

EL 4004

Fundamentos de Control de Sistemas

Profesora: Dra. Doris Sáez H.
Departamento de Ingeniería Eléctrica
Universidad de Chile

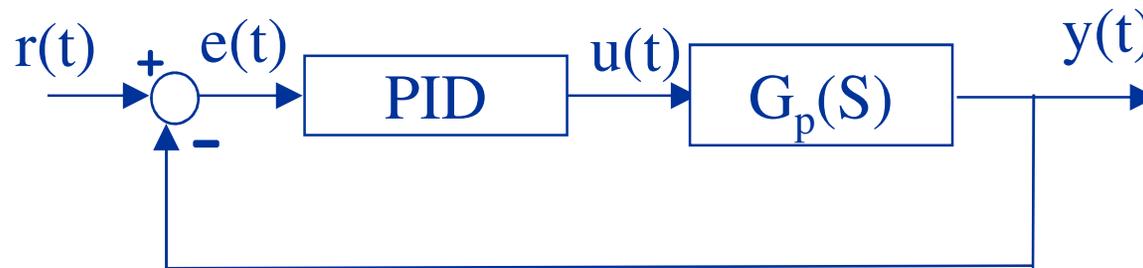
Unidad 2:

Controladores Proporcional, Derivativo, Integral :

Elaborado por: D. Sáez

Colaboradores: N. Castro, J. Contreras & G. Sáez

Controlador Proporcional, Integral, Derivativo: PID Continuo



$$e(t) = r(t) - y(t)$$

$$u(t) = f(e(t)) \quad \text{Controlador}$$

Controlador PID Continuo

$$u(t) = K_P e(t) + \frac{K_P}{T_i} \int_0^t e(t) dt + K_P T_d \frac{de(t)}{dt}$$

$$\frac{U(S)}{E(S)} = K_P \left(1 + \frac{1}{T_i S} + T_d S \right)$$

Controlador PID Continuo

a) Control Proporcional

$$u(t) = K_p e(t) \quad G_c(S) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_p$$

Caso planta de 2° orden

$$G_p(S) = \frac{1}{S^2 + aS + b}$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_p(S)G_c(S)}{1 + G_p(S)G_c(S)} = \frac{K_p}{S^2 + aS + b + K_p}$$

Controlador PID Continuo

Ecuación característica

$$S^2 + aS + b + K_p = 0$$

$$S^2 + 2\xi\omega_n S + \omega_n^2 = 0$$

$$K_p \longrightarrow \omega_n \longrightarrow T_s$$

$$K_p \not\rightarrow \xi \not\rightarrow S_p$$

$$T_s = \frac{3.2}{\xi\omega_n}$$

$$\xi < 0.69$$

$$S_p = \text{Mov} = e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

Controlador PID Continuo

b) Acción integral

$$u(t) = \frac{K_P}{T_i} \int_0^t e(t) dt \quad G_C(S) = \frac{U(S)}{E(S)} = \frac{K_P}{T_i S} = \frac{K_i}{S}$$

Elimina el error permanente e_{ss} .

Controlador PID Continuo

b) Acción integral

Caso planta de 2° orden

$$G_P(S) = \frac{1}{S^2 + aS + b}$$

$$G_C(S) = \frac{K_P}{T_i S}$$

$$G_C(S) = \frac{K_i}{S}$$

con $K_i = \frac{K_P}{T_i}$

Controlador PID Continuo

b) Acción integral

$$\frac{Y(S)}{R(S)} = \frac{K_i}{(S^2 + aS + b)S + K_i}$$

$$E(S) = R(S) - Y(S) = \frac{(S^2 + aS + b)S}{(S^2 + aS + b)S + K_i} R(S)$$

$$= \frac{(S^2 + aS + b)S}{(S^2 + aS + b)S + K_i} \frac{1}{S}$$

$$\text{Si } R(S) = \frac{1}{S} \quad e_{ss} = \lim_{S \rightarrow \infty} SE(S) = \frac{S(S^2 + aS + b)}{(S^2 + aS + b)S + K_i} = 0$$

Controlador PID Continuo

b) Acción integral

- Elimina error permanente.
- Agrega un polo en el origen de la función de transferencia en lazo abierto (lazo directo)
- Además, la acción integral es desestabilizadora, razón por la cual va siempre acompañada por la acción proporcional

Controlador PID Continuo

c) Acción derivativa

$$u(t) = K_P T_d \frac{de(t)}{dt}$$

$$G_C(S) = \underbrace{K_P T_d}_K S$$

$$G_C(S) = K_d S$$

Caso planta de 2° orden

$$G_P(S) = \frac{1}{S^2 + aS + b}$$

$$G_C(S) \cdot G_P(S) = \frac{K_d S}{S^2 + aS + b}$$

Controlador PID Continuo

c) Acción derivativa

$$\frac{Y(S)}{R(S)} = \frac{K_p T_d S}{S^2 + aS + b + K_p T_d S}$$

Ecuación característica $S^2 + (a + K_p T_d)S + b = 0$

$$S^2 + 2\xi\omega_n S + \omega_n^2 = 0$$

Modifica ξ \longrightarrow S_p, T_s

Controlador PID Continuo

c) Acción derivativa

- Agrega un cero en el origen de la función de transferencia en lazo abierto.
- La acción derivativa representa la tendencia del cambio, es decir, es una proyección hacia donde se desplazará el proceso en el futuro.

Controlador PID Continuo

$$u(t) = K_P e(t) + \frac{K_P}{T_i} \int_0^t e(t) dt + K_P T_d \frac{de(t)}{dt}$$

$$\frac{U(S)}{E(S)} = K_P \left(1 + \frac{1}{T_i S} + T_d S \right)$$

Controlador PID discreto

$$U(S) = K_P \left(1 + \frac{1}{T_i S} + T_d S \right)$$

$$U(Z) = \left[K_{Pd} + \frac{K_{Id}}{1 - Z^{-1}} + K_{Dd} (1 - Z^{-1}) \right] E(Z)$$

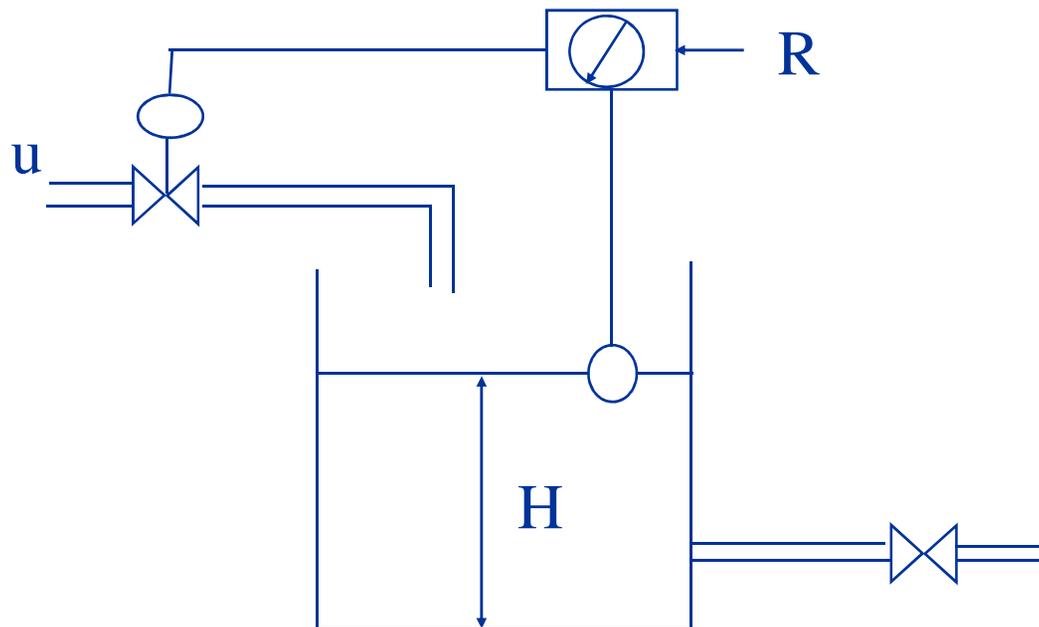
$$K_{Pd} = K_P - \frac{K_P T}{2T_i} \quad \mathbf{T: tiempo de muestreo}$$

