

EL4005 Principios de Comunicaciones

Clase No.04: Variables Aleatorios



Patricio Parada

Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile

24 de Octubre de 2010

Contenidos de la Clase (1)

Variables Aleatorias

Definición

Relación con otros objetos aleatorios

Distribución de probabilidad

Densidad de probabilidad y masa de probabilidad

Variables aleatorias importantes

Función de una variable aleatoria

Momentos de una variable aleatoria

Resumen y Lecturas

Motivación

- Muchos procesos inherentemente aleatorios son conocidos a través de mediciones numéricas o arreglos de ellas.
- Las nociones de variable aleatoria y vector aleatorio son el formalismo introducido en probabilidades para tratar esta idea.

Variables Aleatorias (1)

- *Definición:* Una **variable aleatoria** (v.a.) es una función medible desde el conjunto Ω a otro conjunto E , que habitualmente corresponde a los números reales.
- Para que esta aplicación sea **medible**, el par (Ω, \mathcal{F}) debe ser medible, es decir, \mathcal{F} debe incluir todos los subconjuntos abiertos de Ω .

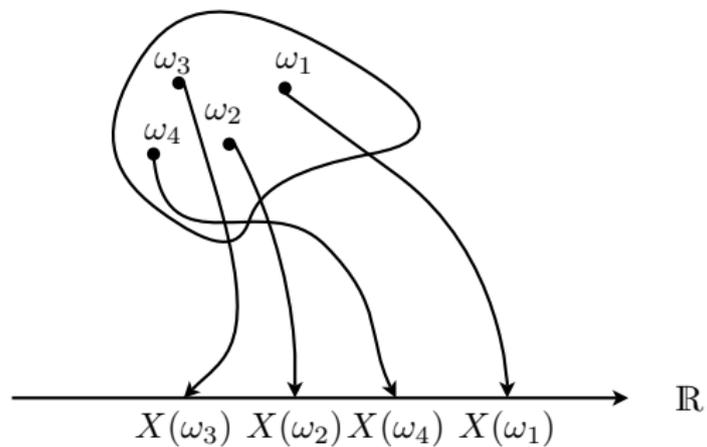
Variables Aleatorias (2)

- Una función $f : \Omega \rightarrow E$ se dice que es medible si y sólo sí, (Ω, \mathcal{F}) y (E, \mathcal{E}) son medibles, y para cada $B \in \mathcal{E}$, la preimagen de B a través de f pertenece a \mathcal{F} , i.e.

$$\forall B \in \mathcal{E}, f^{-1}(B) \in \mathcal{F}. \quad (1)$$

- La medibilidad de una función es una característica más general que la continuidad.
- Los valores que una variable aleatoria X toma serán denominados **realizaciones** de la variable aleatoria, serán denotada en minúsculas (x).

Variables Aleatorias (3)



Variables Aleatorias (4)

- Conceptualmente, no hay mayor diferencia entre una variable aleatoria, un vector aleatorio, una secuencia aleatoria o un proceso estocástico.
- Lo que cambia es el conjunto de llegada del mapeo:
 - $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$: **variable** aleatoria.
 - $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$: **vector** aleatoria.
 - $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^\infty$: **secuencia** aleatoria o **serie de tiempo**.
 - $X : \Omega \rightarrow$ Espacio de Funciones: **proceso estocástico**.

Variables Aleatorias (5)

- Ejemplos de espacios de funciones usados son:
 - $\mathcal{C}[a, b]$: espacio de funciones continuas en $[a, b]$.
 - \mathcal{L}_p : espacio de funciones continuas cuya norma p es finita:

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}. \quad (2)$$

con $p \geq 1$.

Distribución de Probabilidad (1)

- Definición: La función **distribución de probabilidad acumulativa** de una v.a. X es una función de valores reales entre 0 y 1 definida como la medida del conjunto de nivel $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}$, esto es:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \\ &= P(X \leq x). \end{aligned} \tag{3}$$

- Propiedades:
 1. $0 \leq F_X(x) \leq 1$.

