EL 4004
Fundamentos de Control de Sistemas

Profesora: Dra. Doris Sáez H.

Departamento de Ingeniería Eléctrica

Universidad de Chile

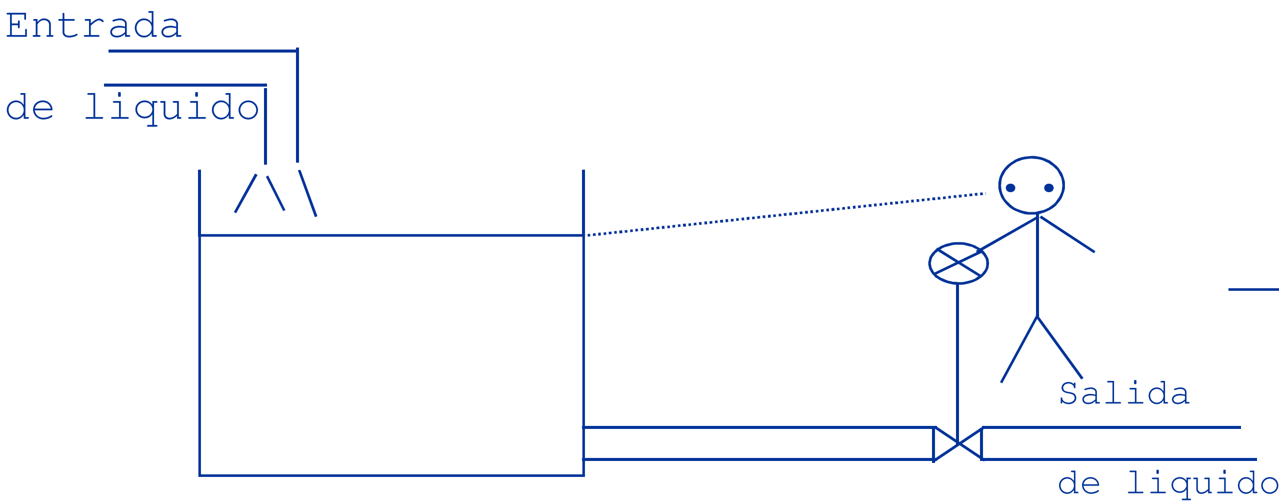
Unidad 1:
Principios de Control de Sistemas:

Elaborado por:
D. Sáez & M. Orchard
Colaborador: R. Zuñiga

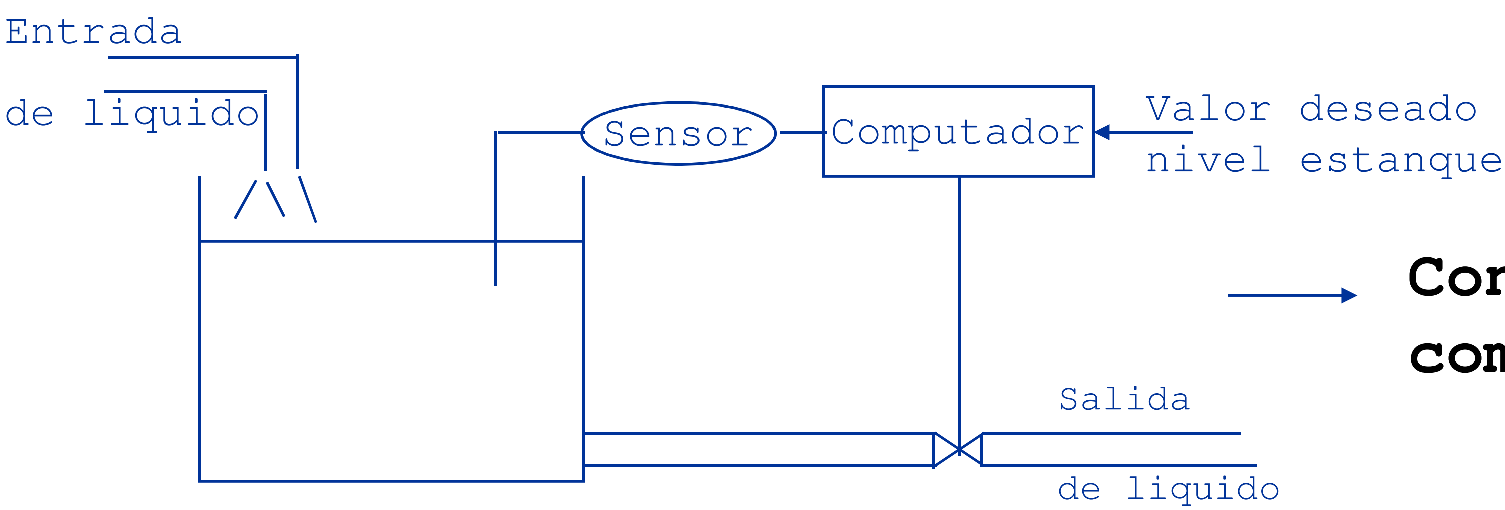
Control Automático

- Es el conjunto de herramientas de software y hardware que interactúan con un proceso y que permiten alcanzar objetivos tales como niveles de operación, transferencia adecuada de un estado a otro a pesar de influencias externas que afectan su comportamiento.

- Ejemplo: Control de nivel de agua



→ **Control Manual**



→ **Control por computador**

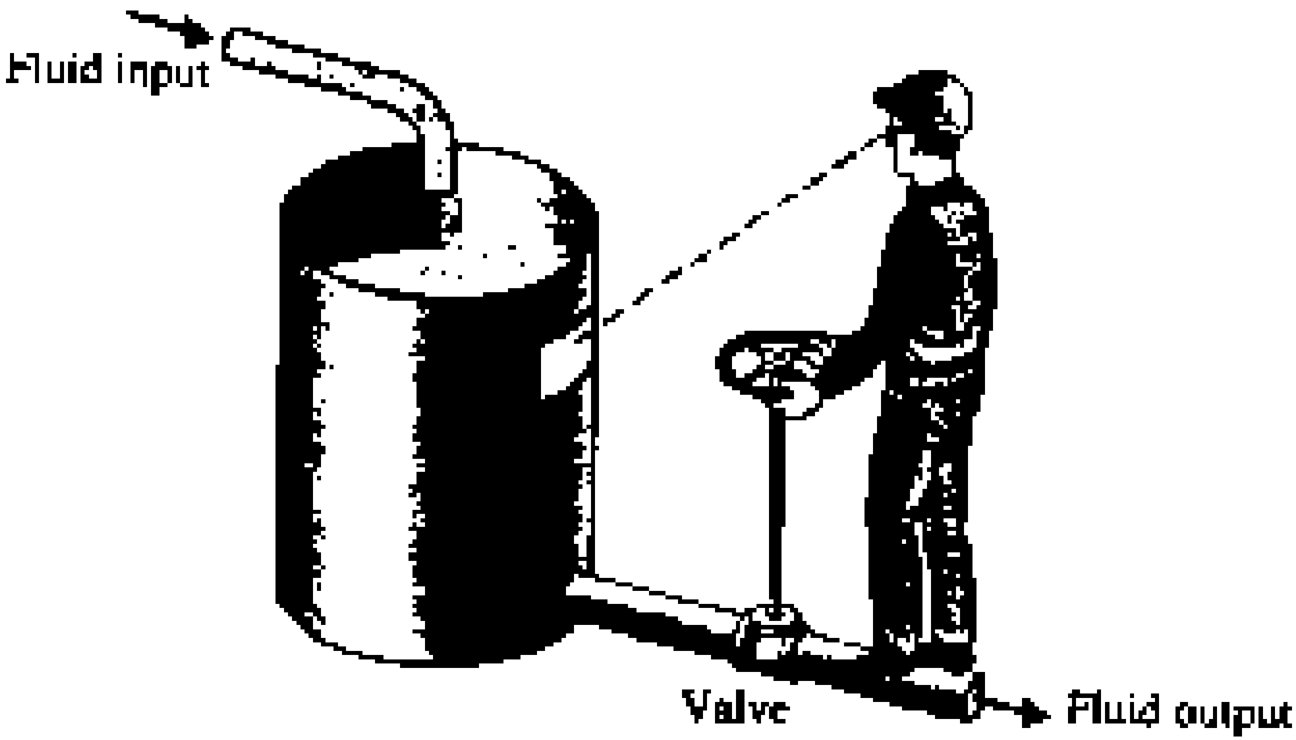
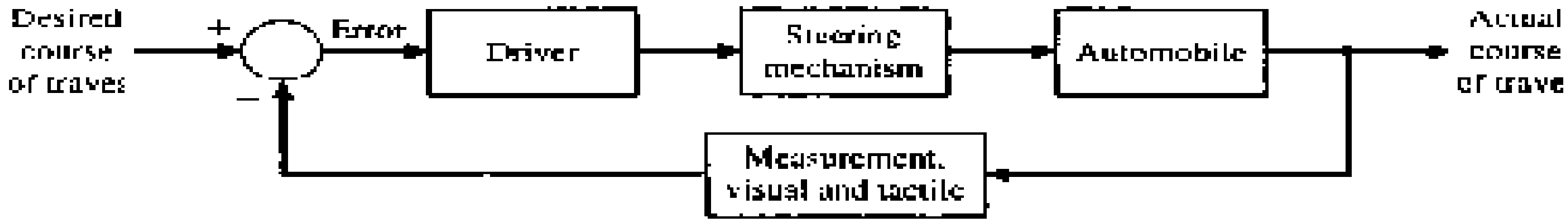
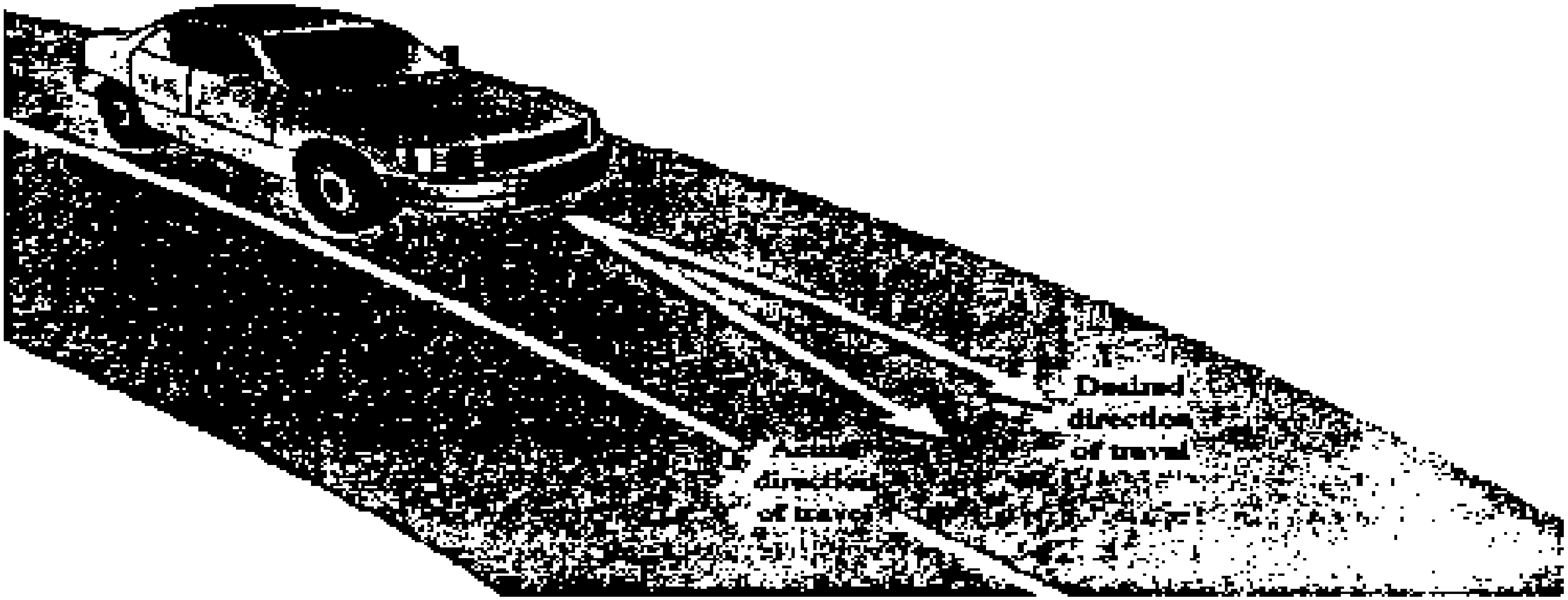


FIGURE 1.9
A manual control system for regulating the level of fluid in a tank by adjusting the output valve. The operator views the level of fluid through a port in the side of the tank.



(a)



(b)

FIGURE 1.7
(a) Automobile steering control system. (b) The driver uses the difference between the actual and desired direction of travel to generate a controlled adjustment of the steering wheel.

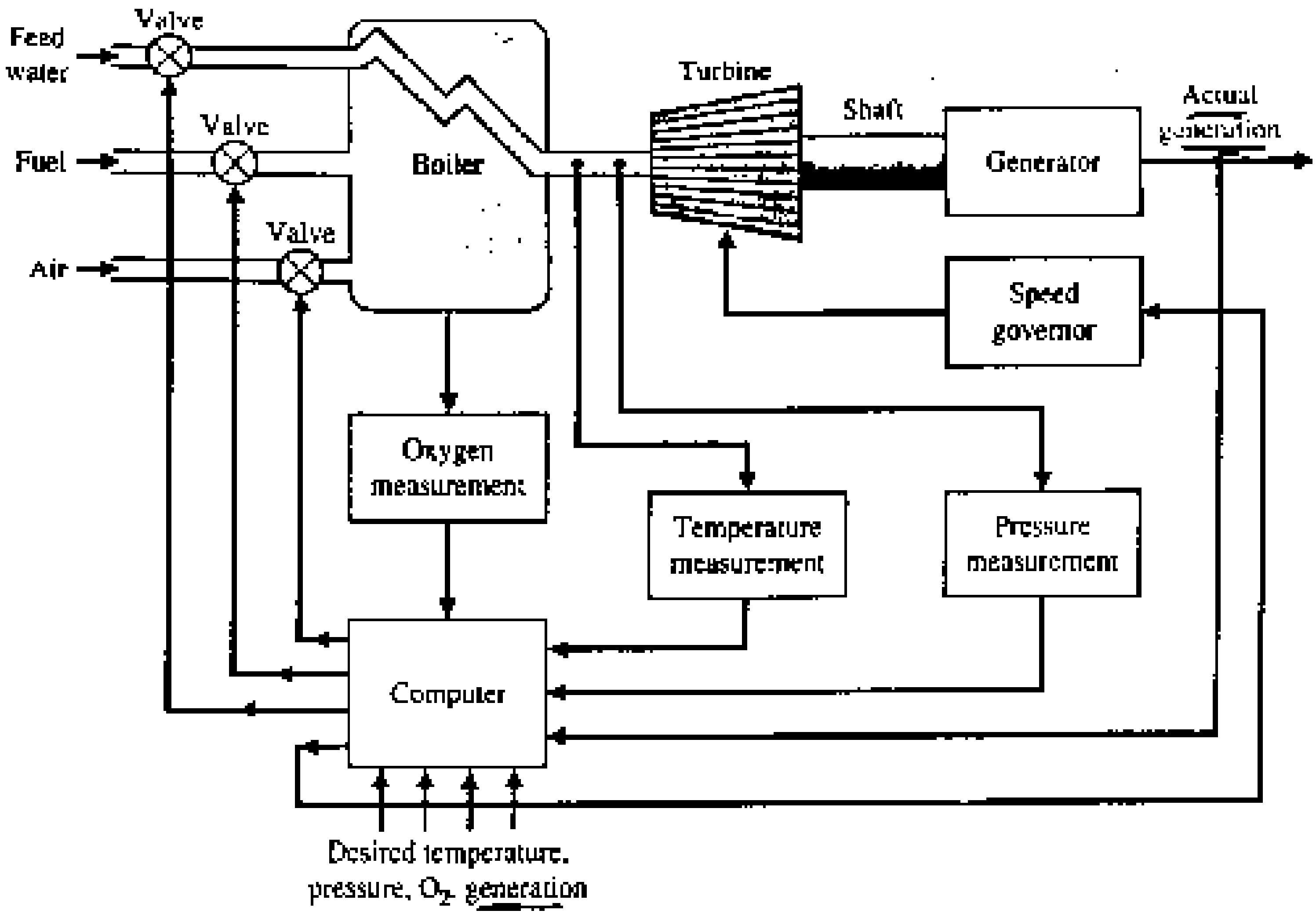
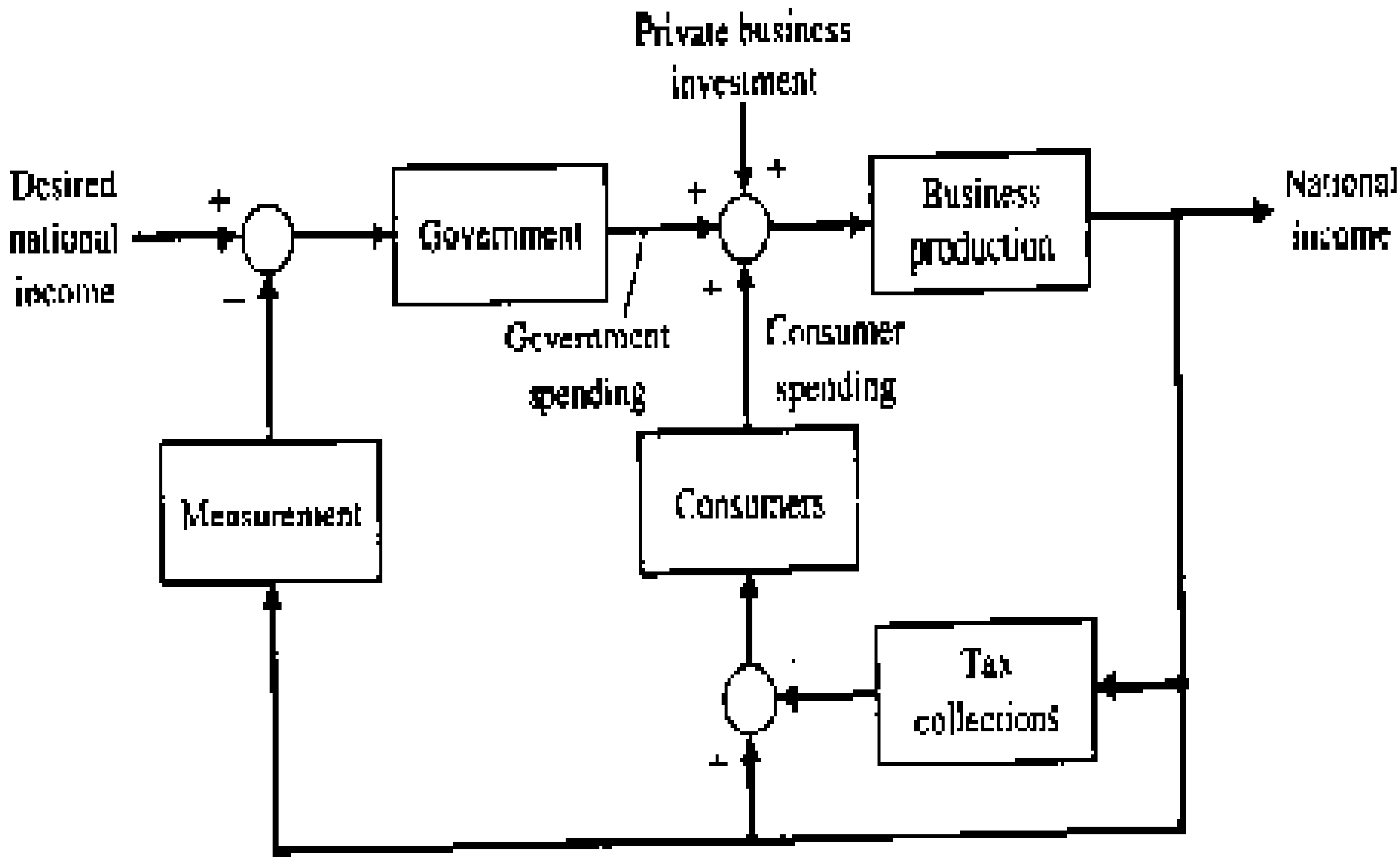


FIGURE 1.11 Coordinated control system for a boiler-generator.

Entrada = Acción de control = variable manipulada


Private business investment
Desired national income
Government
Business production
National income
Government spending
Consumer spending
Measurement
Consumers
Tax collections

Definiciones Básicas

- ***PLANTA:*** Objeto físico que ha de ser controlado. Ej: molino SAG, horno de calentamiento, motor eléctrico, robot, reactor químico, etc.
- ***PROCESO:*** Se denomina proceso a cualquier operación que se vaya a controlar. Ej: procesos económicos, químicos, biológicos, estocásticos.

Definiciones Básicas

- ***SISTEMA:*** Interconexión de componentes que actúan con un fin específico. Ej: biológico, mecánico, eléctrico, hidráulico, político, etc.
- ***SISTEMA DE CONTROL***: Interconexión de componentes, que en su conjunto, presenta un comportamiento deseado. Asume relaciones de causa-efecto.

Definiciones Básicas

- ***VARIABLES MANIPULADAS:*** (entrada al proceso). Pueden variarse a voluntad. Ejercen acción sobre las variables de estado del sistema. A través de ellas puede "guiarse" al proceso hacia estados deseados, es decir, controlarlo.

Ej. Flujo de salida del estanque

Definiciones Básicas

- ***VARIABLES DE ESTADO***: Permiten caracterizar totalmente la condición en que se encuentra un proceso, no siempre son medibles.

Ej. Posición, velocidad, aceleración de un auto.

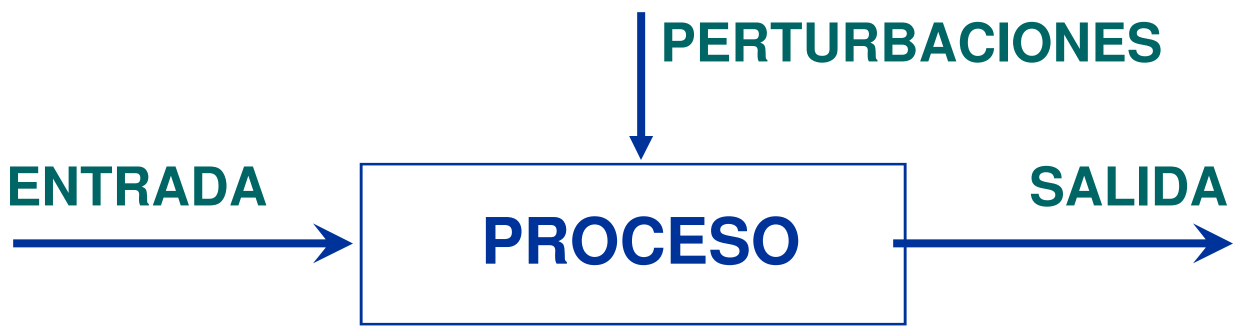
Definiciones Básicas

- ***VARIABLES CONTROLADAS*:** (Salidas del proceso). Permiten conocer la evolución del proceso, determinar el deterioro que provocan las perturbaciones y el efecto producido por el manejo de las variables manipuladas
- Las variables controladas se usan para tener una medida de la conducción del proceso y según su desviación (error) con respecto a un valor deseado (referencia) se determina la acción a ejercer por las variables manipuladas

Ej. Nivel de agua de un estanque

Definiciones Básicas

- ***PERTURBACIONES*****:** Acciones externas que no pueden ser manejadas a voluntad. Podrían detectarse en las variables medibles. Señal que tiende a afectar adversamente el valor de salida de un sistema. Existen perturbaciones medidas y no medidas.
- Ejemplo: Entrada de agua al estanque



Definiciones Básicas

- ***REFERENCIA O SET POINT***: Valor deseado por la variable controlada
- ***PARAMETROS DEL PROCESO***: Caracterizan las relaciones sobre las variables del proceso, los valores que se asumen dependen de las componentes que dan a lugar al proceso

Ej. Sección del estanque, roce aire-auto, volumen embalse

Objetivos de Control (Finalidad de Sistemas de Control)

- Garantizar que el sistema sea estable.
- Reducir o eliminar las perturbaciones a las que la planta está sometida.
- Cumplir con los objetivos que se fijan para la planta, que en general son función de las salidas y las entradas.

Ej: Beneficio económico, calidad, seguridad, contaminación.

Objetivos de Control

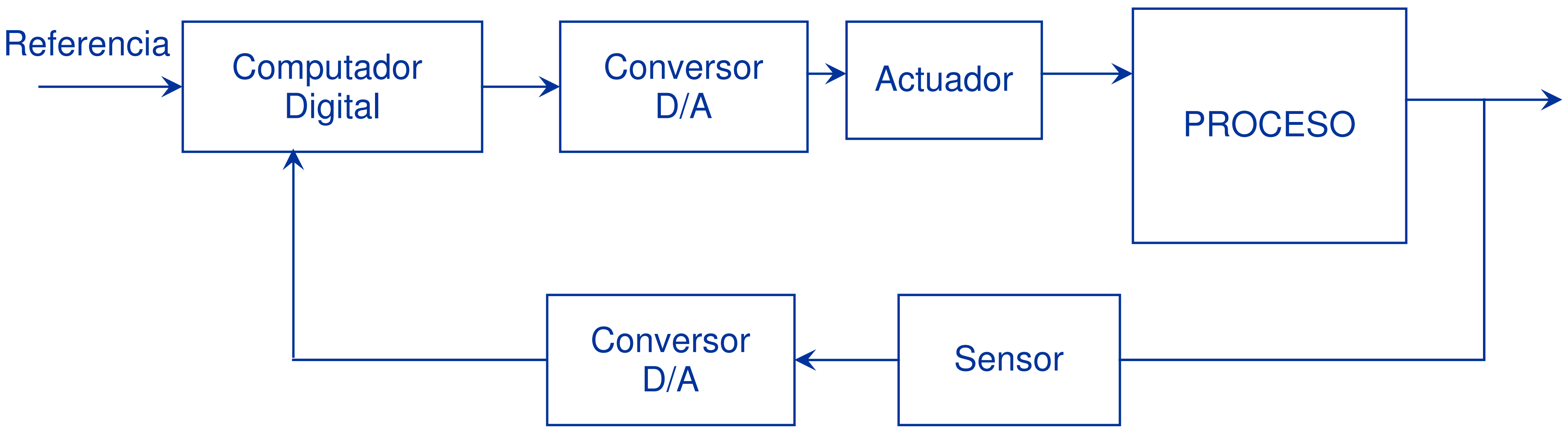
Ej: Molino SAG

- Mantener la potencia, presión en descansos, nivel de llenado en valores seguros de operación.
- Maximizar el tonelaje de alimentación procesado
- Se manipula el velocidad, tonelaje y agua de alimentación.