$$K_{Id} = \frac{K_P T}{T_i}$$

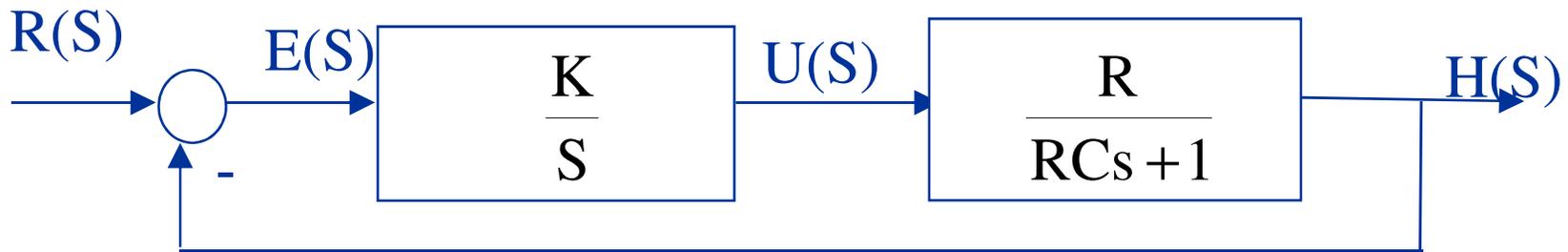
$$K_{Dd} = \frac{K_P T_d}{T}$$

Efectos de las acciones de control integral y derivativo sobre el desempeño de un sistema

Ejemplo: Control integral de los sistemas de control de nivel de líquido



Efectos de las acciones de control integral y derivativo sobre el desempeño de un sistema



$$\frac{H(S)}{R(S)} = \frac{KR}{RC^2 + S^2 + KR}$$

$$E(S) = R(S) - H(S) = \frac{RCS^2 + S}{RCS^2 + S + KR} R(S)$$

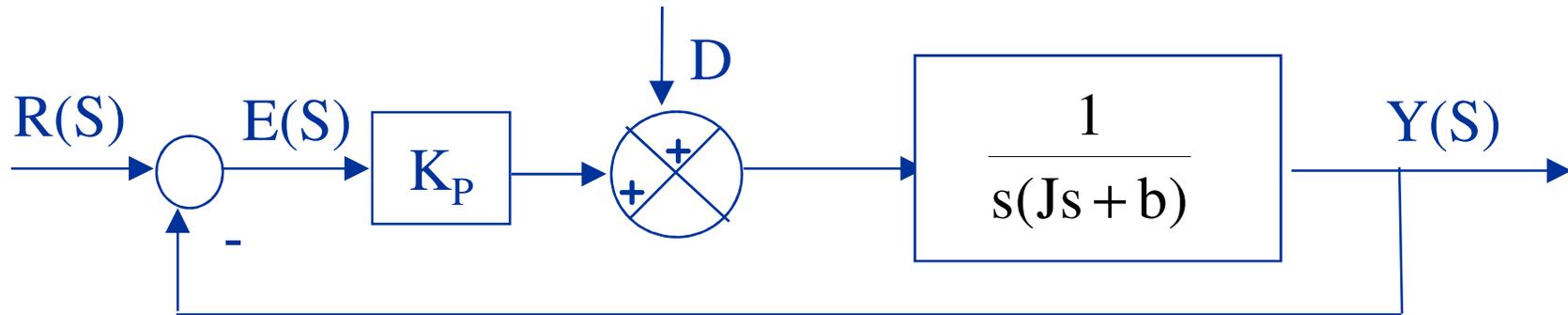
Efectos de las acciones de control integral y derivativo sobre el desempeño de un sistema

Si $U(s)=1/s$ escalón

$$e_{ss} = \lim_{s \rightarrow 0} E(S) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{S(RCS^2 + S)}{(RCS^2 + S + KR) S} \frac{1}{S} = 0$$

elimina el error de régimen permanente

Control Proporcional: Respuesta a perturbaciones (D)



$$\text{Si } R(s)=0 \longrightarrow Y(S) = \frac{1}{S(JS + b)} (D(S) + K_P(-Y(S)))$$

$$Y(S) \cdot (S(JS + b) + K_P) = D(S)$$

$$\frac{Y(S)}{D(S)} = \frac{1}{JS^2 + bS + K_P}$$

Control Proporcional: Respuesta a perturbaciones (D)

$$E(S) = -Y(S) = \frac{-D(S)}{JS^2 + bS + K_P}$$

$$\frac{E(S)}{D(S)} = \frac{-1}{JS^2 + bS + K_P}$$

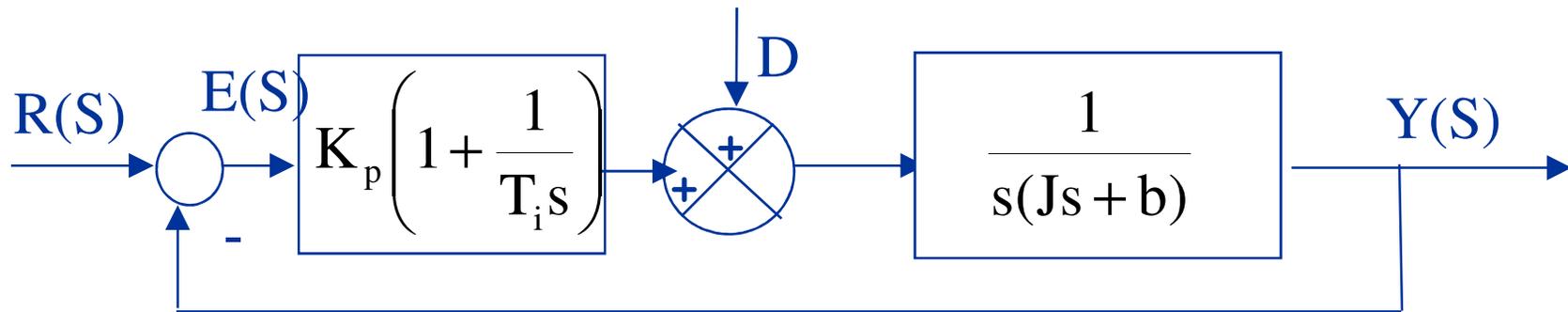
El error en régimen permanente producido por una perturbación escalón de magnitud δ_0 es:

$$e_{ss} = \lim_{S \rightarrow 0} SE(S) = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{\cancel{-S} \delta_0}{JS^2 + bS + K_P} \frac{1}{\cancel{S}} = -\frac{\delta_0}{K_P}$$

La salida en régimen permanente es $y_{ss} = \delta_0 / K_P$

* El e_{ss} se reduce si K_P se aumenta

Control proporcional-integral: Respuesta a perturbaciones (D)



$$Y(S) = \frac{1}{S(JS + b)} \left(D + K_P \left(1 + \frac{1}{T_i S} \right) (-Y) \right)$$

$$(S(JS + b)T_i S + K_P (T_i S + 1))Y = T_i SD$$

$$\left(JS^3 + bS^2 + K_P S + \frac{K_P}{T_i} \right) Y = SD$$

Control proporcional-integral: Respuesta a perturbaciones (D)

$$\frac{Y(S)}{D(S)} = \frac{S}{\left(JS^2 + bS^2 + K_P S + \frac{K_P}{T_i} \right)}$$

$$E(S) = -Y(S) = \frac{-S}{\left(JS^3 + bS^2 + K_P S + \frac{K_P}{T_i} \right)} D(S)$$

Control proporcional-integral: Respuesta a perturbaciones (D)

Si el sistema de control es estable, es decir, la ecuación característica $JS^3 + bS^2 + K_P S + \frac{K_P}{T_i} = 0$

tiene raíces con partes reales negativas, entonces el error en régimen permanente ante la perturbación escalón unitario es:

$$e_{ss} = \lim_{S \rightarrow 0} SE(S) = \lim_{S \rightarrow 0} S \frac{-S}{\left(JS^3 + bS^2 + K_P S + \frac{K_P}{T_i} \right)} \frac{1}{S} = 0$$

Control proporcional-integral: Respuesta a perturbaciones (D)

Si hay sólo acción integral para este caso, la ecuación característica sería

$$JS^3 + bS^2 + K = 0 \qquad G_c(S) = \frac{K}{S}$$

Esto entrega raíces con parte real positiva por lo tanto, el sistema sería inestable.