Distribución de Probabilidad (2)

- $F_X(x)$ es no decreciente.
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$.
- $F_X(x)$ es continua por la derecha, es decir

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} F(x + \epsilon) = F(x).$$

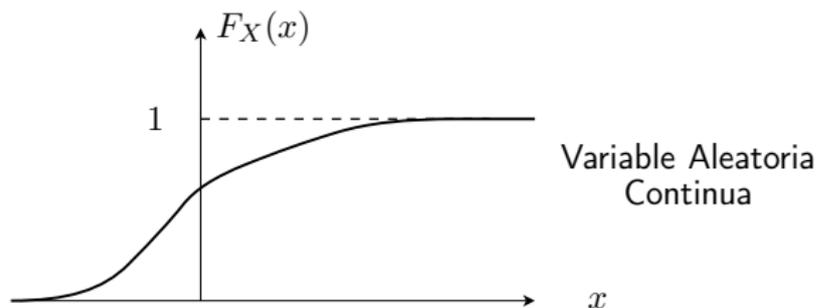
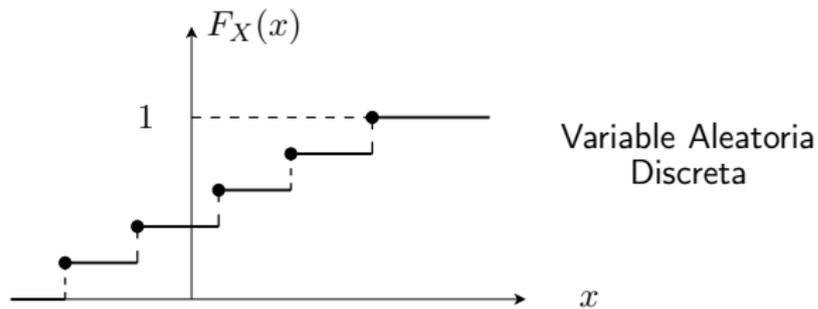
- $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$.
- $P(X = a) = F_X(a) - F_X(a^-)$.

Distribución de Probabilidad (3)

- Notar que es necesario que X sea medible para que la función distribución esté correctamente definida:

$$\begin{aligned}\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} &= X^{-1}(] - \infty, x]) \\ \Rightarrow F_X(x) &= P(X^{-1}(] - \infty, x])).\end{aligned}$$

Distribución de Probabilidad (4)



Densidades de Probabilidad (1)

- Definición: La **función de densidad de probabilidad** (f.d.p.) de una variable aleatoria continua X es la derivada de $F_X(x)$ con respecto a x :

$$f_X(x) = \frac{d}{dx}F_X(x). \quad (4)$$

- Propiedades:

- $f_X(x) \geq 0$.

- $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$.

Densidades de Probabilidad (2)

3. $\int_a^b f_X(x)dx = P(a < X \leq b).$

4. en general

$$P(X \in A) = \int_{x \in A} f_X(x)dx$$

5. $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u)du.$

Función de Masa de Probabilidad (1)

- Definición: La **función de masa de probabilidad** (f.m.p.) de una variable aleatoria discreta X , corresponde al equivalente a las densidades de probabilidad del caso continuo.
- La f.m.p. queda definida como

$$p_i = P(X = x_i). \quad (5)$$

- Propiedades:
 1. $p_i \geq 0$.

Función de Masa de Probabilidad (2)

2. $\sum_i p_i = 1.$

3. $P(a < X \leq b) = \sum_{i:a < x \leq b} p_i.$

4. en general

$$P(X \in A) = \sum_{i \in A} p_i$$

5. $F_X(x) = \sum_{i \leq x} p_i.$

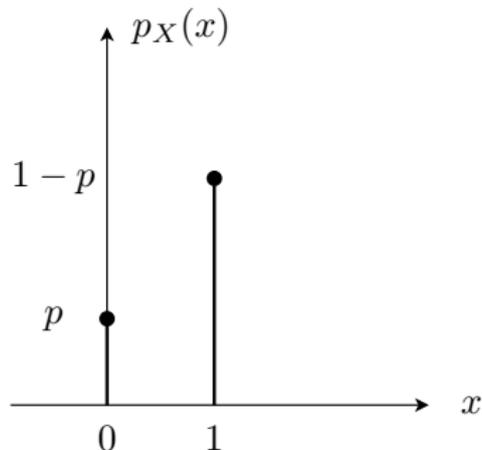
Sobre la Relevancia de las Distribuciones

- La función distribución de probabilidad es un elemento que caracteriza en forma completa el comportamiento de una variable aleatoria.
- Está siempre bien definida, porque es función directa de P .
- Aunque las nociones de densidad y función de masa son más cómodas para trabajar, no siempre se pueden definir.
- Por otro lado, las integrales habitualmente tampoco se pueden calcular en forma analítica (gaussiana por ejemplo).

V.A. Bernoulli (p)

- **Bernoulli** (p). Una v.a. Bernoulli (p) es una v.a. que toma sólo dos valores, como por ejemplo, 0 y 1 con probabilidad p y $1 - p$.

Aplicación: modela los errores introducidos por un canal binario, o los símbolos emitidos por una fuente de información binaria.



