EL4005 Principios de Comunicaciones

Clase No.06: Procesos Aleatorios y Sistemas Lineales

Patricio Parada

Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile

2 de Noviembre de 2011

Contenidos de la Clase (1)

Preguntas que estudiaremos en la clase

- Continuaremos con nuestro estudio de procesos aleatorios.
- ¿Qué pasa con la respuesta de un sistema lineal?

Procesos Aleatorios y Sistemas Lineales (1)

- Queremos estudiar las propiedades del proceso aleatorio

$$Y(t) = h * X(t)$$

  en términos de las propiedades del proceso aleatorio de entrada $X(t)$ y la respuesta al impulso de un sistema LTI (Linear-time invariant) dada por $h(t)$.
- Nos interesa conocer las respuestas a las siguientes preguntas:
  - ¿Bajo qué condiciones el proceso $Y(t)$ es estacionario?
  - ¿Bajo qué condiciones los procesos $X(t)$ e $Y(t)$ serán conjuntamente estacionarios?

Procesos Aleatorios y Sistemas Lineales (2)

- ¿Cuál es el valor esperado y la autocorrelación de $Y(t)$ y cuál es la correlación cruzada entre $X(t)$ e $Y(t)$?

$E[Y(t)]$ (1)

- Sea $X(t)$ un proceso estacionario en el sentido amplio.
- Su media μ_X es conocida
- Sea $h(t)$ la respuesta al impulso de una sistema lineal invariante en el tiempo.
- Por definición

$$\begin{aligned} \mu_Y(t) = E[Y(t)] &= E[h * X(t)] \\ &= E[\int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau)X(\tau)d\tau] \end{aligned}$$

$E[Y(t)]$ (2)

$$
\begin{aligned}
&= \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) E[X(\tau)] d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) \mu_X d\tau \\
&= \mu_X \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) d\tau.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, μ_Y es independiente del tiempo.

$R_{X,Y}(t_1, t_2)$ (1)

$$\begin{aligned}
R_{X,Y}(t_1, t_2) &= E[X(t_1)Y(t_2)] \\
&= E[X(t_1) \int_{-\infty}^{\infty} h(t_2 - s)X(s)ds] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} h(t_2 - s)E[X(t_1)X(s)]ds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} h(t_2 - s)R_X(t_1 - s)ds
\end{aligned}$$

$R_{X,Y}(t_1, t_2)$ (2)

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(-u) R_X(t_1 - t_2 - u) du$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(-u) R_X(\tau - u) du$$

$$= h(-\tau) * R_X(\tau).$$

$R_Y(t_1, t_2)$ (1)

$$
\begin{aligned}
R_Y(t_1, t_2) &= E[Y(t_1)Y(t_2)] \\
&= E[Y(t_1) \int_{-\infty}^{\infty} h(t_2 - s)X(s)ds] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} h(t_2 - s)E[Y(t_1)X(s)]ds \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} h(t_2 - s)R_{Y,X}(t_1 - s)ds
\end{aligned}
$$

$R_Y(t_1, t_2)$ (2)

$$R_Y(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t_2 - s) R_{X,Y}(s - t_1) ds$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} h(t_2 - s) R_{X,Y}(s - t_1) ds$$

$R_Y(t_1, t_2)$

$$
\begin{aligned}
R_Y(t_1, t_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t_2 - t_1 - u) R_{X,Y}(u) du \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau - u) R_{X,Y}(u) du \\
&= R_{X,Y}(\tau) * h(\tau) \\
&= R_X(\tau) * h(-\tau) * h(\tau).
\end{aligned}
$$

Densidad Espectral de Potencia de Procesos Estacionarios (1)

- El contenido de energía de un proceso aleatorio puede ser calculado o estimado a partir de las características espectrales de los posibles valores que puede tomar.
- Si el proceso varía en forma lenta, la mayor parte de la energía estará concentrada en las frecuencias bajas.
- Si el proceso varía en forma rápida, la mayor parte de la energía estará concentrada en las frecuencias altas.