Tecnologías de Sistemas de Control

- Control manual
- Control mecánico
- Control analógico
- Control neumático
- Control digital

Ej. Control Digital



Control Digital

- ***SENSOR:*** Elemento que toma (mide) la salida del sistema y la transforma, dejándola apta para ser manejada (sensor + transmisor). Ej: termómetros, manómetros, flujómetros, sensores de nivel, etc.

Control Digital

- ***ACTUADOR:*** Elemento que toma la señal del sistema de control y la transforma, dejándola apta para ser introducida en la planta (actuador + acondicionador de la señal). Ej. Relés, TRIAC's, válvulas neumáticas, transistores de potencia, etc.

Sistemas de Control de Sistemas

- Control en lazo abierto o guiado
- Control en lazo cerrado o realimentado
- Control prealimentado
- Control avanzado

Control en Lazo Abierto

- La salida no tiene efecto sobre la acción de control. Es decir, en un sistema "open-loop" la salida ni se mide ni se realimenta para compararla con la referencia.
- La exactitud del sistema depende de la calibración.

Control en Lazo Abierto

- ***Ventajas:*** simplicidad de implementación y bajo costo.
- ***Desventaja:*** En presencia de perturbaciones no cumple la función asignada. Sólo puede utilizarse si la relación entrada/salida es conocida y en ausencia de perturbaciones externas y/o internas

Ej: semáforos, lavadora automática, etc.

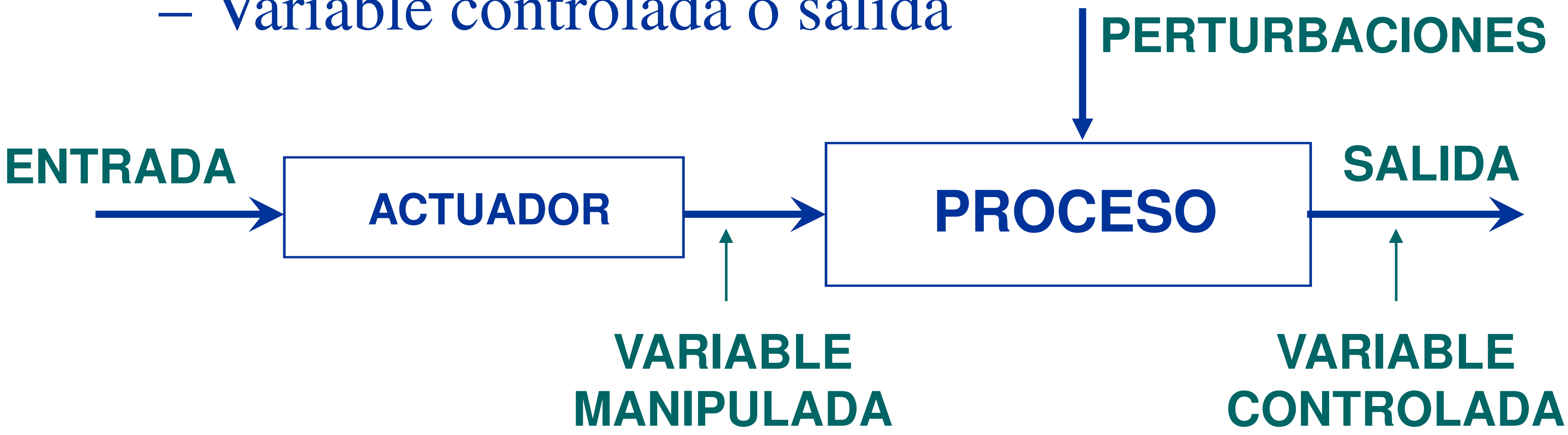
Control en Lazo Abierto

– Proceso

– Dispositivo de acción (actuador)

– Variable manipulada o de control

– Variable controlada o salida



Ejemplo: Control en Lazo Abierto

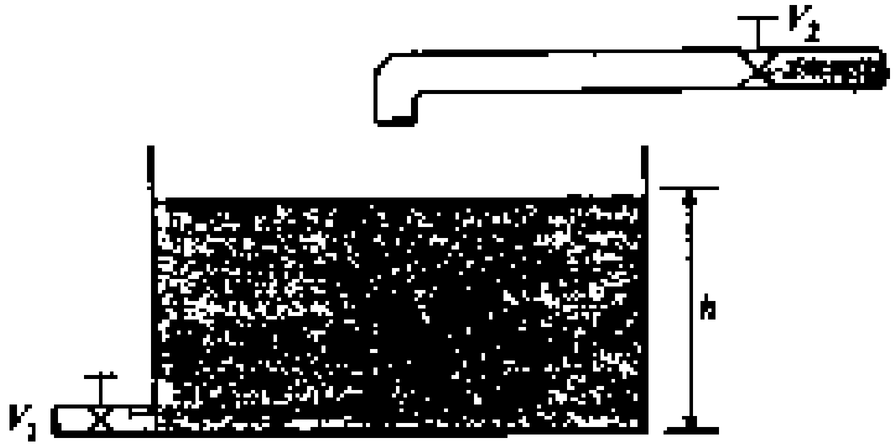
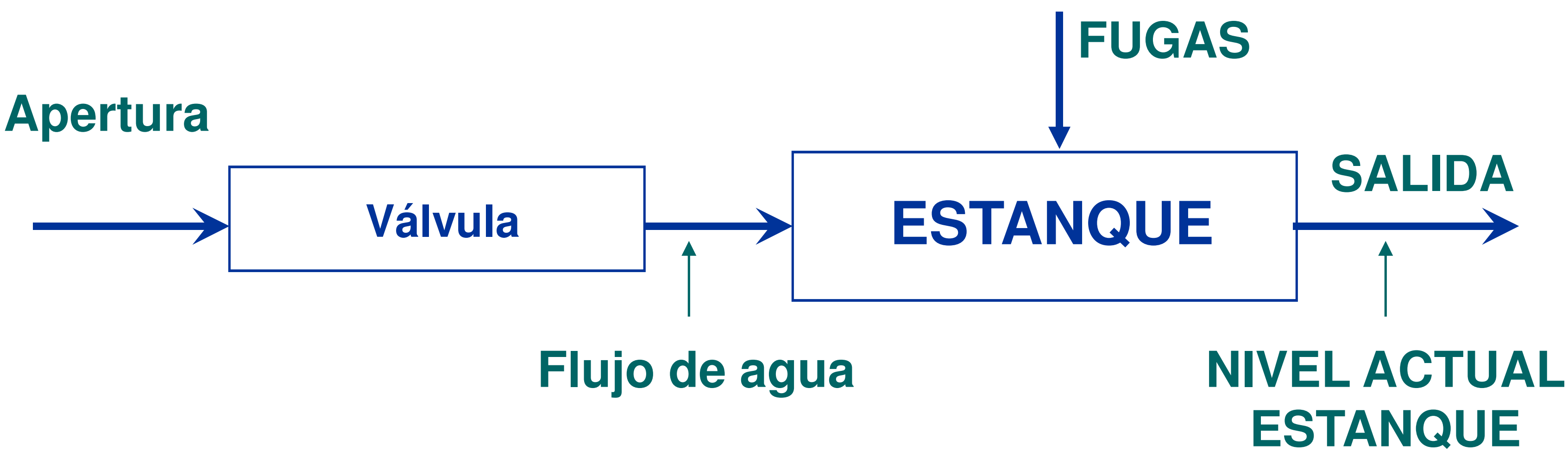


Figure 1.1 Tank-level control system.



Ejemplo: Control en Lazo Abierto

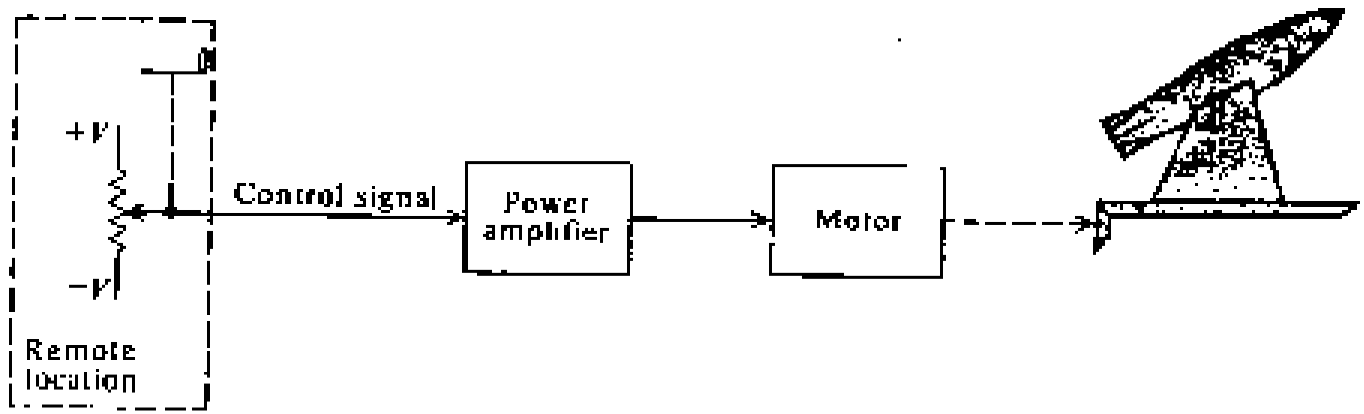


Figure 1.3 Controlling the position of a missile launcher from a remote location.

Entrada

Señal de voltaje

Sistema de control
Potenciómetro, amplificador,
Lanzador de misil

Salida

Posición
angular actual

Control en Lazo Cerrado

- En este caso, la salida tiene un efecto directo sobre la acción de control o variable manipulada
- Operación que, en presencia de perturbaciones, tiende a reducir la diferencia entre la salida y la entrada de referencia de un sistema (o estado deseado) y lo hace sobre la base de esta diferencia.

Control en Lazo Cerrado

- ***Ventajas:*** Atenúa los efectos de pequeños cambios en las características dinámicas del proceso y reduce las perturbaciones.
- ***Desventajas:*** La acción de control se aplica después que se ha medido el error, por lo que la perturbación ya afectó la salida. Pueden producirse oscilaciones que vuelvan al sistema inestable.

Control en Lazo Cerrado

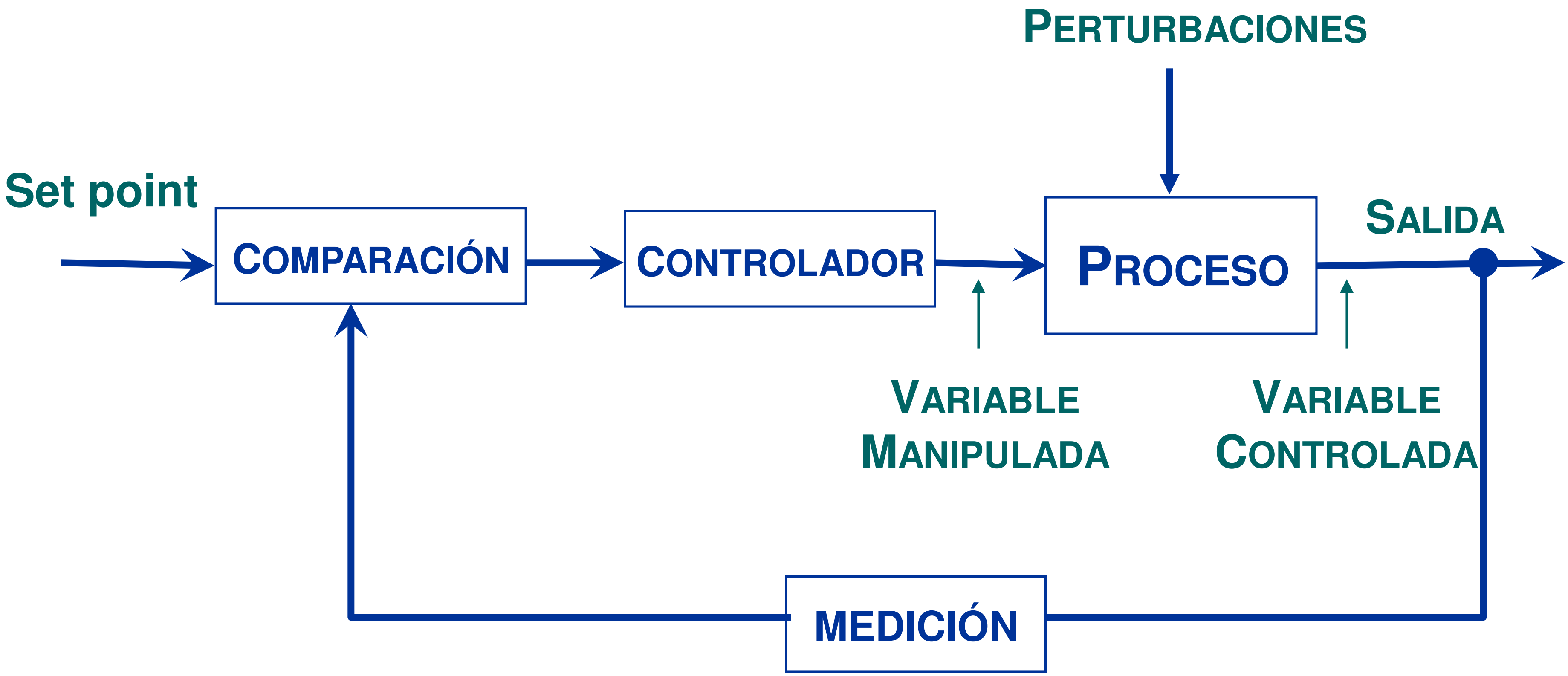
- Ej: supervisión de flujo vehicular por rotonda

Medición del flujo vehicular (sensores)

Semáforos (actuadores)

Manipular la duración de luz roja en semáforo (controlador)

Control en Lazo Cerrado



Ejemplo: Control en Lazo Cerrado

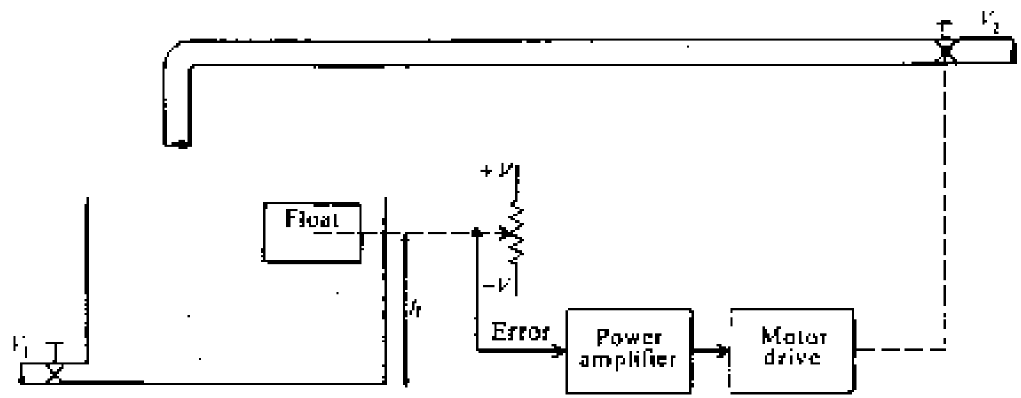
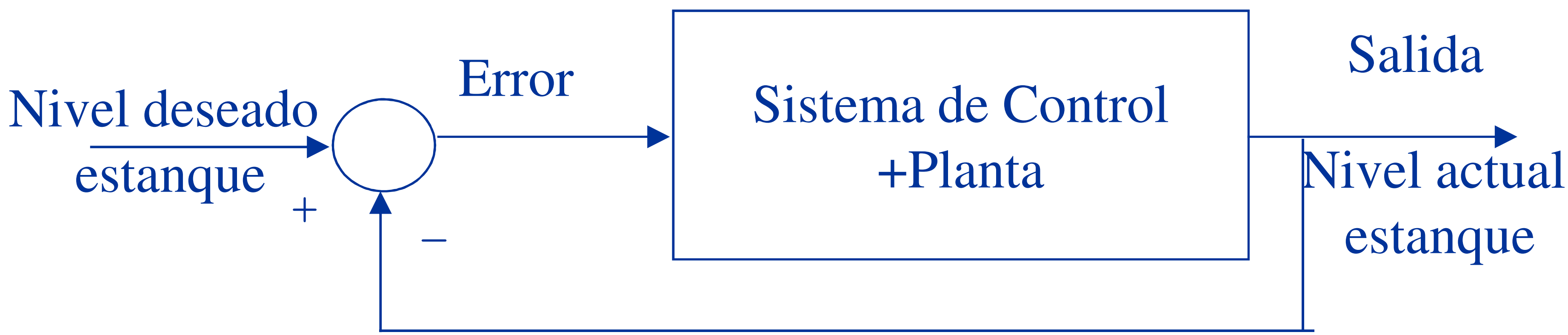


Figure 1.7 Automatic tank-level control system.



Ejemplo: Control en Lazo Cerrado

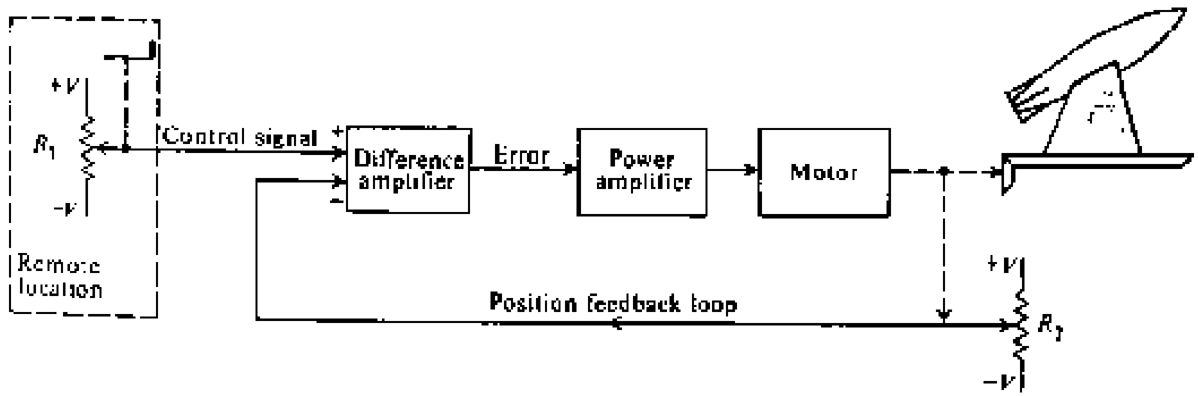
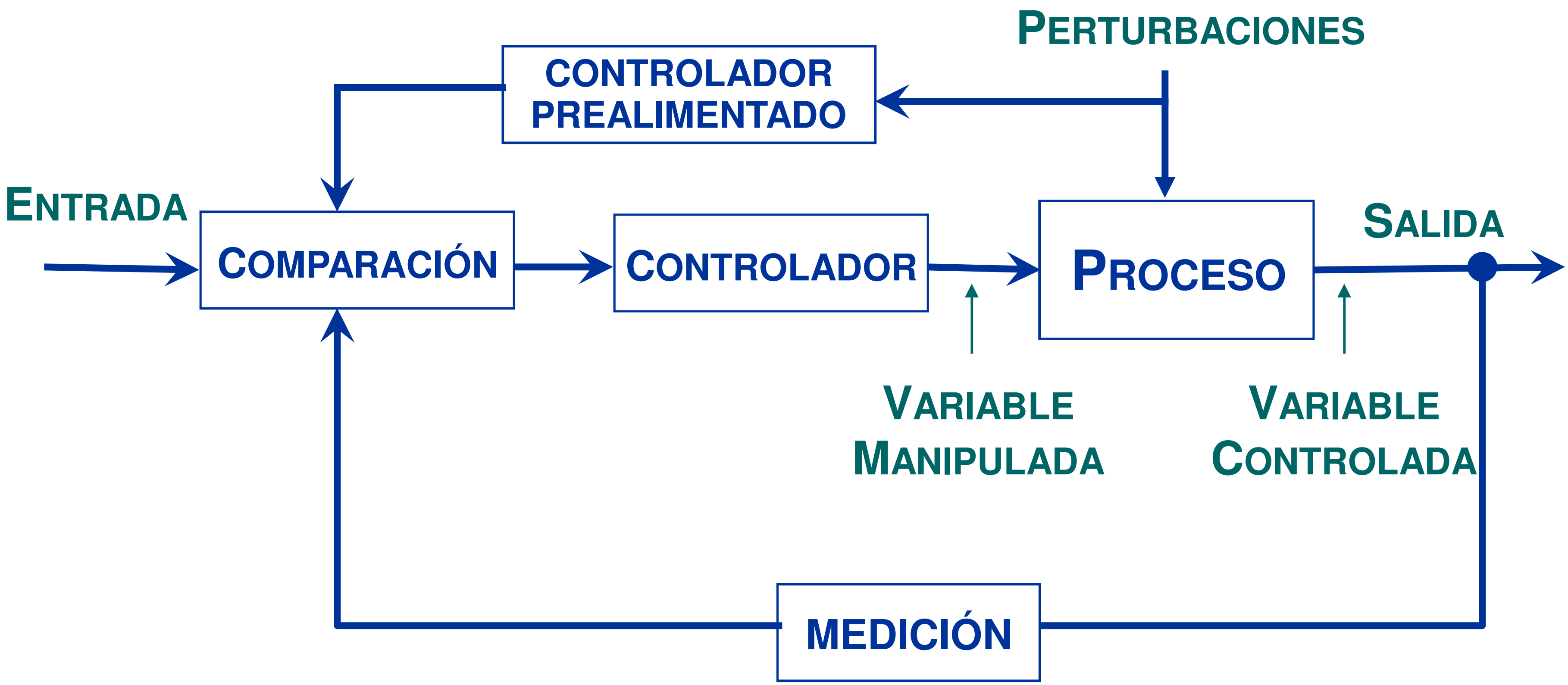


Figure 1.9 An automatic positioning system for a missile launcher.

Control Prealimentado

- Configuración que pretende anticiparse a los efectos que las perturbaciones tienen sobre el proceso. Si existe una perturbación, el sistema detecta el cambio antes de producir una modificación en el proceso y el controlador ajusta las variables manipuladas de modo de compensar el efecto de la perturbación

Control Prealimentado



Control Prealimentado

- ***Ventaja:*** Se miden las perturbaciones (v(t)) con el fin de tomar acciones correctivas antes de que éstas afecten la señal de salida.
- ***Desventaja:*** Se debe poder medir las perturbaciones y debe conocerse en profundidad la forma en que éstas afectan al proceso.

Ej: Detección de mineral duro para molinos SAG

Control Avanzado

- ***SISTEMAS DE CONTROL ADAPTIVO:***
  - Las características dinámicas de la mayoría de los sistemas no son constantes.
  - Existen fenómenos de desgaste, deterioro.
  - Cuando las modificaciones son significativas en los parámetros del sistema de control y/o proceso, debiera existir un autoajuste o adaptación para obtener buenos resultados.

Control Avanzado

- ***CONTROL ÓPTIMO:***
  - Se trata de maximizar o minimizar una función objetivo que incluye criterios económicos, fenomenológicos, etc. Sujeto a restricciones.

Control Avanzado

- Inteligencia Artificial: Ciencia que trata de la comprensión y diseño de máquinas inteligentes (estudio y simulación de las actividades del hombre)

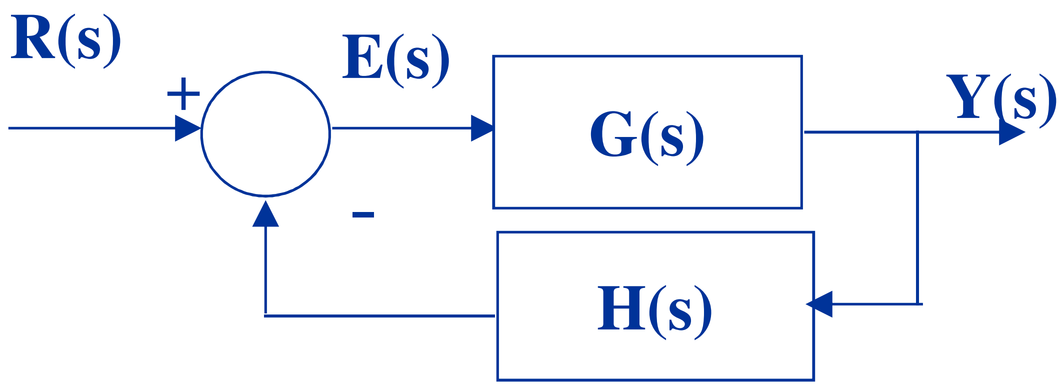
Control Avanzado

- Existen diversas áreas:
  - Robótica (manipulación)
  - Sistemas Expertos y Lógica Difusa (razonamiento)
  - El lenguaje natural (percepción)
  - Visión Artificial (percepción)
  - Redes Neuronales (aprendizaje)
  - Programación Automática (creación)

Control Avanzado

- Control difuso
- Control neuronal
- Etc.

