

EL4005 - Principios de Comunicaciones*Clase Auxiliar 2*

Fecha: 20 de noviembre de 2011

Profesor: Patricio Parada
 Prof. Auxiliar: Karel Mundnich

Problema 1 - Detección y Clasificación Estadística

En este problema vamos a considerar un ejemplo importante de aplicación a la detección correcta de símbolos. Supongamos que X es una variable aleatoria que modela una fuente de información binaria tal que $\mathbb{P}(X = 1) = p$. Esta fuente emite una secuencia de bits que llegan a un módem (receptor) a través de un canal de comunicación binario cuya salida será representada por la variable aleatoria Y , de forma tal que $X = Y$ con probabilidad $1 - \epsilon$,

- (a) Muestre que la probabilidad de transición que describe el canal puede ser escrita como

$$p_{Y|X}(y|x) = \epsilon^{x \oplus y} (1 - \epsilon)^{1 - x \oplus y} \quad (1)$$

donde

$$x \oplus y = \begin{cases} 1 & x = y \\ 0 & x \neq y. \end{cases}$$

- (b) Ahora se enfrenta al problema de diseñar un receptor que sea capaz de detectar adecuadamente X basado exclusivamente en la observación de Y y el conocimiento que tiene del canal. Discuta opciones para construir una regla de detección óptima para esta situación.

Se dirá que una regla de detección (o decisión) es una regla que estima el valor de X dado Y - y que denotaremos como $\hat{X}(Y)$ - de tal forma que la probabilidad que $\hat{X}(Y)$ sea distinto de X sea la menor posible.

Problema 2 - Proceso de Markov Binario

Considere un proceso de Bernoulli $\{X_n : n = 0, 1, \dots\}$ tal que

$$p_{X_n}(x) = \begin{cases} p & x = 1, \\ 1 - p & x = 0 \end{cases} \quad (2)$$

donde $p \in (0, 1)$ es un parámetro fijo.

Los símbolos $\{X_n\}$ son la entrada de un filtro lineal cuya salida también es un proceso binario que denotaremos por $\{Y_n\}$ y que definimos como sigue:

$$Y_n = \begin{cases} Y_0 & n = 0 \\ X_n \oplus Y_{n-1} & n = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3)$$

donde Y_0 es una variable binaria equiprobable independiente de X_n .

- (a) Demuestre que

$$p_X(x) = p^x (1 - p)^{1-x}, \quad x = 0, 1 \quad (4)$$

y que si el proceso es i.i.d., entonces

$$p_{X^n}(x^n) = p^{w(x^n)} (1 - p)^{n - w(x^n)} \quad (5)$$

donde $x^n = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $w(x^n)$ es el número de símbolos distintos de cero en la secuencia x^n (también recibe el nombre de distancia de Hamming).

(b) Muestre que Y_n puede escribirse como

$$Y_n = \begin{cases} 1 & X_n \neq Y_{n-1} \\ 0 & X_n = Y_{n-1} \end{cases} \quad (6)$$

proceso que recibe el nombre proceso auto-regresivo binario. Concluya que

$$p_{Y^n}(y^n) = \frac{1}{2} \prod_{i=1}^{n-1} p^{y_i \oplus y_{i-1}} (1-p)^{1-y_i \oplus y_{i-1}} \quad (7)$$

Problema 3 - Entropía de un Programa en un Lenguaje de Bajo Nivel

Un computador simple está diseñado para ejecutar sólo cuatro instrucciones: SUM, RES, MUL y ALM, las cuales son codificadas mediante los símbolos 00, 01, 10 y 11 respectivamente.

- (a) Basado en la revisión de una gran cantidad de programas se decide que los tipos de instrucciones son utilizados de manera independiente con probabilidades $3/4$, $1/16$, $1/16$ y $1/8$, respectivamente. En qué porcentaje podría reducirse el número promedio de bits empleados en los programas si utilizáramos un código más elaborado?
- (b) Se decide, luego de estudiar más acuciosamente un conjunto de programas, que una secuencia de instrucciones puede describirse de mejor forma utilizando una cadena de Markov de primer orden cuya matriz de transición de estados $\mathbf{P}$ y distribución de equilibrio $\boldsymbol{\pi}$ son:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \frac{13}{16} & 0 & \frac{1}{4} & 1 \\ \frac{1}{16} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{16} & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{1}{16} & 1 & \frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\pi} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} \\ \frac{1}{16} \\ \frac{1}{16} \\ \frac{1}{8} \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Usando este modelo, vuelva a determinar (a).