EL4005 Principios de Comunicaciones

Clase No.7: Proceso Aleatorio de Ruido Gausiano y Procesos ARMA

Patricio Parada

Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile

4 de Noviembre de 2011

Contenidos de la Clase (1)

Procesos Gaussianos y Blancos

- Procesos Gaussianos
- Procesos Blancos
- Procesos Pasabanda

Procesos Auto-Regresivos y de Media Móvil

Resumen y Lecturas

Preguntas que estudiaremos en la clase

- Continuaremos con nuestro estudio de procesos aleatorios.
- ¿Qué pasa con la respuesta de un sistema lineal?
- ¿Cuáles son los tipos más comunes de procesos aleatorios?

Procesos Gaussianos (1)

Motivación Física

- Considere una resistencia R.
- El movimiento de los electrones al interior de R será proporcional a la temperatura de la resistencia. Mientras mayor sea ésta, mayor será el movimiento de los electrones.
- La temperatura tiene un efecto directo en la corriente circulante.
- Cada electrón puede verse como una pequeña fuente cuyo comportamiento es independiente del resto de los electrones.
- La corriente total será la suma de las contribuciones de las corrientes generadas por todos los electrones.

Procesos Gaussianos (2)

Motivación Física

- Si modelamos la corriente de j-ésimo electrón como una variable aleatoria independiente e idénticamente distribuida I_j igual al resto, entonces la corriente media total será el promedio de las contribuciones de cada una ellas, esto es

$$\frac{1}{J}\sum_{j=0}^{J} I_j \overset{J\to\infty}{\to} \mathcal{N}(\mu_I, \sigma_I^2).$$

- Esto último proviene de aplicar el Teorema Central del Límite.

Procesos Gaussianos (3)

- Un proceso aleatorio $X(t)$ será un **proceso Gaussiano** si para todo n y $(t_1, \ldots, t_n)$ las variables aleatorias $\{X(t_i)\}_{i=1}^{n}$ son conjuntamente Gaussianas.
- Dos procesos aleatorios $X(t)$ e $Y(t)$ son **procesos conjuntamente Gaussianos** si para todo n, m y $(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ y $(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m)$, el vector aleatorio

$$(X(t_1), \ldots, X(t_n), Y(\tau_0), \ldots, Y(\tau_m))$$

se distribuye de acuerdo a una densidad Gaussiana $n + m$-dimensional.

Propiedades

1. Si un proceso Gaussiano $X(t)$ pasa a través de un sistema LTI, su salida $Y(t)$ es también Gaussiano, y aun más, los procesos $X(t)$ e $Y(t)$ son conjuntamente Gaussianos.
2. Si $X_1(t), X_2(t), \ldots, X_n(t)$ son conjuntamente Gaussianos, entonces $X_i(t)$ es independiente de $X_j(t)$ (para $i \neq j$) si y sólo si $X_i(t)$ es no correlacionado con $X_j(t)$.

Procesos Blancos

- Un proceso blanco es aquel en que todas las componentes de frecuencia aparecen con igual potencia, es decir, es aquel cuya densidad espectral de potencia es constante.
- Definición: Un proceso $X(t)$ es llamado proceso blanco si su densidad espectral de potencia $S_X(f)$ es constante para todo f.
- Notemos que un proceso blanco tiene potencia total infinita:

$$P_X = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f)df = \int_{-\infty}^{\infty} S_0 df = \infty.$$

- En la práctica, los sistemas tienen una potencia finita, por lo que un proceso blanco no tiene significado físico.

Proceso de Ruido Termal $n(t)$

- Sin embargo, el ruido termal tiene una potencia relativamente constante (entre 0 y 10^12 Hz) a temperatura ambiente.

$$S_n(f) = \frac{\hbar f}{2(\exp(\frac{\hbar f}{kT}) - 1)}.$$

- Para efectos prácticos, el ruido termal puede ser considerado un proceso blanco con espectro de potencia igual a $\frac{kT}{2}$, donde k es la constante de Boltzmann y T es la temperatura medida en $^\circ K$.

