

EL4005 Principios de Comunicaciones

Clase No.3: Repaso de Probabilidades



Patricio Parada

Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile

21 de Octubre de 2011

Contenidos de la Clase (1)

Conceptos de Probabilidad y Procesos Aleatorios

- Definiciones Básicas

- Probabilidad Condicional

- Probabilidades Totales y Regla de Bayes

Variables Aleatorias

- Definición

- Relación con otros objetos aleatorios

- Distribución de probabilidad

Contenidos de la Clase (2)

Densidad de probabilidad y masa de probabilidad

Resumen y Lecturas

Capítulo 2:

Probabilidades y Procesos Aleatorios

Motivación

- La inherente naturaleza de un sistema de comunicaciones se debe a dos razones fundamentales:
 - La naturaleza aleatoria de las fuentes de información
 - Las alteraciones y perturbaciones introducidas por el medio de comunicación.

Espacio Muestral, Eventos y Probabilidad

- Concepto fundamental: **Experimento Aleatorio.**
Es un experimento cuyo resultado no se puede predecir con certeza.



Espacio Muestral, Eventos y Probabilidad (1)

Espacio Muestral Ω

- **Espacio Muestral:** es el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento. Lo denotaremos por Ω .
- Un espacio muestral puede ser
 - **discreto:** si el número de elementos en Ω es finito.
 - **infinito numerable:** si el número de elementos en Ω es infinito, pero existe una biyección entre Ω y los números naturales $\mathbb{N}$.
 - **no discreto:** el resto de los casos.

Espacio Muestral, Eventos y Probabilidad (2)

Espacio Muestral Ω

- Ejemplos:

1. $\Omega = \{\text{Cara, Sello}\}$: lanzamiento de una moneda.
2. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$: lanzamiento de un dado.
3. $[0, \infty[$: vida útil de una ampolleta.

Espacio Muestral, Eventos y Probabilidad (3)

Eventos

- **Evento:** corresponde a un subconjunto del espacio muestral, es decir, a un conjunto de posibles resultados.
- Ejemplos:
 1. $E = \{\text{el resultado de tirar un dado es un número par}\}.$
 2. $E = \{\text{la vida útil de una ampolleta es mayor a 3 meses}\}.$

Espacio Muestral, Eventos y Probabilidad (4)

σ álgebra de Eventos

- Los eventos pueden ser agrupados en una colección particular de conjuntos denominada σ **álgebra de eventos**.
- Este conjunto, que denotaremos por $\mathcal{F}$, satisface las siguientes propiedades:
 - (i) $\Omega \in \mathcal{F}$.
 - (ii) Si $A \in \mathcal{F}$, entonces $A^c = \Omega \setminus A \in \mathcal{F}$.
 - (iii) Si $A_i \in \mathcal{F}$, para $i = 1, \dots$, la unión de estos conjuntos también está en $\mathcal{F}$:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}.$$

Espacio Muestral, Eventos y Probabilidad (5)

σ álgebra de Eventos

- Propiedades:

- (i) Si $A, B \in \mathcal{F}$, entonces $A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A \in \mathcal{F}$.
- (ii) Si $A_i \in \mathcal{F}$, para $i = 1, \dots$, la intersección de estos conjuntos también está en $\mathcal{F}$:

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}.$$

- Ejemplos:

- Si $|\Omega| < \infty$, entonces, $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$, el conjunto potencia que contiene todos los subconjuntos de Ω .
- Si $\Omega = \mathbb{R}$, entonces, $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$, los Borelianos de $\mathbb{R}$, el conjunto formado por todos los intervalos abiertos en $\mathbb{R}$.

Espacio Muestral, Eventos y Probabilidad (6)

Medida de Probabilidad P

• **Probabilidad P :** es una función de $\mathcal{F}$ a $[0, +\infty[$ tal que

(i) $0 \leq P(E) \leq 1$ para todos los eventos $E \in \mathcal{F}$.

(ii) $P(\Omega) = 1$.

(iii) Si $E_1, E_2, \dots \in \mathcal{F}$ son disjuntos, es decir,

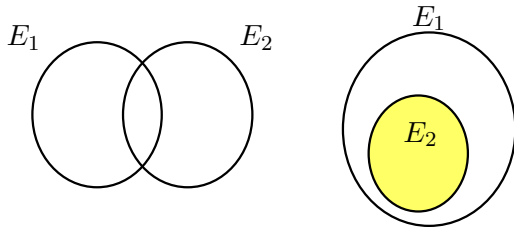
$$E_i \cap E_j = \emptyset \text{ si } i \neq j,$$

entonces,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i). \quad (1)$$

Propiedades Importantes

1. $P(E^c) = 1 - P(E)$, donde E^c denota el complemento de E .
2. $P(\emptyset) = 0$.
3. $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$.
4. Si $E_1 \subset E_2$ entonces $P(E_1) \leq P(E_2)$.