Sistemas de Control Realimentado



$$Y(s) = G(s)(R(s) - H(s)Y(s))$$

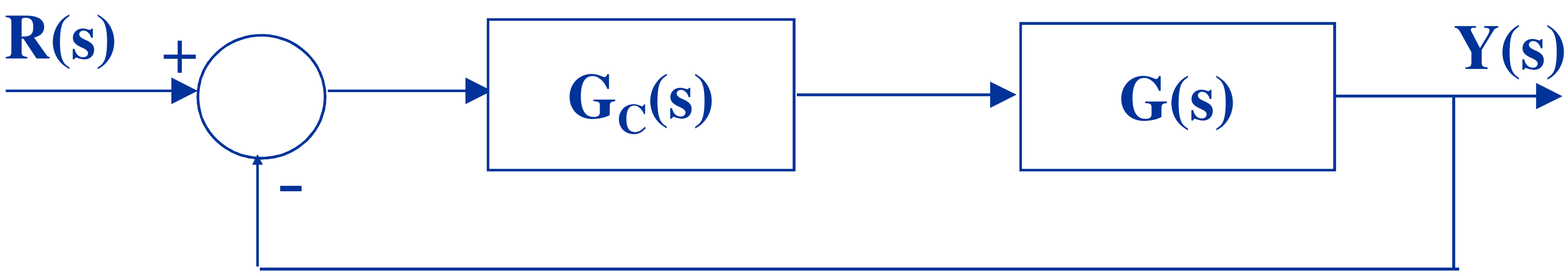
$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

$$E(s) = R(s) - H(s)Y(s)$$

$$E(s) = R(s) - \frac{H(s)G(s)}{1 + G(s)H(s)} R(s)$$

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G(s)H(s)}$$

Sistemas de Control Realimentado



$$Y(s) = G(s)G_C(s)(R(s) - Y(s))$$

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)G_C(s)}{1 + G(s)G_C(s)}$$

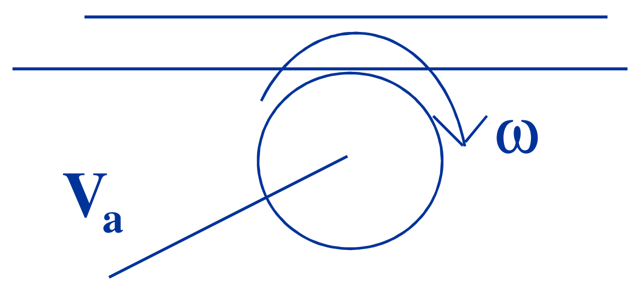
$$E(s) = R(s) - Y(s)$$

$$= R(s) - \frac{G(s)G_C(s)}{1 + G(s)G_C(s)} R(s)$$

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G(s)G_C(s)}$$

Sistemas de Control Realimentado

Ejemplo: Sistema de control de velocidad



ω: Velocidad

V_a: Voltaje

$$\frac{\omega(s)}{V_a(s)} = G(s) = \frac{K_1}{G_1 s + 1}$$

Sistemas de Control Realimentado

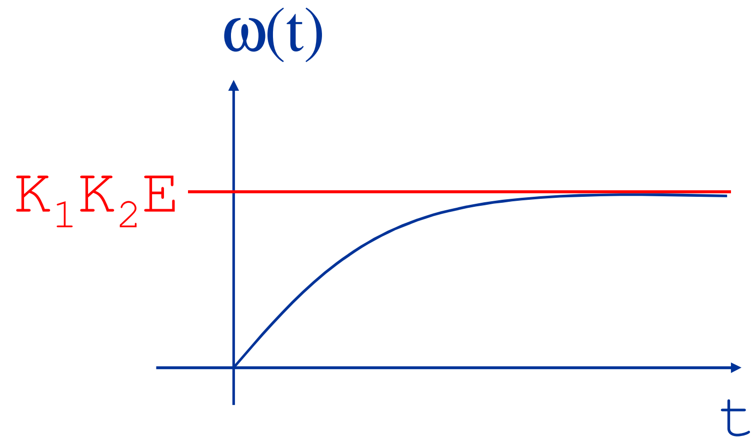
Si se aplica un escalón en el voltaje:

$$V_a = \frac{K_2E}{s}$$

$$\omega(s) = G(s)V_a(s) = \frac{K_1K_2E}{(G_1s+1)s}$$

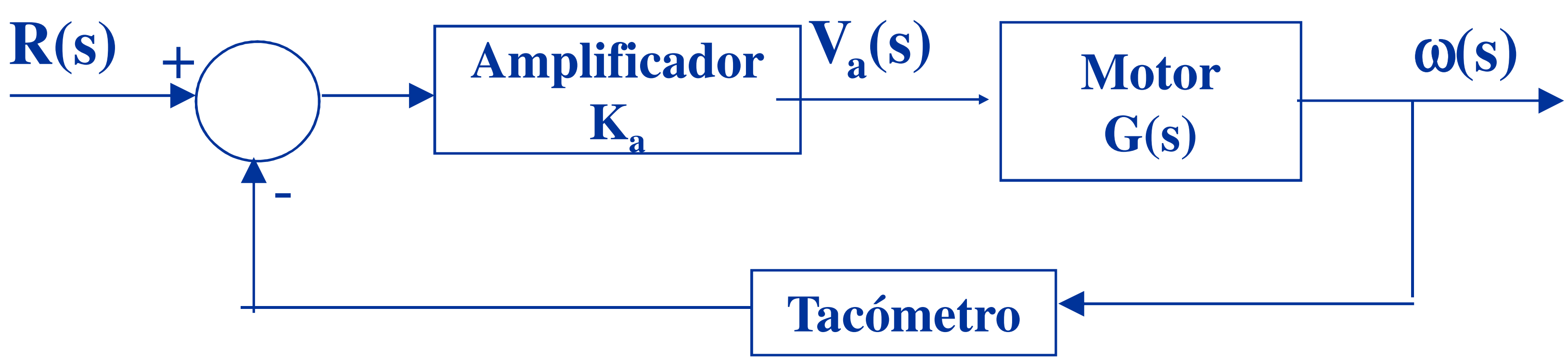
$$= \frac{K_1K_2E}{s} - \boxed{\frac{K_1K_2EG_1}{(G_1s+1)}}$$

$$\omega(t) = K_1K_2E\left(1 - e^{\frac{-t}{G_1}}\right)$$



Sistemas de Control Realimentado

Para aumentar la rapidez del sistema se incorpora un amplificador para generar un voltaje proporcional a la velocidad



Sistemas de Control Realimentado

$$\omega(s) = G(s)K_a(R(s) - \omega(s))$$

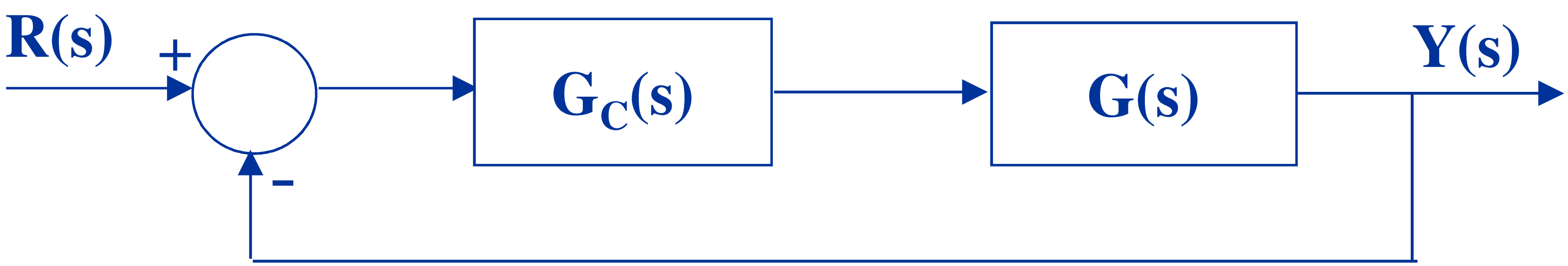
$$\frac{\omega(s)}{R(s)} = \frac{G(s)K_a}{1 + G(s)K_a}$$

$$\frac{\omega(s)}{R(s)} = \frac{K_1K_a}{1 + G_1s + K_1K_a}$$

$$\text{Si } R(s) = \frac{K_2E}{s} \rightarrow \omega(s) = \frac{K_1K_a}{1 + G_1s + K_1K_a}\frac{K_2E}{s}$$

$$\text{Si } K_1K_a >> 1 \rightarrow \omega(t) \approx K_2E\left(1 - e^{\frac{-K_1K_at}{G_1}}\right)$$

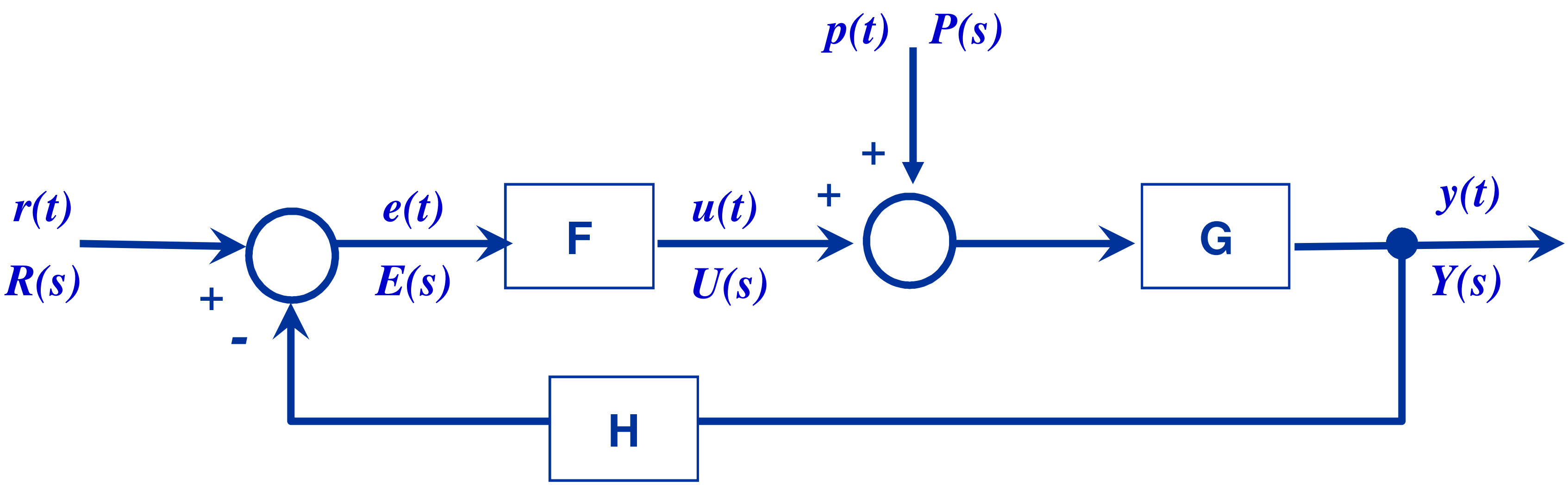
Error Estacionario o Permanente



$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+G(s)G_C(s)} \Rightarrow E(s) = \frac{R(s)}{1+G(s)G_C(s)}$$

$$e_{ss} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\,\frac{R(s)}{1+G(s)G_C(s)}$$

Sistemas de Control Realimentado



$$\left.\begin{array}{l} Y = G\left(P + F\left(R - HY\right)\right) \\ \left[1 + FGH\right]\cdot Y = GP + FGR \end{array}\right\} \Rightarrow Y = \frac{G}{1+FGH}\cdot P + \frac{FG}{1+FGH}\cdot R$$

- Caractericemos el seguimiento de referencias a través del error permanente, definido como :

$$e_{rp} = \lim_{t \to \infty} e(t)$$

I.-) Si suponemos Perturbaciones nulas (SISTEMAS REALIMENTADOS ESTABLES)

$$\left.\begin{aligned} Y &= \frac{FG}{1+FGH} \cdot R \\ E &= R - H \cdot Y \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad E = \frac{1}{1+FGH} \cdot R$$

A) Referencia en escalón

$$e_{rp} = \lim_{s \to 0} s \cdot E(s) = \lim_{s \to 0} \frac{s}{1+FGH} \cdot \frac{A}{s} = \frac{A}{1+F(0) \cdot G(0) \cdot H(0)}$$

B) Referencia en rampa

$$r(t) = m \cdot t \quad (rampa \quad de \quad pendiente \quad "m")$$

$$e_{rp} = \lim_{s \to 0} s \cdot E(s) = \lim_{s \to 0} \frac{s}{1 + FGH} \cdot \frac{m}{s^2} = \lim_{s \to 0} \frac{m}{s \cdot FGH} = \frac{m}{K_v}$$

$$K_v : \quad Constante \quad de \quad error \quad de \quad Velocidad$$

C) Referencia parabólica

$$r(t) = \frac{m}{2} t^2$$

$$e_{rp} = \lim_{s \to 0} s \cdot E(s) = \lim_{s \to 0} \frac{s}{1 + FGH} \cdot \frac{m}{s^3} = \lim_{s \to 0} \frac{m}{s^2 \cdot FGH} = \frac{m}{K_a}$$

$$K_a : \quad Constante \quad de \quad error \quad de \quad Aceleración$$

- Condición necesaria y suficiente para que el error permanente sea nulo:

$$Si \quad P=0$$

$$e_{rp}=0 \Leftrightarrow F(0)\cdot G(0)\rightarrow\infty$$

$$\Leftrightarrow F(s)\vee G(s) \quad tienen \quad integración$$

$$\therefore \quad \boxed{G(s)=\frac{N_G(s)}{s\cdot D_G(s)}}$$

II.-)Si suponemos Referencia nula y Perturbación en Escalón:

$$\left.\begin{aligned} Y &= \frac{G}{1+FGH}\cdot P \\ E &= -H\cdot Y \end{aligned}\right\} \Rightarrow e_{rp} = -\frac{G(0)H(0)P(0)}{1+F(0)G(0)H(0)}$$

- Condición necesaria y suficiente para que el error permanente sea nulo:

$$Si \quad H(s) = 1$$

$$y(\infty) = \lim_{s \to 0} \quad \frac{s \cdot G(s)}{1 + F(s)G(s)} \cdot \frac{A}{s} =$$

$$= \lim_{s \to 0} \frac{N_G(s) \cdot D_F(s)}{D_G(s) \cdot D_F(s) + N_G(s) \cdot N_F(s)} \cdot A$$

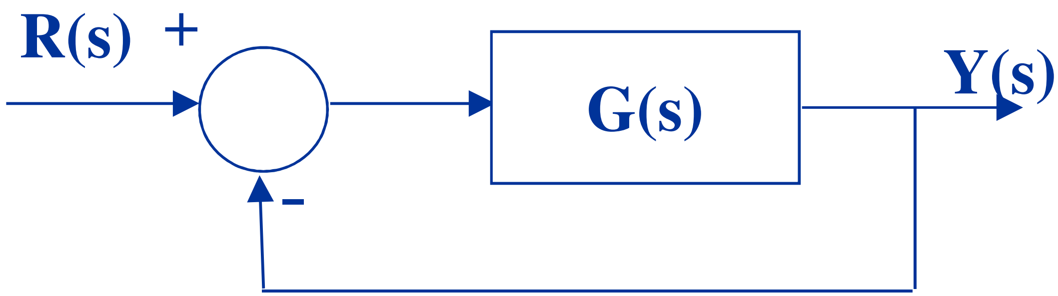
$$e_{rp} = 0 \Leftrightarrow F(s) \quad tiene \quad int\,e\,gra\,ción$$

- Ejemplo: $R(s)=0$, $P(s)=P_o/s^2$, $F(s)$ con integración.

III.-) Analizar caso discreto con Perturbaciones nulas :

$$e_{rp} = \lim_{z \to 1} \left(1 - z^{-1}\right) \cdot E(z)$$

Clasificación de Sistemas



$$G(s)=\frac{K(T_a s+1)(T_b s+1)\cdots(T_n s+1)}{s^N(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots(T_p s+1)},\qquad s^N:\ \text{N polos en el origen}$$

Sistemas	tipo	N
	0	0
	1	1
	2	2
	etc	

Clasificación de Sistemas

Error en estado estacionario:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)}$$

$$\frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1+G(s)} \Rightarrow E(s) = \frac{1}{1+G(s)} R(s)$$

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} s\frac{1}{1+G(s)} R(s)$$

Clasificación de Sistemas

Definiciones:

Constante de error de posición: Se obtiene con el error en estado estacionario para una entrada en escalón.

$$e_{ss} = \lim_{s\to 0} \frac{s}{1+G(s)} \frac{1}{s} = \frac{1}{1+G(0)}$$

$$K_p = \lim_{s\to 0} G(s) = G(0)$$

$$\rightarrow e_{ss} = \frac{1}{1+K_p}$$

Clasificación de Sistemas

$$\text{Sistema tipo cero}: \quad K_p = \lim_{s\to 0} \frac{K(T_a s+1)(T_b s+1)\cdots}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots} = K$$

$$\text{Tipo 1 o mayor} \quad : \quad K_p = \lim_{s\to 0} \frac{K(T_a s+1)(T_b s+1)\cdots}{s^N (T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots} = \infty$$

Error permanente:

$$e_{ss} = \frac{1}{1+K} \qquad \text{tipo cero}$$

$$e_{ss} = 0 \qquad \text{tipo 1 o mayor}$$

Clasificación de Sistemas

Constante de error de velocidad estática (K_V):

Entrada: Rampa unitaria

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} \frac{s}{1+G(s)} \frac{1}{s^2} = \lim_{s \to 0} \frac{1}{sG(s)}$$

$$K_V = \lim_{s \to 0} sG(s) \Rightarrow e_{ss} = \frac{1}{K_V}$$

Clasificación de Sistemas

tipo cero:

$$K_V = \lim_{s\to 0} \frac{sK(T_a s+1)(T_b s+1)\cdots}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots} = 0 \to e_{ss} = \infty$$

tipo uno:

$$K_V = \lim_{s\to 0} \frac{sK(T_a s+1)(T_b s+1)\cdots}{s(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots} = K \to e_{ss} = \frac{1}{K_V}$$

tipo 2 o mayor:

$$K_V = \lim_{s\to 0} \frac{sK(T_a s+1)(T_b s+1)\cdots}{s^N(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots} = \infty \to e_{ss} = 0$$

Clasificación de Sistemas

- Error permanente

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \infty \qquad \text{tipo 0}$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = \frac{1}{K} \qquad \text{tipo 1}$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K_v} = 0 \qquad \text{tipo 2 o mayores}$$

Clasificación de Sistemas

Constante de error de aceleración estática (K_a):

$$Entrada: \ \ parabola \rightarrow r(t) = \begin{cases} \frac{t^2}{2}, t \geq 0 \\ 0, t < 0 \end{cases}$$

$$e_{ss} = \lim_{s \to 0} \frac{s}{1+G(s)} \frac{1}{s^3} = \lim_{s \to 0} \frac{1}{s^2 G(s)}$$

$$K_a = \lim_{s \to 0} s^2 G(s) \Rightarrow e_{ss} = \frac{1}{K_V}$$

Clasificación de Sistemas

tipo cero: $K_a = \lim_{s \to 0} \dfrac{s^2 K(T_a s+1)(T_b s+1)\cdots}{(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots} = 0 \rightarrow e_{ss} = \infty$

tipo uno: $K_a = \lim_{s \to 0} \dfrac{s^2 K(T_a s+1)(T_b s+1)\cdots}{s(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots} = 0 \rightarrow e_{ss} = \infty$

tipo dos: $K_a = \lim_{s \to 0} \dfrac{s^2 K(T_a s+1)(T_b s+1)\cdots}{s^2(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots} = K \rightarrow e_{ss} = \dfrac{1}{K}$

tipo tres o mayor: $K_a = \lim_{s \to 0} \dfrac{s^2 K(T_a s+1)(T_b s+1)\cdots}{s^N(T_1 s+1)(T_2 s+1)\cdots} = \infty \rightarrow e_{ss} = 0$

Clasificación de Sistemas

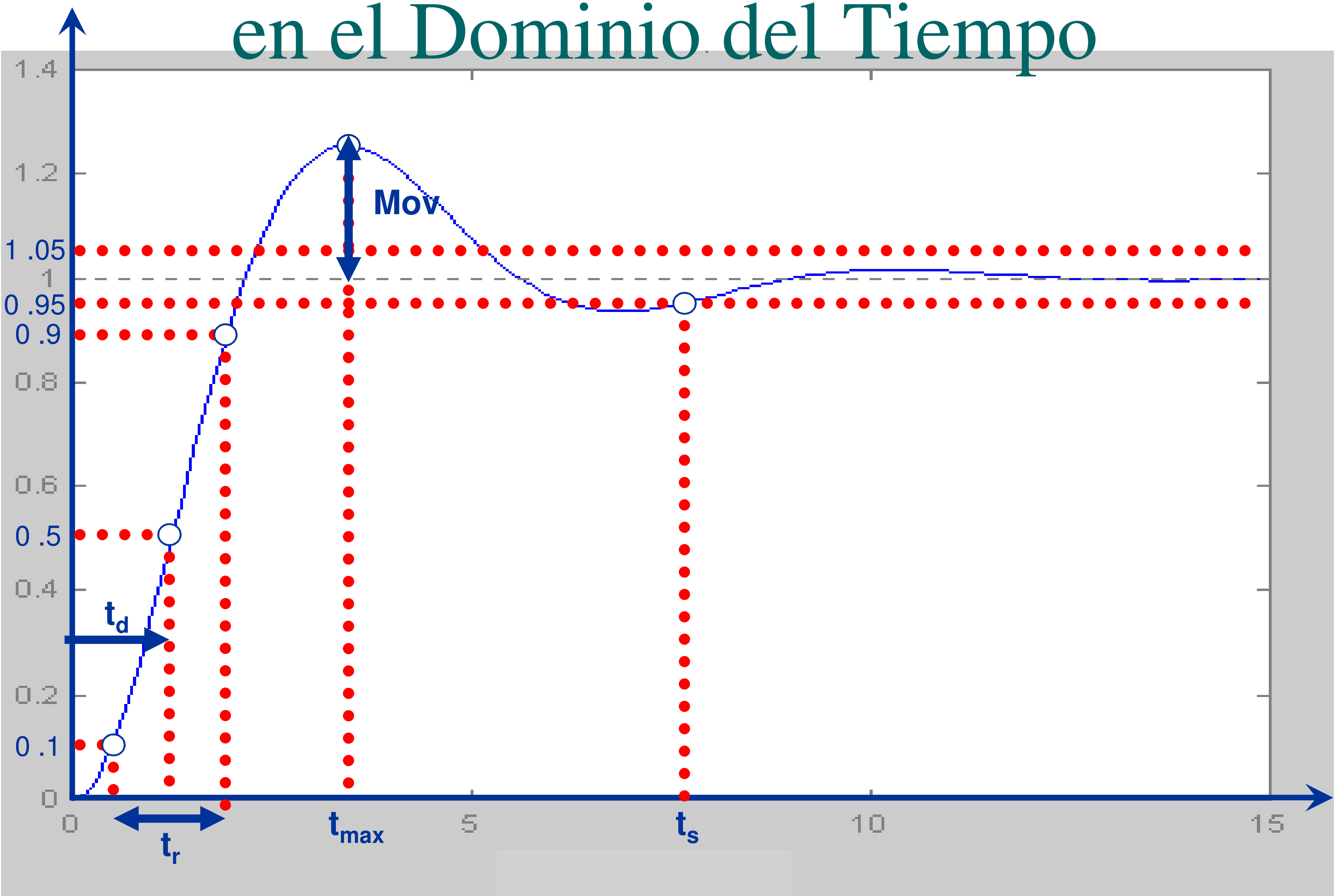
- Error permanente

$$e_{ss} = \infty \qquad \text{tipo 0}$$

$$e_{ss} = \frac{1}{K} \qquad \text{tipo 1}$$

$$e_{ss} = 0 \qquad \text{tipo 2 o mayores}$$

Especificaciones en el Dominio del Tiempo



SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

$$\ddot{x}(t) + a_1 \cdot \dot{x}(t) + a_2 \cdot x(t) = b_1 \cdot \dot{u}(t) + b_2 \cdot u(t)$$

$$\left[s^2 + a_1 \cdot s + a_2\right] \cdot X(s) = \left[b_1 \cdot s + b_2\right] \cdot U(s)$$

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{b_1 \cdot s + b_2}{s^2 + a_1 \cdot s + a_2}$$

- Existencia de ceros ($b_1=0$ / $b_1 \neq 0$)
- Estabilidad ($a_2 < 0 \Rightarrow$ Respuestas Divergentes)
- $a_1^2 - 4 \cdot a_2 \begin{cases} < 0 \Rightarrow \text{polos reales} \neq\text{´s} \\ = 0 \Rightarrow \text{polos reales} =\text{´s} \\ > 0 \Rightarrow \text{polos complejos conjugados} \end{cases}$

- Analicemos la función de transferencia de la forma:

$$G(s) = \frac{K_p \cdot \omega_m^2}{s^2 + 2 \cdot \xi \cdot \omega_m \cdot s + \omega_m^2}; \ (b_1 = 0, a_2 > 0)$$

$$a_1^2 - 4 \cdot a_2 = 4 \cdot \xi^2 \cdot \omega_m^2 - 4 \cdot \omega_m^2 = 4 \cdot \omega_m^2 \left(\xi^2 - 1\right)$$

$$\begin{cases} |\xi| > 1 \Rightarrow \text{polos reales} \neq\text{´s} \\ |\xi| = 1 \Rightarrow \text{polos reales} =\text{´s} \\ |\xi| < 1 \Rightarrow \text{polos complejos conjugados} \end{cases}$$

CASO $|\xi| < 1$ (Polos Complejos Conjugados)

$$\ddot{x}(t)+2\cdot\xi\cdot\omega_m\cdot\dot{x}(t)+\omega_m^2\cdot x(t)=K_p\cdot\omega_m^2\cdot u(t)$$

$$s^2\cdot X(s)-s\cdot x(0^-)-\dot{x}(0^-)+2\cdot\xi\cdot\omega_m\cdot\left[s\cdot X(s)-x(0^-)\right]+\omega_m^2=K_p\cdot\omega_m^2\cdot U(s)$$

$$X(s)=\underbrace{\frac{K_p\cdot\omega_m^2}{s^2+2\cdot\xi\cdot\omega_m\cdot s+\omega_m^2}\cdot U(s)}_{\text{RESC}}+\underbrace{\frac{s\cdot x(0^-)+\dot{x}(0^-)+2\cdot\xi\cdot\omega_m\cdot x(0^-)}{s^2+2\cdot\xi\cdot\omega_m\cdot s+\omega_m^2}}_{\text{RENC}}$$

$$X(s)=X_1(s)+X_2(s)$$

- Analicemos cada una de las respuestas

- ✓ $\underline{X_2}$ (RENC: Respuesta Entrada Cero)

$$X_2(s)=\frac{s\cdot x(0^-)+\dot{x}(0^-)+2\cdot\xi\cdot\omega_m\cdot x(0^-)}{s^2+2\cdot\xi\cdot\omega_m\cdot s+\omega_m^2}$$

- Se sabe de las tablas de Transformadas de Laplace que:

$$L\{sen(\omega\cdot t)\}=\frac{\omega}{s^2+\omega^2};\quad L\{e^{-a\cdot t}f(t)\}=F(s+a)$$

$$L\{e^{-\xi\cdot\omega_m\cdot t}sen(\omega\cdot t)\}=\frac{\omega}{s^2+2\cdot\xi\cdot\omega_m\cdot s+\xi^2\cdot\omega_m^2+\omega^2}$$

$$L\{e^{-\xi\cdot\omega_m\cdot t}\cos(\omega\cdot t)\}=\frac{s+\xi\cdot\omega_m}{s^2+2\cdot\xi\cdot\omega_m\cdot s+\xi^2\cdot\omega_m^2+\omega^2}$$

