

Señales y sistemas I

Capítulo II: Señales y sistemas de tiempo continuo

Profesor: Néstor Becerra Yoma

Agradecimientos:

Profesor Manuel Duarte Mermoud

(transformada de Laplace)

Enrique Guerrero Merino

Adio Stefoni Escudero

2.1 Transformada de Laplace

- Se define la transformada bilateral de Laplace como:

$$L\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

- A lo largo del curso solo se utilizará la transformada unilateral (uso de señales causales)

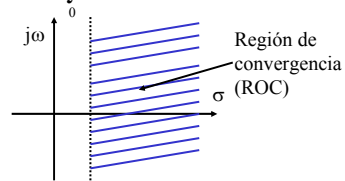
$$L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

2.1 Transformada de Laplace

- Teorema:

Sea $f(t)$ integrable en cada intervalo $a < t < b$, con $0 \leq a < b < \infty$ y c tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-ct} |f(t)|$ existe. Entonces la integral de Laplace converge uniformemente para $\text{Re}\{s\} > c$, es decir,

$$L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt < \infty, \text{ para } \text{Re}\{s\} > c$$



2.1 Transformada de Laplace

- Condiciones suficientes:
 - $f(t)$ es continua por trozos en el intervalo $[0, \infty)$
 - $f(t)$ es de orden exponencial c , es decir, $\forall t \in [0, \infty), e^{-ct} |f(t)| \leq M$

- Transformada inversa de Laplace

$$f(t) = L^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s)e^{st} ds$$



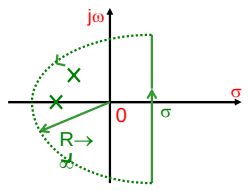
EL3005 – Señales y sistemas I

Prof. Néstor Becerra Yoma

2.1 Transformada de Laplace

- Teorema del residuo:**
 Puede utilizarse para obtener la transformada inversa, pues, para una función compleja G,

$$\oint_{\Gamma} G(s) ds = 2\pi j \sum_{i=1}^n \text{Res}(G, p_i)$$
 - Aquí $\{p_1, \dots, p_n\}$ es el conjunto de los polos de G(s) encerrados por la curva Γ .
 - Para $f(t)$, $f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds = \sum_{i=1}^n \text{Res}(F(s)e^{st}, p_i)$





EL3005 – Señales y sistemas I

Prof. Néstor Becerra Yoma

2.1 Transformada de Laplace

- Descomposición en fracciones parciales**
 Polos reales simples (similar para polos complejos conjugados):

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} = \frac{N(s)}{(s+a)D'(s)}$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{A}{s+a} + \frac{B(s)}{D'(s)}$$
 Con $A = F(s)(s+a)|_{s=-a}$



EL3005 – Señales y sistemas I

Prof. Néstor Becerra Yoma

2.1 Transformada de Laplace

- Descomposición en fracciones parciales**
 Polos reales repetidos:

$$F(s) = \frac{N(s)}{(s+a)^p D'(s)}$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{A_p}{(s+a)^p} + \frac{A_{p-1}}{(s+a)^{p-1}} + \dots + \frac{A_1}{(s+a)} + \frac{B(s)}{D'(s)}$$
 Con $A_{p-k} = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{ds^k} [F(s)(s+a)^p] |_{s=-a}$



EL3005 – Señales y sistemas I

Prof. Néstor Becerra Yoma

2.1 Transformada de Laplace

- Tabla de transformadas de Laplace**

	$f(t)$	$F(s)$
1	$\delta(t)$	1
2	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
3	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
4	$\frac{t^n}{n!} e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^{n+1}}$
5	$\cos(\omega_0 t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$
6	$\text{sen}(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$
7	$e^{-at} \cos(\omega_0 t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$
8	$e^{-at} \text{sen}(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.1 Transformada de Laplace

- Propiedades de la transformada de Laplace (I)

1	Linealidad	$L\{f(t) + g(t)\} = F(s) + G(s)$
2	Diferenciación temporal	$L\left\{\frac{d}{dt} f(t)\right\} = sF(s) - f(0)$
3	Enésima diferenciación temporal	$L\left\{\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right\} = s^n F(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} f^{(k-1)}(0)$
4	Desplazamiento temporal	$L\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}F(s) \quad a \geq 0$
5	Desplazamiento en frecuencia	$L\{e^{-at} f(t)\} = F(s+a)$
6	Convolución temporal	$L\left\{\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau\right\} = F(s)G(s)$
7	Escalamiento temporal	$L\left\{f\left(\frac{t}{a}\right)\right\} = a F(as)$

