

EL4005 Principios de Comunicaciones

Clase No.10: Métodos de Monte Carlo y Estimadores



Patricio Parada

Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile

16 de Noviembre de 2011

Contenidos de la Clase (1)

Simulación de Monte Carlo

Generación de Números Aleatorios

Muestreo desde una Distribución Arbitraria

- Muestreo Unidimensional

- Método de Rechazo de Muestra

- Muestreo Secuencial

Muestreo de Importancia

Estimadores

Contenidos de la Clase (2)

Resumen y Lecturas

Simulación de Monte Carlo (1)

- La simulación de Monte Carlo es un método para calcular probabilidades, valores esperados, o en general, integrales cuando la evaluación directa resulta muy compleja o imposible.
- Sea $X = \{X_1, X_2, \dots\}$ una secuencia aleatoria cualquiera que generamos de alguna forma.
- Nuestro objetivo es determinar

$$\beta = \mathbb{E}[\phi(X)] \tag{1}$$

donde $\phi(\cdot)$ es una función medible.

Simulación de Monte Carlo (2)

- Por ejemplo, si $\phi(X) = \mathbf{1}_{\{X \in A\}}$ entonces

$$\beta = P(X \in A). \quad (2)$$

- Nuestro objetivo es generar R realizaciones de X de forma de poder estimar de mejor manera β .
- Si cada realización r se denota por X^r , con $r = 1, \dots, R$, entonces el estimador de β es

$$\beta = \frac{1}{R} \sum_{r=1}^R \phi(X^r) \quad (3)$$

Simulación de Monte Carlo (3)

- El ajuste de R permite controlar la precisión de la simulación, reduciendo su intervalo de confianza.
- Existen varios “sabores” de los métodos de Monte Carlo, pero para hablar de ellos debemos hablar de generación de números aleatorios.
- Para que una simulación de Monte Carlo sea útil dos elementos deben cumplirse:
 - Uno debe identificar una región del espacio del proceso donde la masa de probabilidad es significativa.
 - Uno debe realizar un muestreo lo suficientemente denso de este espacio.

Muestreo de Regiones para Simulación de MC

- Existen varias formas de muestrear una determinada región del espacio, y que sea lo suficientemente densa.
- Ellas son las siguientes:
 1. Método de Inversión
 2. Método de Rechazo
 3. Realización Secuencial
- Para poder hablar de ellas debemos primer establecer algunas formas básicas de muestrear el intervalo $[0, 1]$, es decir, de como generar números aleatorios.

Generación de Números Aleatorios (1)

- La simulación de cualquier proceso estocástico utiliza como base fundamental una función generadora de números aleatorios.
- En Matlab, esta función es `rand`.
- Las funciones generadoras de números aleatorios para generar números i.i.d. uniformes en el intervalo $[0, 1]$.
- Cualquier otro tipo de distribución puede ser obtenido mediante la distribución de probabilidad.

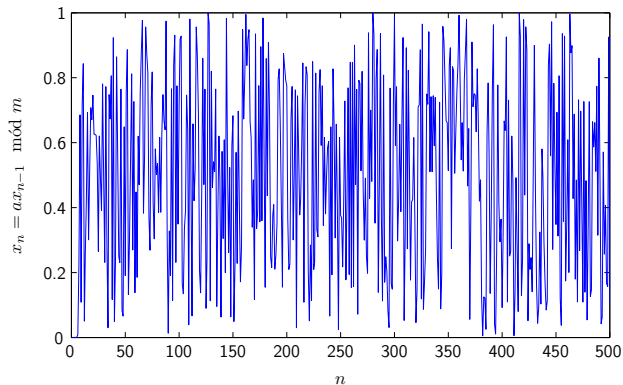
Generación de Números Aleatorios (2)

- En la práctica, la función `rand` genera números **pseudo aleatorios**.
- Aunque la secuencia de números que genera aparenta ser aleatoria es perfectamente determinística.
- El único elemento que puede hacerse aleatorio es el valor inicial que recibe el nombre de **semilla**.
- Algunos generadores pseudo aleatorios se basan en congruencias del tipo

$$x_n = ax_{n-1} \pmod{m} \quad (4)$$

cuya semilla es x_0 .

