Guía de Problemas No.1

Problemas

1. Sea X una variable aleatoria con función densidad de probabilidad
$$f(x) = \begin{cases} c(1-x^2) & -1 < x < 1 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$
   (a) Cuál es el valor de c?
   (b) Determine la distribución de probabilidad $F(x)$.
   (c) Determine el valor esperado $E[X]$ y la varianza $\text{Var}[X]$.

2. **Vida Útil Media:** La vida útil en horas de un transistor es modelada por una variable aleatoria cuya densidad es
$$f(t) = te^{-t}, t \geq 0.$$
   Determine la vida útil esperada del dispositivo.

3. **Densidades Conjuntas:** La función densidad de probabilidad conjunta de dos variables aleatorias X e Y está dada por
$$f(x, y) = c(y^2 - x^2)^{-y},\ -y \leq x \leq,\ 0 < y < \infty.$$
   (a) Determine c.
   (b) Determine las densidades marginales de X e Y.
   (c) Determine $E[X]$.

4. **Gaussiana Bivariada:** Considere un par de variables aleatorias X e Y conjuntamente Gaussianas, cuya densidad conjunta es
$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \times \exp\left\{ -\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2 + \left(\frac{y-\mu_y}{\sigma_y}\right)^2 - 2\rho\frac{(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y} \right] \right\}$$
   (a) Demuestre que la densidad condicional de X dado $Y = y$ es normal con parámetros
$$\mu_x + \rho\frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \mu_y) \quad \text{and} \quad \sigma_x^2(1-\rho^2).$$
   (b) Demuestre que X e Y son variables aleatorias normales con sus respectivos parámetros μ_x, σ_x^2, μ_y y σ_y^2.
   (c) Demuestre que X e Y son independientes cuando $\rho = 0$.

5. **Estrategia de Apuestas de Kelley:** Considere un apostador que en cada juego gana o pierde su apuesta con probabilidades p y $1-p$, respectivamente. Si $p > \frac{1}{2}$, el jugador emplea una estrategia de juego (denominada como la estrategia Kelley) que consiste en apostar una fracción $2p-1$ de la fortuna en ese momento; esto es, si X_n indica las ganancias acumuladas luego de n juegos, entonces, en la apuesta $A_{n+1} = (2p-1) * X_n$.

   Determine el valor esperado de la fortuna luego de n apuesta asumiendo que el monto inicial $X_0 = x$.

6. **Cálculos Básicos en Procesos Aleatorios:** Considere el proceso aleatorio $X(t)$ definido por

$$Z(t) = X\cos(2\pi f_c t) + Y\sin(2\pi f_c t)$$

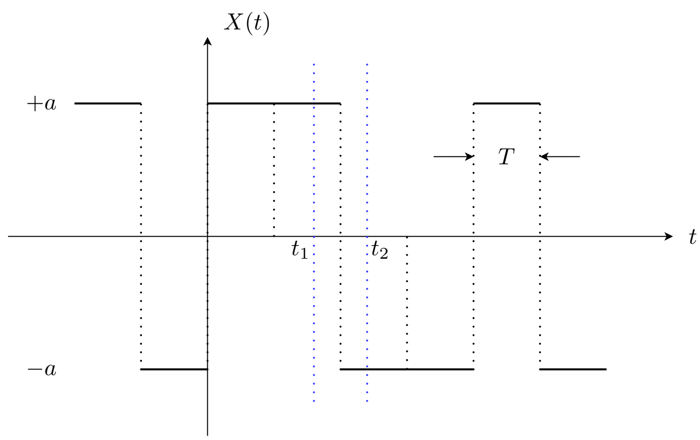
donde X e Y son dos variables aleatorias Gaussianas de media cero e independientes, cada una con varianza σ^2.

(a) Determine $E[Z(t)]$.

(b) Determine $R_Z(t+\tau, t)$. Es $X(t)$ estacionario?

(c) Determine la densidad espectral de $Z(t)$.

