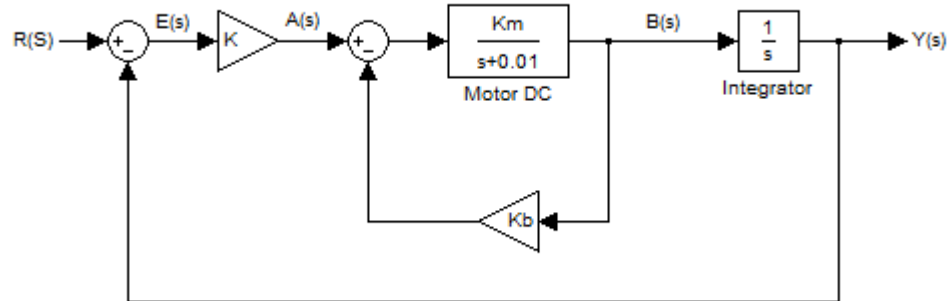


II.

Considere el siguiente diagrama de bloques de control de un motor CC.



- Indicar variable manipulada, variable controlada, un posible actuador, un sensor, y perturbaciones relevantes. (1.0 pto.)
- Determine el error de estado estacionario considerado como referencia una rampa de ecuación $r(t) = m \cdot t$ con $m > 0, t \geq 0$ en términos de K_b, K_m, K y m . Comente el resultado obtenido. (2.0 pto.)
- Considerando el sistema completo en lazo cerrado, determine la estabilidad de éste si $K_b, K, m > 0$ en función de K_m .
¿Qué condición debe cumplir K para que $\xi > 1$ (considere $K_m > 0$)? ¿Cómo se comporta el sistema en tal caso, cuál sería la sobreoscilación máxima? (2.0 pto)
- ¿Qué ventajas y desventajas tienen los lazos de control de lazo abierto y lazo cerrado? (0.5 pto)
- ¿Qué sucede al añadir una acción derivativa adicional al controlador proporcional K considerado? Explique en función de adición o sustracción de polos, y las características modificadas para un sistema de segundo orden. (0.5 pto)

II. Solución

- a) 1.- Variable manipulada: Voltaje aplicado.
2.- Variable controlada: Frecuencia de giro del rotor.
3.- Actuador: Fuente de voltaje de armadura.
4.- Sensor: Tacómetro.
5.- Perturbaciones:
- Cambios en la posición del objeto que se quiere controlar.
 - Temperatura que afecte los parámetros del modelo.
 - Perturbaciones en la red eléctrica que afecte el funcionamiento del motor.
 - Ruidos de medida.
- b) Primero hay que determinar la función de transferencia en lazo cerrado. Para hacerlo más didáctico primero se calculará $\frac{B(s)}{A(s)}$ y luego $\frac{Y(s)}{R(s)}$.

$$B(s) = (A(s) - K_b B(s)) \frac{K_m}{(s + 0,01)}$$

$$\frac{B(s)}{A(s)} = \frac{K_m}{(s + 0,01 + K_b K_m)}$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K \frac{B(s)}{A(s)} \cdot \frac{1}{s}}{1 + K \frac{B(s)}{A(s)} \cdot \frac{1}{s}}$$

Reordenando términos finalmente se obtiene

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K \cdot K_m}{s(s + 0,01 + K_b K_m) + K \cdot K_m}$$

El error en estado estacionario se calcula como $e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s)$.

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s(R(s) - Y(s)) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left(1 - \frac{Y(s)}{R(s)} \right) R(s)$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \left(1 - \frac{K \cdot K_m}{s(s + 0,01 + K_b K_m) + K \cdot K_m} \right) R(s)$$

La transformada de Laplace de una rampa de pendiente m es:

$$\mathcal{L}\{mt\} = \frac{m}{s^2}$$

Luego,

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} s \left(\frac{s(s + 0,01 + K_b K_m)}{s(s + 0,01 + K_b K_m) + K \cdot K_m} \right) \frac{m}{s^2}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{(s + 0,01 + K_b K_m)}{s(s + 0,01 + K_b K_m) + K \cdot K_m} \right) m$$

$$e_{ss} = \frac{m(0,01 + K_b K_m)}{K \cdot K_m}$$

Se tiene un error permanente constante, ya que sólo depende de parámetros invariables.