Procesos Blancos

- El valor kT se denota normalmente como N_0.
- La función de autocorrelación de un proceso blanco es

$$R_n(\tau) = \mathcal{F}^{-1}[\frac{N_0}{2}] = \frac{N_0}{2}\delta(\tau). \quad (1)$$

- Propiedades:
  1. El proceso de ruido termal es un proceso estacionario.
  2. Un proceso de ruido termal tiene media cero.
  3. Un proceso de ruido termal es Gaussiano.
  4. Un proceso de ruido termal es un proceso blanco con densidad espectral de potencia

$$S_n(f) = \frac{kT}{2}.$$

Filtrado de Procesos de Ruido (1)

- El ruido puede ser filtrado por etapas intermedias de un sistema de comunicaciones o procesamiento de señales.
- Por lo tanto, es posible que el ruido se transforme en un proceso pasabandas, es decir, donde la densidad espectral de potencia está ubicada en torno a algún $f_c >> 0$.
- P: Cómo manipulamos un proceso aleatorio pasabanda?
- R: Los caminos muestrales de un proceso pasabanda también son señales pasabanda.

Filtrado de Procesos de Ruido (2)

- Sea $X(t)$ un proceso aleatorio que es la salida de un filtro pasabanda, cuyo ancho de banda es W y se encuentra centrado en torno a una frecuencia central f_c.
- Por ejemplo

$$H(f) = \begin{cases} 1 & |f - f_c| \leq W \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}.$$

- El ruido térmico es blanco y Gaussiano, por lo tanto

$$S_X(f) = \frac{N_0}{2}|H(f)|^2 = \frac{N_0}{2}H(f)$$

Filtrado de Procesos de Ruido (3)

- Notemos que si $H(f)$ tiene la expresión del ejemplo, entonces

$$S_X(f) = \begin{cases} \frac{N_0}{2} & |f - f_c| \leq W \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases}.$$

Procesos Pasabanda

- Toda señal pasabanda puede ser descrita en términos de componentes **en fase** $X_c(t)$ y **en cuadratura** $X_s(t)$.
- Esto es

$$X(t) = X_c(t)\cos(2\pi f_c t) - X_s(t)\sin(2\pi f_c t).$$

donde $X_c(t)$ y $X_s(t)$ son procesos pasabajos.

- Otra manera de expresar $X(t)$ es en términos de un proceso envolvente $A(t)$ y un proceso de fase aleatoria $\Theta(t)$.

$$X(t) = A(t)\cos(2\pi f_c t + \Theta(t)).$$

Ambos procesos $A(t)$ y $\Theta(t)$ son pasabajos.

Propiedades de Procesos en Fase y Cuadratura (1)

Consideremos una señal de ruido blanco Gaussiano. Si $X_c(t)$ y $X_s(t)$ denotan las componentes en fase y en cuadratura de un proceso pasabanda $X(t)$, entonces

1. $X_c(t)$ y $X_s(t)$ son procesos de media cero, pasabajos, conjuntamente estacionarios, y conjuntamente Gaussianos.
2. Si la potencia del proceso $X(t)$ es P_X, la potencia de cada una de las componentes satisface:

$$P_X = P_{X_c} = P_{X_s} = \int_{-\infty}^{\infty} S_x(f)df.$$

Propiedades de Procesos en Fase y Cuadratura (2)

3. $X_c(t)$ y $X_s(t)$ tienen la misma densidad espectral de potencia, y es

$$S_{X_c}(f) = S_{X_s}(f) = S_X^+(f - f_c) + S_X^-(f + f_c).$$

donde $S_X^+(f)$ es la parte positiva del espectro de $X(t)$ y $S_X^-(f)$ es la parte negativa del espectro.

4. Si $+f_c$ y $-f_c$ son ejes de simetría de las frecuencias positivas y negativas en el espectro $H(f)$, entonces $X_c(t)$ y $X_s(t)$ son independientes.