Espacio de Probabilidad

1. La tripleta $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ recibe el nombre de espacio de probabilidad.
2. Es fundamental para definir apropiadamente variables aleatorias, vectores y secuencias aleatorias y procesos estocásticos.
3. En lo que sigue de este curso, asumiremos que esta tripleta siempre existe.

Probabilidad Condicional (1)

- P: ¿Cómo incluimos nuestro conocimiento de un fenómeno para calcular su probabilidad de ocurrencia?
- R: Mediante el concepto de **Probabilidad Condicional**
- Si las probabilidades asociadas a dos eventos E_1 y E_2 son $P(E_1)$ y $P(E_2)$ respectivamente, y un observador sabe que E_2 ha ocurrido, cambia la probabilidad que ocurra E_1 ?

Probabilidad Condicional (2)

- Si hay alguna relación entre los eventos, entonces la ocurrencia de E_2 puede cambiar $P(E_1)$. Si no la hay, entonces $P(E_1)$ debe mantenerse inalterado.
- Ambas situaciones quedan resumidas en la siguiente fórmula:

$$P(E_1|E_2) = \begin{cases} \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} & P(E_2) \neq 0. \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (2)$$

- Si la ocurrencia de E_2 no afecta E_1 , decimos que los eventos son **independientes**.

Probabilidad Condicional (3)

Interpretación

- Una forma de entender la expresión de la probabilidad condicional es mediante la interpretación de frecuencia de ocurrencias de eventos.
- Consideremos por ejemplo los eventos:
 - A : El evento que el viento exceda los 5 m/s en el Parque Eólico Canela I (IV Región, cercano a Ovalle), en un día.
 - B : El evento que el viento esté por debajo de los 40 m/s en el mismo parque, en un día.
 - C : El evento que tanto A como B ocurran en el mismo día.
- Queremos calcular $P(C) = P(A \cap B)$.

Probabilidad Condicional (4)

Interpretación

- Asumamos que luego de 1000 días de observaciones tenemos los siguientes datos:
 - N_A : 306.
 - N_B : 811.
 - $N_C = N_{A \cap B} = 283$.
- Luego, podemos estimar las probabilidades que ocurran A , B y C a partir de las frecuencias de ocurrencias observadas empíricamente:

$$P(A) \approx \frac{N_A}{N} = \frac{306}{1000} = 0,306$$

$$P(B) \approx \frac{N_B}{N} = \frac{811}{1000} = 0,811$$

Probabilidad Condicional (5)

Interpretación

$$P(A \cap B) \approx \frac{N_{A \cap B}}{N} = \frac{283}{1000} = 0,283$$

- La fracción $N_{A \cap B}/N_A$ indica el número de veces que A y B han ocurrido en forma simultánea vs. el número de veces en que A ocurrido.
- En otras palabras, es el número de veces en el viento ha estado por debajo de los 40 m/s cuando ha estado por encima de los 5 m/s.

Probabilidad Condicional (6)

Interpretación

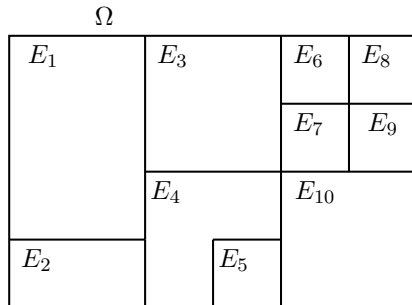
- Esto es exactamente la idea que buscamos materializar en el concepto de condicionalidad: determinar la probabilidad que un evento ocurra dado que otro evento ha ocurrido.
- Luego, $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \approx \frac{N_{A \cap B}/N}{N_A/N} = 0,92$.
- Similarmente, $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \approx \frac{N_{A \cap B}/N}{N_B/N} = 0,35$.

Probabilidades Totales (1)

- **Partición:** una partición de un conjunto Ω es un conjunto de subconjuntos de Ω tal que

(i) $E_i \cap E_j = \emptyset$ para todo $i \neq j$.

(ii) $\bigcup_{i=1}^n E_i = \Omega$.