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.1 Transformada de Laplace

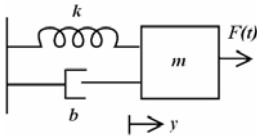
- Propiedades de la transformada de Laplace (II)

8	Diferenciación en frecuencia	$L\{t^n f(t)\} = -\frac{d^n F(s)}{ds^n}$
9	Enésima diferenciación en frecuencia	$L\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$
10	Integración temporal definida	$L\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\} = \frac{F(s)}{s}$
11	Integración temporal indefinida	$L\left\{\int f(t)dt\right\} = \frac{F(s)}{s} + \frac{1}{s} \left[\int f(t)dt \right]_{t=0}$
13	Integración en frecuencia	$L\left\{\frac{1}{t} f(t)\right\} = \int_s^\infty F(s)ds$ si $\lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{t} f(t)$ existe.
14	Convolución en frecuencia	$L\{f(t)g(t)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(p)G(s-p)dp$

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.2 T. de Laplace y Estabilidad

- Existen diversos sistemas que pueden ser modelados mediante ecuaciones diferenciales, pero dichos sistemas presentan comportamientos diversos aledaños a sus ecuaciones características.
- Ejemplo:
Analizar el caso que se muestra en la figura:
“Resorte Amortiguado”



EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.2 T. de Laplace y Estabilidad

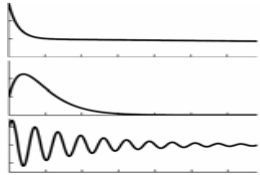
- La ecuación que describe el sistema Resorte Amortiguado es: $y'' + \frac{b}{m}y' + \frac{k}{m}y = \frac{F(t)}{m}$
- Del polinomio característico que se desprende de la ecuación diferencial se tienen tres condiciones:

$$\lambda = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m}} \Rightarrow \begin{aligned} \frac{b^2}{4m^2} &> k && \text{Soluciones reales y diferentes} \\ \frac{b^2}{4m^2} &= k && \text{Soluciones reales e iguales} \\ \frac{b^2}{4m^2} &< k && \text{Soluciones complejos conjugados} \end{aligned}$$

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.2 T. de Laplace y Estabilidad

- De dichas condiciones se obtienen tres respuestas diferentes:
 - Régimen Sobreamortiguado
 - Régimen Amortiguado
 - Régimen Subamortiguado
- Si las soluciones están en el semiplano negativo, las soluciones del sistema serán decrecientes en el tiempo otorgándole estabilidad al sistema.



EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.2 T. de Laplace y Estabilidad

- En el ejemplo anterior sin importar los valores característicos del sistema este siempre volverá a su estado estable.
- Si las soluciones de la ecuación estudiada estuviesen en el semiplano positivo estas tendrán exponenciales de exponente positivo, generando soluciones crecientes.
- De tener una sistema retroalimentado, el comportamiento antes descrito se deberá analizar en el denominador de la f. de transferencia.

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

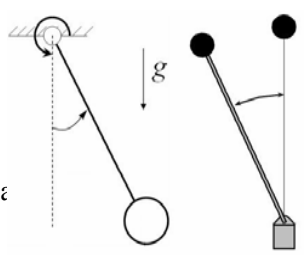
2.2 T. de Laplace y Estabilidad

- ¿Que es estabilidad?
 - Matemáticamente la estabilidad se puede interpretar como la tendencia de un sistema numérico cualquiera a estabilizar su comportamiento al propagarse errores en su entrada, ej: ecuación diferencial.
 - Análogamente, de suponer dichos errores como perturbaciones y un sistema numérico como un sistema físico, se puede decir que dicho sistema es estable si a pesar de ser perturbado vuelve a su estado estable, ej: péndulo vertical (invertido y no invertido).