Densidad Espectral de Potencia de Procesos Estacionarios (2)

- Una función útil para describir el contenido de potencia de un proceso estocástico es la **densidad espectral de potencia** o, simplemente, el **espectro de potencia** de un proceso aleatorio.
- Notación: El espectro de potencia de un proceso aleatorio $X(t)$ será denotado por $S_X(f)$ y será medido en Watts/Hz.

Teorema de Wiener Khinchin

Teorema

Sea $X(t)$ un proceso estacionario en el sentido amplio. La densidad espectral de potencia es la transformada de Fourier de la función de autocorrelación, i.e.,

$$S_X(f) = \mathfrak{F}[R_X(\tau)]. \tag{1}$$

Ejemplo (1)

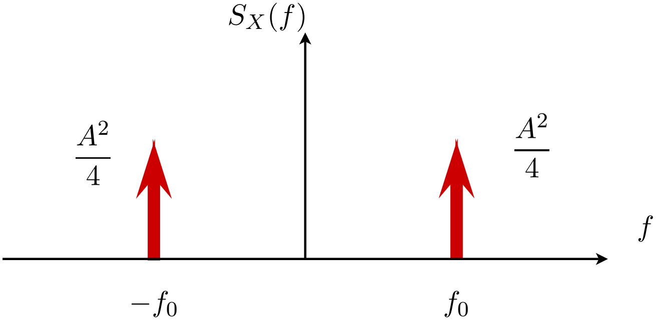
- Ejemplo: Considere el proceso $X(t) = A\cos(2\pi f_0 + \Theta)$ antes estudiado. Sabemos que es un proceso estacionario en el sentido amplio.
- Su función de autocorrelación está dada por

$$R_X(\tau) = \frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_0 \tau).$$

Ejemplo (2)

- Por lo tanto, su densidad espectral de potencia es

$$S_X(f) = \mathcal{F}[\frac{A^2}{2}\cos(2\pi f_0 \tau)] = \frac{A^2}{4}(\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)).$$



Potencia de un Proceso Estacionario

- La potencia total de un proceso es la suma del contenido de potencia a lo largo de las distintas frecuencias.
- Si $X(t)$ es un proceso aleatorio, la potencia del proceso, que denotaremos por P_X es

$$P_X = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) df \tag{2}$$

- Si el proceso es estacionario en sentido amplio, entonces

$$R_X(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) e^{\jmath 2\pi f t} df \Rightarrow R_X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_X(f) df = P_X.$$

Espectro de Potencia en Sistemas LTI (1)

- Determinamos que en un sistema LTI μ_Y, $R_Y(\tau)$ y $R_{X,Y}(\tau)$ preservan las propiedades del proceso de entrada.
- En particular,

$$\mu_Y = \mu_X \int_{-\infty}^{\infty} h(t)dt = \mu_X H(0).$$

$$R_Y(\tau) = R_X(\tau) * h(-\tau) * h(\tau)$$

$$R_{X,Y}(\tau) = R_X(\tau) * h(-\tau)$$

- Por lo tanto

$$S_Y(f) = S_X(f)|H(f)|^2. \tag{3}$$

Espectro de Potencia en Sistemas LTI (2)

- El espectro cruzado de potencia $S_{X,Y}(f)$ se define como

$$S_{X,Y}(f) = \mathcal{F}[R_{X,Y}(\tau)]. \tag{4}$$

- En el caso de un sistema LTI tenemos

$$S_{X,Y}(f) = S_X(f)H^*(f). \tag{5}$$

- Como $R_{XY}(\tau) = R_{YX}(-\tau)$, entonces

$$S_{Y,X}(f) = S^*_{X,Y} = S_X(f)H(f).$$

Procesos de Markov (1)

- Un proceso de Markov corresponde a un proceso aleatorio dependiente.
- Puede ser utilizado para construir procesos "con memoria".
- Los procesos de Markov puede ser de tiempo continuo o de tiempo discreto (cadena de Markov).
- A su vez, los valores que el proceso puede tomar puede ser continuo o discreto.