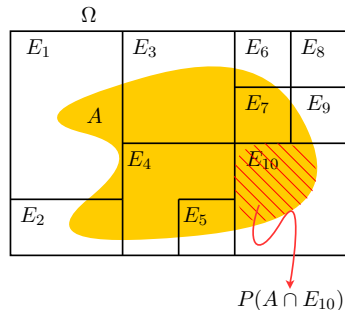
Probabilidades Totales (2)

Teorema (Probabilidades Totales): Sea $A \subset \Omega$ un evento cualquiera, y asuma las probabilidades condicionales

$$\left\{ P(A|E_i) \right\}_{i=1}^n$$

conocidas, donde los $\{E_i\}_{i=1}^n$ forman una partición sobre Ω . Entonces

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(E_i)P(A|E_i). \quad (3)$$



Regla de Bayes

- Las fórmula de probabilidades totales puede ser utilizada para calcular

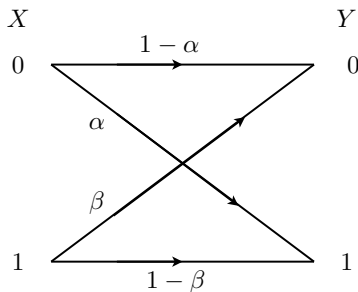
$$P(E_i|A)$$

- **Corolario (Regla de Bayes):** Sea $A \subset \Omega$ un evento cualquiera, y asuma que las condiciones para el teorema anterior se mantienen. Entonces

$$P(E_i|A) = \frac{P(E_i)P(A|E_i)}{\sum_{j=1}^n P(E_j)P(A|E_j)}. \quad (4)$$

Ejemplo (1)

- Consideremos un canal de comunicación binario asimétrico, como el mostrado en la figura.



- Asumamos además que la fuente de bits X emite símbolos en forma equiprobable, esto es, $P(X = 0) = P(X = 1) = \frac{1}{2}$.

Ejemplo (2)

- Podemos utilizar la regla de Bayes para determinar las probabilidades que $X = 0$ haya sido enviado dado que recibimos $Y = 0$.
- Sea $A = \{X = 0\}$ y $B = \{Y = 0\}$.
- Luego

$$\begin{aligned} P(A|B) &= \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)} \\ &= \frac{P(A)P(B|A)}{P(B|A)P(A) + P(B|A^C)P(A^C)} \\ &= \frac{\frac{1}{2}(1 - \alpha)}{(1 - \alpha)\frac{1}{2} + \beta\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Ejemplo (3)

- Finalmente

$$P(A|B) = \frac{1 - \alpha}{1 - \alpha + \beta}.$$

- Similarmente,

$$P(A^C|B) = \frac{\beta}{1 - \alpha + \beta}.$$

Aplicación: Detector de Máxima Probabilidad a Posteriori (1)

Maximum a Posteriori (MAP) Detector

- El detector de máxima probabilidad a posteriori es un dispositivo que entrega el símbolo cuya probabilidad es mayor de haber sido transmitido luego de observar el símbolo recibido.
- Notemos que por la regla de Bayes:

$$P(X = 0|Y = y) = \frac{P(X = 0)P(Y = y|X = 0)}{P(Y = y)}$$
$$P(X = 1|Y = y) = \frac{P(X = 1)P(Y = y|X = 1)}{P(Y = y)}$$

Aplicación: Detector de Máxima Probabilidad a Posteriori (2)

- El detector MAP entrega

$$\hat{X} = \operatorname{argmax}(P(X = 0|Y = y), P(X = 1|Y = y))$$

para $y = 0, 1$.

- Este tema lo revisitaremos con detalle en la unidad de Modulación Digital.

Variables Aleatorias (1)

- *Definición:* Una **variable aleatoria** (v.a.) es una función medible desde el conjunto Ω a otro conjunto E , que habitualmente corresponde a los números reales.
- Para que esta aplicación sea **medible**, el par $(\Omega, \mathcal{F})$ debe ser medible, es decir, $\mathcal{F}$ debe incluir todos los subconjuntos abiertos de Ω .

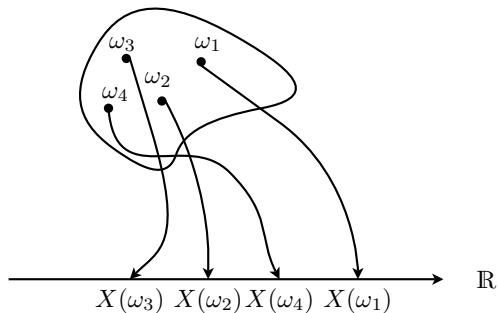
Variables Aleatorias (2)

- Una función $f : \Omega \rightarrow E$ se dice que es medible si y sólo sí, $(\Omega, \mathcal{F})$ y $(E, \mathcal{E})$ son medibles, y para cada $B \in \mathcal{E}$, la preimagen de B a través de f pertenece a $\mathcal{F}$, i.e.

$$\forall B \in \mathcal{E}, f^{-1}(B) \in \mathcal{F}. \quad (5)$$

- La medibilidad de una función es una característica más general que la continuidad.
- Los valores que una variable aleatoria X toma serán denominados **realizaciones** de la variable aleatoria, serán denotada en minúsculas (x).