Control proporcional: Sistema de carga de inercia

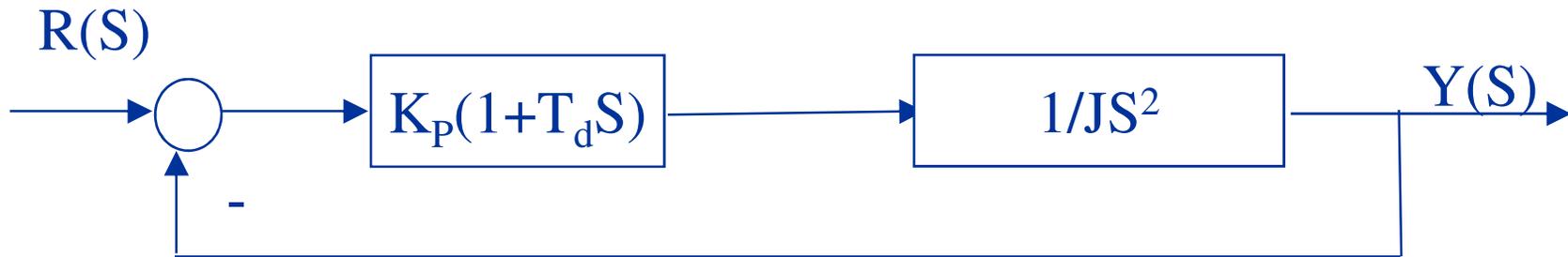


$$\frac{Y(S)}{R(S)} = \frac{K_P}{JS^2 + K_P}$$

Ecuación característica:

$$JS^2 + K = 0 \quad \longrightarrow \quad \text{Sistema oscila indefinidamente}$$

Control proporcional-derivativo: Sistema de carga de inercia

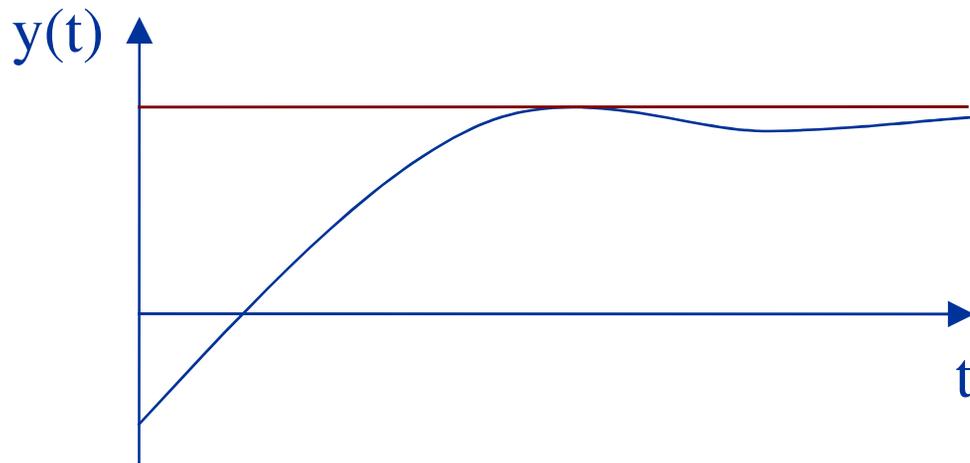


$$\frac{Y(S)}{R(S)} = \frac{K_P(1+T_dS)}{JS^2 + K_P T_d S + K_P}$$

La ecuación característica: $JS^2 + K_P T_d S + K_P = 0$

tiene 2 raíces con parte real negativa para $J, K_P, T_d > 0$

Control proporcional-derivativo: Sistema de carga de inercia



El control derivativo predice el sobre paso adelantándose en el tiempo y produce una respuesta adecuada antes de que ocurra un sobrepaso demasiado grande.

Sintonización de Controladores PID

Motivación

- La mayoría de los controladores industriales que se usan hoy en día utilizan esquemas de control PID.
- Estos controladores aportan un control satisfactorio en la mayoría de los sistemas de control.

Métodos de Sintonización

- 1) Límite de Estabilidad – Ziegler & Nichols
- 2) Curva de Reacción – Ziegler & Nichols
- 3) Criterio de López
- 4) Control por Modelo Interno (IMC)

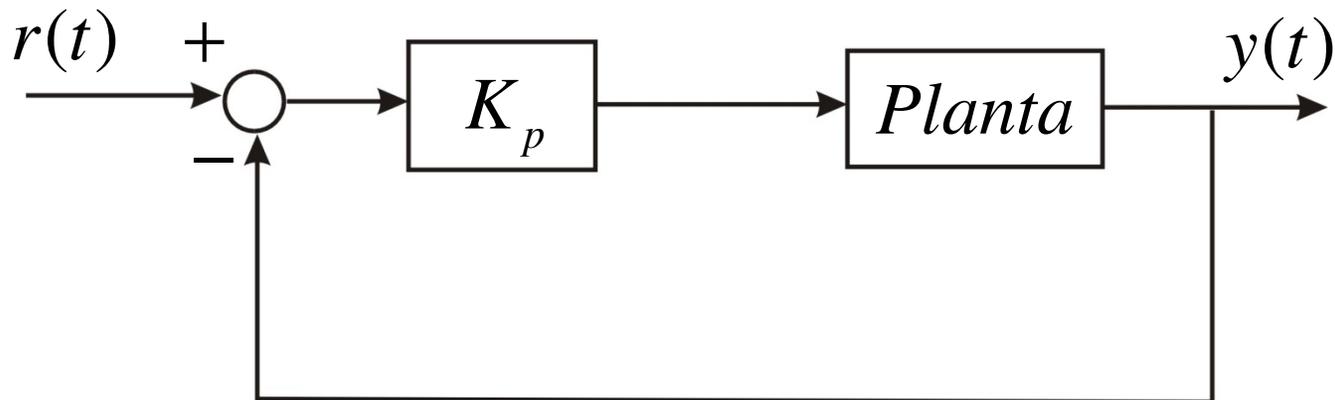
Ziegler-Nichols

- Los métodos de Ziegler-Nichols proponen encontrar los parámetros de un controlador PID en base a un modelo específico de una planta.
- En ambos métodos se pretende obtener un 25% de sobrepaso máximo en la respuesta al escalón.