V.A. Binomial (p, n) (1)

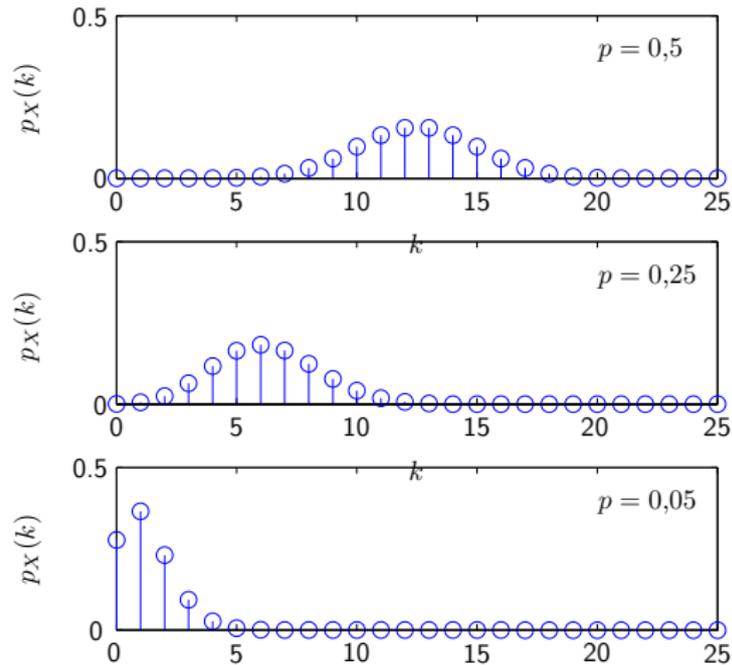
- **Binomial** (p, n) . Una v.a. binomial (p, n) es una v.a. que representa n repeticiones de una v.a. Bernoulli (p) .

La f.m.p. corresponde a

$$P(X = k) = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} & 0 \leq k \leq n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} .$$

Aplicación: Esta v.a. modela el número de bits erróneos recibidos en una transmisión, en un canal binario que comete errores con probabilidad p .

V.A. Binomial (p, n) (2)



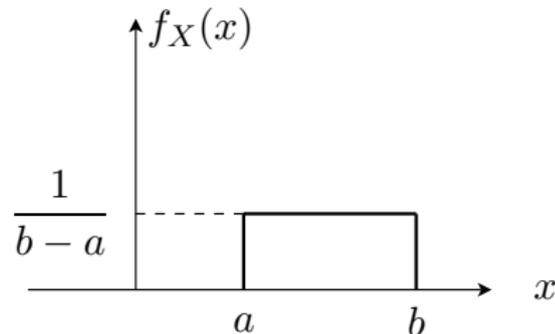
V.A. Uniforme $[a, b]$

- **Uniforme** $[a, b]$. Es una v.a. continua que toma valores no nulos en el intervalo $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Su f.d.p. es

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & a < x < b \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} .$$

Aplicación: Esta v.a. sirve para modelar parámetros sobre lo único que se sabe es que pertenecen a un rango dado.



V.A. Gaussiana $\mathcal{N}[\mu, \sigma]$ (1)

- **Gaussiana** $\mathcal{N}[\mu, \sigma]$. Es una variable cuya f.d.p. es

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

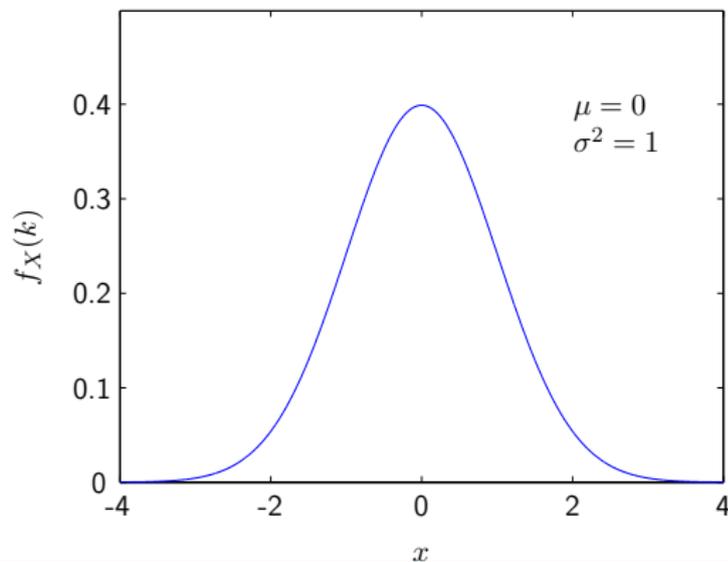
La v.a. Gaussiana tiene dos parámetros:

- μ : valor medio de X .
- σ : desviación estándar de X respecto de la media μ .

