bp} \\ I_{cp} \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} V_A \\ V_B \\ V_C \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} Z_{aa}\ell & Z_{ab}\ell & Z_{ac}\ell \\ Z_{ab}\ell & Z_{bb}\ell & Z_{bc\ell} \\ Z_{ac}\ell & Z_{bc}\ell & Z_{cc}\ell \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_L & 0 & 0 \\ 0 & Z_L & 0 \\ 0 & 0 & Z_L \end{bmatrix} - \ell \begin{bmatrix} Z_{ap\,ap} & Z_{ap\,bp} & Z_{ap\,cp} \\ Z_{ap\,bp} & Z_{bp\,bp} & Z_{bp\,cp} \\ Z_{ap\,cp} & Z_{bp\,cp} & Z_{cp\,cp} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Z_{a\,ap} & Z_{a\,bp} & Z_{a\,cp} \\ Z_{a\,bp} & Z_{b\,bp} & Z_{b\,cp} \\ Z_{a\,cp} & Z_{b\,cp} & Z_{c\,cp} \end{bmatrix}^{2} \right\} \begin{bmatrix} I_a \\ I_b \\ I_c \end{bmatrix}$$