Procesos de Markov (2)

- Una cadena de Markov de valores continuous $X[n]$ satisfice que la densidad condicional a $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_0$ (cualquiera) depende sólo de x_n, esto es:

$$f_X(x_{n+k}|x_n, x_{n-1}, \ldots, x_0) = f_X(x_{n+k}|x_n). \tag{6}$$

para todo $k \geq 1$ entero.

- Similarmente, una cadena de Markov de valores discretos $X[n]$, satisface que la función de masa de probabilidad condicional a $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_0$ (cualquiera) depende sólo de x_n, esto es:

$$p_X(x_{n+k}|x_n, x_{n-1}, \ldots, x_0) = p_X(x_{n+k}|x_n). \tag{7}$$

para todo $k \geq 1$ entero.

Procesos de Markov (3)

- Esta condición nos permite calcular la densidad conjunta del proceso hasta el tiempo n:

$$\begin{aligned} f_X(x_0, x_1, \ldots, x_n) &= f_X(x_0) f_X(x_1|x_0) f_X(x_2|x_1) \ldots f_X(x_n|x_{n-1}) \\ &= f_X(x_0) \prod_{k=1}^{n} f_X(x_k|x_{k-1}) \end{aligned} \tag{8}$$

- Un proceso es de **Gauss-Markov** si

$$f_X(x;0) = \mathcal{N}(0, \sigma_0^2)$$

y la densidad de transición está dada por

$$f_X(x_n|x_{n-1}; n, n-1) = \mathcal{N}(\rho x_{n-1}, \sigma_W^2)$$

Procesos de Markov (4)

- ¿ Cuál es la densidad incondicional de $X[n]$?
- Podemos proceder por inducción sobre n.
- O bien, aprovecharnos de algunas propiedades de la densidad Gaussiana.
- Necesitamos calcular $E[X[n]]$ y $\text{Var}[X[n]]$.

Procesos de Markov (5)

- Cálculo de $E[X[n]]$

$$
\begin{aligned}
E[X[n]] &= E[E[X[n]|X[n-1]]] \\
&= E[\rho X[n-1]] \\
&= \rho \mu_X[n-1].
\end{aligned}
$$

- Como en $n = 0$, $\mu_X[0] = 0$, entonces $E[X[n]] = 0$ para todo n.

Procesos de Markov (6)

- Cálculo de $\text{Var}[X[n]] = E[X^2[n]]$

$$
\begin{aligned}
E[X^2[n]] &= E[E[X^2[n]|X[n-1]]] \\
&= E[\sigma_W^2 + \rho^2 X^2[n-1]] \\
&= \sigma_W^2 + \rho^2 E[X^2[n-1]] \\
&= \sigma_W^2 + \rho^2 \sigma_X^2[n-1] \\
\Rightarrow \sigma_X^2[n] &= \rho^2 \sigma_X^2[n-1] + \sigma_W^2
\end{aligned}
$$

Procesos de Markov (7)

- Resolviendo la recurrencia obtenemos que:

$$\sigma_X^2[n] = \frac{1-\rho^{2(n+1)}}{1-\rho^2}\sigma_W^2 + \rho^{2(n-1)}\sigma_0^2. \tag{9}$$

- A medida que $n \to \infty$

$$\sigma_X^2[n] \to \frac{1}{1-\rho^2}\sigma_W^2. \tag{10}$$

Resumen

Hemos revisado:

- Procesos aleatorios estacionarios.
- Independencia entre procesos aleatorios.
- Procesos aleatorios y sistemas lineales.
- Cálculo de la densidad espectral de potencia de un proceso estacionario.
- Procesos de Markov y Gauss-Markov.

Lecturas

- Salehi & Proakis, *Communication Systems Engineering*, Capítulo 4.
- Stark & Woods, *Probability and Random Processes with Applications to Signal Processing*, Capítulo 6, secciones 6.1 a 6.4.