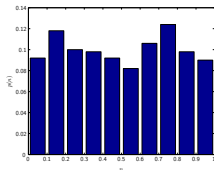
Generación de Números Aleatorios (3)



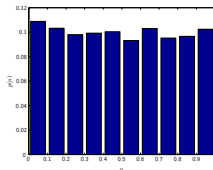
Parámetros:

- $x_0 = 2$
- $a = 25$
- $m = 2^{32} - 1$

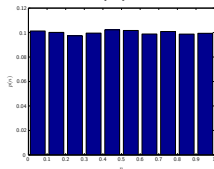
Generación de Números Aleatorios (4)



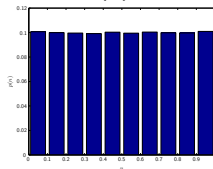
(a)



(b)



(c)



(d)

(a): 500 muestras

(b): 5000 muestras

(c): 50000 muestras

(d): 500000 muestras

A medida que el número de muestras aumenta su distribución se parece más y más a una distribución uniforme.

Generación de Números Aleatorios (5)

- Este tipo de secuencias es periódica, pero si fijan a y m en forma adecuada, este período puede ser bastante grande.
- Un generador bastante empleado tiene los siguientes parámetros:

$$a = 16807 \quad m = 2^{31} - 1$$

- Luego

$$x_n = \frac{sa^n \bmod m}{m} \tag{5}$$

donde s es la semilla del algoritmo.

Generación de Números Aleatorios (6)

- Si m es un número primo, entonces el primer exponente para el cual $a^h = 1 \pmod{m}$ es $m - 1$. Este es el período de x_n .
- En la práctica no existen generadores pseudo aleatorios perfectos.
- Sin embargo, si existen generadores aleatorios perfectos.
- Uno de ellos es un generador cuántico que se basa en el hecho que el estado de un fotón es verdaderamente aleatorio.

Muestreo desde una Distribución Arbitraria

- Ahora podemos volver al caso problema de muestreo requerido por los métodos de Monte Carlo.
- Para generar muestras de un proceso aleatorio que siga una distribución arbitraria existen varias métodos.
- Todos se basan en la existencia de un generador aleatorio que entregue muestras independientes distribuidas uniformemente en $(0, 1)$.
- Nos vamos a concentrar en tres:
 - Método de inversión
 - Método de rechazo
 - Realización secuencial

Método de Inversión de la Función Distribución

- Este método puede ser aplicado en variables aleatorias continuas o discretas, cuando la función distribución sea fácilmente invertible.

Teorema

Sea $F(x)$ la función distribución de una variable aleatoria X con valores reales.

Definamos la pseudo inversa $F^{-1}(p)$ de $F(x)$ como

$$F^{-1}(p) = \sup\{x : F(x) \leq p\}.$$

Sea U una muestra de una variable aleatoria uniforme en $(0,1)$. Luego $F^{-1}(U)$ es una muestra de X .

Ejemplo: Generación de Números Exponenciales (1)

- La distribución de probabilidad de una v.a. X exponencial con parámetro λ es

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} = p \quad (6)$$

- Luego

$$x = -\frac{\ln(1-p)}{\lambda}.$$

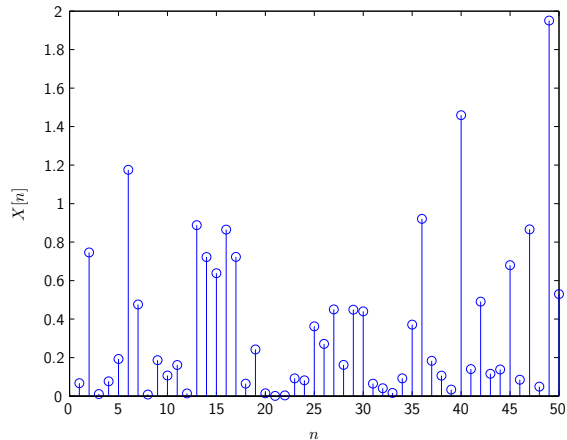
- Si simular muestras de X basta con que fijemos

$$X = -\frac{\ln(1-U)}{\lambda}. \quad (7)$$

donde $U \sim \text{Uniforme}(0, 1)$.

Ejemplo: Generación de Números Exponenciales (2)

```
N=50;  
lambda=2;  
U=rand(1,N)  
X=-log(1-U)/lambda;
```



Método de Rechazo de Muestra (1)

- El método de rechazo de muestra puede ser utilizado para generar muestras cuando el método de inversión de $F(x)$ no puede ser aplicado o resulta muy complejo.
- Aplica también para vectores aleatorios.
- Paso 1: Este método comienza con la generación de muestras $x_1, x_2, \dots$ de una distribución $g(x)$, una distribución homogénea, es decir:

$$f(x) < Mg(x) \tag{8}$$

para alguna constante $M > 1$.