Límite de Estabilidad

Ziegler & Nichols

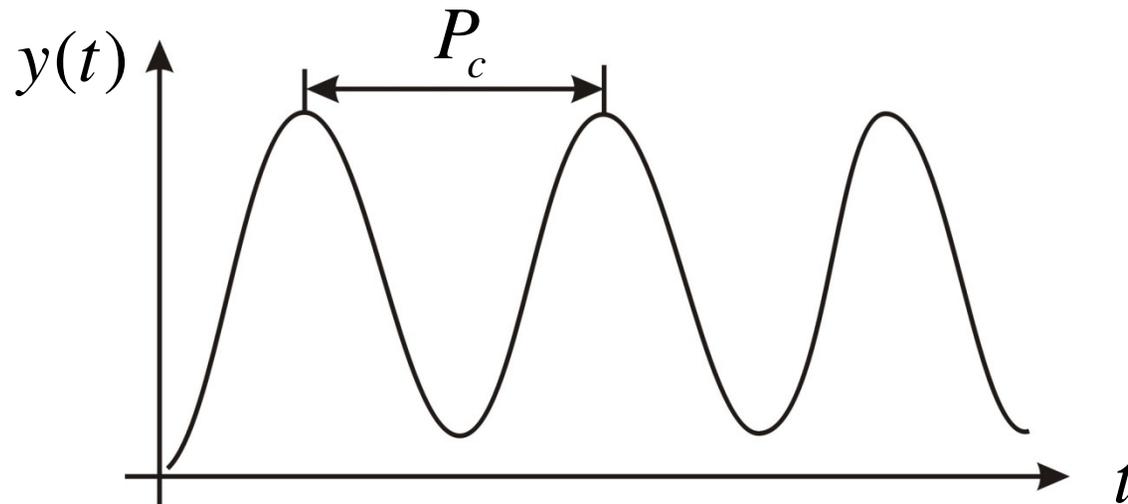
1. Utilizando sólo control proporcional, comenzando con un valor pequeño, incrementar la ganancia hasta que el sistema comience a oscilar.



Límite de Estabilidad

Ziegler & Nichols

2. Registrar la ganancia crítica del controlador $K_p = K_c$ (crítico) y el período de oscilación de la salida del controlador P_c .



Límite de Estabilidad Ziegler & Nichols

3. Ajustar los parámetros del controlador según la siguiente tabla.

Tipo de controlador	K_p	T_i	T_d
P	$0.50K_c$	∞	0
PI	$0.45K_c$	$P_c / 1.2$	0
PID	$0.60K_c$	$0.5P_c$	$P_c / 8$

Límite de Estabilidad

Ziegler & Nichols

- Para resolver el problema analíticamente, K_c y ω_c se pueden encontrar mediante Routh-Hurwitz

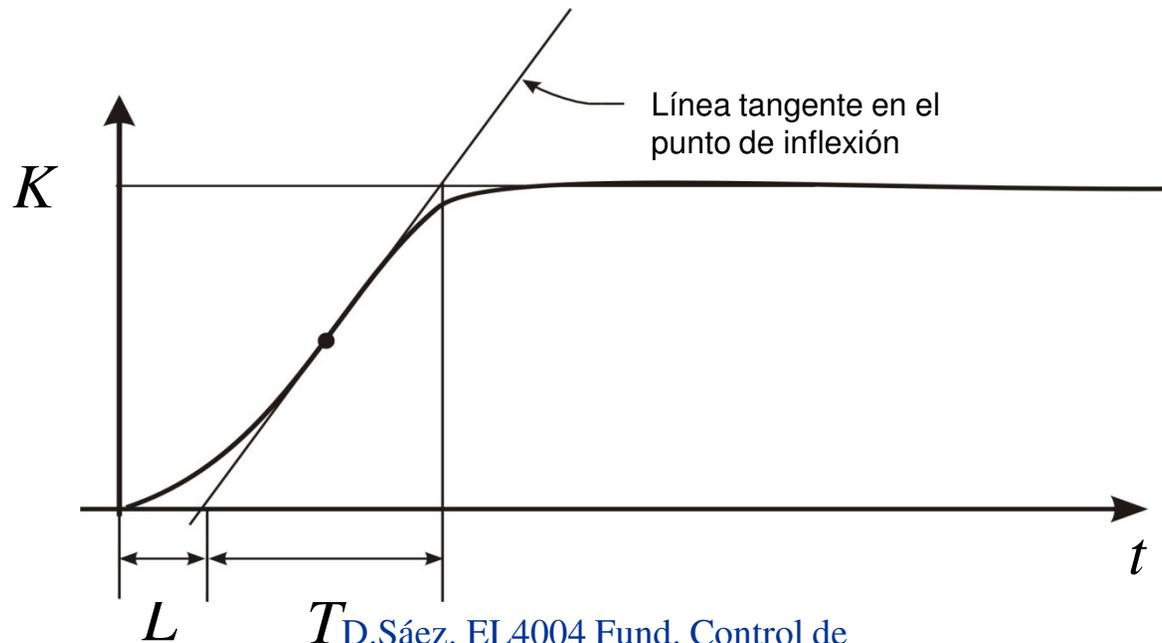
Curva de Reacción Ziegler & Nichols

- La respuesta del proceso (lazo abierto) puede ser caracterizada por la siguiente aproximación de primer orden con retardo:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Ke^{-Ls}}{Ts + 1}$$

Curva de Reacción Ziegler & Nichols

- A partir de la respuesta al escalón de la planta se obtienen los parámetros K , L y T que caracterizan la aproximación.



Curva de Reacción Ziegler & Nichols

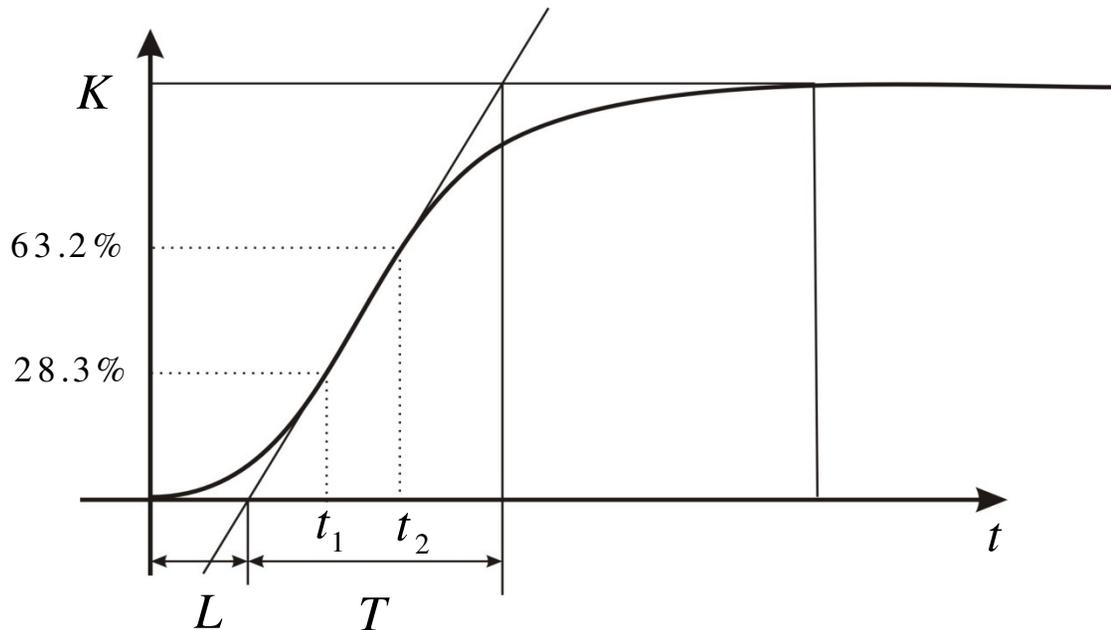
- Los valores L y T además se pueden calcular fácilmente de las siguientes ecuaciones:

$$T = 1.5(t_2 - t_1)$$

$$L = 1.5(t_1 - \frac{1}{3}t_2)$$

Curva de Reacción Ziegler & Nichols

- Los valores t_1 y t_2 se obtienen del siguiente gráfico.