Mientras más pequeño sea K más grande será el error en estado estacionario.

c) La ecuación característica corresponde al denominador de:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K \cdot K_m}{s(s + 0,01 + K_b K_m) + K \cdot K_m}$$

Es decir:

$$s^2 + (0,01 + K_b K_m)s + K \cdot K_m = 0$$

Los polos son

$$s_{1,2} = \frac{-0,01 - K_b K_m \pm \sqrt{(0,01 + K_b K_m)^2 - 4K_m K}}{2}$$

$$s_{1,2} = \frac{-\sqrt{(0,01 + K_b K_m)^2} \pm \sqrt{(0,01 + K_b K_m)^2 - 4K_m K}}{2}$$

En tiempo continuo un sistema es estable si sus polos se encuentran en el semiplano izquierdo del eje S.

Caso: $K_m > 0$

Como $K, K_b > 0$, entonces $-0.01 - K_b K_m$ es necesariamente un número negativo. El término $\sqrt{(0.01 + K_b K_m)^2 - 4K_m K}$ o puede ser un valor complejo, o un valor menor a $-0.01 - K_b K_m$ ya que a $4K_m K$ es mayor que cero según el supuesto $K_m > 0$.

Luego si $K_m > 0$ entonces el sistema es estable.

Caso: $K_m < 0$

Si $K_m < 0$ entonces $\sqrt{(0.01 + K_b K_m)^2 - 4K_m K} > \sqrt{(0.01 + K_b K_m)^2}$ ya que $-4K_m K > 0$. Entonces el sistema siempre tendrá un polo positivo.

Si $K_m < 0$ entonces el sistema es inestable.

Caso: $K_m = 0$

Cuando se anula K_m un polo es cero y el otro negativo, entonces el sistema es críticamente estable.

$$s_{1,2} = -0.01 \pm 0.01$$

(También se puede obtener mediante el criterio de Routh Hurwitz, con ese método es más directo.)

K tal que $\xi > 1$.

Para un sistema de segundo orden se tiene la ecuación característica

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0$$

Luego $K \cdot K_m = \omega_n^2$, y $(0.01 + K_b K_m) = 2\xi\omega_n$

Despejando se llega a

$$\frac{(0.01 + K_b K_m)}{2\sqrt{K \cdot K_m}} = \xi > 1$$

$$\frac{(0.01 + K_b K_m)^2}{4K_m} > K$$

Cuando $\xi > 1$ se tienen dos polos reales y distintos, y el comportamiento del sistema es sobre amortiguado, es decir no hay sobreoscilación.

Notar que la definición de MOV resulta en un valor complejo.

- d)** ¿Qué ventajas y desventajas tienen los lazos de control de lazo abierto y lazo cerrado?
(0.5)

La principal ventaja de los sistemas de control en lazo cerrado es que el uso de la realimentación hace al conjunto menos sensible a las perturbaciones externas y a las variaciones de los parámetros internos que los sistemas en lazo abierto.

La exactitud de los sistemas de control en lazo abierto depende en gran medida de la calibración de los controladores, sin embargo en problemas de control con perturbaciones externas nulas y variables internas constantes es recomendable el uso de controladores en lazo abierto por un tema de costos.

- e)** Agrega un cero en el origen de la función de transferencia en lazo abierto.
La acción derivativa representa la tendencia del cambio, es decir, es una proyección hacia donde se desplazará el proceso en el futuro.

Además modifica ξ (ω_n no se modifica) por lo que se ven alterados el tiempo de subida, tiempo de estabilización y la sobreoscilación.