Método de Rechazo de Muestra (2)

- NOTA: La generación de muestras a partir de $g(x)$ puede realizarse utilizando el método de inversión, por ejemplo.
- Paso 2: Fijar U como un valor aleatorio uniforme en $[0, 1]$.
- Paso 3: Luego, la muestra x_k queda sujeta a la posibilidad de rechazo mediante el siguiente test:

○ Si

$$\frac{f(x_k)}{Mg(x_k)} \geq U \quad (9)$$

acepto la muestra x_k

Método de Rechazo de Muestra (3)

- En caso contrario, la rechazo.

Teorema

Sea X una v.a. en un espacio S donde

$$P(X) = P(\bar{X}|\bar{Y} \in \mathcal{A}) \quad (10)$$

donde $(\bar{X}, \bar{Y})$ es una v.a. en $(S \times S')$ y $\mathcal{A}$ es un subconjunto medible de S . Se puede obtener una muestra de X siguiendo este algoritmo:

Método de Rechazo de Muestra (4)

```
do
  sacar muestra de  $(\bar{X}, \bar{Y})$ 
until  $\bar{Y} \in \mathcal{A}$ 
return  $\bar{X}$ .
```

El tiempo esperado de ejecución del algoritmo es $1/P(\bar{Y} \in \mathcal{A})$

Muestreo de una Distribución Rayleigh (1)

- La distribución Rayleigh modela el comportamiento estadístico de una canal inalámbrico unidimensional.
- Esta distribución toma la expresión:

$$f(x; \gamma) = \frac{x}{\gamma^2} e^{-x^2/2\gamma^2} u(x), \quad (11)$$

donde $u(x)$ es la función de paso unitario.

- Para generar muestras de esta distribución vamos a utilizar el método de rechazo.
- OBS: El método de inversión puede ser aplicado directamente en este caso, dado que

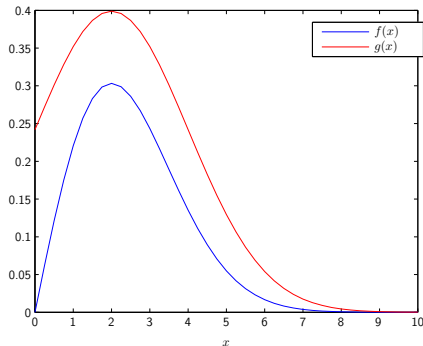
$$F(x) = \left[1 - e^{-x^2/2\gamma^2} \right] u(x). \quad (12)$$

Muestreo de una Distribución Rayleigh (2)

- Primero, acotamos la distribución $f(x)$ por una densidad normal centrada en el valor máximo de $f(x)$ y con $\sigma = \gamma$.

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-x_{\max})^2/2\sigma^2} \quad (13)$$

- Notar que si $M = 2$, entonces $Mg(x) > f(x)$ para todo x .

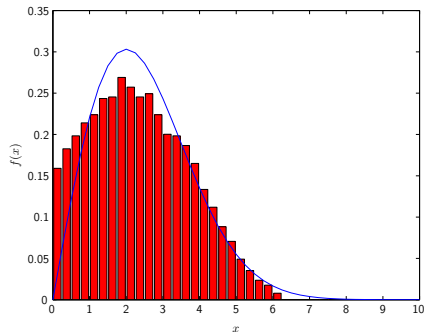


Muestreo de una Distribución Rayleigh (3)

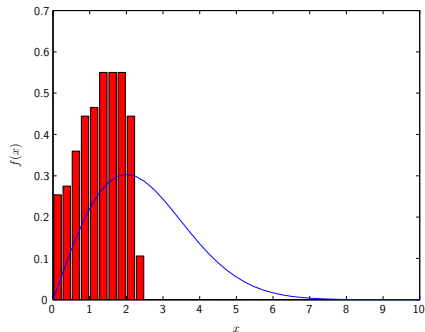
- Fijamos el umbral U uniformemente distribuido en $[0, 1]$.
- Ahora generamos la muestra x_k de acuerdo a $g(x)$.
- Aceptamos la muestra siempre y cuando

$$\frac{f(x_k)}{Mg(x_k)} \geq U.$$

Muestreo de una Distribución Rayleigh (4)



$$U = 0,2817$$



$$U = 0,7521$$

Muestreo de una Distribución Rayleigh (5)

- En los gráficos se observa que el valor del umbral U tiene un efecto significativo en la distribución empírica de las observaciones.
- En la primera figura (izquierda), se acepta una gran cantidad de muestras:

$$f(x_k) \geq U \times Mg(x_k) \quad (14)$$

- Dado que $M = 2$, y las distribuciones son relativamente cercanas, una gran cantidad de muestras van a satisfacer esta propiedad.
- Sin embargo, si el umbral es mayor, cercano a 0,75 son rechazadas una gran porción de las muestras, lo que desvía el peso de la distribución hacia la izquierda (en este caso).