7. **Señalización Binaria Asíncrona:** Vamos a considerar una señal continua $X(t)$ formada por la superposición de pulsos cuadrados de ancho T mostrada en la figura. En ella asumiremos que X_n denota la altura del pulso n-ésimo, con X_n tomando valores $\pm a$ con igual probabilidad.



La secuencia recibe el nombre de *asíncrona* porque el inicio del n-ésimo pulso, o equivalentemente, el pulso 0 está desplazado una cantidad D unidades de tiempo, donde D es una variable aleatoria uniforme en el intervalo $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$. Para $|t_2 - t_1| < T$, el instante de muestreo t_2 podría estar en el mismo pulso del muestreo t_1 o en uno diferente.

El proceso $X(t)$ puede ser descrito entonces como

$$X(t) = \sum_n X_n \Pi\Big(\frac{t - D - nT}{T}\Big), \tag{1}$$

donde $\Pi(t)$ es un pulso rectangular de ancho T definido como

$$\Pi(t) = \begin{cases} 1 & |t| < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

(a) Determine la función de autocorrelación del proceso $X(t)$.

(b) Demuestre que le proceso es estacionario en sentido amplio.

(c) Calcule la densidad espectral de potencia del proceso.

8. **Modulación Digital por Codificación por Desplazamientos en Frecuencia:** El objetivo de este problema es estudiar las propiedades de un proceso de modulación digital denominado PSK (Phase-Shift Keying). Esta forma de modulación incorpora la información contenida en una secuencia de datos cualquiera en la fase de un pulso sinusoidal. A continuación presentamos la construcción del esquema.

Consideremos la secuencia de bits descrita por $\{B_n\}$, donde cada B_n es Bernoulli con parámetro p e independiente de B_m para $n \neq m$. Definiremos la secuencia aleatoria de fase

$$\Theta_n = \begin{cases} +\pi/2 & \text{si } B_n = 1 \\ -\pi/2 & \text{si } B_n = 0. \end{cases}$$

y a partir de ella el proceso aleatorio

$$\Theta_a(t) = \Theta_n, \text{ para } nT \leq t \leq (n+1)T.$$

donde T es el tiempo que toma la transmisión de un bit. Finalmente, la señal modulada será

$$X(t) = \cos(2\pi f_c t + \Theta_a(t)). \tag{2}$$

En esta expresión f_c es la frecuencia de la señal portadora y la amplitud de la señal es 1.

(a) Exprese la señal $X(t)$ en términos de las componentes en fase y cuadratura $S_c(t)$ y $S_s(t)$ definidas por

$$S_c(t) = \begin{cases} \cos(2\pi f_c t) & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

$$S_s(t) = \begin{cases} \sin(2\pi f_c t) & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

(b) Determine el valor esperado $E[X(t)]$.

(c) Determine la función de autocorrelación $R_X(t_1; t_2)$. Es el proceso estacionario en sentido amplio?

9. **Detector de Borde:** Sea $X(t)$ un proceso aleatorio de valores reales, que modela la señal producida por un sensor. Definamos el proceso de diferencia

$$Y(t) \triangleq h * X(t) = X(t) - X(t-1).$$

(a) Determine $E[Y(t)]$ en función de $E[X(t)]$.

(b) Determine $R_{XY}(t_1; t_2)$ y $R_Y(t_1; t_2)$ en términos de $R_X(t_1; t_2)$.

(c) Si $E[X(t)] = 0$ y $R_X(t_1; t_2) = \sigma_X^2 e^{-\alpha|t_1 - t_2|}$, determine $E[Y(t)]$ y $R_Y(t_1; t_2)$.

10. **Densidad Espectral de Potencia:** Determine la densidad espectral de potencia de un proceso aleatorio cuya función de autocorrelación está dada por

$$R_X(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}, \quad -\infty < t < \infty,$$

con α una constante real positiva.