- Considerando la variable auxiliar:

$$\boxed{\omega_o = \sqrt{1-\xi^2}\cdot\omega_m}$$

- Se obtiene que:

$$x_2(t) = e^{-\xi\cdot\omega_m\cdot t}\cdot x(0^-)\cdot cos(\omega_o\cdot t) + \frac{\dot{x}(0^-)+\xi\cdot\omega_m\cdot x(0^-)}{\omega_o}\cdot e^{-\xi\cdot\omega_m\cdot t}\cdot sen(\omega_o\cdot t)$$

$$x_2(t) = A\cdot e^{-\xi\cdot\omega_m\cdot t}\cdot sen(\omega_o\cdot t+\varphi)$$

✓ X_1 (RESC: Respuesta Estado Cero)

$$X_1(s)=\frac{K_p\cdot\omega_m^2}{s^2+2\cdot\xi\cdot\omega_m\cdot s+\omega_m^2}\cdot U(s);\; U(s)=\frac{1}{s}$$

- Aplicando fracciones parciales:

$$\boxed{\begin{aligned}X_1(s)&=\frac{K_p\cdot\omega_m^2}{s^2+2\cdot\xi\cdot\omega_m\cdot s+\omega_m^2}\cdot\frac{1}{s}=K_p\cdot\left[\frac{1}{s}-\frac{s+2\cdot\xi\cdot\omega_m}{(s+\xi\cdot\omega_m)^2+\omega_o^2}\right]\\ x_1(t)&=K_p\cdot\left[1-e^{-\xi\cdot\omega_m\cdot t}\cos(\omega_o\cdot t)-\frac{\xi\cdot\omega_m}{\omega_o}\cdot e^{-\xi\cdot\omega_m\cdot t}\,sen(\omega_o\cdot t)\right]\end{aligned}}$$

- $\therefore$ Si consideramos:

$$\boxed{\xi=\cos(\varphi)\Rightarrow\frac{\xi\cdot\omega_m}{\omega_o}=ctg(\varphi)}$$

- Entonces la RESC queda:

$$\boxed{x_1(t)=K_p\cdot\left[1-e^{-\xi\cdot\omega_m\cdot t}\cdot\frac{sen(\omega_o\cdot t+\varphi)}{sen(\varphi)}\right]}$$

- **<u>RESUMEN</u>**

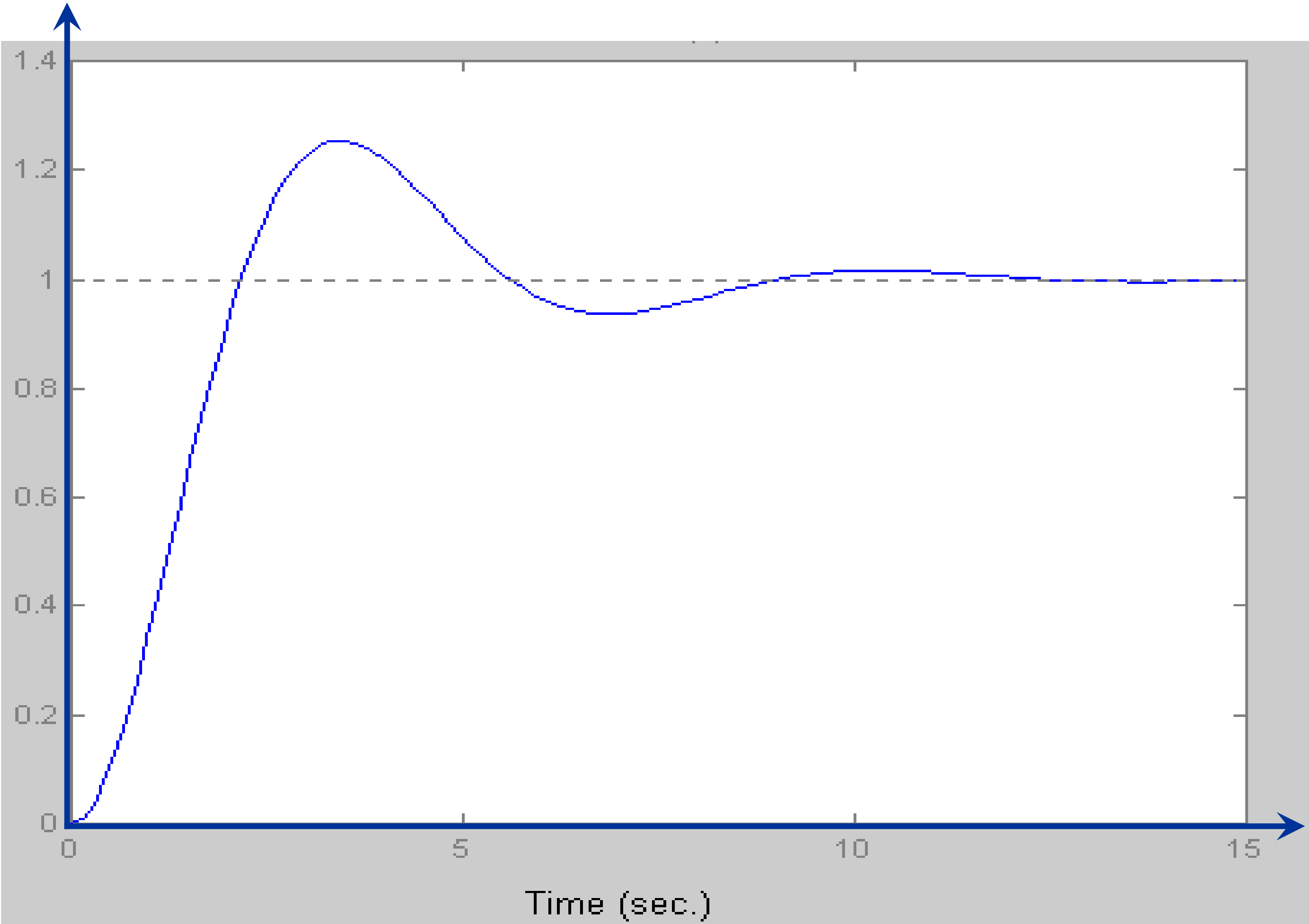
$$u(t)=a\cdot H(t)$$

$$x_{RESC}(t)=a\cdot K_p\cdot\left[1-e^{-\xi\cdot\omega_m\cdot t}\cdot\frac{sen(\omega_o\cdot t+\varphi)}{sen(\varphi)}\right]$$

$$\varphi=Arc\cos(\xi)$$

$$\omega_o=\omega_m\sqrt{1-\xi^2}$$

$$s=-\xi\cdot\omega_m\pm j\cdot\omega_o$$



1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
5
10
15
Time (sec.)

CASO | ξ | > 1 (Polos Reales Distintos)

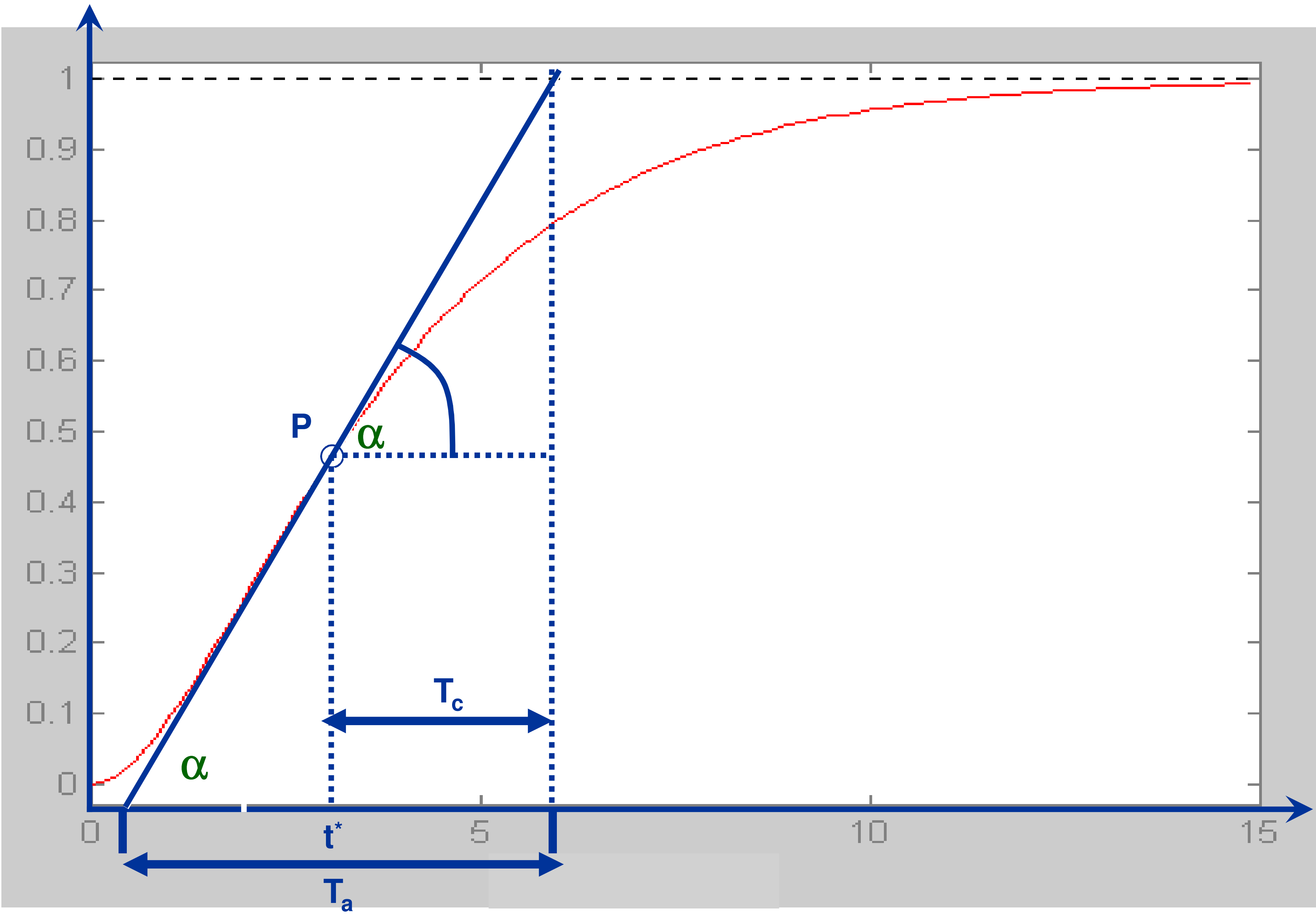
✓ *X* (RESC: Respuesta Escalón)

$$X(s)=\frac{K_p}{(T_1\cdot s+1)\cdot(T_2\cdot s+1)}\cdot U(s)\,;\;U(s)=\frac{a}{s}$$

- Aplicando fracciones parciales:

$$X(s)=K_p\cdot a\cdot\left[\frac{1}{s}+\left(\frac{T_1}{T_2-T_1}\right)\cdot\frac{T_1}{T_1\cdot s+1}-\left(\frac{T_2}{T_2-T_1}\right)\cdot\frac{T_2}{T_2\cdot s+1}\right]$$

$$x(t)=K_p\cdot a\cdot\left[1+\left(\frac{T_1}{T_2-T_1}\right)\cdot e^{-\frac{t}{T_1}}-\left(\frac{T_2}{T_2-T_1}\right)\cdot e^{-\frac{t}{T_2}}\right]$$


1
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
5
10
15
P
α
α
T_c
t^*
T_a

- Dado que P es punto de inflexión, se puede determinar una relación entre T_1, T_2 , t^* , T_a y T_b :

$$t^* = \frac{T_1 \cdot T_2}{T_1 - T_2} \ln\left(\frac{T_1}{T_2}\right)$$

Además :

$$\dot{x}(t^*) = \frac{K_p \cdot a}{T_a} \quad , \quad \dot{x}(t^*) = \frac{K_p \cdot a - x(t^*)}{T_c}$$

$$\therefore \quad T_c = T_1 + T_2$$

$$T_a = T_2 \cdot e^{\frac{t^*}{T_2}}$$

CASO |ξ| = 1 (Polos Reales Iguales)

✓ *X* (RESC: Respuesta Escalón)

$$X(s)=\frac{K_p}{(T\cdot s+1)^2}\cdot U(s);\; U(s)=\frac{a}{s}$$

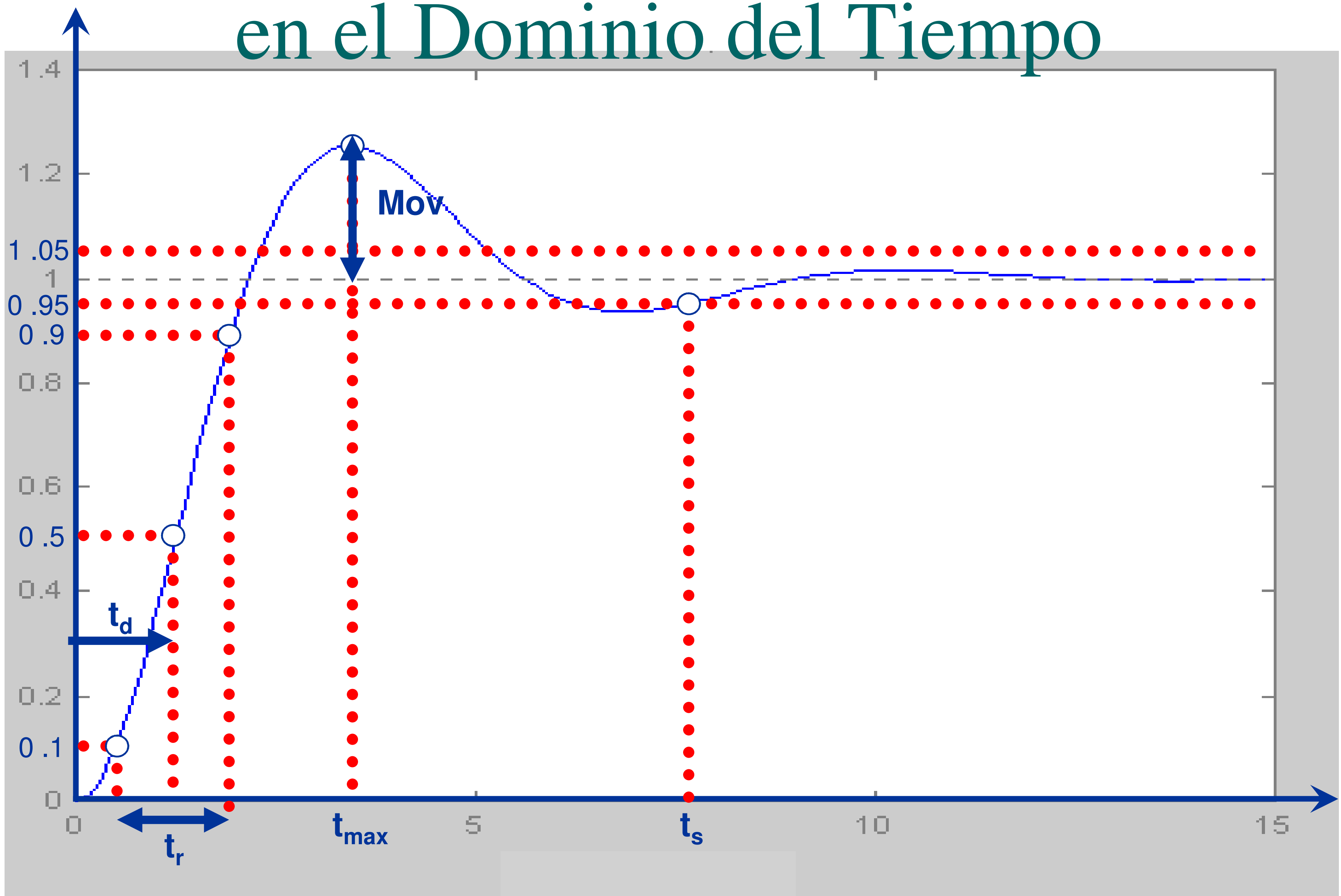
- Aplicando fracciones parciales:

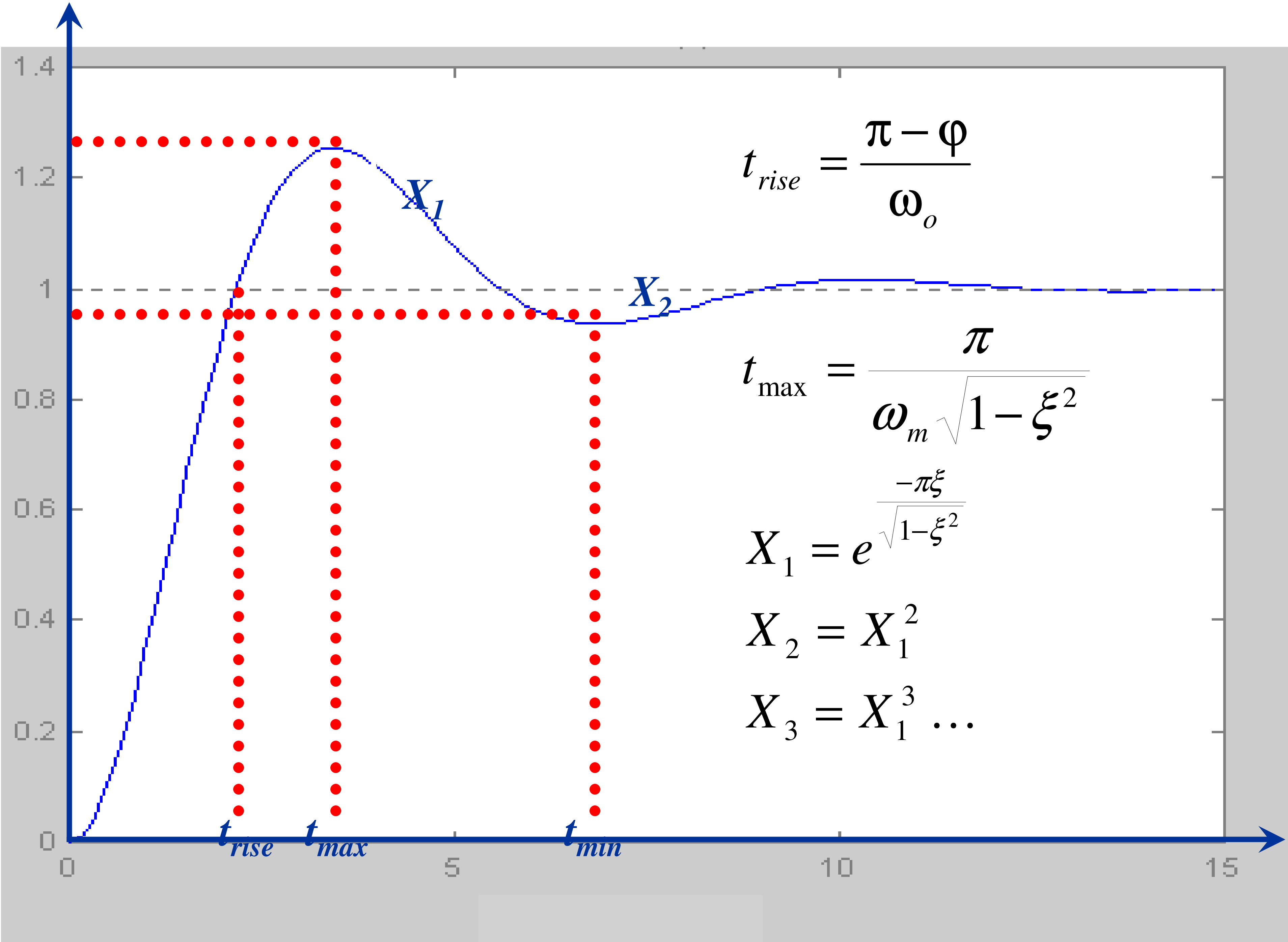
$$X(s)=K_p\cdot a\cdot\left[\frac{1}{s}-\frac{T}{T\cdot s+1}-\left(\frac{1}{T}\right)\cdot\frac{T^2}{(T\cdot s+1)^2}\right]$$

$$x(t)=K_p\cdot a\cdot\left[1-e^{-\frac{t}{T}}-\left(\frac{1}{T}\right)\cdot t\cdot e^{-\frac{t}{T}}\right]$$

$$t^*=T;\; T_a=T\cdot e;\; T_c=2\cdot T$$

Especificaciones en el Dominio del Tiempo





$$t_{rise} = \frac{\pi - \varphi}{\omega_o}$$

$$t_{\max} = \frac{\pi}{\omega_m \sqrt{1-\xi^2}}$$

$$X_1 = e^{\frac{-\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

$$X_2 = X_1^2$$

$$X_3 = X_1^3 \ \ldots$$

Especificaciones en el Dominio del Tiempo

Sobrenivel máximo Mov:

$$Mov = y_{max} - y_{ss}$$

$$Mov[\%] = \frac{Mov}{y_{ss}} * 100\%$$

y_{ss}: Salida en regimen permanente

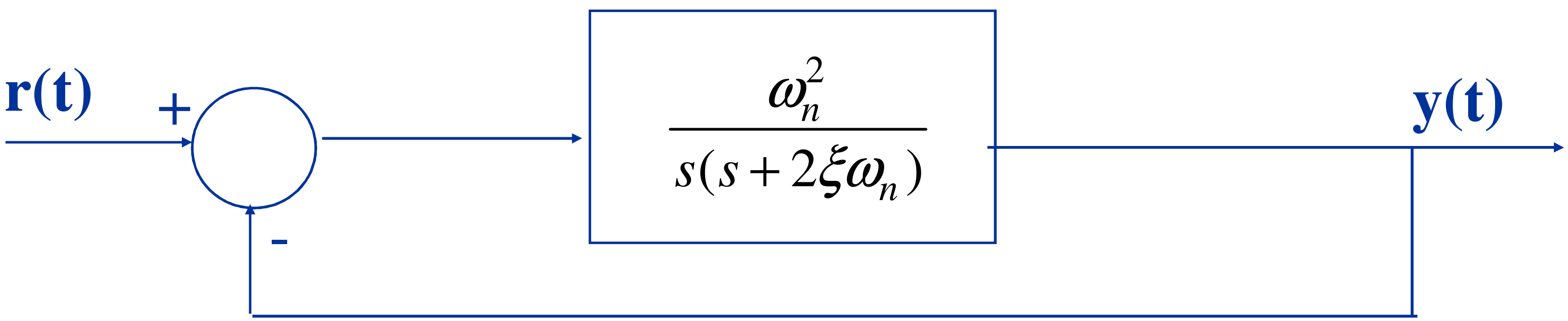
Retardo t_d: Tiempo requerido para alcanzar el 50% del valor final. (y_{ss}).