Ancho de Banda Equivalente del Ruido (1)

- Cuando un proceso de ruido blanco Gaussiano pasa a través de un filtro, el proceso de salida sigue siendo Gaussiano, pero en general deja de ser blanco.
- El efecto del filtro altera el espectro de potencia de la salida de acuerdo a

$$S_Y(f) = S_X(f)|H(f)|^2 = \frac{N_0}{2}|H(f)|^2.$$

- El contenido de potencia del proceso de salida es

$$P_Y = \int_{-\infty}^{\infty} S_Y(f)df = \frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df.$$

Ancho de Banda Equivalente del Ruido (2)

- Definimos el **ancho de banda equivalente** del ruido, denotado por B_{neq} como

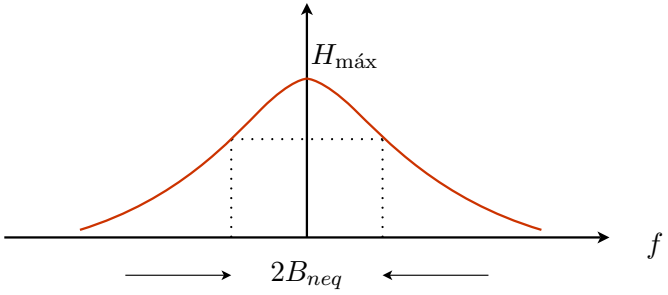
$$B_{neq} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} |H(f)|^2 df}{2H_{\text{máx}}^2},$$

  donde $H_{\text{máx}}^2$ denota el máximo de $|H(f)|$.

- Por lo tanto,

$$P_Y = N_0 B_{neq} H_{\text{máx}}^2. \tag{2}$$

Ancho de Banda Equivalente del Ruido (3)



Otros Modelos de Procesos Aleatorios

- Existen dos modelos elementales que se utilizan para introducir "memoria" en un proceso, de manera diferente a los procesos de Markov.
  - Proceso auto-regresivo (AR)
  - Proceso de media móvil (MA: *moving average*)
- Estos modelos son empleados en forma extensiva en filtros digitales, análisis de secuencias aleatorias (series de tiempo), sistemas de control, extracción de características, etc.

Operador Backshift B

- Antes introducir los modelos vamos a introducir el operador B:

$$BX_n = X_{n-1} \tag{3}$$

- Por inducción es directo de mostrar que:

$$B^k X_n = X_{n-k} \quad k \in \mathbb{Z} \tag{4}$$

Proceso Auto-Regresivo (1)

- Un proceso es auto-regresivo de orden p - denotado como $AR(p)$ - si existe una dependencia directa entre el valor de una muestra en un instante arbitrario n y sus p valores anteriores:

$$X_n = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i X_{n-i} + W_n \tag{5}$$

  donde W_n es un proceso de ruido aditivo independiente de X.

- Si usamos la notación con el operador B entonces:

$$X_n = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i B^i X_n + W_n$$

$$\Rightarrow \phi(B) X_n = W_n$$

Proceso Auto-Regresivo (2)

- donde

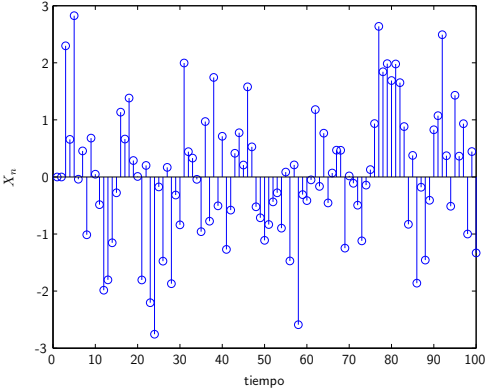
$$\phi(B) = 1 - \sum_{i=1}^{p} \alpha^i B^i. \tag{6}$$

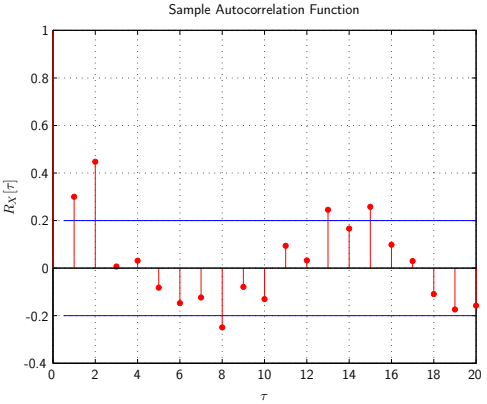
- En la práctica hay dos formas en que uno puede utilizar un proceso auto-regresivo:
  - Si los parámetros del modelo $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ y el orden p son conocidos, entonces el modelo puede ser utilizado para generar un proceso auto-regresivo.
  - Ejemplo:

$$X_n = 0{,}1X_{n-1} + 0{,}5X_{n-2} + W_n \tag{7}$$

con $W_n \sim \mathcal{N}(0, 1)$ y $X_0 = 0$.