La v.a. Gaussiana $\mathcal{N}(0, 1)$ recibe el nombre de normal estándar.

V.A. Gaussiana $\mathcal{N}[\mu, \sigma]$ (2)

- Aparece frecuentemente en problemas de comunicaciones.
- Modela el ruido termal introducido por los equipos de comunicaciones en el canal.



V.A. Gaussiana $\mathcal{N}[\mu, \sigma]$ (3)

- La función acumulativa de probabilidad de una $\mathcal{N}(0, 1)$ se puede expresar de dos formas:
 - La función de error $\text{erf}(x)$, que corresponde a

$$\text{erf}(x) \triangleq \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du = F_X(x).$$

- La función $Q(x)$ definida como

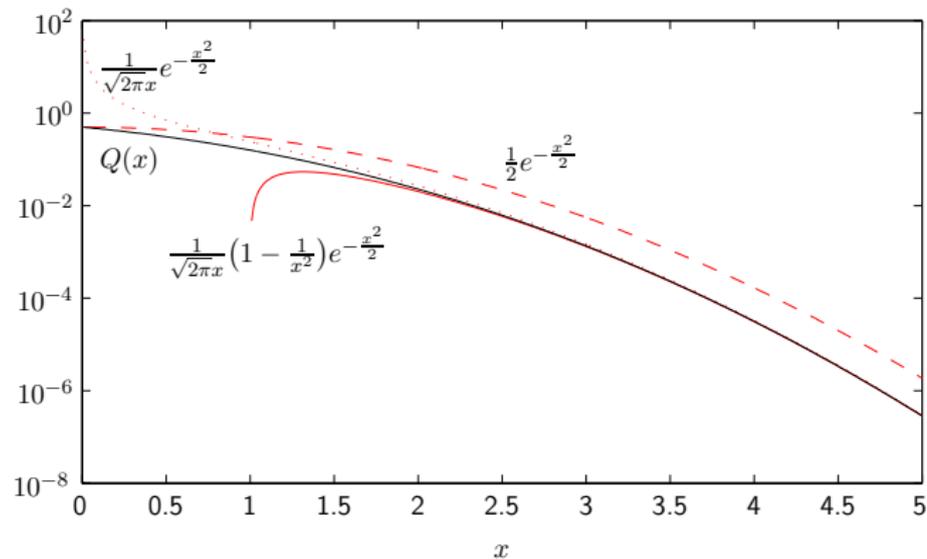
$$Q(x) \triangleq \int_x^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du = 1 - F_X(x).$$

- La función $Q(x)$ representa el área en la cola de la distribución.

Propiedades de la Función $Q(x)$

- $Q(-x) = 1 - Q(x)$.
- $Q(0) = \frac{1}{2}$.
- $Q(\infty) = 0$.
- $\frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) < Q(x) < \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$
para todo $x \geq 0$.

Cotas para la Función $Q(x)$



Función de una Variable Aleatoria

- Una función $Y = g(X)$ puede ser una variable aleatoria también.
- Si la función es continua o al menos tiene un número finito de discontinuidades, podremos asegurar que Y es una variable aleatoria también.
- La distribución de Y la podemos obtener utilizando la definición

$$F_Y(y) = P\{\omega \in \Omega : g(X(\omega)) \leq y\}. \quad (6)$$

Ejemplo (1)

Sea X una v.a. Gaussiana con media $\mu = 0$ y desviación estándar $\sigma = 1$. Determine la función densidad de probabilidad de $Y = aX + b$, con $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

SOLUCIÓN

En este caso $y = g(x) = ax + b$. Por lo tanto, $x = \frac{y - b}{a}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} P\{\omega \in \Omega : g(X(\omega)) \leq y\} &= P\{\omega \in \Omega : aX(\omega) + b \leq y\} \\ &= P\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq \frac{y - b}{a}\} \\ &= F_X\left(\frac{y - b}{a}\right). \end{aligned}$$

Ejemplo (2)

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}f_Y(y) &= \frac{dF_Y}{dy}(y) \\&= \frac{dF_Y}{dy}\left(\frac{y-b}{a}\right) \\&= \frac{d}{dx}F_X(x) \times \frac{dx}{dy} \\&= f_X(x) \times \frac{1}{dy/dx}.\end{aligned}$$

Ejemplo (3)

En este caso entonces tenemos:

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$
$$\frac{dy}{dx} = g'(x) = a.$$

Por lo tanto,

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}a} \exp\left(-\frac{(x-b)^2}{2a^2}\right).$$

Es decir, si X es una variable aleatoria Gaussiana, $Y = aX + b$ también lo es. En efecto, si X es $\mathcal{N}(0, 1)$, entonces Y es $\mathcal{N}(b, a^2)$.