Especificaciones en el Dominio del Tiempo

Tiempo de subida t_r: Tiempo requerido en irse desde el 10% de y_{ss} al 90% de y_{ss}

Tiempo de estabilización (asentamiento) t_s: Tiempo requerido para que la respuesta este dentro del 5% alrededor de y_{ss}

Análisis de Sistemas de 2º orden



$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

ω_n: frecuencia natural ξ: factor de amortiguamiento

Análisis de Sistemas de 2º orden

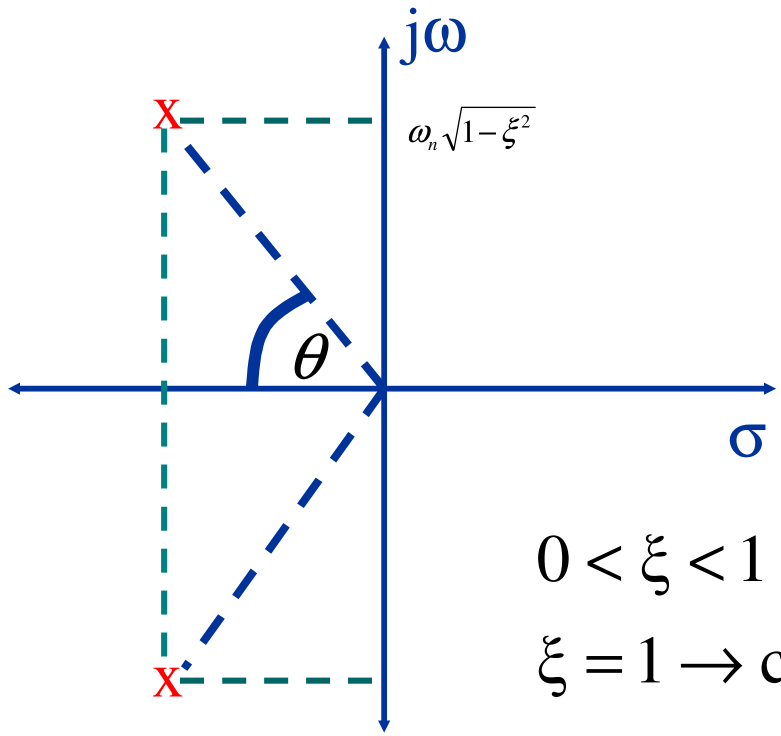
$$\text{Si: } r(t) = 1(t) \rightarrow R(s) = \frac{1}{s} \quad \Rightarrow Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}\frac{1}{s}$$

$$(*) \quad y(t) = 1 - \frac{e^{-\xi\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin\left(\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\,t + \cos^{-1}\xi\right)$$

Ecuación característica:

$$s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \Rightarrow \text{polos:} s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

Análisis de Sistemas de 2º orden



$$\theta = \cos^{-1}\xi$$

$$\cos\theta = \frac{\xi\omega_n}{\omega_n}$$

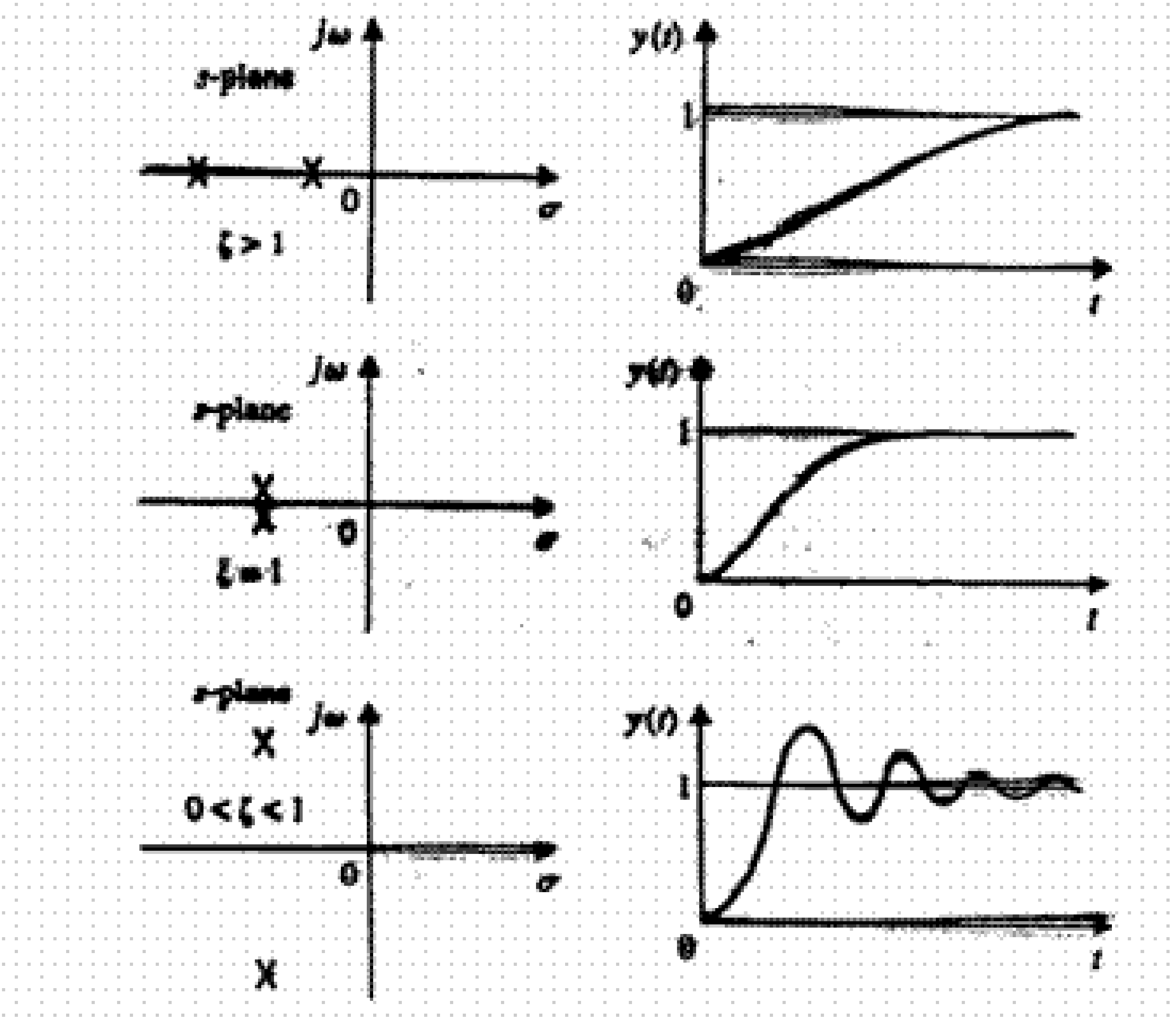
$0 < \xi < 1 \rightarrow$ subamortiguada (complejos)

$\xi = 1 \rightarrow$ criticamente amortiguuada (reales)

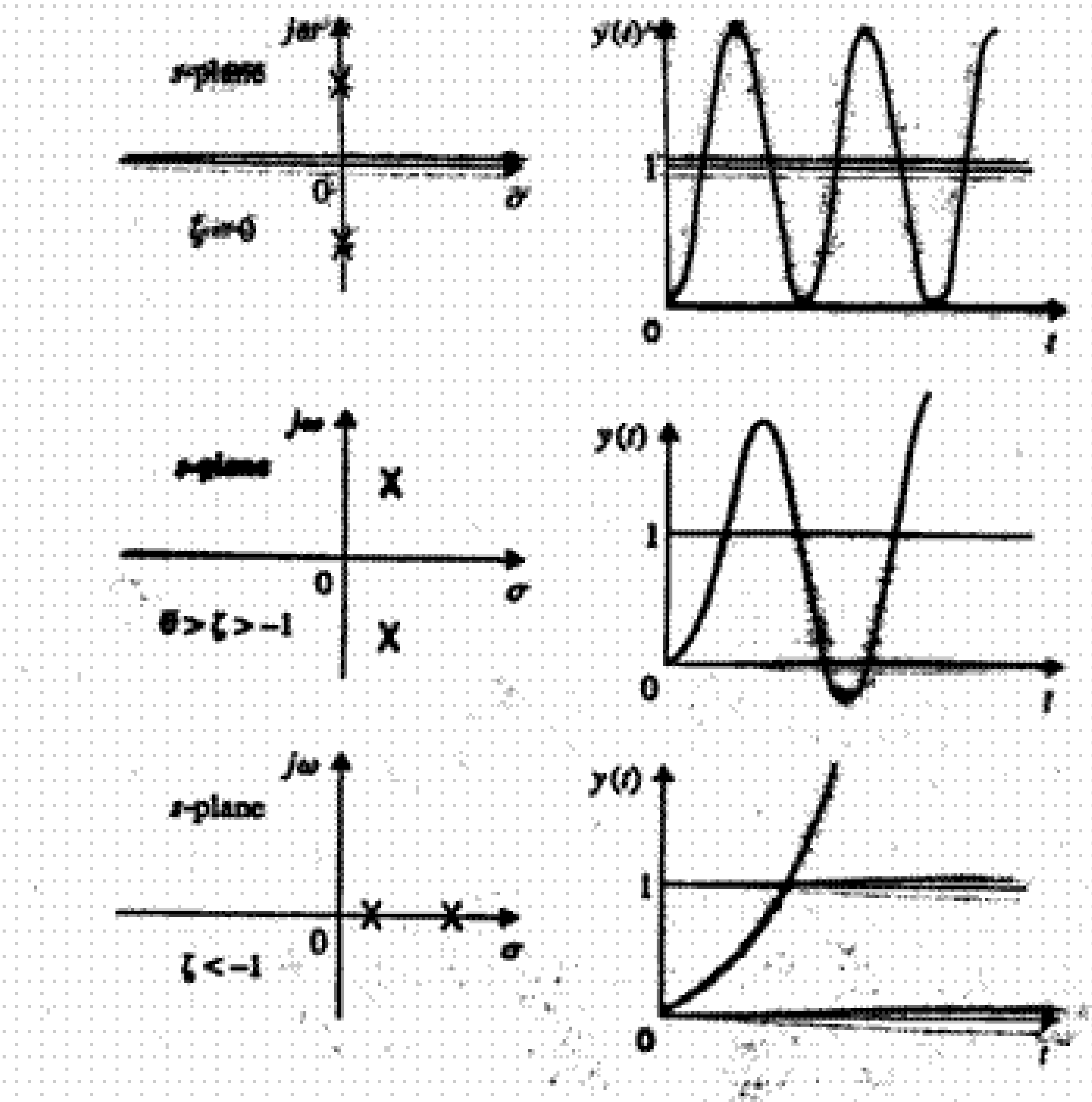
$\xi > 1 \rightarrow$ sobreamortiguada (reales $\neq_s$)

$\xi = 0 \rightarrow$ no amortiguada (imaginario)

$\xi < 0 \rightarrow$ amortiguación negativa (complejos)



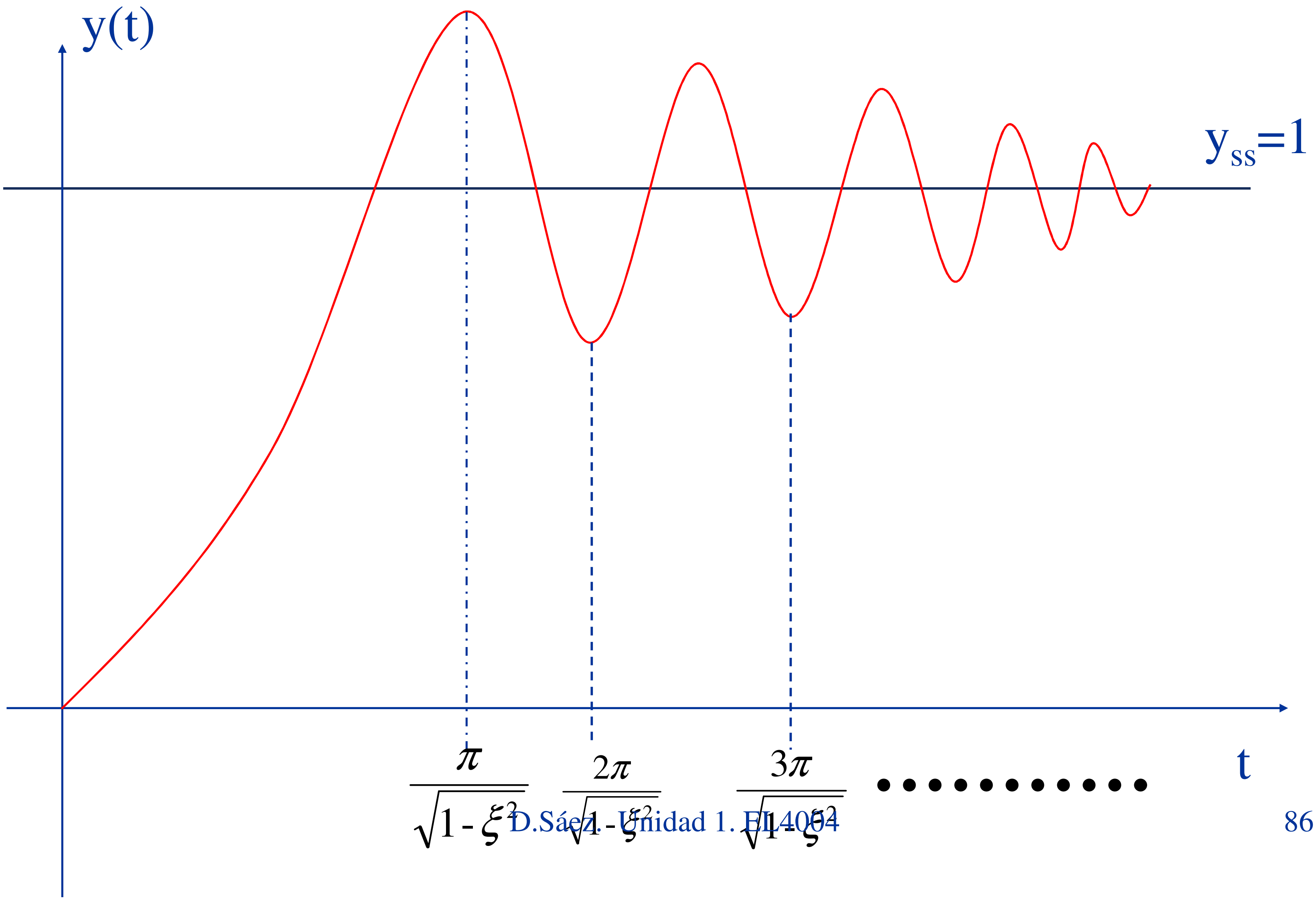
$j\omega$
s-plane
0
σ
$\zeta > 1$
$y(t)$
1
0
t
$j\omega$
s-plane
0
σ
$\zeta = 1$
$y(t)$
1
0
t
s-plane
$j\omega$
$0 < \zeta < 1$
0
σ
$y(t)$
1
0
t



jω
s-plane
0
σ
ζ = 0
y(t)
1
0
t
jω
s-plane
0
σ
0 > ζ > −1
y(t)
1
0
t
jω
s-plane
0
σ
ζ < −1
y(t)
1
0
t

Características Sistemas de 2º orden

Sobrenivel:



Características Sistemas de 2º orden

Sobrenivel máximo:

$$\frac{dy(t)}{dt} = 0 = \frac{\omega_n e^{-j\omega_n t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \left(\xi \sin(\omega t + \theta) - \sqrt{1-\xi^2} \cos(\omega t + \theta) \right)$$

$$= \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-j\omega_n t} \sin\left(\omega_n \sqrt{1-\xi^2}\, t \right) \quad t \geq 0$$

$$\omega_n \sqrt{1-\xi^2}\, t = n \quad n = 0,1,2...$$

Características Sistemas de 2º orden

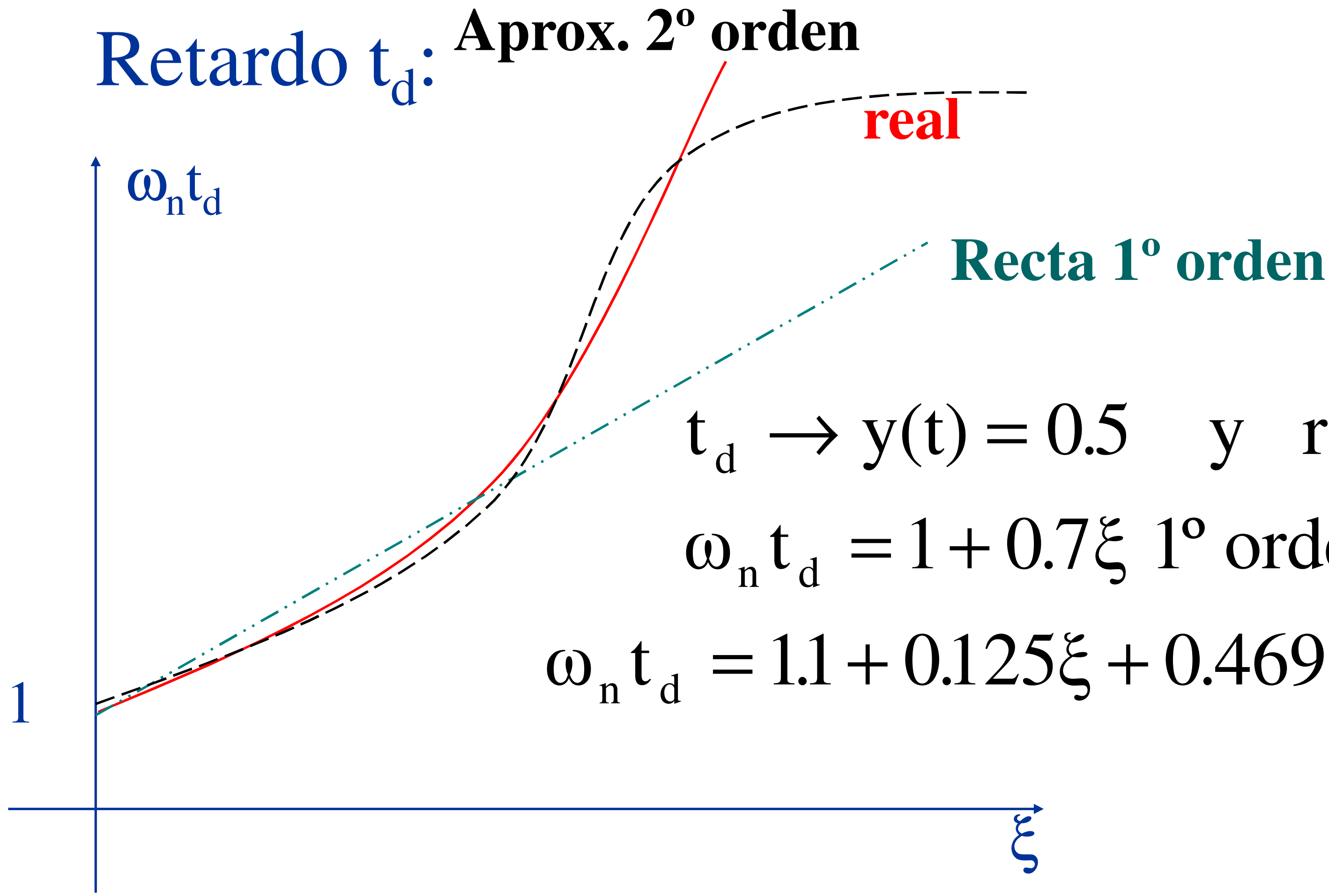
$$n = 1 \qquad t_{max} = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$$

$$y(t)\Big|_{t_{max}} = 1 + e^{-\frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}} = y_{max}$$

$$S_p = y_{max} - \underbrace{1}_{y_{ss}} = \boxed{e^{-\frac{\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \qquad \text{sólo depende de } \xi}$$

Características Sistemas de 2º orden

Retardo t_d:



$$t_d \rightarrow y(t) = 0.5 \quad y \quad \text{resolver para t}$$

$$\omega_n t_d = 1 + 0.7\xi \;\; 1^{o} \text{ orden}$$

$$\omega_n t_d = 1.1 + 0.125\xi + 0.469\xi^2 \;\; 2^{o} \text{ orden}$$

Características Sistemas de 2º orden

Aprox 1º orden

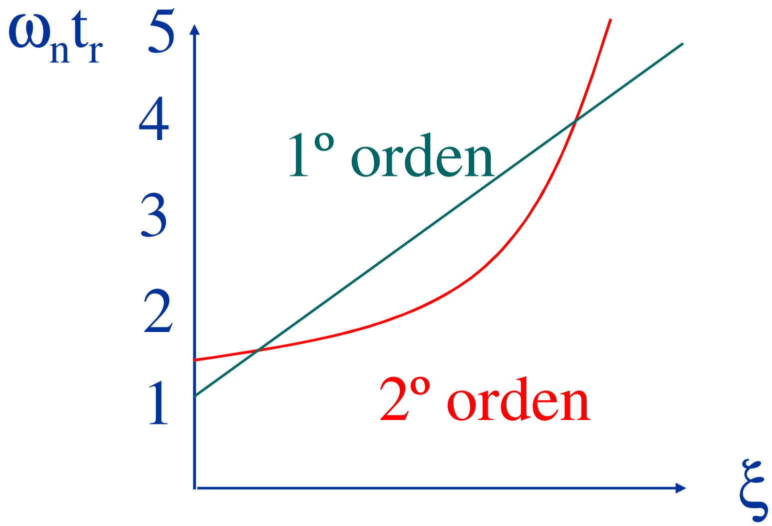
$$t_d \approx \frac{1 + 0.7\xi}{\omega_n} \qquad 0 < \xi < 1$$

Aprox 2º orden

$$t_d \approx \frac{1 + 0.125\xi + 0.469\xi^2}{\omega_n} \qquad 0 < \xi < 1$$

Características Sistemas de 2º orden

Tiempo de subida t_r $(0.1y_{ss} \rightarrow 0.9y_{ss})$:



$$\text{Aprox} \quad 1^o \quad \text{orden} \quad \omega_n t_r \approx 0.8 + 2.5\xi$$

$$\text{Aprox} \quad 2^o \quad \text{orden} \quad \omega_n t_r \approx 1 - 0.4167\xi + 2.917\xi^2$$

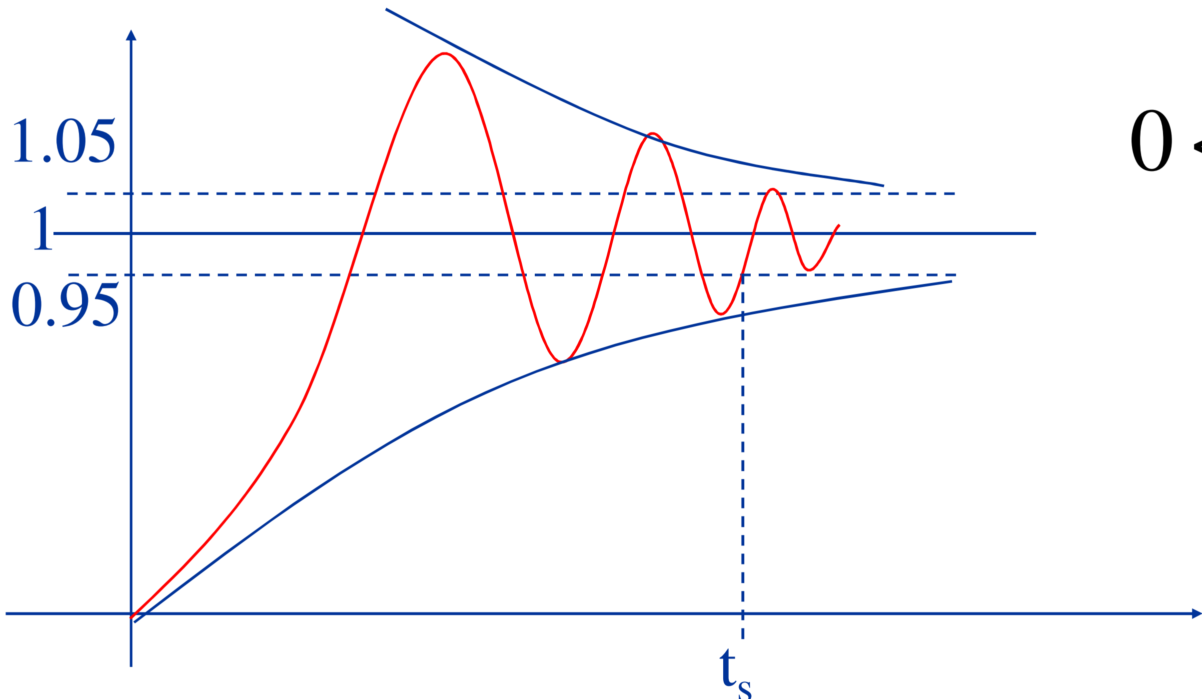
Características Sistemas de 2º orden

$$\text{Aprox 1º orden} \quad t_r = \frac{0.8 + 2.5\xi}{\omega_n} \qquad 0 < \xi < 1$$

$$\text{Aprox 2º orden} \quad t_r = \frac{1 - 0.4167\xi + 2.917\xi^2}{\omega_n} \qquad 0 < \xi < 1$$

Características Sistemas de 2º orden

Tiempo de estabilización



$$0 < \xi < 0.69$$

Para $0<\xi<0.69$, la respuesta ante un escalón unitario tiene sobre nivel máximo mayor del 5% y la respuesta entra a la banda ±5% por debajo o por arriba de la banda

Características Sistemas de 2º orden

Entonces, $0 < \xi < 0.69$

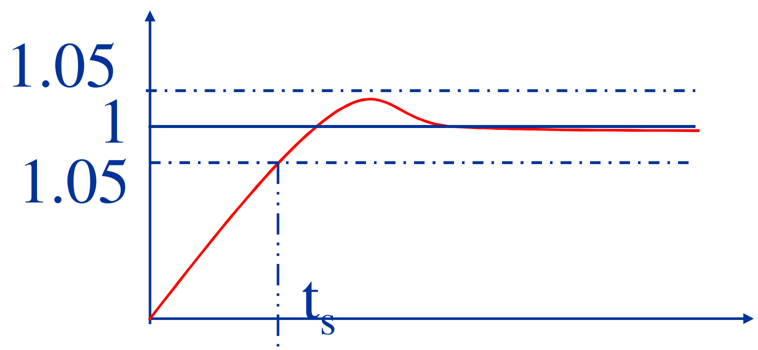
$$\boxed{\begin{aligned} y(t) &= 1.05 \approx 1 + \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t_s} = 1.05 \\ y(t) &= 0.95 \approx 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} e^{-\xi\omega_n t_s} = 0.95 \end{aligned}}$$

$$\omega_n t_s = -\frac{1}{\xi} \ln\left(0.05\sqrt{1-\xi^2}\right)$$

$$\xi \in [0;0.69] \Rightarrow \omega_n t_s \xi \in [3;3.32] \Rightarrow t_s = \frac{3.2}{\xi\omega_n}$$

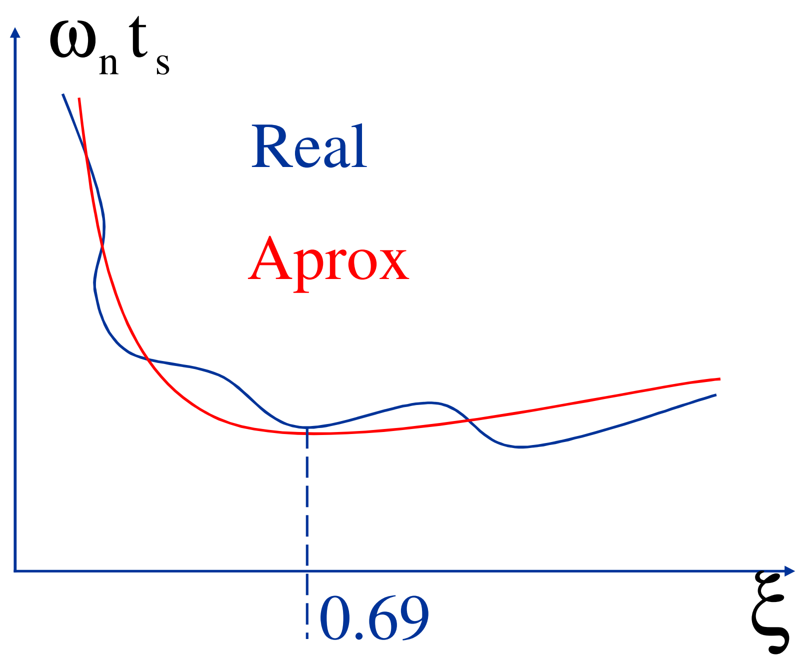
Características Sistemas de 2º orden

Para ξ>0.69, la respuesta al escalón unitario siempre estará por debajo del 5%



$$t_s \approx \frac{4.5\xi}{\omega_n} \quad \xi > 0.69$$

Características Sistemas de 2º orden

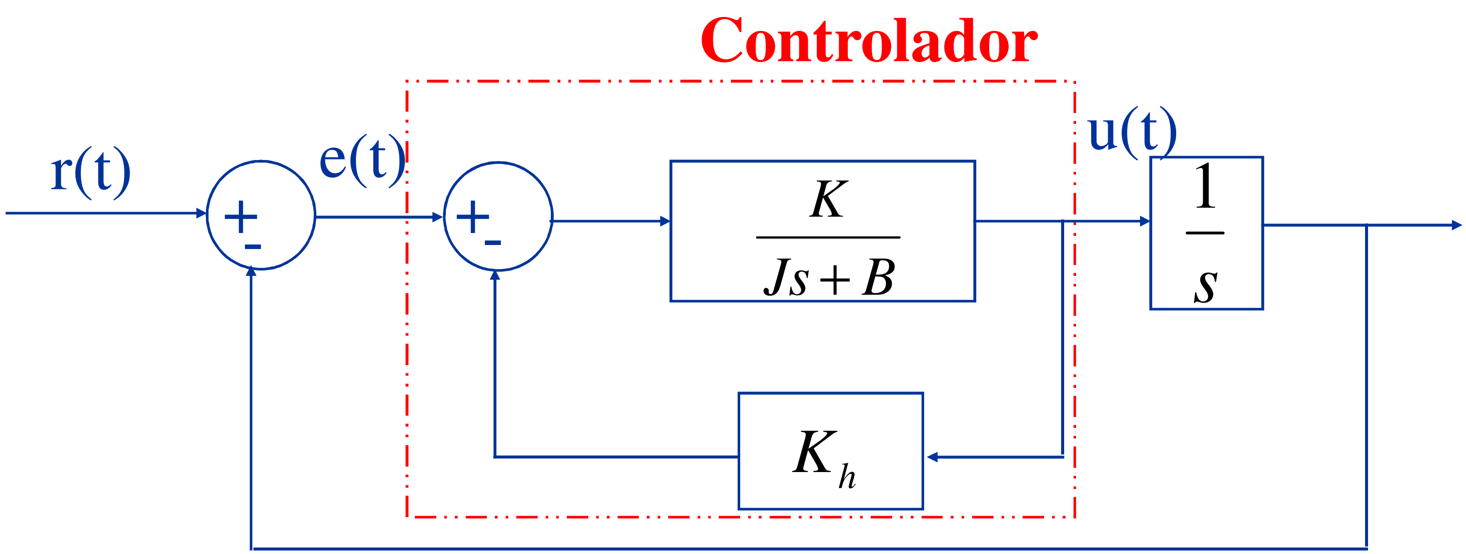


Para $\xi < 0.69$, t_s se reduce incrementando ω_n, manteniendo ξ

Para $\xi > 0.69$, t_s se reduce incrementando ω_n, manteniendo ξ

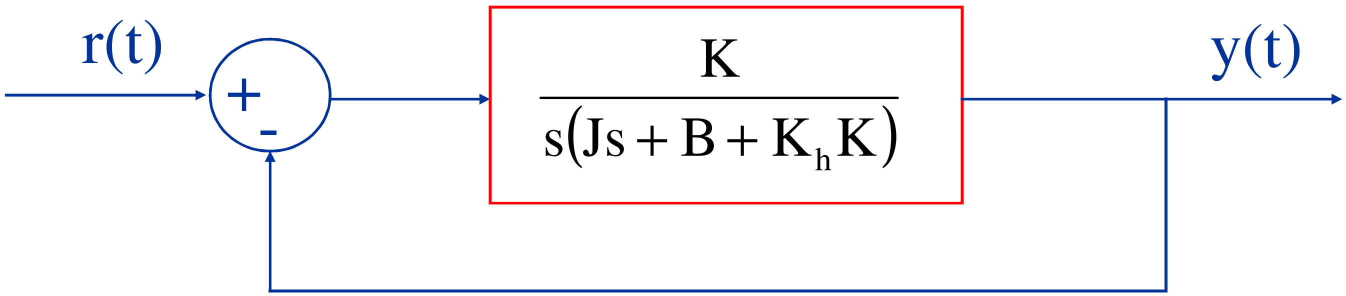
Análisis de Sistemas de 2º orden

Ejemplo: Sistema de seguimiento con realimentación de velocidad



$$U(s) = \frac{K}{Js+B}(E(s) - K_h U(s)) \qquad \frac{U(s)}{E(s)} = \frac{K}{Js+B+KK_h}$$