Curva de Reacción Ziegler & Nichols

- Conocidos L y T , los parámetros del controlador se obtienen de la siguiente tabla.

Tipo de controlador	K_p	T_i	T_d
P	$\frac{T}{LK}$	∞	0
PI	$0.9 \frac{T}{LK}$	$\frac{L}{0.3}$	0
PID	$1.2 \frac{T}{LK}$	$2L$	$0.5L$

Criterio de López

- Según el criterio de López los parámetros del PID se encuentran en base a la minimización de los índices de funcionamiento.
- Para esto se asume que la respuesta se aproxima por una función de transferencia de primer orden con retardo.

Índices de Funcionamiento

Criterio de López

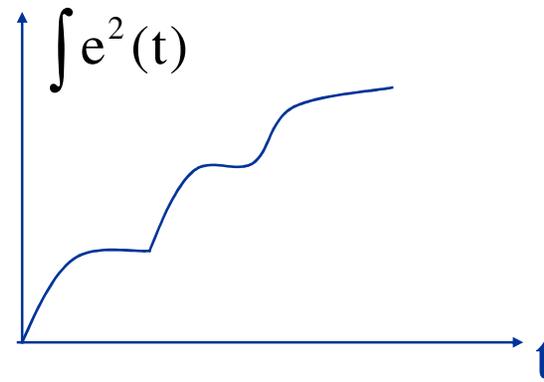
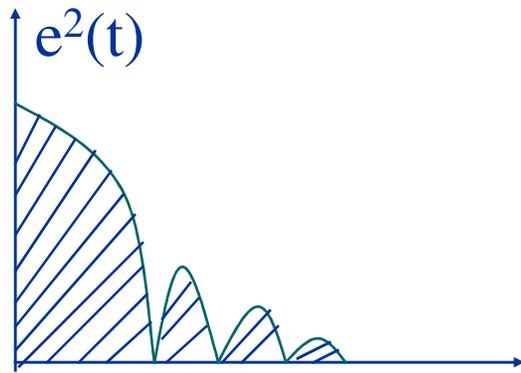
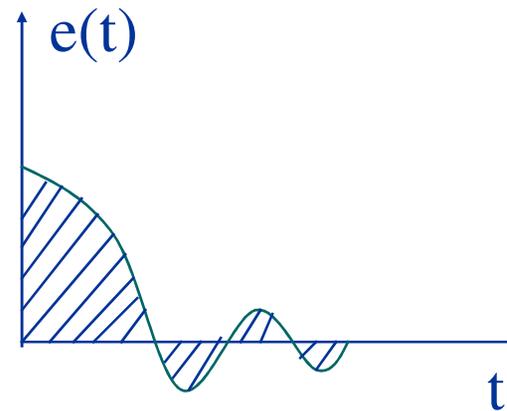
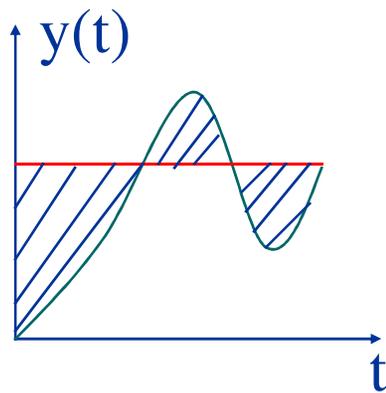
Medida cuantitativa del funcionamiento de un sistema y se elige de forma que resalte las especificaciones del sistema

$$\text{Min } I_1 = \int_0^T e^2(t) \quad (\text{ISE})$$

$$e(t) = r(t) - y(t)$$

Índices de Funcionamiento

Criterio de López



Índices de Funcionamiento

Criterio de López

$$\text{Min } I_2 = \int_0^T |e(t)| dt \quad (\text{IAE})$$

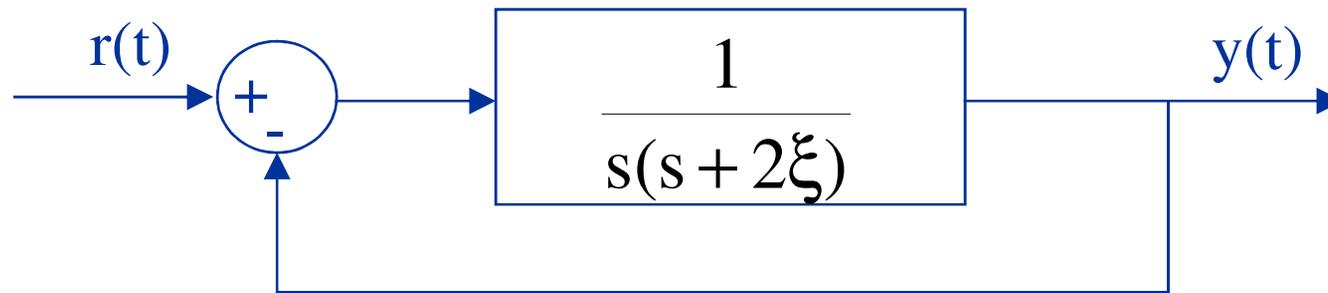
$$\text{Min } I_3 = \int_0^T t |e(t)| dt \quad (\text{ITAE})$$

$$\text{Min } I_4 = \int_0^T t e^2(t) dt \quad (\text{ITSE})$$

$$\text{Forma general : } I = \int_0^T f(e(t), r(t), y(t), t) dt \rightarrow u(t)$$

$$u(t) = f(y(t), \dots)$$

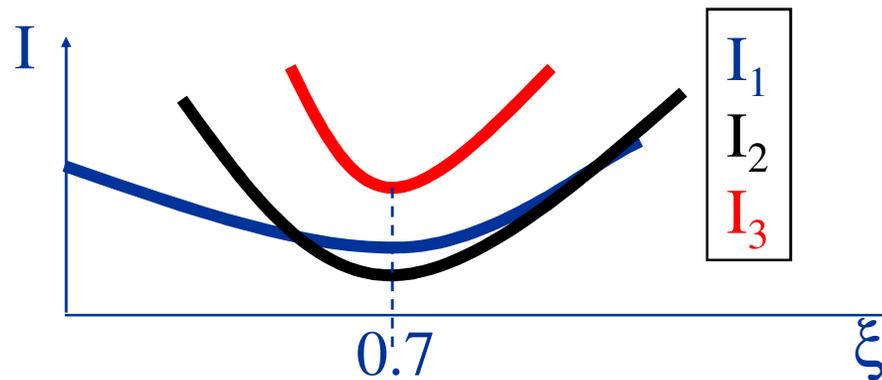
Ejemplo



$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^2 + 2\xi s + 1} \quad (\omega_n = 1)$$

Índices de Funcionamiento

Criterio de López



$\xi = 0.7$ óptimo para I_3 , que para un sistema de segundo orden produce una respuesta rápida ante un escalón con un sobre nivel del 5%

Índices de Funcionamiento

Criterio de López

Control	Criterio	a	b	c	d	e	f
P	IAE	0.902	0.985				
	ISE	1.411	0.917				
	ITAE	0.490	1.084				
	Z&N	1.0	1.0				
PI	IAE	0.984	0.986	1.644	0.707		
	ISE	1.305	0.952	2.033	0.739		
	ITAE	0.859	0.917	1.484	0.680		
	Z&N	0.909	1.0	3.333	1.0		
PID	IAE	1.435	0.921	1.139	0.749	0.482	1.13
	ISE	1.495	0.945	0.917	0.771	0.560	1.00
	ITAE	1.357	0.947	1.176	0.738	0.381	0.99
	Z&N	1.20	1.0	1.0	1.0	0.5	1.06

Índices de Funcionamiento

Criterio de López

- A partir de la tabla y las siguientes relaciones, se obtienen los parámetros del PID:

$$K_p = \frac{a}{K} \left(\frac{L}{T} \right)^{-b} \quad T_d = T_e \left(\frac{L}{T} \right)^f \quad T_i = T_c \left(\frac{L}{T} \right)^d$$