Proceso Auto-Regresivo (3)





Proceso Auto-Regresivo (4)

- Desde el punto de vista de sistemas, un proceso auto-regresivo no es más que la salida de un sistema LTI sin ceros y cuyos polos son las raices del polinomio

$$\phi(z) = 1 - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i z^i. \tag{8}$$

- Si los zeros de $\phi(z)$ están dentro del círculo unitario, entonces el proceso será estacionario.
- La segunda forma en que un modelo auto-regresivo puede ser empleado es para ser "ajustado" a una serie de observaciones de un proceso.
- Esta tarea es muy común en la práctica y su solución no es única.

Proceso Auto-Regresivo (5)

- P: ¿Qué queremos decir con el término "ajustar"?
- R: Simplemente, que queremos determinar los parámetros del modelo p y $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ que mejor "explican" las observaciones.
- El criterio de ajuste más común se basa en la **minimización del error cuadrático medio** entre el modelo y los observaciones.
- El problema se expresa de la siguiente forma:

$$\min_{p \in \mathbb{N}} \min_{(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{R}^p} \mathbb{E}[(X_n - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i X_{n-i})^2]. \tag{9}$$

Proceso Auto-Regresivo (6)

- Este proceso de ajuste se denomina habitualmente entrenamiento o aprendizaje estadístico.
- En general es posible determinar a medida que el orden del modelo aumenta, el error cuadrático medio disminuye.
- Sin embargo, a medida que p aumenta la capacidad generalizadora del modelo (que pueda explicar observaciones nuevas no utilizadas en el entrenamiento), disminuye.
- En la práctica se selecciona p de forma que se minimice conjuntamente el error cuadrático medio para los datos de entrenamiento como de validación.

Proceso de Media Móvil (1)

- Un proceso de media móvil de orden q - denotado como $MA(q)$ - es un proceso estocástico X_n que "suaviza" o promedia los valores de otro proceso W_n.

$$X_n = \sum_{j=1}^{q} \beta_j W_{n-j} \tag{10}$$

  de forma tal que $\sum_{j=1}^{q} \beta_j = 1$.
- Mediante este promedio se logra remover las variaciones locales del proceso original (el ruido de la señal) y rescatar la tendencia o valor medio del proceso.
- Notemos que si el proceso W_n no es estacionario, entonces veremos que este promedio debería variar considerablemente en el tiempo (lo que justifica su nombre).

Proceso de Media Móvil (2)

- Al igual que un proceso auto-regresivo, el proceso de media móvil puede ser descrito en forma compacta mediante un operador:

$$X_n = \theta(B)W_n \tag{11}$$

con

$$\theta(B) = \sum_{j=1}^{q} \beta_j B^j. \tag{12}$$

Proceso de Media Móvil (3)

- Existen diversas selecciones para los parámetros de un proceso de media móvil, y éste puede ser causal o no causal.
- Los modelos causales, como el planteado en (11) se seleccionan habitualmente con todos los valores iguales a $1/q$:

$$\beta_j = \frac{1}{q}. \tag{13}$$

- Sin embargo, esta no es la única forma de construir este promedio ponderado.
- En caso que el proceso sea no causal, podemos hacer que X_n dependa de valores futuros de W_n

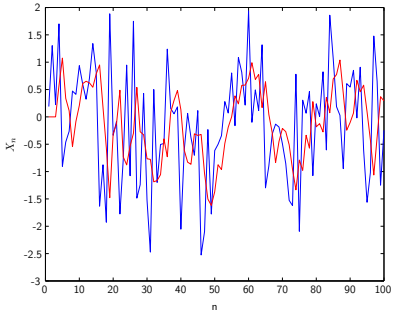
$$X_n = \sum_{j=-q/2}^{q/2} \beta_j W_{n-j} \tag{14}$$

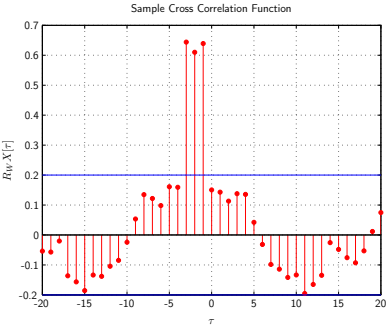
para q par.