Análisis de Sistemas de 2º orden



$$\frac{Y(s)}{R(S)} = \frac{K}{Js^2 + Bs + KK_hs + K} = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

$$\Rightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{K}{J}} \qquad \xi = \frac{B + KK_h}{2\sqrt{KJ}}$$

Análisis de Sistemas de 2º orden

Determinar los valores de K y K_h para que el sobrenivel máximo = 0.2, tiempo máximo =1[s]. Con los valores de K y K_h, obtenga, el tiempo subida y tiempo de estabilización. J = 1 Kg/m^2 B=1 (N-m)/(rad-seg)

$$S_p = e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} = 0.2 \rightarrow \xi = 0.456$$

$$t_{max} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}} = 1 \rightarrow \omega_n = 3.53$$

Análisis de Sistemas de 2º orden

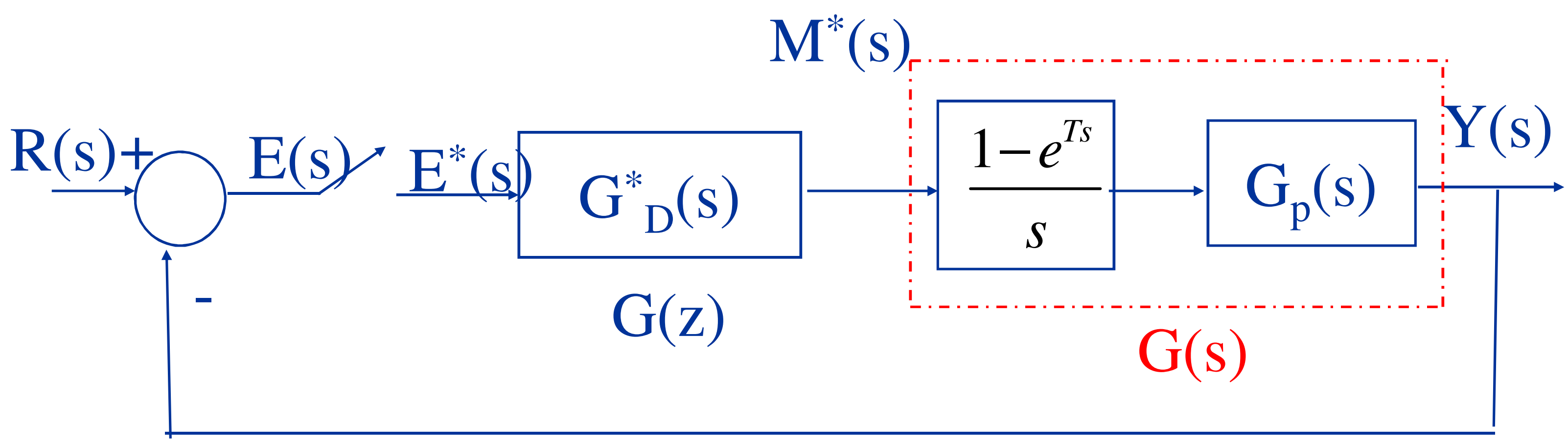
$$\omega_n = \sqrt{\frac{K}{J}} \rightarrow K = 12.5[N - m]$$

$$\xi = \frac{B + KK_h}{2\sqrt{KJ}} \rightarrow K_h = 0.178[s]$$

Tiempo de estabilización $t_s = \dfrac{3.2}{\xi\omega_n} \approx 1.86[s]$

Tiempo de subida $t_r = \dfrac{0.8 + 2.5\xi}{\omega_n}$

Sistemas de Control Realimentado: Tiempo Discreto



Sistemas de Control Realimentado: Tiempo Discreto

$$G(s) = \frac{1 - e^{-Ts}}{s} G_p(s)$$

$$Y(s) = G(s) G_D^*(s) E^*(s)$$

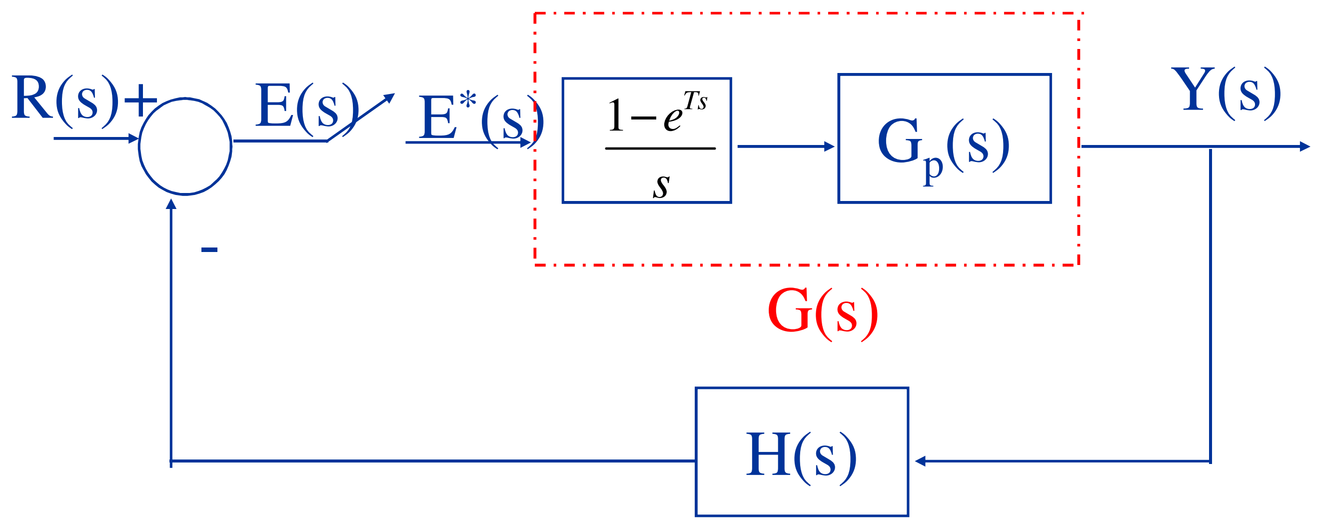
$$Y(z) = G(z) G_D(z) E(z)$$

$$Y(z) = G(z) G_D(z) \left(R(z) - Y(z) \right)$$

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G(z) G_D(z)}{1 + G(z) G_D(z)}$$

$$\frac{E(z)}{R(z)} = \frac{1}{1 + G(z) G_D(z)}$$

Sistemas de Control Realimentado: Tiempo Discreto



Sistemas de Control Realimentado: Tiempo Discreto

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1+G(z)H(z)}$$

$$\frac{E(z)}{R(z)} = \frac{1}{1+G(z)G_D(z)} \rightarrow E(z) = \frac{R(z)}{1+G(z)G_D(z)}$$

Especificaciones en el Dominio del Tiempo para Sistemas Discretos

- Error en régimen permanente:

$$e_{ss}^{*} = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{K\to\infty} e(KT) = \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})E(z)$$

- Para un sistema realimentado:

$$e_{ss}^{*} = \lim_{z\to 1}(1 - z^{-1})\frac{R(z)}{1 + G(z)H(z)}$$

Especificaciones en el Dominio del Tiempo para Sistemas Discretos

- Constante de error estático de posición (K_p^*)

$$R(z) = \frac{z}{z-1}; \quad \text{Escalón} = \frac{1}{1-z^{-1}}$$

$$e_{ss}^* = \lim_{z\to 1}(1-z^{-1})\frac{1}{(1-z^{-1})}\frac{1}{1+G(z)H(z)}$$

$$\text{Se define } K_p^* = \lim_{z\to 1} G(z)H(z) \rightarrow e_{ss}^* = \frac{1}{1+K_p^*}$$

Especificaciones en el Dominio del Tiempo para Sistemas Discretos

- Constante de error estático de velocidad (K_v^*)

$$R(z) = \frac{Tz^{-1}}{\left(1 - z^{-1}\right)^2}; \quad \text{Rampa unitaria}$$

$$e_{ss}^* = \lim_{z \to 1} (1 - z^{-1}) \frac{1}{1 + G(z)H(z)} \frac{Tz^{-1}}{\left(1 - z^{-1}\right)^2}$$

$$= \lim_{z \to 1} \frac{Tz^{-1}}{\left(1 - z^{-1}\right)} \times \left(\frac{1}{1 + G(z)H(z)} \right)$$

Especificaciones en el Dominio del Tiempo para Sistemas Discretos

- Constante de error estático de velocidad (K_v*)

$$= \lim_{z \to 1} \frac{T}{\left(1 - z^{-1}\right)} \frac{1}{G(z)H(z)}$$

$$\text{Se define } K_V^* = \frac{1}{T} \lim_{z \to 1} \left(1 - z^{-1}\right) G(z)H(z)$$

$$\rightarrow e_{ss}^* = \frac{1}{K_V^*}$$

Especificaciones en el Dominio del Tiempo para Sistemas Discretos

- Constante de error estático de aceleración (K_a^*)

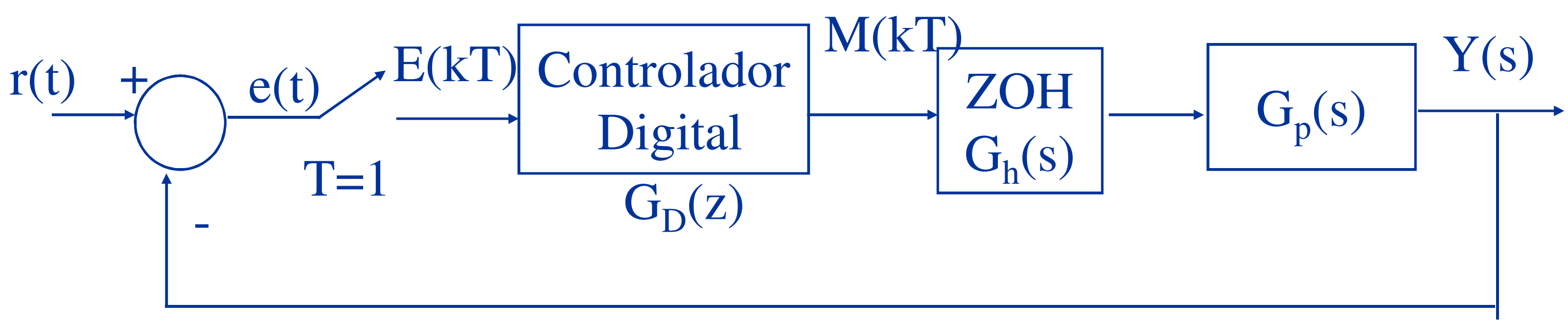
$$R(z) = \frac{T^2 z(z+1)}{(z-1)^3}; \quad \text{Parábola}$$

$$\text{Se define } K_a^* = \frac{1}{T^2} \lim_{z \to 1} (z-1)^2 G(z)H(z)$$

$$\to e_{ss}^* = \frac{1}{K_a^*}$$

Especificaciones en el Dominio del Tiempo para Sistemas Discretos

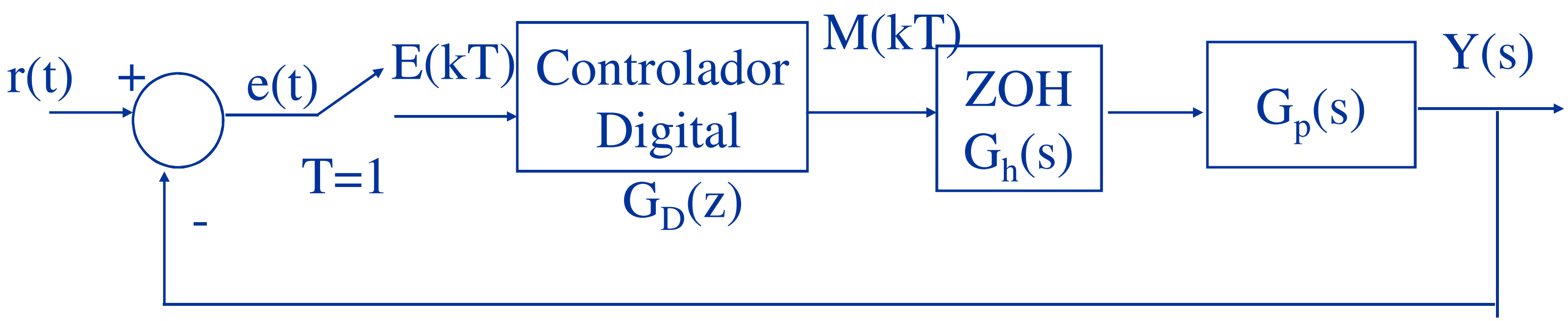
Ejemplo: Calcular Func. Transf. Discreta.



$$G_p(s) = \frac{1}{s(s+1)} \qquad G_D(z) = \frac{1.4 - 1.4z^{-1} + 0.2z^{-2}}{1 - z^{-1}}$$

$$G_h(s) = \frac{1 - e^{-s}}{s} \qquad T = 1$$

Especificaciones en el Dominio del Tiempo para Sistemas Discretos

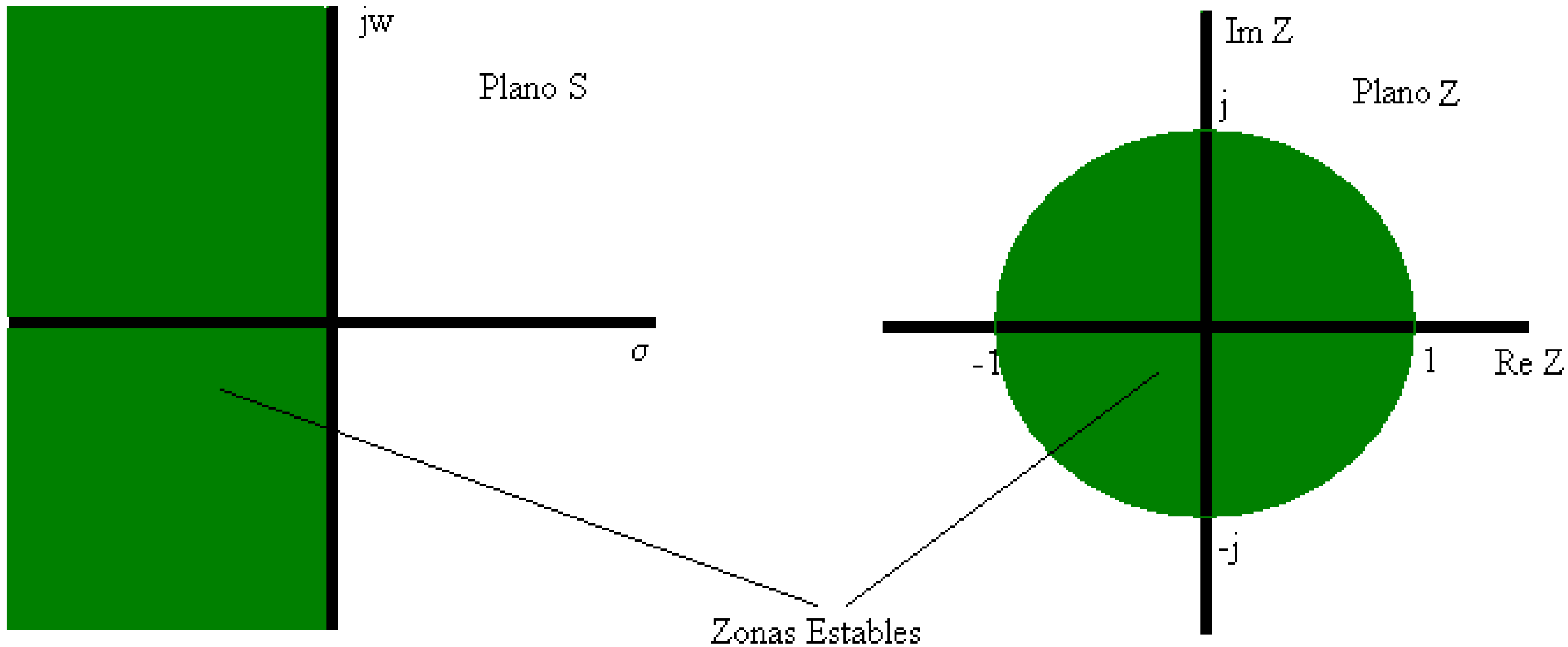


$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{G(z)G_D(z)}{1+G(z)G_D(z)}$$

$$= \frac{0.5152z^{-1} - 0.1452z^{-2} - 0.2963z^{-3} + 0.0528z^{-4}}{1 - 1.8528z^{-1} + 1.5906z^{-2} - 0.6642z^{-3} + 0.0528z^{-4}}$$

Mapeo entre Plano S y Plano Z

Transformacion: $z = e^{sT}$, Plano $s = \sigma + j\omega$



Mapeo entre Plano S y Plano Z

Transformacion: $z = e^{sT}$, Plano $s = \sigma + j\omega$

1) $s = j\omega \leftrightarrow |z| = 1$ $\quad z = e^{j\omega T}$

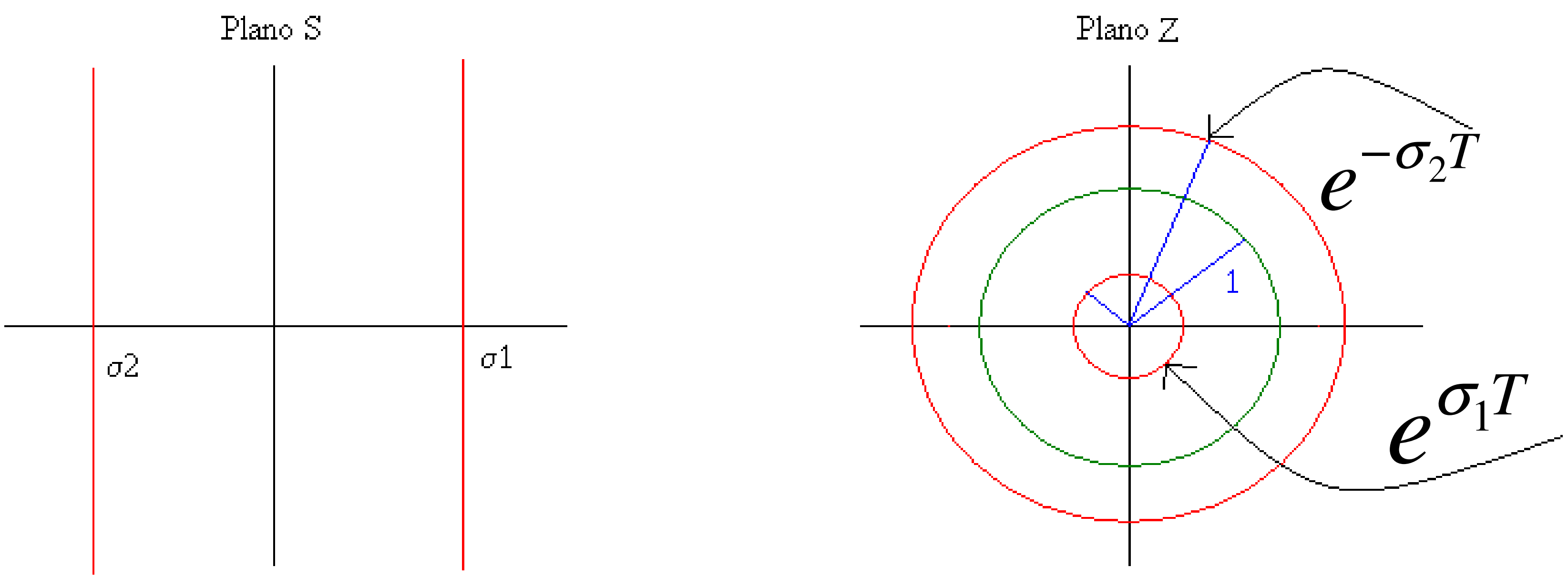
2) $s = 0 \leftrightarrow z = 1$ $\quad z = e^{0T} = 1$

3) $s = -\infty \leftrightarrow z = 0$ $\quad z = e^{-\infty T} = 0$

4) $\sigma < 0 \leftrightarrow |z| < 1$ $\quad$ Zona estable en verde

Mapeo entre Plano S y Plano Z

Ejemplos:



–

Polos Discretos para Sistemas de Segundo Orden

- Polos dominantes para sistema continuo

$$s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$$

- Con $z = e^{Ts}$, los polos correspondientes en el plazo z son:

$$z_{1,2} = \exp\left[T\left(-\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\right)\right]$$

Polos Discretos para Sistemas de Segundo Orden

- Entonces, los polos discretos son:

$$|z| = e^{-T\xi\omega_n}$$

$$\angle z = T\omega_n \sqrt{1-\xi^2}\,(\text{rad})$$

Anexo: Repaso de Linealización, Transformada de Laplace y Transformada Z.

Elaborado por:
D. Sáez & M. Orchard

Sistemas

- No Lineal.
- Estáticos (no depende del tiempo).
- En tiempo continuo (Ec. Diferencial).

- Lineal.
- Dinámico (depende del tiempo).
- En tiempo discreto (Ec. de diferencia).

Representación de Sistemas Dinámicos

- Modelo: Descripción cualitativa o cuantitativa de un proceso o sistema.

➢ ***Clases de Modelos Cuantitativos.***

- Tiempo discreto o continuo
- Variable discreta o continua
- Lineales o No-lineales
- Determinísticos o Estocásticos
- Parámetros concentrados o distribuidos

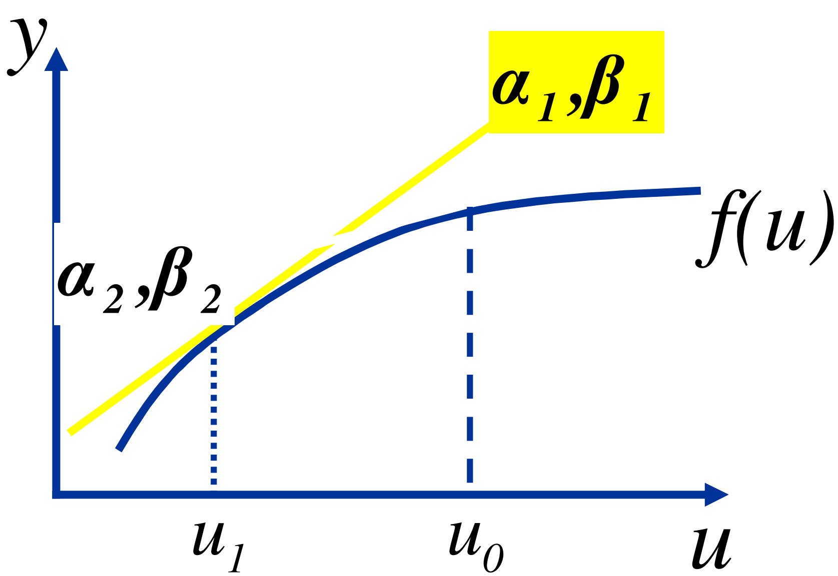
Ej: Modelo circuito serie o paralelo RLC, sistema mecánico masa-amortiguador-resorte, sistemas hidráulicos, térmicos , analogías.

