EL4005 - Principios de Comunicaciones

Clase Auxiliar 1

Fecha: *28 de octubre de 2011*

Profesor: Patricio Parada
Prof. Auxiliar: Karel Mundnich

Problema 1 - Probabilidad Condicional

a) Sea $B_j : j = 1, \ldots$ eventos disjuntos en $\mathcal{F}$. Muestre que

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A|B_k)\mathbb{P}(B_k) \text{ [Ley de probabilidades totales]}$$

y que

$$\mathbb{P}(B_j|A) = \frac{\mathbb{P}(A|B_j)\mathbb{P}(B_j)}{\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A|B_k)\mathbb{P}(B_k)}$$

b) Considere una colección de eventos arbitrarios $A_j : j = 1, \ldots, n \in \mathcal{F}$. Verifique la siguiente relación secuencial:

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{n} A_j\right) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2|A_1)\mathbb{P}(A_3|A_1, A_2)\cdots\mathbb{P}(A_n|A_1, \ldots, A_{n-1})$$

Problema 2 - Esperanza

a) Sea $X(w)$ una v.a. tomando valores en $\mathbb{N}$. Muestre la siguiente identidad,

$$\mathbb{E}(X(w)) = \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(X(w) \geq n)$$

b) Sean $X(w)$ y $Y(w)$ variables aleatorias reales con distribución conjunta $P_{X,Y} \in (\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$. Definimos su esperanza condicional por medio de $P_{X,Y}$ de la siguiente forma,

$$\mathbb{E}_{X|Y}(X|Y = y) = \int_{\mathbb{R}} x f_{X|Y}(x|y)dx, \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

y por tanto una variable aleatoria inducida por $Y(w)$. Se pide demostrar (verificar) las siguientes identidades:

1. Si X e Y son independientes entonces $\mathbb{E}_{X|Y}(X|Y = y) = \mathbb{E}_X(X)$ y por tanto también se tiene que $\mathbb{E}_{X|Y}(X|Y) = \mathbb{E}_X(X)$.
2. $\mathbb{E}_X(X) = \mathbb{E}_{X,Y}(X) = \mathbb{E}_Y(\mathbb{E}_{X|Y}(X|Y))$