Índices de Funcionamiento

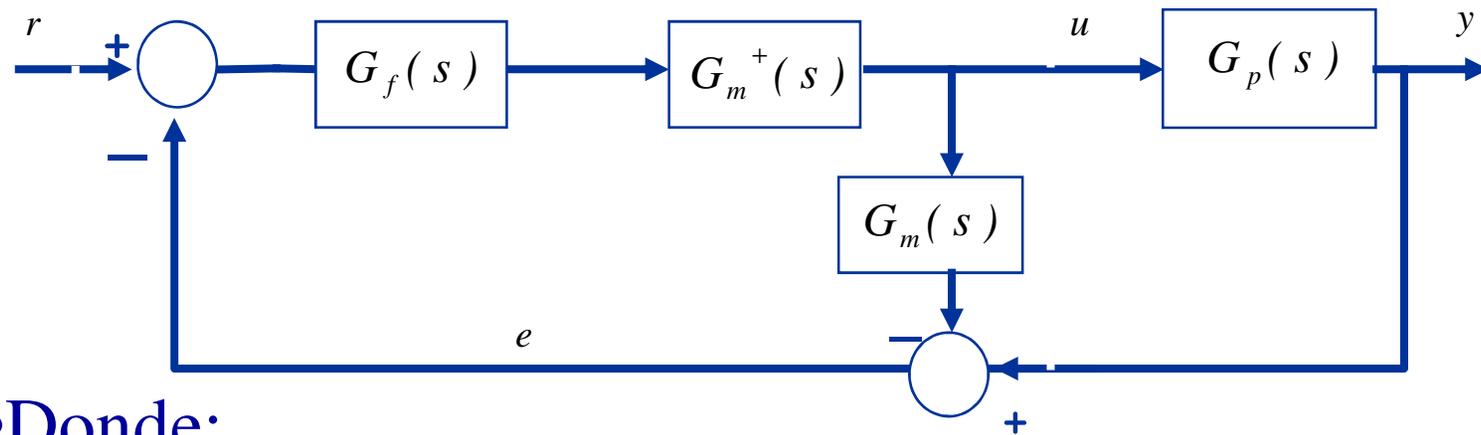
Criterio de López

- Ejemplo PI con ITAE: $G(s) = \frac{10e^{-s}}{2s+1}$

$$K_p = \frac{0.859}{10} \left(\frac{1}{2}\right)^{-0.917}$$
$$= 1.62$$

$$T_i = 2 \cdot 1.484 \left(\frac{1}{2}\right)^{0.680}$$
$$= 1.85$$

Control por Modelo Interno (IMC)



•Donde:

$G_m^+(s)$: Inverso aproximado de $G_m(s)$

$G_m(s)$: Modelo de la Planta

$G_f(s)$: Filtro Pasabajos

Control por Modelo Interno (IMC)

- Si $G_m(s) = G_p(s) \Rightarrow e \equiv 0$
- Además, si $G_f(s) = 1 \wedge G_m^+(s) = G_m^{-1}$ existe un perfecto seguimiento.
- En general se escoge como Filtro Pasabajos a un sistema de primer orden:

$$G_f(s) = \frac{1}{1 + T_f s}$$

Control por Modelo Interno (IMC)

- La Función de Transferencia del Controlador:

$$G_c(s) = \frac{G_f(s) \cdot G_m^+(s)}{1 - G_f(s) \cdot G_m^+(s) \cdot G_m(s)}$$

- Si se considera que la planta se comporta como un sistema de **Primer Orden con Retardo**, es factible encontrar controladores **PI** o **PID** equivalentes.

Control por Modelo Interno (IMC)

- En efecto, sea

$$G_m(s) = \frac{K_p}{Ts+1} e^{-sL} \quad G_m^+(s) = \frac{Ts+1}{K_p}$$

- Aproximando el retardo por Serie de Taylor:

$$e^{-sL} \approx 1 - sL$$

- El controlador queda:

$$G_c(s) = \frac{Ts + 1}{K_p s (L + T_f)} \quad , \quad (PI)$$

Control por Modelo Interno (IMC)

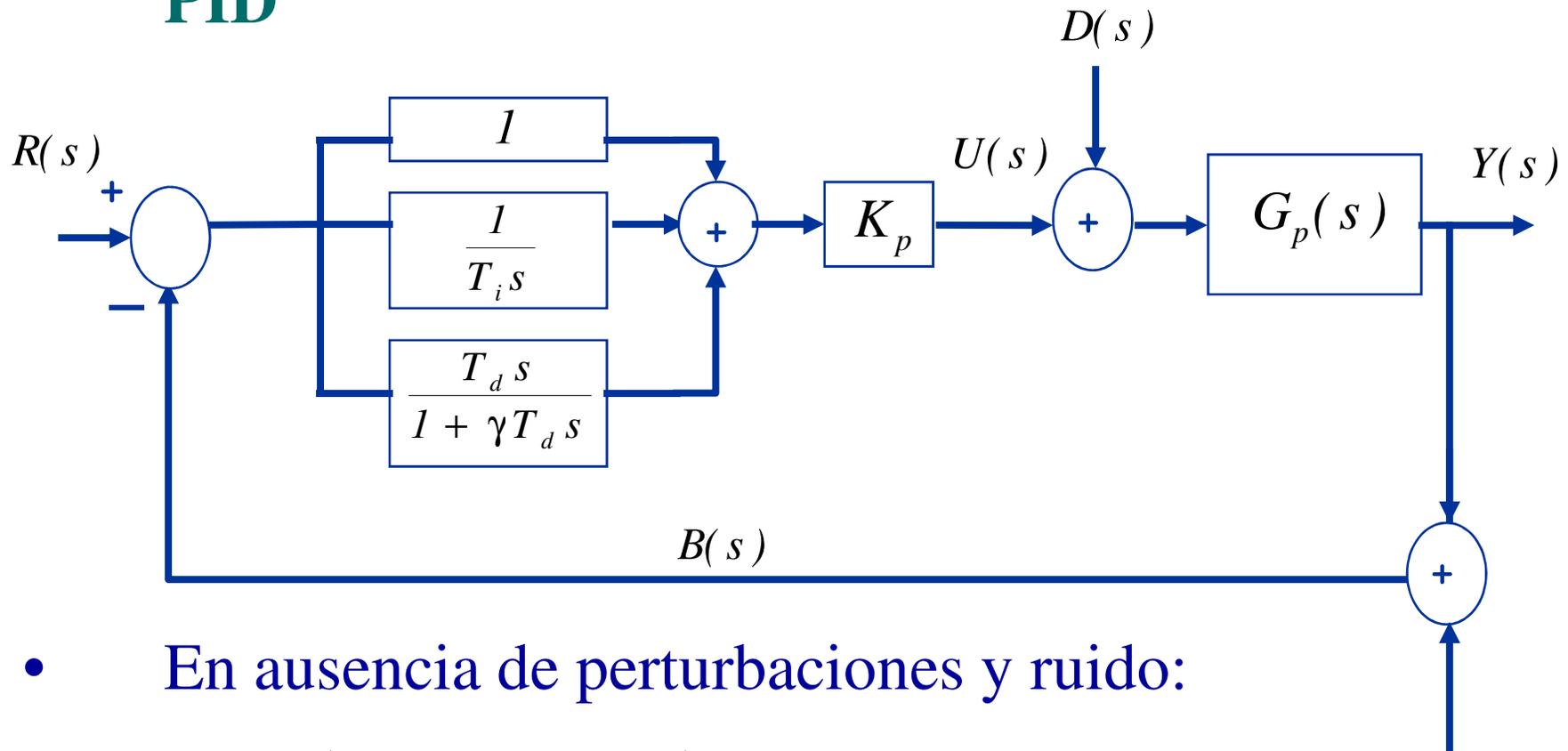
- Aproximando el retardo por Padé (1^{er} orden):

$$e^{-sL} \approx \frac{1 - \frac{sL}{2}}{1 + \frac{sL}{2}}$$

- El controlador queda:

$$G_c(s) \approx \frac{\left(1 + \frac{sL}{2}\right)(Ts + 1)}{K_p s(L + T_f)}, \quad (\text{PID})$$