Esperanza de una Variable Aleatoria (1)

- La esperanza de una variable aleatoria X se define como

$$E[X] = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} x f_X(x) dx, & \text{si la v.a. es continua} \\ \sum_{x \in \mathbb{Z}} x p_X(x), & \text{si la v.a. es discreta.} \end{cases} \quad (7)$$

- La esperanza de una función $g(\cdot)$, medible, de X es

$$E[g(X)] = \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} g(x) f_X(x) dx, & \text{si la v.a. es continua} \\ \sum_{x \in \mathbb{Z}} g(x) p_X(x), & \text{si la v.a. es discreta.} \end{cases} \quad (8)$$

Esperanza de una Variable Aleatoria (2)

- Aunque la noción de esperanza se puede definir en términos de las densidades, es una operación bastante más general y que tiene importancia por sí sola.
- En el caso que $g(x) = e^{tx}$, la esperanza de $E[g(X)]$ recibe el nombre de **función generadora de momentos**:

$$\theta(t) = E[e^{tX}] = \int_{\mathbb{R}} e^{tx} f_X(x) dx, \quad (9)$$

- Esta función es la transformada bilateral de Laplace de $f_X(x)$.

Esperanza de una Variable Aleatoria (3)

- Por lo tanto, $\theta(t)$ reúne toda la información necesaria para calcular $f_X(x)$ y viceversa.
- Por otro lado

$$e^{tX} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tX)^n}{n!} \quad (10)$$

$$\Rightarrow \theta(t) = E[e^{tX}] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} E[X^n] \quad (11)$$

- Los términos de la forma $E[X^n]$ se denominan **momentos de la variable aleatoria**.

Momentos de una Variable Aleatoria (4)

Definición

El n -ésimo momento de una variable aleatoria X queda definido por

$$E[X^n] \triangleq \begin{cases} \int_{\mathbb{R}} x^n f_X(y) dx & \text{si } X \text{ es una v.a. continua} \\ \sum_{x \in \mathbb{Z}} x^n p_x & \text{si } X \text{ es una v.a. discreta} \end{cases} . \quad (12)$$

También se utiliza la notación $m_X^{(n)}$.

Utilidad de los Momentos y la Función Generadora de Momentos

- La función $\theta(t)$ permite:
 - Calcular en forma conveniente los momentos de X .
 - Puede ser utilizada para estimar $f_X(x)$ a partir de mediciones experimentales de los momentos.
 - Puede ser utilizada para resolver problemas que involucren sumas de variables aleatorias.
 - Se utiliza para demostrar el Teorema Central del Límite.

Momentos de una Variable Aleatoria (1)

- El momento de orden 0 nos entrega la condición de normalización:

$$m_X^{(0)} = \int_{\mathbb{R}} f_X(y) dx = 1.$$

- El momento de orden 1 es llamado la **media**, **valor esperado** o simplemente **esperanza** de la v.a. X .

$$m_X^{(1)} = \int_{\mathbb{R}} x f_X(y) dx = \mu.$$

El valor esperado de una variable aleatoria es denotado como $E[X]$.

Momentos de una Variable Aleatoria (2)

- El momento de orden 2 de una variable aleatoria permite saber cuan amplia es la variación de una v.a. en torno a su valor esperado.
- Esto es, se puede interpretar como el grado de impredecibilidad de una v.a.
- La varianza de una v.a., denotada por σ_X^2 se define por

$$\text{VAR}[X] = E[X^2] - (E[X])^2.$$

La desviación estándar de la v.a. X se define como

$$\sigma_X = \sqrt{\text{VAR}[X]}.$$

Momentos de una Variable Aleatoria (3)

- Se cumplen las siguientes propiedades:

$$\begin{array}{ccc} f(X) & E[X] & \text{VAR}[X] \\ \hline cX & cE[X] & c^2\text{VAR}[X] \\ c & c & 0 \\ X + c & E[X] + c & \text{VAR}[X] \\ \hline \end{array}$$

donde X es una v.a. a valores reales, y $c \in \mathbb{R}$ es una constante.

Resumen

Hemos revisado:

- Conceptos de espacio de probabilidad, condicionalidad e independencia.
- Variables aleatorias, distribuciones y densidades.
- Momentos y función generadora de momentos.

Lecturas

- Salehi & Proakis, *Communication Systems Engineering*, Capítulo 4, sección 4.1.