Proceso de Media Móvil (4)

- Ejemplo:

$$X_n = \frac{1}{2}W_{n-1} + \frac{1}{4}W_{n-2} + \frac{1}{4}W_{n-3} \tag{15}$$

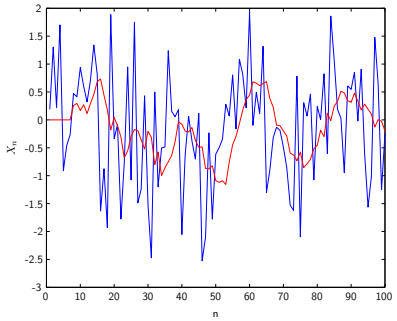


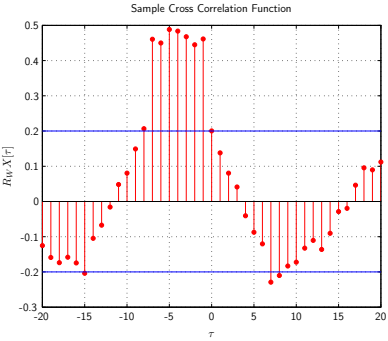


Proceso de Media Móvil (5)

- Ejemplo:

$$X_n = \frac{1}{7}\sum_{j=1}^{7} W_{n-j} \tag{16}$$

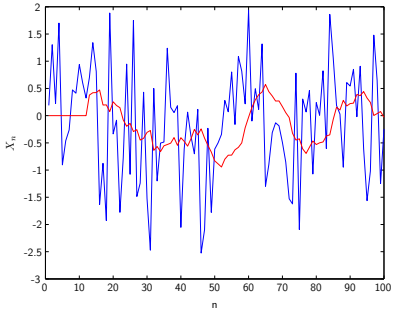


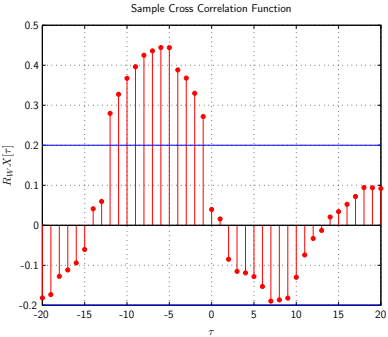


Proceso de Media Móvil (6)

- Ejemplo:

$$X_n = \frac{1}{12}\sum_{j=1}^{12} W_{n-j} \tag{17}$$





Proceso Auto-Regresivo de Media Móvil (1)

- Un proceso auto-regresivo de media móvil de orden (p, q) -denotado como $ARMA(p, q)$ - es un proceso estocástico que combina los efectos de suavizado del ruido con la memoria propia del proceso bajo estudio.
- La expresión del proceso es la siguiente:

$$X_n = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i X_{n-i} + \sum_{j=1}^{q} \beta_j W_{n-j} \tag{18}$$

Proceso Auto-Regresivo de Media Móvil (2)

- Este proceso puede ser representado en forma compacta de igual forma que los procesos AR y MA por si solos.
- Si definimos los operadores:

$$\phi(B) = 1 - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i B^i \text{ y } \theta(B) = \sum_{j=1}^{q} \beta_j B^j \tag{19}$$

entonces

$$\phi(B) X_n = \theta(B) W_n. \tag{20}$$

Resumen

Hemos revisado:

- Procesos de Markov y Gauss-Markov.
- Ruido, Procesos Gaussianos y Blancos
- Procesos auto-regresivos, de media móvil y ARMA.

Lecturas

- Salehi & Proakis, *Communication Systems Engineering*, Capítulo 4.
- Box, Jenkins, & Reinsel, *Time Series Analysis: Forecasting and Control*, 4th Edition, Capítulo 3.