EL4005 Principios de Comunicaciones

Clase No.9: Simulación Computacional de Procesos Aleatorios

Patricio Parada

Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile

11 de Noviembre de 2011

Contenidos de la Clase (1)

Análisis vs. Simulación Computacional

Simulación Computacional

Técnicas de Simulación

- Simulación de Eventos Discretos

Resumen y Lecturas

Análisis vs. Simulación Computacional

- Toda nuestra presentación hasta este momento se basa en el conocimiento que podamos tener de los procesos, y en particular, de las medidas de probabilidad que los caracterizan.
- En muchas situaciones reales este conocimiento es parcial o nulo, por lo que necesitamos de una metodología que nos permita realizar una estimación de calidad de estas medidas de manera experimental.
- En esta clase nos vamos a concentrar en algunas técnicas y algoritmos para simular - de la mejor forma - un proceso estocástico.

Estimación de una Probabilidad (1)

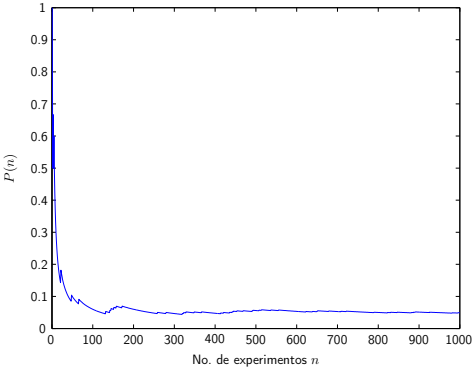
- El problema más simple que uno puede enfrentar es determinar la probabilidad de un evento a partir de la repetición de un experimento aleatorio.
- Por ejemplo, consideremos que tenemos una moneda cargada que probabilidad $3/4$ entrega una cara y con probabilidad $1/4$ entrega un sello. Nos interesa determinar:

$$\text{P}[3 \text{ caras en } 4 \text{ lanzamientos}].$$

- Podemos calcularlo empíricamente utilizando el siguiente algoritmo:

Estimación de una Probabilidad (2)

```
for n=1:N
    for i=1:4 % simulación experimento
        if rand>=0.75 %lanzamiento
            x(i)=1;
        else
            x(i)=0;
        end
    end
    if sum(x)==3;
        n_x(n)=1;
    end
end
```



Estimación de una Probabilidad (3)

- En este caso, $n_x(i)$ es una variable binaria tal que

$$n_x(i) = \begin{cases} 1 & \text{se observaron 3 caras en 4 lanzamientos} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \tag{1}$$

  en el experimento i-ésimo.

- Luego,

$$P = \lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{N} \frac{n_x(i)}{N}$$

- A medida que el número de experimentos aumenta mejora la estabilidad de la solución:

$$\text{P}[3 \text{ caras en } 4 \text{ lanzamientos}] \approx 0{,}049.$$

Simulación Computacional (1)

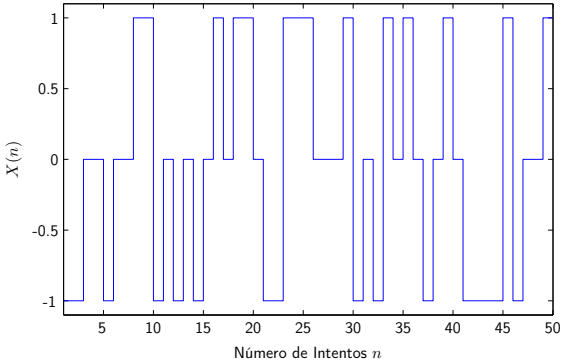
- Una simulación es un experimento en el computador donde la situación real es reemplazada por la ejecución de un programa.
- La simulación computacional de un fenómeno aleatorio se ha vuelto una herramienta indispensable en investigación y desarrollo.
- Este conjunto de ideas se conoce bajo el nombre de Métodos de Monte Carlo.
- La simulación puede ser utilizada en cualquiera de los siguientes contextos:
  - Para construir ejemplos que validen o refuten una conjetura.
  - Para desarrollar intuición sobre un problema.
  - Para probar un diseño.

Simulación Computacional (2)

- En casi todas las simulaciones que hagamos haremos uso de un generador de números aleatorios.
- En el caso de Matlab, esta función recibe el nombre `rand`, la cual genera un número distribuido uniformemente entre 0 y 1.
- Ejemplo: Sea X una variable que toma uno de los siguientes valores $\{-1, 0, 1\}$ con probabilidades $p(X = -1) = 1/4$, $p(X = 0) = 1/2$ y $p(X = +1) = 1/4$.
- Podemos generar una realización de una secuencia de repeticiones de X utilizando el siguiente algoritmo:

Simulación Computacional (3)

```
for i=1:M
  u=rand;
  if u <=1/4 %=p1
    x(i)=-1
  elseif u>1/4 & u<=3/4
    x(i)=0
  else
    x(i)=1
  end
end
```