➢ *Sistemas Lineales y Linealidad*

$$\left.\begin{array}{l} u_1 \Rightarrow y_1 \\ u_2 \Rightarrow y_2 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} u_1+u_2 \Rightarrow y_1+y_2 \\ K\bullet u_1 \Rightarrow K\bullet y_1 \end{array}$$

- En general los sistemas no son lineales, luego se usan Modelos Adaptables

$$y = \alpha \cdot u + \beta ; \qquad \alpha , \beta \quad \text{variables}$$



$$y = f(u)$$
$$y \approx f(u_0) + f'(u_0)\cdot(u - u_0)$$

- Si el sistema es descrito por la expresión:

$$\dot{x} = f(x(t), u(t))$$

- Y se conoce un punto (x_0, u_0) tal que:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \delta x(t) \\ u(t) &= u_0 + \delta u(t) \end{aligned}\right\} \quad f(x_0, u_0) = 0$$

- Entonces puede afirmarse que, en el entorno de $(x_{0,} u_0)$ se cumple:

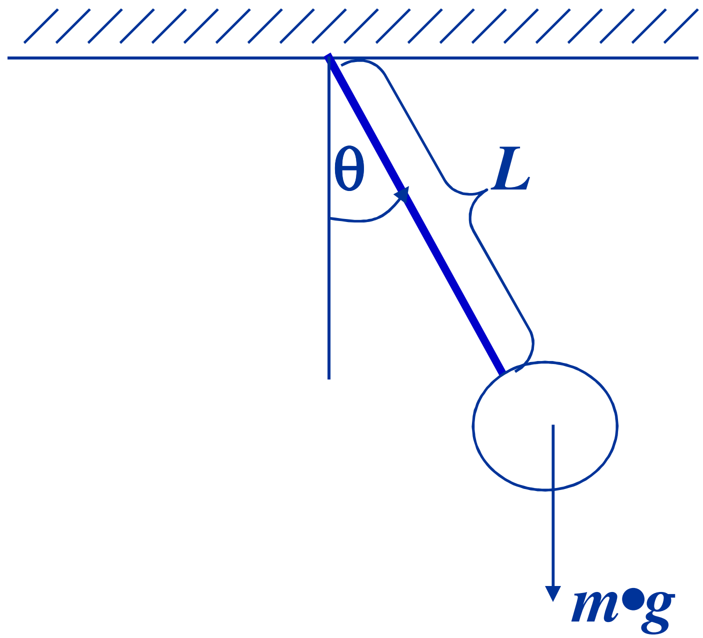
$$\dot{x}_0 + \delta\dot{x}(t) = f(x_0 + \delta x(t), u_0 + \delta u(t))$$

$$\dot{x}_0 + \delta\dot{x}(t) = f(x_0, u_0) + \frac{\partial f}{\partial x}\bigg|_{x_0, u_0} \delta x(t) + \frac{\partial f}{\partial u}\bigg|_{x_0, u_0} \delta u(t)$$

- En general, siempre es posible obtener un modelo lineal del sistema de la forma:

$$\delta\dot{x}(t) = A \cdot \delta x(t) + B \cdot \delta u(t)$$

- Ejemplo Sistema Mecánico: Péndulo



$$E = -m \cdot g \cdot L \cdot cos(\theta) + \frac{1}{2} m \cdot L^2 \cdot \dot{\theta}^2$$

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{L} \cdot sen(\theta) = 0$$

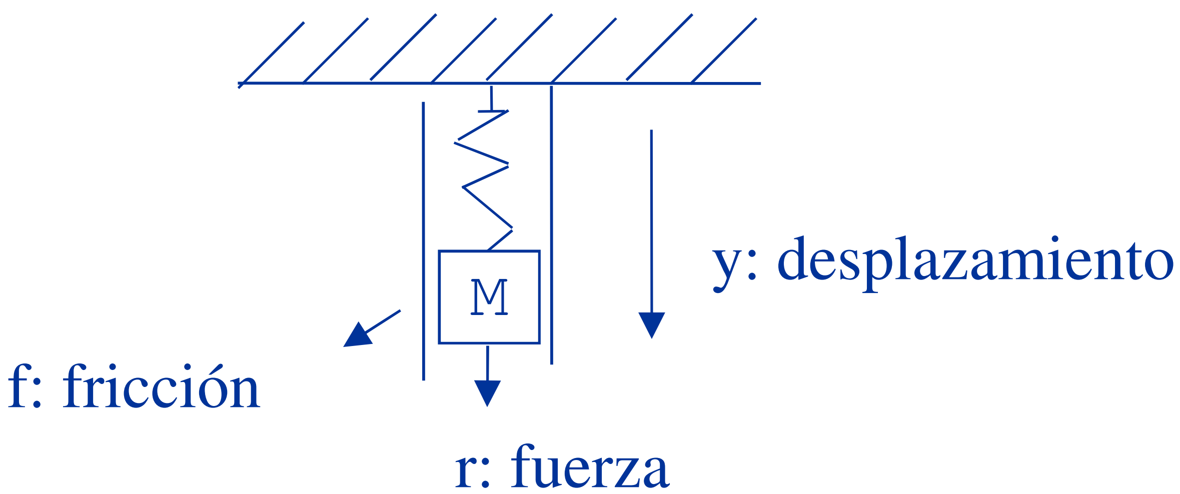
Representantes de Sistemas Lineales Dinámicos

- Ecuaciones diferenciales o ecuaciones de diferencia.
- Función de transferencia (Laplace o Transforma Z).
- Representación en variables de estado continua o discreta

Ejemplo

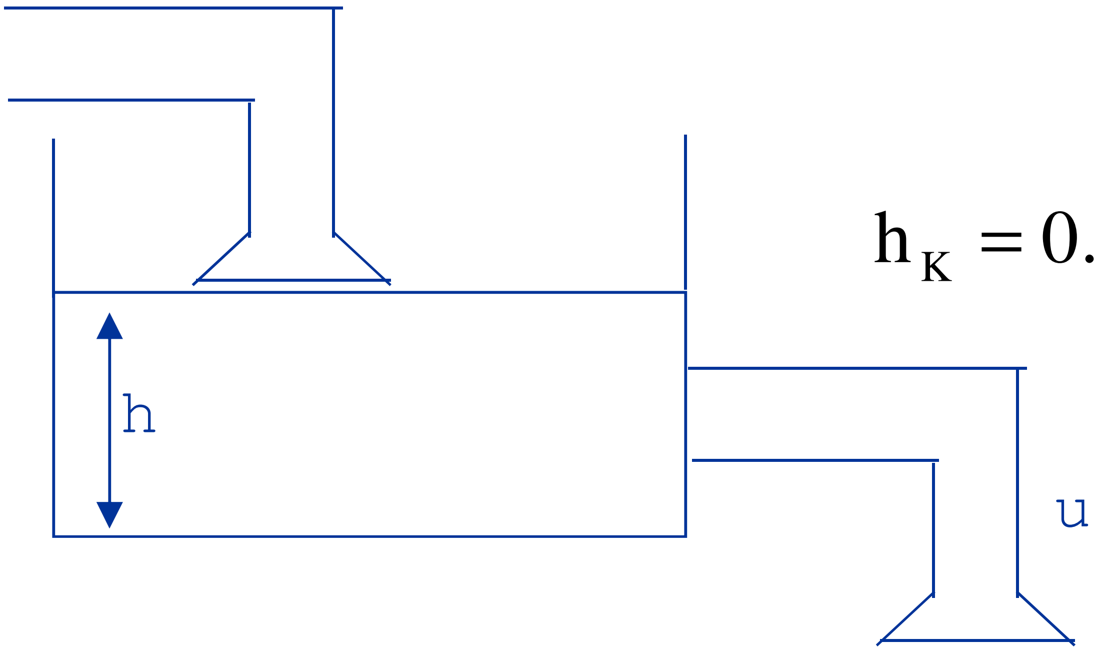
- Sistema Amortiguador- Resorte-Masa.

$$M\frac{d^2y(t)}{dt}+f\frac{dy(t)}{dt}+Ky(t)=r(t)$$



Ejemplo

Estanque de nivel



$$h_K = 0.9h_{K-1} + 0.2u_{K-1}$$

Transformada de Laplace

Si f(t) es una función lineal del fenomeno estudiado, la transformación de Laplace F(s) existirá si:

$$\int_0^{\infty} \left| f(t) \right| e^{-\sigma t} dt < \infty$$

con σ real positivo.

Transformada de Laplace

- Tranformado de Laplace para f(t)

$$F(s) = \int_0^{\infty} \left| f(t) \right| e^{-st} dt = L\{f(t)\}$$

- Transformada inversa de Laplace

$$f(t) = \tfrac{1}{2\Pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(s) e^{st} ds$$

Ejemplos

$f(t)$	$F(s)$
escalón	$\frac{1}{s}$
e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
sin wt	$\frac{\omega}{s+\omega^2}$
$e^{-at} f(t)$	$F(s+a)$
$\delta(t)$	1
$\int_0^t dt$	$\frac{1}{s}$

Transformada de Laplace

- Ecuaciones diferenciales

$$L\left(\frac{d^{K}f(t)}{dt}\right)=s^{K}F(s)-s^{K-1}f(0^{+})-s^{K-2}f(0^{+})-\ldots.-f^{(K-1)}(0^{+})$$

Ejemplo

$$M\frac{d^2y(t)}{dt}+f\frac{dy(t)}{dt}+Ky(t)=r(t)$$

$$M\left(s^2y(s)-sy(0^+)-s\frac{dy(0^+)}{dt}\right)+f(sy(s)-y(0^+)+Ky(s)=R(s)$$

$$r(t)=0 \quad y(0^+)=y_0 \quad \frac{dy(0^+)}{dt}=0$$

Ejemplo

$$Ms^2y(s) - Msy_0 + fsy(s) - fy_0 + Ky(s) = 0$$

$$y(s) = \frac{(Ms + f)y_0}{Ms^2 + fs + K} = \frac{q(s)}{p(s)}$$

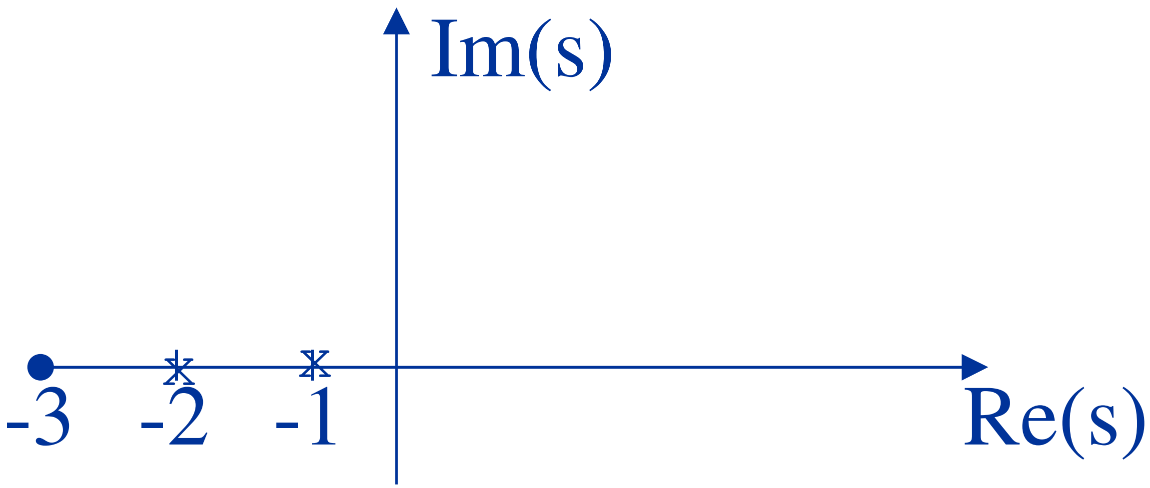
p(s): Ecuación característica. Raices o polos del sistema. Las raices de este polinomio permiten determinar las características de la respuesta dinámica del sistema

q(s): Ceros del sistema

Ejemplo

Ej: $$y(s) = \frac{(s+3)}{(s+1)(s+2)} y_0 \qquad \frac{K}{M} = 2 \qquad \frac{f}{M} = 3$$

Ubicación de polos y ceros en plano s.



Función de Transferencia

- Relación entre la transformación de Laplace de la variable de salida y la transformación de Laplace de la variable de entrada, suponiendo todas concluciones iniciales iguales a cero

$$G(s) = \frac{y(s)}{U(s)}$$

Función de transferencia

Ejemplo

Masa-Resorte

$$M^{2}y(s)+fsy(s)+Ky(s)=r(s)$$

$$\frac{y(s)}{r(s)}=\frac{1}{Ms^{2}+fs+K}$$

Transformada Z

- Definición:

$$X(z) = Z\{x(t)\} = Z\{x(kT)\} = Z\{x^*(k)\}$$

$$Z\{x^*(k)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x^*(k) \cdot z^{-k}$$

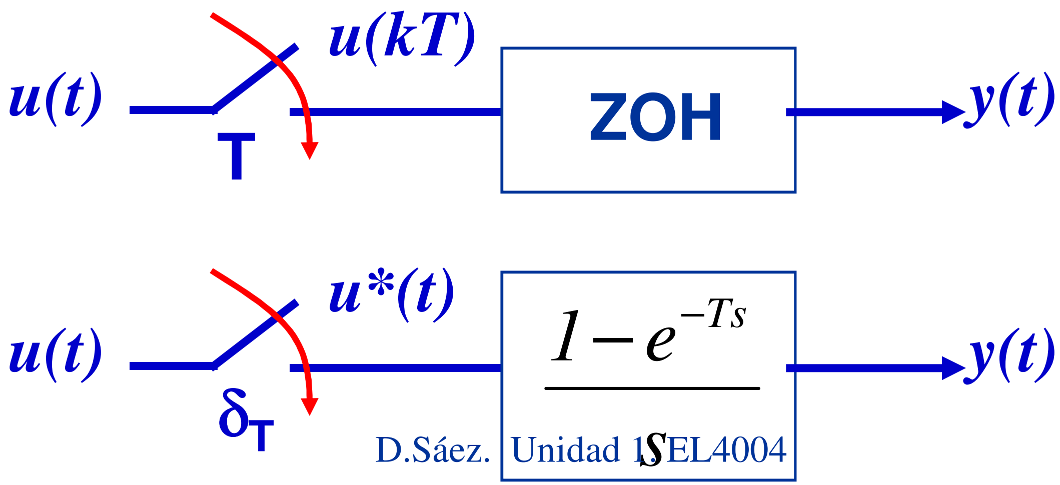
$$X(z) = x(0) + x(T) \cdot z^{-1} + x(2T) \cdot z^{-2} + \ldots x(kT) \cdot z^{-k} + \ldots$$

- La definición de Transformada Z supone la existencia de un muestreo ideal (tren de impulsos) para *x(t)*, es decir:

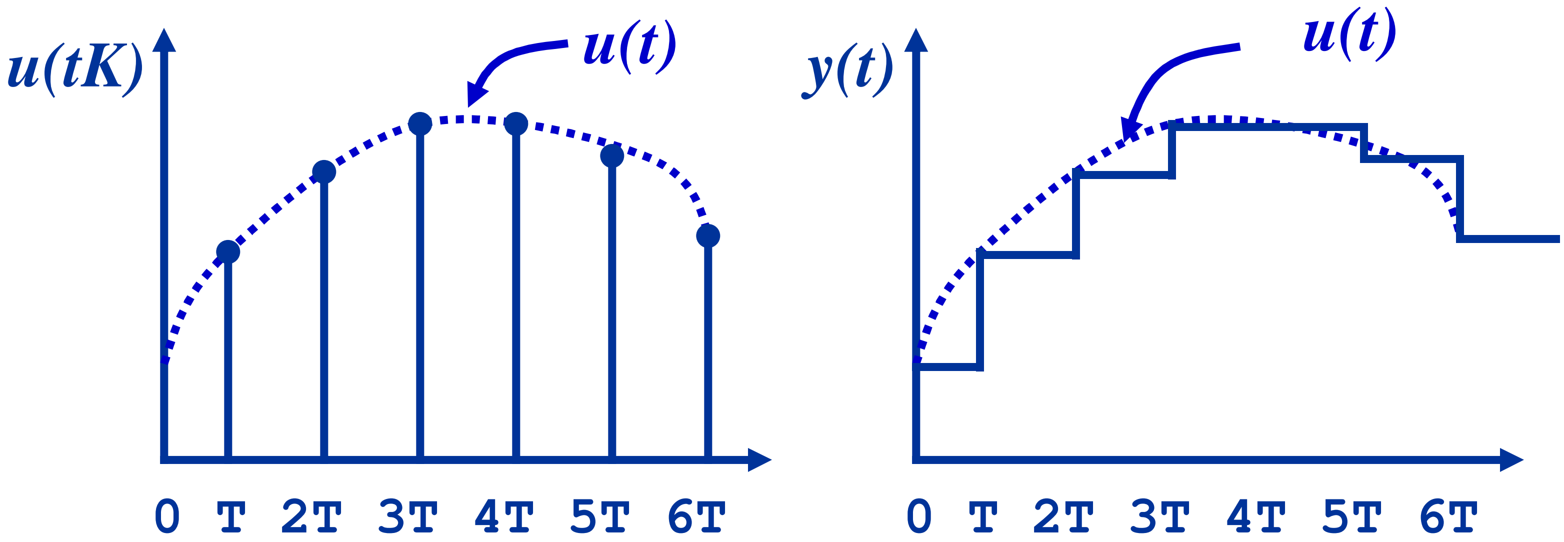
$$x^*(k) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \cdot \delta(t - kT)$$

MUESTREO DE UNA SEÑAL ANÁLOGA

- Implementar un muestreo ideal en un sistema de control digital es imposible, puesto que los sistemas reales son de tiempo continuo.
- Generalmente, el valor muestreado de cada señal se mantiene constante hasta obtener una nueva muestra.
- En ese caso, se dice que la señal se mantiene mediante un "mantenedor de orden cero" (zero-order hold).

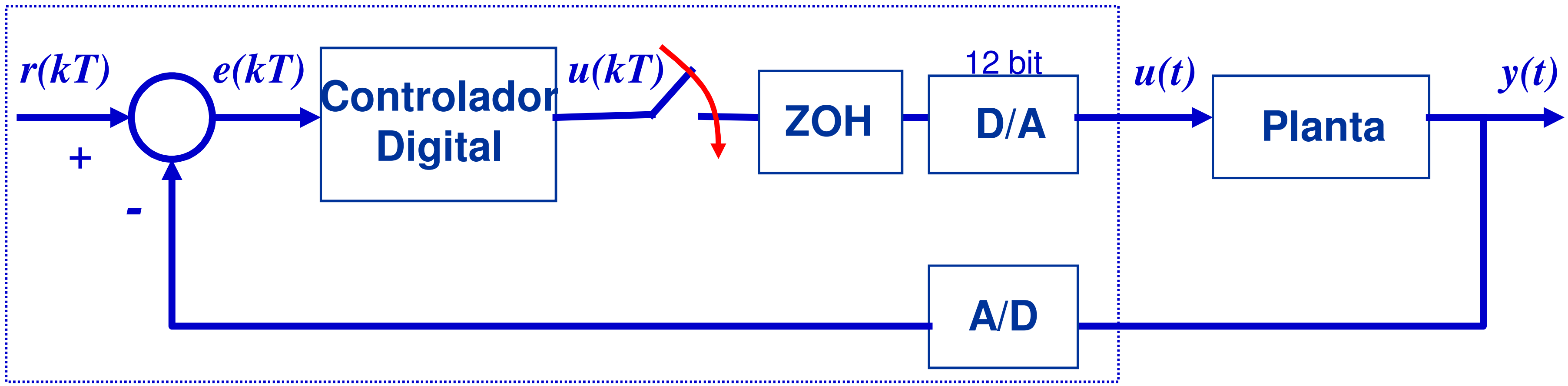


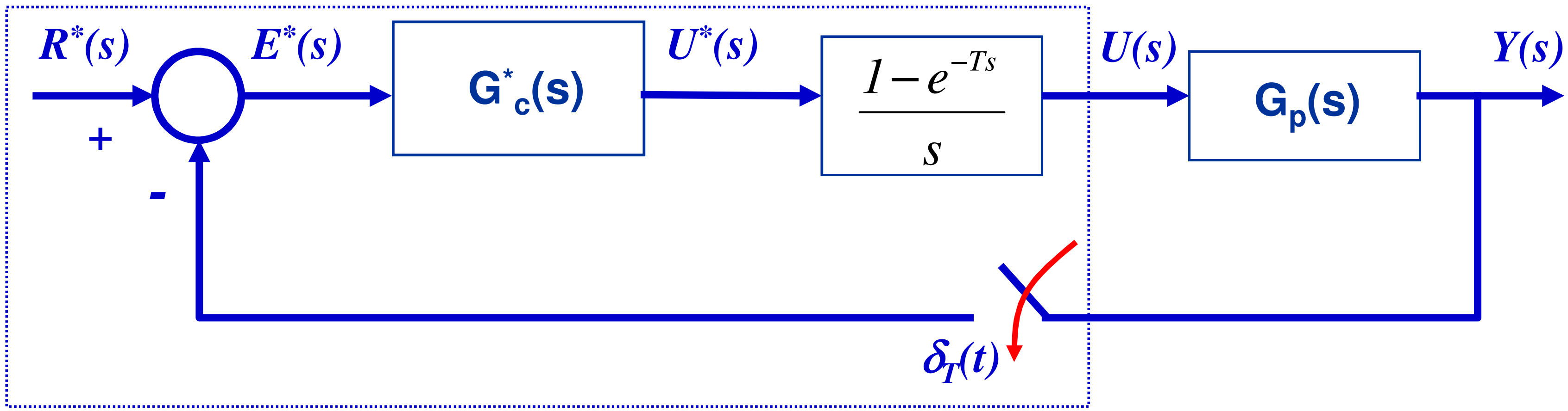
- Las señales de entrada y salida al ZOH se muestran a continuación:



- Los Controladores Digitales deben considerar la influencia que representa la adición de esta función de transferencia (ZOH) en el lazo realimentado.

FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA DISCRETA





- De acuerdo a la figura anterior, la función de transferencia G(z) del sistema se puede calcular de la siguiente manera:

$$G(z) = Z\left\{\frac{1-e^{-sT}}{s}\cdot G_p(s)\right\} = Z\left\{\frac{G_p(s)}{s} - e^{-sT}\cdot\frac{G_p(s)}{s}\right\}$$

- Aplicando la propiedad de linealidad, se obtiene:

$$G(z) = Z\left\{\frac{G_p(s)}{s}\right\} - Z\left\{e^{-sT}\cdot\frac{G_p(s)}{s}\right\}$$

- Utilizando la propiedad de traslación, se concluye:

$$G(z) = Z\left\{\frac{G_p(s)}{s}\right\} - z^{-1}\cdot Z\left\{\frac{G_p(s)}{s}\right\} = (1-z^{-1})\cdot Z\left\{\frac{G_p(s)}{s}\right\}$$

- Aproximaciones:

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{T}; \qquad T : Periodo\ de\ Muestreo \quad \text{(EULER)}$$

$$s = \frac{2}{T} \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}; \quad T : Periodo\ de\ Muestreo$$

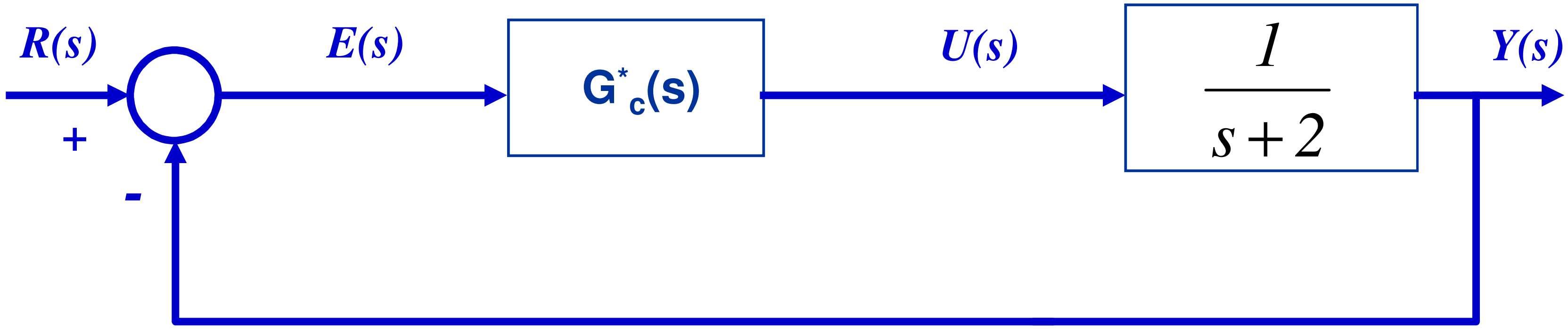
- La primera aproximación (diferencia finita) es muy simple de implementar, produce distorsiones de transiente y respuesta de frecuencia. (válida si T es pequeño).
- La segunda (bilinear) produce G(z) estables si G(s) es estable, con problemas similares a la transformación anterior.