Generación de Números en un Espacio Multidimensional (1)

- En el caso que uno requiera generar muestras en un espacio multidimensional que sigan una distribución arbitraria, el método de inversión sigue funcionando, pero con algunas correcciones.
- Este método recibe el nombre de muestreo secuencial.
- Para ello aprovechamos la propiedad de “regla de la cadena” de medidas de probabilidad que establece que:

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(x_1)f(x_2|x_1)f(x_3|x_1, x_2) \dots f(x_n|x_1, \dots, x_{n-1}) \quad (15)$$

Generación de Números en un Espacio Multidimensional (2)

- Supongamos que el espacio es de dimensión n y queremos generar muestras de una distribución $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$.
- Paso 1: Generar una muestra aleatoria uniforme en el cilindro unitario de dimensión n :

$$(u_1, u_2, \dots, u_n) = \text{Uniforme}([0, 1] \times [0, 1] \times \dots \times [0, 1]). \quad (16)$$

- Paso 2: Calcular las siguientes distribuciones condicionales:

$$F(x_1), F(x_2|x_1), F(x_3|x_2, x_1), \dots, F(x_n|x_{n-1}, \dots, x_1). \quad (17)$$

Generación de Números en un Espacio Multidimensional (3)

- Paso 3: Aplicar el método de inversión a cada distribución:

$$x_1 = F^{-1}(u_1) \tag{18a}$$

$$x_2 = F^{-1}(u_2|u_1) \tag{18b}$$

$$\vdots$$

$$x_n = F^{-1}(u_n|u_{n-1}, \dots, u_1) \tag{18c}$$

Ejemplo: Generación de Números Gaussianos Bidimensionales (1)

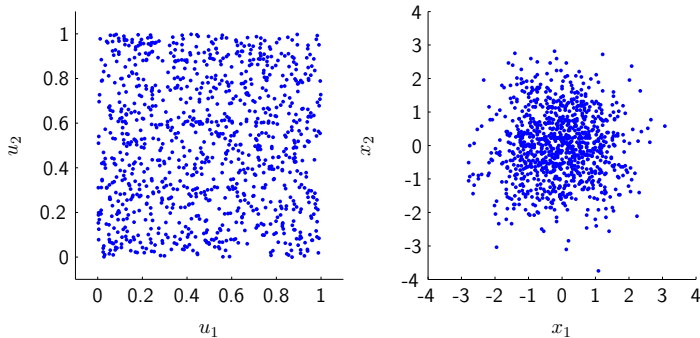
- Consideremos una distribución gaussiana bidimensional de parámetros

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}$$

- Luego, si $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2]^T$

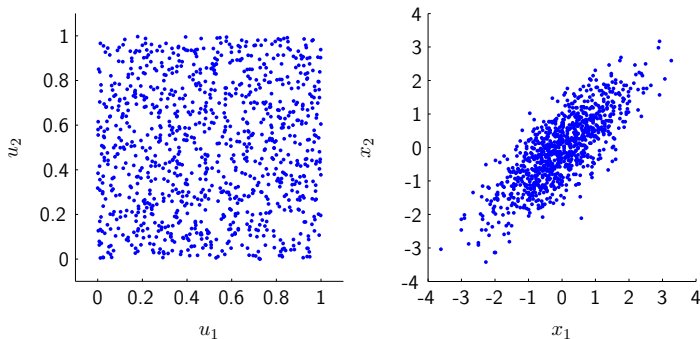
$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\det(\mathbf{K})}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^T \mathbf{K}^{-1}(\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})\right).$$

Ejemplo: Generación de Números Gaussianos Bidimensionales (2)