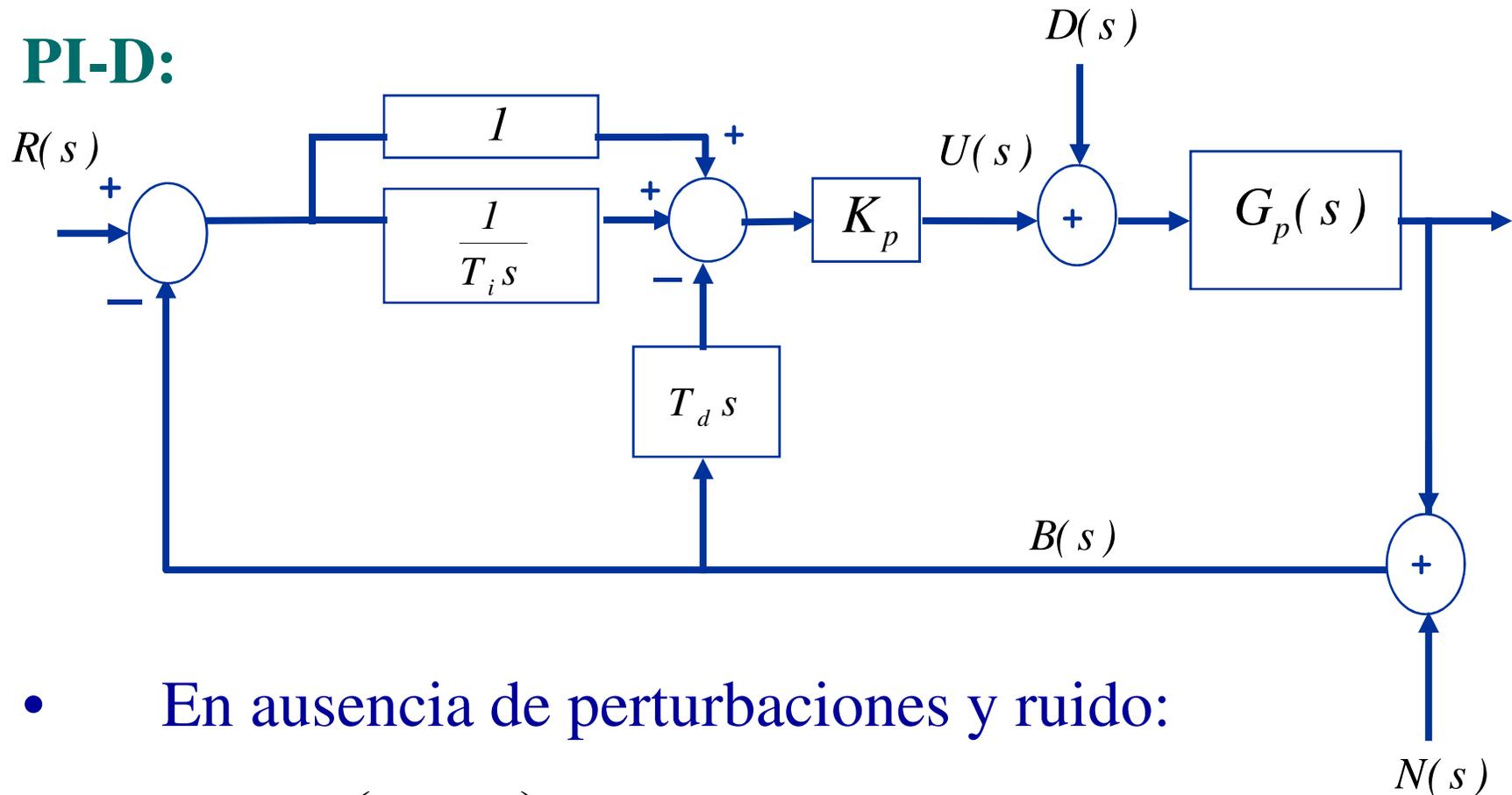
MODIFICACIONES DE LOS ESQUEMAS DE CONTROL PID



- En ausencia de perturbaciones y ruido:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{1 + \gamma T_d s} \right) \frac{K_p G_p(s)}{1 + \left(1 + \frac{1}{T_i s} + \frac{T_d s}{1 + \gamma T_d s} \right) K_p G_p(s)}$$

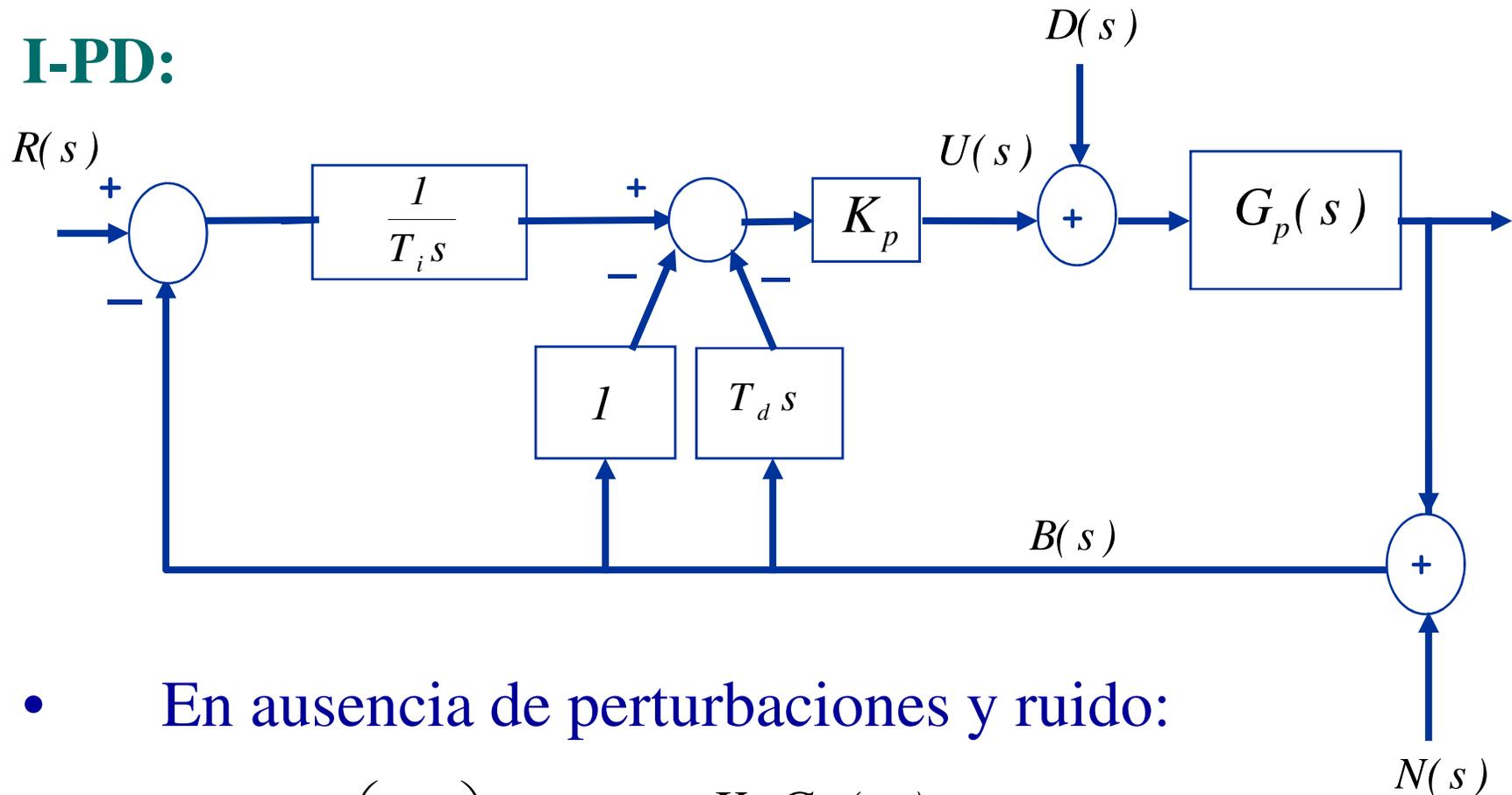
PI-D:



- En ausencia de perturbaciones y ruido:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) \frac{K_p G_p(s)}{1 + \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) K_p G_p(s)}$$

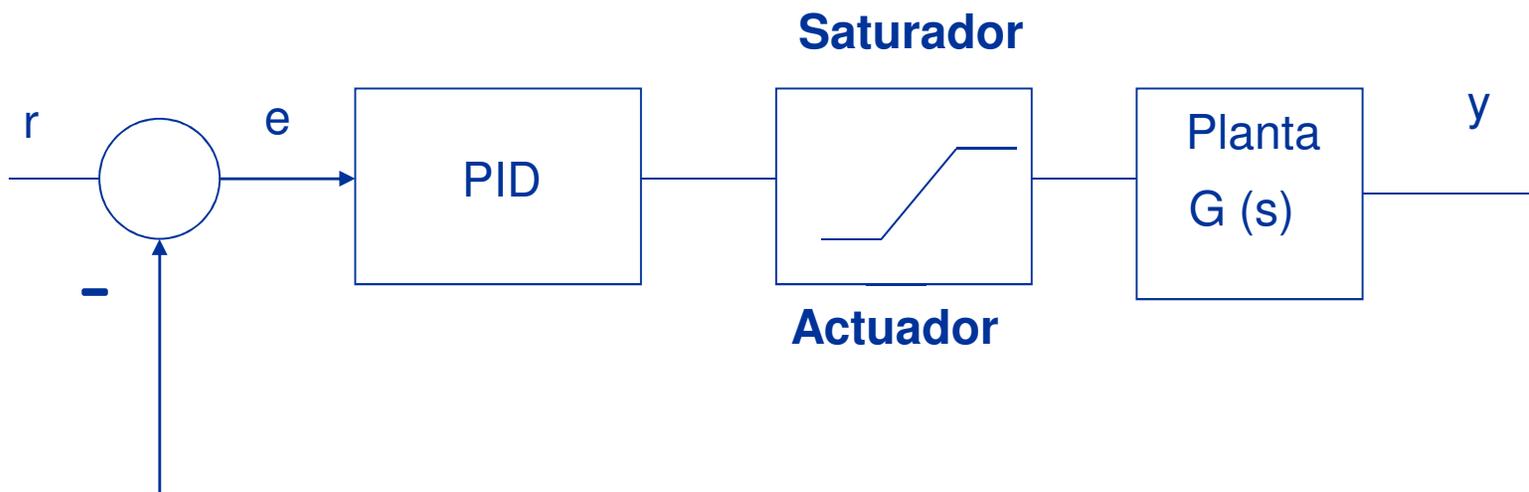
I-PD:



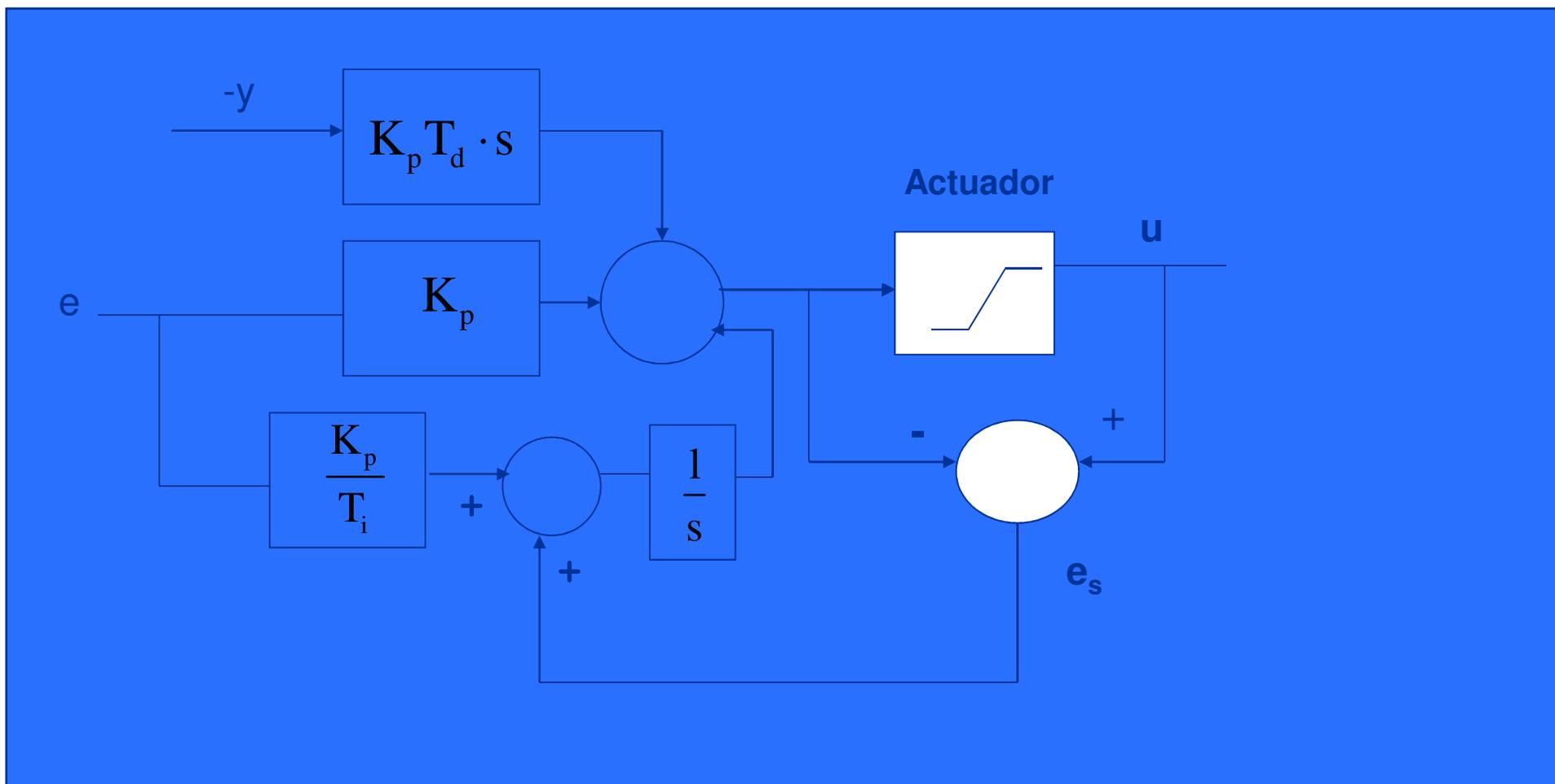
- En ausencia de perturbaciones y ruido:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \left(\frac{1}{T_i s} \right) \frac{K_p G_p(s)}{1 + \left(1 + \frac{1}{T_i s} + T_d s \right) K_p G_p(s)}$$

Antiwindup en Controladores PID



Antiwindup en Controladores PID: Solución



Antiwindup en Controladores PID: Solución