11. **Filtrado de un Proceso Estacionario**: Considere un sistema LTI cuya respuesta al impulso tiene una representación espectral dada por

$$H(f) = f^2 \text{sgn}(f) e^{-\jmath(16f)} \Pi(f)$$

donde sgn$(\cdot)$ es la función signo y

$$\Pi(f) = \begin{cases} 1 & |f| \leq 20 \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Si el sistema LTI tiene como entrada un proceso estacionario en sentido amplio cuya función de autocorrelación es

$$R_X(\tau) = \frac{5}{2}\delta(\tau) + 2,$$

determine la potencia promedio contenida en la banda $0{,}0$ a $1{,}0$ Hertz (considere sólo la banda positiva).

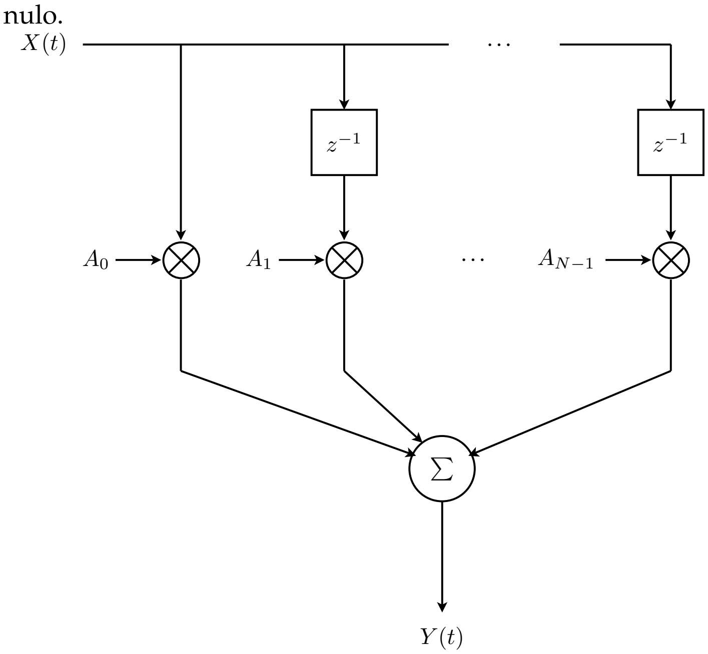
12. **Proceso Autoregresivo:** Considere el proceso aleatorio $Y(t)$ que corresponde a la salida del filtro autoregresivo de la figura, definido por

$$Y(t) = \sum_{n=0}^{N-1} A_n X(t - nT).$$

El proceso $X(t)$ es estacionario y Gaussiano, con media cero y función de autocorrelación $R_X(\tau)$ con la propiedad

$$R_X(nT) = 0,$$

para n entero no nulo.



Las ganancias de los taps A_n son variables aleatorias Gaussianas de media cero, no correlacionadas, y de varianza σ_A^2. Las ganancias también son independientes del proceso de entrada.

(a) Determine la función de autocorrelación de $Y(t)$.

(b) Si el número N de taps es una variable aleatoria Poisson con media $\lambda > 0$, repita la parte (a).

13. **Ancho de Banda RMS:** El ancho de banda RMS de un proceso $X(t)$ se define por

$$B_{\text{rms}} = \frac{\int_0^\infty f^2 S_X(f) df}{\int_0^\infty S_X(f) df}.$$

Demuestre que si $X(t)$ es estacionario,

$$B_{\text{rms}} = -\frac{1}{4\pi^2 R_X(0)} \frac{d^2}{d\tau^2} R_X(\tau)\Big|_{\tau=0}.$$

14. **Filtrado de Ruido Blanco:** Sea $n_w(t)$ un proceso de ruido blanco Gaussiano de media cero, con densidad espectral $N_w(f) = \frac{N_0}{2}$. Este proceso pasa a través de un filtro pasabanda ideal de ancho $2W$ centrado en torno a la frecuencia f_0. Denotaremos el proceso a la salida por $n(t)$.

(a) Asumiendo $f_0 = f_c$, determine el contenido de potencia en fase y en cuadratura de $n(t)$.

(b) Determine la densidad espectral de potencia de la envolvente $V(t)$ del ruido $n(t)$.

(c) Si ahora define el proceso $X(t) = A\cos(2\pi f_0 t) + n(t)$, donde A es constante. Cual es la densidad espectral de potencia de la envolvente de $X(t)$?