- Tabla de Equivalencias

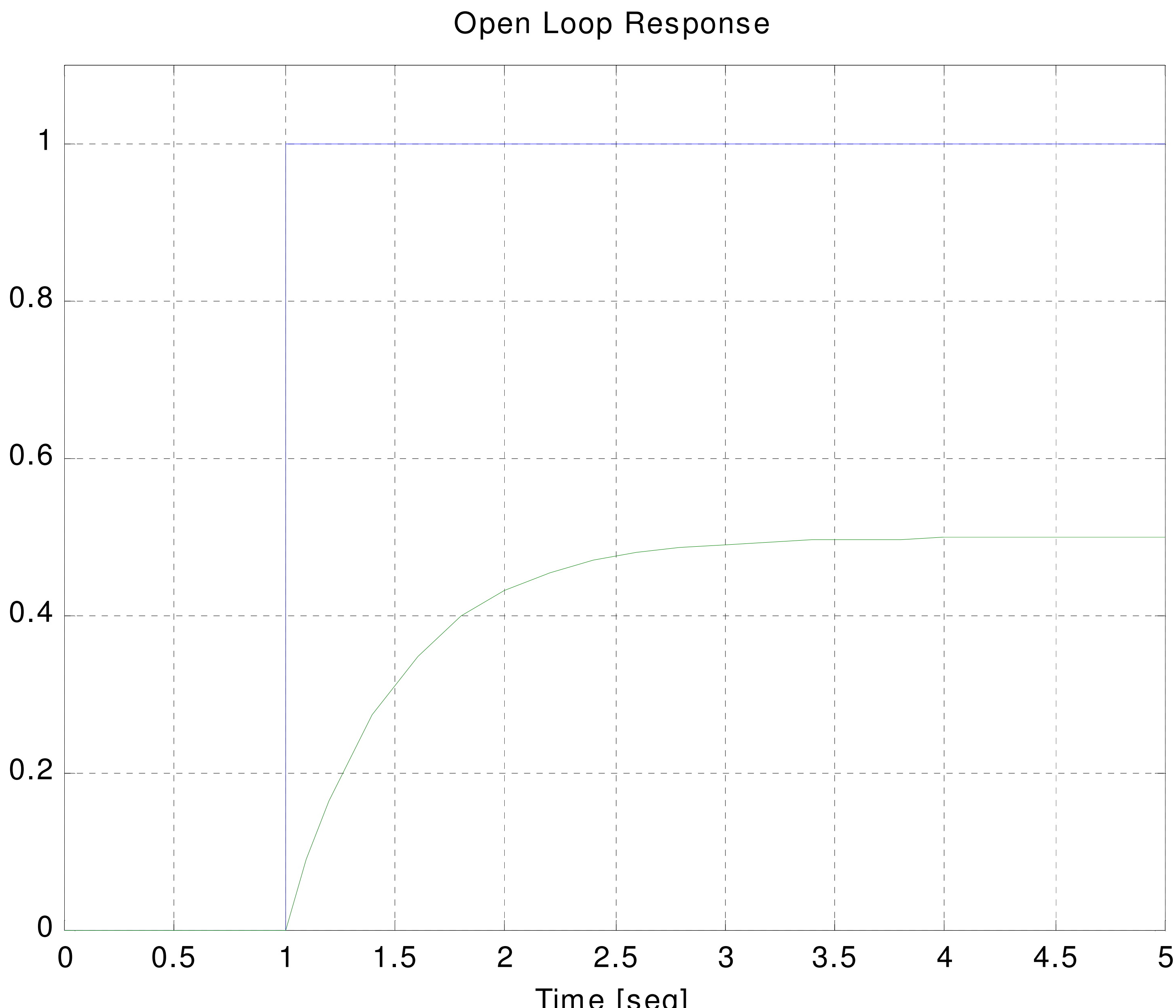
$G_p(s)$	$G_p(z)$
$\dfrac{1}{s}$	$\dfrac{T \cdot z^{-1}}{1 - z^{-1}}$
$\dfrac{1}{s^2}$	$\dfrac{T^2(1 + z^{-1}) \cdot z^{-1}}{2(1 - z^{-1})^2}$
$e^{-nT \cdot s}$	z^{-n}
$\dfrac{a}{s + a}$	$\dfrac{(1 - e^{-aT}) \cdot z^{-1}}{1 - e^{-aT} \cdot z^{-1}}$
$\dfrac{a \cdot b}{(s + a)(s + b)}$	$k_1 \cdot \dfrac{(1 - e^{-aT})z^{-1}}{1 - e^{-aT} \cdot z^{-1}} + k_2 \cdot \dfrac{(1 - e^{-bT})z^{-1}}{1 - e^{-bT} \cdot z^{-1}}$

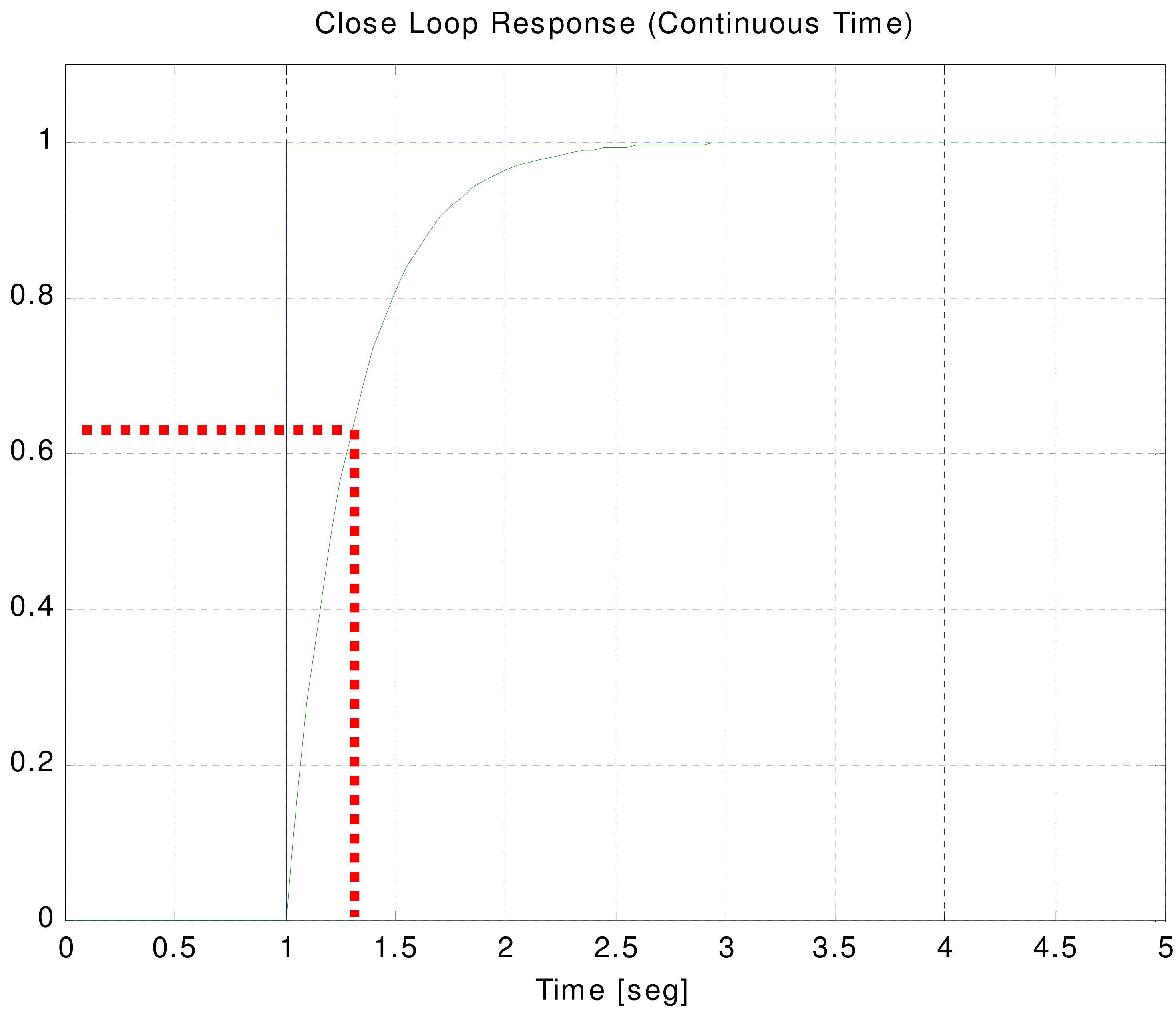
EJEMPLO DE APLICACIÓN:
(SISTEMA REALIMENTADO)

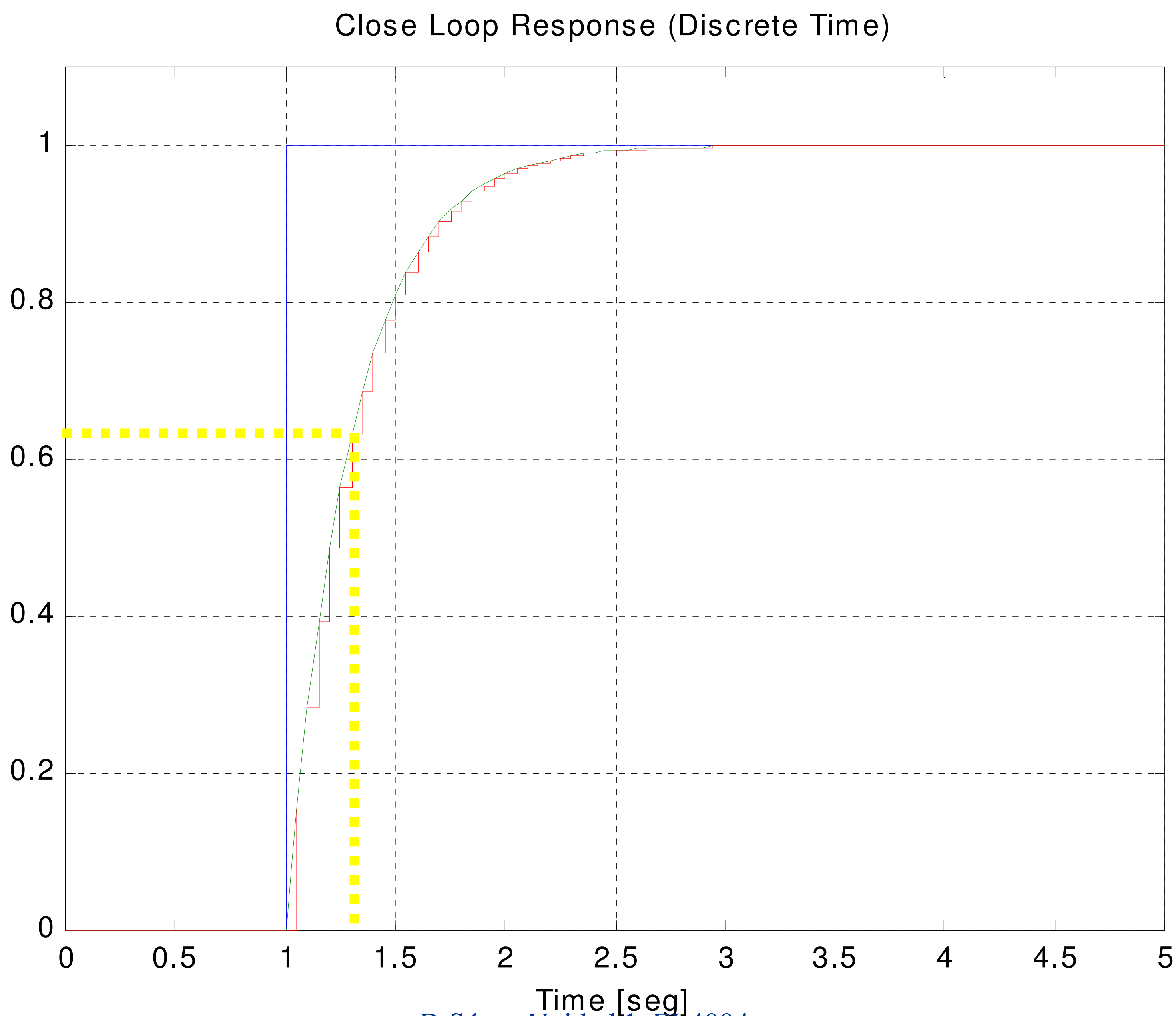
- Considerando el esquema de control de la figura, determine la función de transferencia Gc(s) del controlador de modo que el sistema controlado tenga un tiempo de respuesta de 0.3 [seg]

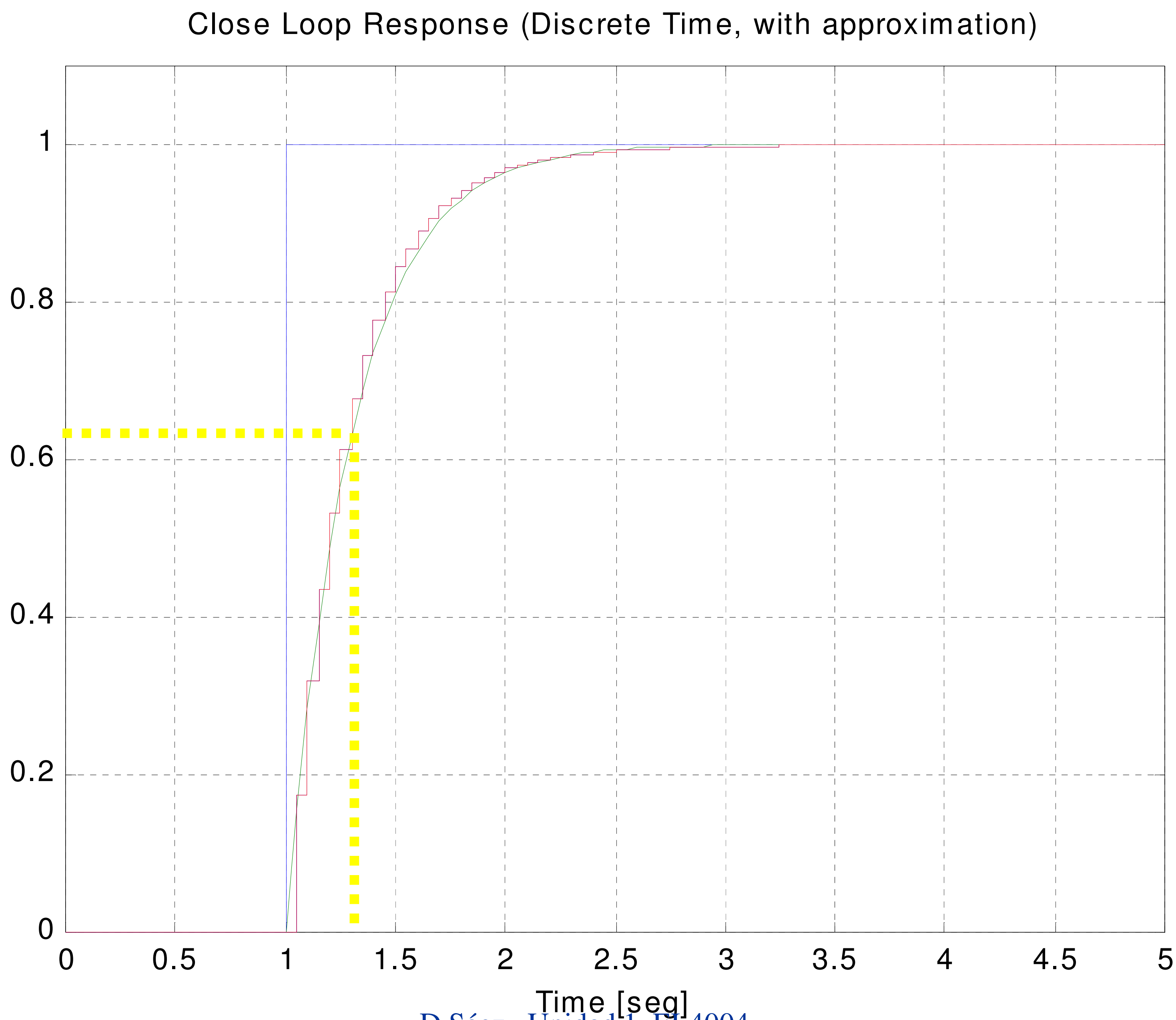


- ¿Cuál es la función de transferencia discreta, si las variables se muestrean cada 0.05 [seg]?


Open Loop Response
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
Time [seg]


Close Loop Response (Continuous Time)
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
Time [seg]


Close Loop Response (Discrete Time)
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
Time [seg]


Close Loop Response (Discrete Time, with approximation)
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
Time [seg]

Modelo Entrada Salida

$$\overset{(n)}{y}(t) + a_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_0 y(t)$$

$$= b_n u^{(n)}(t) + b_{n-1} u^{(n-1)}(t) + \ldots + b_0 u(t)$$

$$G(s) = \frac{b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + \ldots + b_0}{s^n + a^{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_0} = \frac{Y(s)}{U(s)}$$

Función de transferencia

$$Y(s) = G(s)U(s)$$ Convolución

$$y(t) = \int_0^t u(\tau) g(t-\tau) d\tau = \int_0^t g(\xi) u(t-\xi) d\xi$$

con $g(t)=0$ y $u(t)=0$, para $t<0$

Modelo entrada-salida en el Dominio Z

$$A(q^{-1})\cdot x(t)=q^{-d}\cdot B(q^{-1})\cdot u(t)+C(q^{-1})\cdot \varepsilon(t)$$

$$A(q^{-1})=1+a_1\cdot q^{-1}+a_2\cdot q^{-2}+\ldots+a_n\cdot q^{-n}$$

$$B(q^{-1})=b_o+b_1\cdot q^{-1}+b_2\cdot q^{-2}+\ldots+b_m\cdot q^{-m}$$

$$C(q^{-1})=c_o+c_1\cdot q^{-1}+c_2\cdot q^{-2}+\ldots+c_n\cdot q^{-n}$$

d : *Retardo*

$\varepsilon(t)$: *Ruido exógeno*

- Modelos Autoregresivos (AR, ARX, ARMAX)

✓ AR:

$$A(q^{-1}) \cdot x(t) = \varepsilon(t)$$

✓ ARX:

$$A(q^{-1}) \cdot x(t) = q^{-d} \cdot B(q^{-1}) \cdot u(t) + \varepsilon(t)$$

✓ ARMAX:

$$A(q^{-1}) \cdot x(t) = q^{-d} \cdot B(q^{-1}) \cdot u(t) + C(q^{-1}) \cdot \varepsilon(t)$$

VARIABLES DE ESTADO

a.-) Variables de Tiempo Continuo

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) = C' \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{cases}$$

$$x \in \Re^n; \quad u, y \in \Re$$

$$t \geq t_o, \quad x(t_o): Estado\ Inicial$$

$$A, B, C \ y \ D \ \ ctes.$$

- La solución de la ecuación diferencial puede verificarse en el dominio de Laplace:

$$s \cdot X(s) - x(t_o^-) = A \cdot X(s) + B \cdot U(s)$$

$$[s \cdot I - A] \cdot X(s) = x(t_o^-) + B \cdot U(s)$$

$$\therefore \quad X(s) = [\underbrace{s \cdot I - A}_{\Phi(s)}]^{-1} \cdot x(t_o^-) + [\underbrace{s \cdot I - A}_{\Phi(s)}]^{-1} \cdot B \cdot U(s)$$

$$x(t) = \Phi(t - t_o) \cdot x(t_o^-) + \int_{t_o}^{t} \Phi(t - \tau) \cdot B \cdot u(\tau) \cdot d\tau$$

- El problema se reduce entonces a encontrar Φ (t):

$$\Phi(s) = [s \cdot I - A]^{-1}$$

$$\therefore [s \cdot I - A] \cdot \Phi(s) = I \;\Rightarrow s \cdot \Phi(s) - I = A \cdot \Phi(s)$$

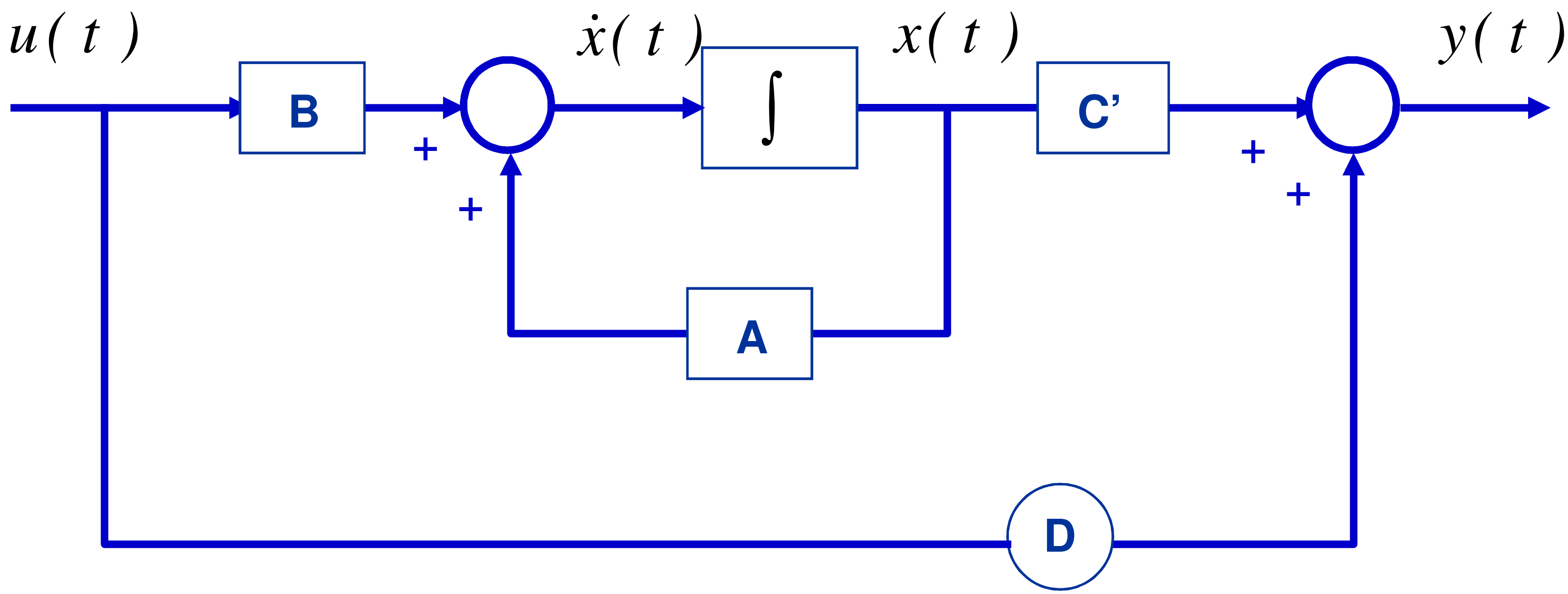
$$\dot{\Phi}(t) = A \cdot \Phi(t); \quad \Phi(t_o) = I$$

$$\Phi(t) = e^{At} : \quad \textit{Matriz de Transición de Estado}$$

- ¿Cuál es la relación de Φ (s) con la función de transferencia?

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) = C' \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X(s) = \Phi(s) \cdot B \cdot U(s) \\ Y(s) = \underbrace{\{C' \cdot \Phi(s) \cdot B + D\}}_{G(s)} \cdot U(s) \end{cases}$$

- En diagrama de bloques, se visualiza de la siguiente forma:



- Ej: Determinar G(s) en el siguiente sistema dinámico

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) = C' \cdot x(t) \end{cases}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- Respuesta:

$$G(s) = \frac{2s+2}{(s+1)(s+2)}$$

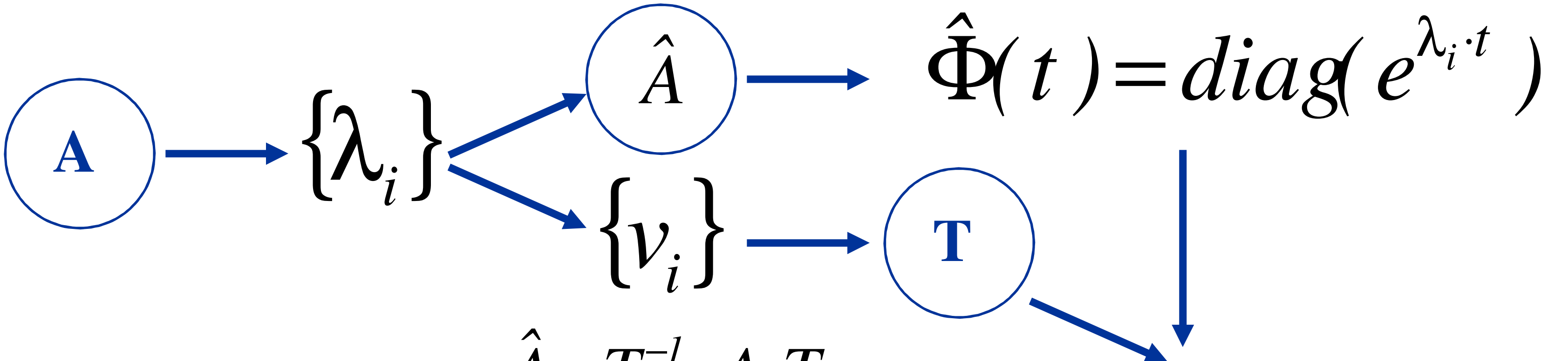
- Transformación de la Ecuación de Estado:
- Si la matriz A es diagonal, el cálculo de $\Phi(t)$ se simplifica enormemente (Φ (t) también es diagonal)
- En particular, existe una transformación que permite diagonalizar una matriz A dada. Esta transformación se basa en los valores y vectores propios de A.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) = C' \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{cases}$$

$$T = \left[v_1 \; v_2 \; v_3 \cdots v_n \right], \quad con \; \{v_i\} \; vectores \; propios \; de \, A \Rightarrow$$

$$\hat{A} = T^{-1} \cdot A \cdot T = diag(\lambda_i) \quad con \; \lambda_i \; vectores \; propios \; de \, A$$

- Lo anterior es válido si los valores propios son reales y distintos.
- El esquema de cálculo de Φ (t) , usando esta transformación se muestra a continuación:



$$\Phi(t) = T \cdot \hat{\Phi}(t) \cdot T^{-1}$$

$$\hat{A} = T^{-1} \cdot A \cdot T$$

$$\hat{B} = T^{-1} \cdot B$$

$$\hat{C} = C \cdot T$$

$$\hat{D} = D$$

- ¿Qué hacer si los valores propios son reales iguales?

$\Rightarrow$ Se utiliza la Forma Canónica de Jordan

$\Rightarrow$ Matriz T de transformación se construye con vectores propios generalizados

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \boxed{\lambda_2} & 0 \\ 0 & \boxed{\lambda_3} \end{matrix} \end{bmatrix} \rightarrow \hat{A}_i$$

- ¿Qué hacer si los valores propios son complejos conjugados?

$$\hat{A}_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 \cdot \xi \cdot \omega_m & -\omega_m^2 \end{bmatrix}$$

Variables de Tiempo Discreto

$$\begin{cases} x(t+1) = A \cdot x(t) + B \cdot u(t) \\ y(t) = C' \cdot x(t) + D \cdot u(t) \end{cases}; \quad \begin{matrix} t \in \mathrm{N}_0; x \in \Re^n; \ u, y \in \Re \\ t \geq t_o, x(t_o): \mathit{Estado \ \ Inicial} \end{matrix}$$

- Analicemos la evolución de x(t) a partir de un estado inicial:

$$x(t_o+1) = A \cdot x(t_o) + B \cdot u(t_o)$$

$$x(t_o+2) = A^2 \cdot x(t_o) + A \cdot B \cdot u(t_o) + B \cdot u(t_1)$$

$$x(t_o+3) = A^3 \cdot x(t_o) + A^2 \cdot B \cdot u(t_o) + A \cdot B \cdot u(t_1) + B \cdot u(t_2)$$

$$x(t_o+t) = A^t x(t_o) + \sum_{j=0}^{t-1} A^{t-j-1} \cdot B \cdot u(t_o+j), \quad \Phi(t+1) = A^{t+1} = A \cdot A^t$$

$$\Phi(t+1) = A \cdot \Phi(t); \qquad \Phi(t_o) = I$$

- De lo anterior se desprende que:

$$x(t_o+t)=\Phi(t)\cdot x(t_o)+\sum_{j=0}^{t-1}\Phi(t-j-1)\cdot B\cdot u(t_o+j),$$

$$Si\ \ A\ \ es\ \ Diagonal \Rightarrow \Phi(t)=diag(\lambda^t)$$

- El desarrollo anterior es válido para la matriz Φ (t), por lo tanto:

$$\Phi(t)=A^t=Z^{-1}\left\{(z\cdot I-A)^{-1}\cdot z\right\}$$

$$G(z)=C'\cdot(z\cdot I-A)^{-1}\cdot B+D$$