Variables Aleatorias (3)



Variables Aleatorias (4)

- Conceptualmente, no hay mayor diferencia entre una variable aleatoria, un vector aleatorio, una secuencia aleatoria o un proceso estocástico.
- Lo que cambia es el conjunto de llegada del mapeo:
 - $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$: **variable** aleatoria.
 - $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$: **vector** aleatoria.
 - $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^\infty$: **secuencia** aleatoria o **serie de tiempo**.
 - $X : \Omega \rightarrow \text{Espacio de Funciones}$: **proceso estocástico**.

Variables Aleatorias (5)

- Ejemplos de espacios de funciones usados son:
 - $\mathcal{C}[a, b]$: espacio de funciones continuas en $[a, b]$.
 - $\mathcal{L}_p$: espacio de funciones continuas cuya norma p es finita:

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p dx \right)^{1/p}. \quad (6)$$

con $p \geq 1$.

Distribución de Probabilidad (1)

- Definición: La función **distribución de probabilidad acumulativa** de una v.a. X es una función de valores reales entre 0 y 1 definida como la medida del conjunto de nivel $\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}$, esto es:

$$\begin{aligned} F_X(x) &= P\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \\ &= P(X \leq x). \end{aligned} \tag{7}$$

- Propiedades:

- $0 \leq F_X(x) \leq 1.$

Distribución de Probabilidad (2)

- 2. $F_X(x)$ es no decreciente.
- 3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$ y $\lim_{x \rightarrow +\infty} F_X(x) = 1$.
- 4. $F_X(x)$ es continua por la derecha, es decir

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} F(x + \epsilon) = F(x).$$

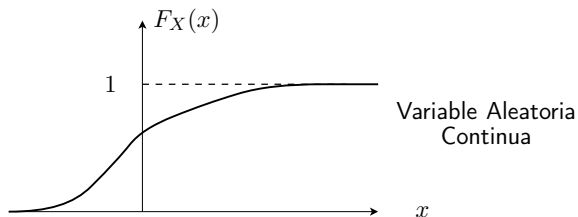
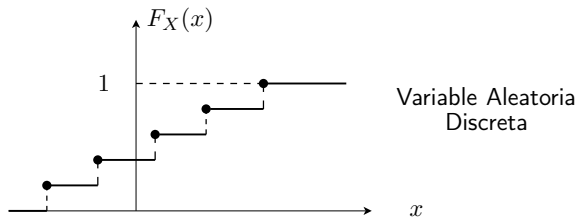
- 5. $P(a < X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$.
- 6. $P(X = a) = F_X(a) - F_X(a^-)$.

Distribución de Probabilidad (3)

- Notar que es necesario que X sea medible para que la función distribución esté correctamente definida:

$$\begin{aligned}\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} &= X^{-1}(]-\infty, x]) \\ \Rightarrow F_X(x) &= P(X^{-1}(]-\infty, x])).\end{aligned}$$

Distribución de Probabilidad (4)



Densidades de Probabilidad (1)

- Definición: La **función de densidad de probabilidad** (f.d.p.) de una variable aleatoria continua X es la derivada de $F_X(x)$ con respecto a x :

$$f_X(x) = \frac{d}{dx}F_X(x). \quad (8)$$

- Propiedades:

1. $f_X(x) \geq 0$.

2. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$.

Densidades de Probabilidad (2)

3. $\int_a^b f_X(x)dx = P(a < X \leq b).$

4. en general

$$P(X \in A) = \int_{x \in A} f_X(x)dx$$

5. $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(u)du.$

Resumen

Hemos revisado:

- Conceptos de espacio de probabilidad: espacio muestral, σ álgebra y medida de probabilidad.
- Probabilidad condicional e interpretación basada en frecuencia relativa.
- Regla de Probabilidades Totales y Teorema de Bayes.
- Ejemplos: Detector MAP.
- Variables aleatorias

Lecturas

- Salehi & Proakis, *Communication Systems Engineering*, Capítulo 4, sección 4.1.