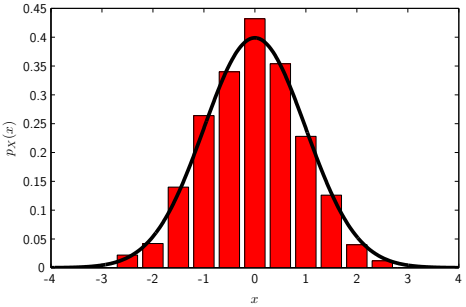


Estimación de una Densidad de Probabilidad (1)

- Una densidad de probabilidad puede ser estimada determinando el histograma de los datos y luego "escalando" apropiadamente para que sumen 1.
- Un histograma es un gráfico tal que
  - su abcisa registra el identificador de una determinada casilla (un intervalo real)
  - su cuya ordenada indica el número de experimentos cuyo valor cae en cada casilla.
- Consideremos el caso en que simulamos M realizaciones de una variable aleatoria gaussiana $\mathcal{N}(0, 1)$.

Estimación de una Densidad de Probabilidad (2)

```
x=randn(1000,1);
bincenters=[-3.5:0.5:3.5]';
bins=length(bincenters);
h=zeros(bins,1);
for i=1:length(x)
  for k=1:bins
    if x(i)>bincenters(k)-0.5/2 ...
     & x(i)<=bincenters(k)+0.5/2
       h(k)=h(k)+1;
    end
  end
end
pxest=h/(1000*0.5);
```



Tiempo Simulado y Tiempo Real (1)

- En una simulación el flujo del tiempo es controlado por el computador.
- Eventos que pueden ocurrir de manera simultánea en la realidad deben simularse de manera secuencial en un computador.
- Por ejemplo, supongamos que queremos simular la señal recibida a la salida de un canal AWGN si los símbolos transmitidos $x[n]$ toman valores $\{+2, -2\}$ de manera igualmente probable.

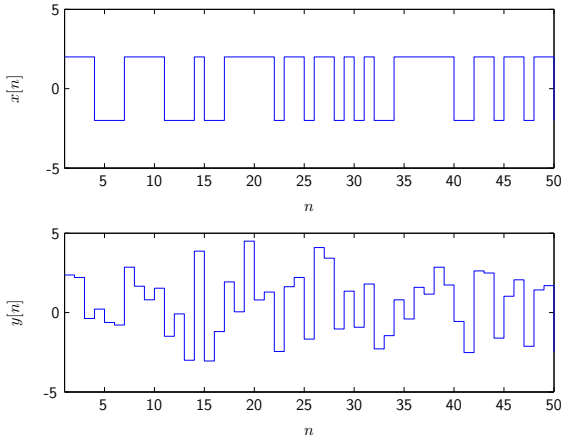
$$y[n] = x[n] + w[n] \, n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Tiempo Simulado y Tiempo Real (2)

- Si simulamos este canal debemos proseguir como sigue:
  1. Simular la secuencia $\{x[n]\}$
  2. Simular la secuencia de ruido aditivo $\{w[n]\}$
  3. Sumar el resultado de ambas series
- Al serializar el procedimiento debemos mantener en mente el tiempo simulado.
- En este caso, éste corresponde a los índices de la serie, es decir, los enteros de 1 a N.

Tiempo Simulado y Tiempo Real (3)

```
p=0.5;
N=50;
for n=1:N
   u=rand;
   if u> p
     x(n)=2;
   else
     x(n)=-2;
   end
end
w=randn(1,N);
y = x+w;
```



Simulación de Eventos Discretos

- La **simulación de eventos discretos** es muy utilizada para simular sistemas de comunicaciones y sistemas computacionales.
- Para implementarla necesitamos definir dos elementos:
  - Una variable que represente el **tiempo actual**
  - Un programa o agenda de eventos
- El programa de eventos es una lista de eventos ordenados de acuerdo a los instantes en que ocurren.
- El programa de simulación toma esta lista de eventos, avanza el reloj de tiempo actual y ejecuta el evento.

Recurrencia Estocástica (1)

- Es una técnica más eficiente de simulación, pero puede ser aplicado en un conjunto más restringido de modelos.
- Asumamos que el sistema que vamos a simular puede ser descrito de la siguiente forma:

$$X_0 = x_0;$$
$$X_{n+1} = f(X_n, Z_n)$$

donde

- X_n es el estado del sistema en la n-ésima transición
- x_0 es un número fijo

Recurrencia Estocástica (2)

- ◦ Z_n es un proceso estocástico que puede ser simulado (por ejemplo i.i.d o una cadena de Markov)
  ◦ $f(\cdot, \cdot)$ es el mapeo que define la recurrencia.
- El tiempo en que ocurre cada transición T_n forma parte del estado X_n.
- La simulación de un proceso descrito como una recurrencia estocástica no requiere de una lista de eventos previamente conocida; basta con simular un evento por vez.

Resumen

Hemos revisado:

- Ideas básicas de simulación computacional de eventos aleatorios.
- Técnica de simulación

Lecturas

- J-Y. Le Boudec, *Performance Evaluation of Computer and Communication Systems*, EPFL Press, 2011. Capítulo 6.
- A. Tarantola, *Inverse Problem Theory and Methods for Model Parameter Estimation*, SIAM, 2004. Capítulo 2.