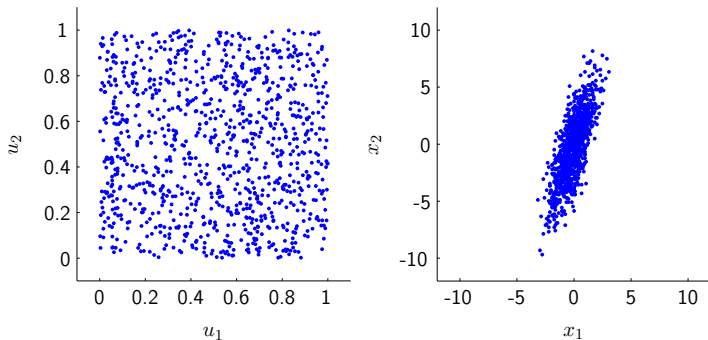
$$\boldsymbol{\mu} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Generación de Números Gaussianos Bidimensionales (3)



$$\mu = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0,75 \\ 0,75 & 1 \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Generación de Números Gaussianos Bidimensionales (4)



$$\mu = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 1 & 0,75 \\ 0,75 & 3 \end{bmatrix}$$

Muestreo de Importancia (1)

- Los métodos de generación aleatoria que hemos visto representa algunas de las formas para generar muestras que sigan una distribución arbitraria.
- Sin embargo, no hemos resuelto el problema de asegurarnos que estamos muestreando en una región apropiada del espacio.
- El **muestreo de importancia** es una técnica que permite seleccionar aquellas muestras que tienen mayor **impacto** o **relevancia** en el cálculo de $\mathbb{E}[\phi(X)]$ (del problema de Monte Carlo).

Muestreo de Importancia (2)

- Este proceso asigna **pesos** $\omega_r(t)$ a cada muestra X^r de forma que aquellas muestras más importantes tengan mayor peso que aquellas con menor relevancia.
- Luego

$$\mathbb{E}[\phi(X); t] \approx \sum_{r=1}^R \omega_r(t) X^r(1 : t) \quad (19)$$

donde la estimación se realiza en un tiempo t y $X^r(1 : t)$ denota el proceso

$$X^r(1 : t) = \{X^r(s) : s \leq t\}. \quad (20)$$

Algunas formas de Muestreo de Importancia (2)

- Existen varias técnicas para implementar el muestreo de importancia.
- **Escalamiento.** En este caso se simula una versión escalada de X , llamada aX con $a > 1$.
- Luego

$$\hat{f}(x) = \frac{1}{a} f\left(\frac{x}{a}\right) \quad (21)$$

Algunas formas de Muestreo de Importancia (2)

- **Traslación.** En este caso se simula una versión trasladada de X , llamada $X - c$.
- Luego

$$\hat{f}(x) = f(x - c) \quad (22)$$

- Otras formas de muestreo de importancia son específicas a algoritmos:
 - Reducción de varianza.
 - Filtros de partículas
 - Método de rechazo.

Estimadores Más Empleados (1)

- En este curso vamos a emplear algunos estimadores para los estadísticos de un proceso estocástico.
- El valor medio se aproxima mediante el promedio de un conjunto finito de muestras:

$$\mathbb{E}[X_t] \approx \bar{X}_t = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_{t-i} \quad (23)$$

para un t fijo.

- A medida que N tiende a infinito la convergencia está asegurada por la LGN (asumiendo varianza finita).

Estimadores Más Empleados (2)

- La varianza se aproxima mediante el cuadrado de la desviación estándar de un conjunto finito de muestras:

$$\text{Var}[X_t] \approx \sigma^2(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_{t-i} - \bar{X}_t)^2 \quad (24)$$

para un t fijo.

- Este estimador es sesgado.
- La función de autocorrelación también se estima de forma similar:

$$R[k] \approx \hat{R}[k] = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-k} (X_i - \bar{X})(X_{i+k} - \bar{X}) \quad (25)$$

con $k = 0, 1, \dots, K$.

Resumen

Hemos revisado:

- Ideas básicas de simulación computacional de eventos aleatorios.
- Técnica de simulación
- Métodos de Monte Carlo
- Método de Inversión
- Método de Rechazo

Lecturas

Esta clase, al igual que la anterior, no cubre temas vistos en la bibliografía del curso. Sin embargo, quienes deseen aprender más sobre estos temas pueden revisar las siguientes referencias:

- J-Y. Le Boudec, *Performance Evaluation of Computer and Communication Systems*, EPFL Press, 2011. Capítulo 6.
- A. Tarantola, *Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation*, SIAM, 2004. Capítulo 2.