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.2 T. de Laplace y Estabilidad

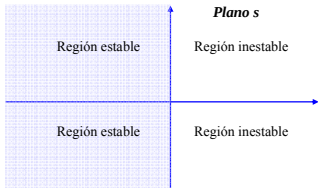
- Si el péndulo vertical no invertido es perturbado el oscilará hasta volver a su estado estable.
- Si el péndulo invertido es perturbado caerá debido a la fuerza de gravedad y no podrá volver a su estado inicial (sistema inestable).



EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.2 T. de Laplace y Estabilidad

- Criterio de Estabilidad**
Si los polos del sistema a analizar se encuentran en el semiplano negativo este será estable pues en dicha región el polinomio característico presenta una respuesta estable.



EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

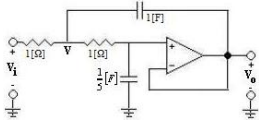
2.2 T. de Laplace y Estabilidad

- La ecuación característica se expresa como un polinomio de parámetro s , que es producto de la transformada de Laplace.
- Uno de los usos del plano complejo se conoce como el plano s , este se usa para visualizar las raíces de la ecuación que describe la conducta del sistema.
- Cabe destacar que el conveniente mapeo de la ecuación diferencial en el plano s , permite analizar el sistema de manera más fácil y rápida.

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.3 T. de Laplace en sistemas

- Calcular la estabilidad del circuito usando T. de Laplace



Condiciones iniciales nulas.

Aplicando Ley de Corriente de Kirchhoff:

$$\frac{v - v_i}{1} + \frac{v - v_o}{1} + s(v - v_o) = 0$$

$$\frac{v - v_o}{1} = \frac{sv_o}{5}$$

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.3 T. de Laplace en sistemas

- Luego: $v(2 + s) = v_i + v_o(1 + s)$
 $v = v_o \left(1 + \frac{s}{5}\right)$
- La Función de Transferencia es: $H(s) = \frac{5}{s^2 + 2s + 5}$
- Fracciones Parciales: $H(s) = \frac{5}{4} \frac{j}{(s+1+2j)} - \frac{5}{4} \frac{j}{(s+1-2j)}$

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.3 T. de Laplace en sistemas

- Aplicando la T. inversa de Laplace:

$$H(t) = \frac{5}{4}e^{-t}\text{sen}(2t) - \frac{5}{4}e^{-t}\text{sen}(-2t)$$
- Se puede ver como esta respuesta se mantiene estable en tiempo.
- Los polos del sistema son: $s^2 + 2s + 5 = 0 \Rightarrow s_{1,2} = -1 \pm 2j$
 - Cumplen el criterio de estabilidad.
 - De no cumplirlos la exponencial crecería dejando el sistema inestable

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.2 T. de Laplace en sistemas

- Calcular la estabilidad del sistema descrito por la función de transferencia $N(s)/D(s)$, donde:

$$D(s) = s^6 + 2s^5 + 2s^4 + s^3 + 3s^2 + s + 2$$
 Este sistema se resuelve en MatLab generando las raíces:

$s_1 = -1.35 + 0.93j$	$s_4 = 0.58 + 0.82j$
$s_2 = -1.35 - 0.93j$	$s_5 = 0.58 - 0.82j$
$s_3 = -0.23 + 0.81j$	$s_6 = -0.23 - 0.81j$

 Como se puede apreciar dos polos son inestables ya que se encuentran en el semi-plano positivo, luego se infiere que el sistema es inestable.

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.3 T. de Laplace en sistemas

- Para generalizar más aun se puede considerar un sistema cualquiera descrito por la función de transferencia:

$$H(s) = \frac{s - 50}{s^3 + 8s^2 + 14s + 12}$$
 Calcular la estabilidad del sistema:

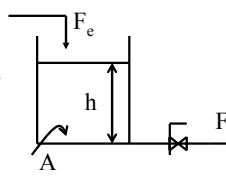
$$P(s) = s^3 + 8s^2 + 14s + 12 \Rightarrow s_1 = -6$$

$$P(s) = (s + 6)(s^2 + 2s + 2) \Rightarrow s_2 = -1 + j$$

$$s_3 = -1 - j$$
 Se puede ver que dicho sistema cumple con el criterio de estabilidad, condición que se obtiene directamente de la resolución numérica del polinomio característico.

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.3 T. de Laplace en sistemas

- El siguiente sistema es un estanque de sección transversal A al que se le inyecta un fluido a una tasa $F_{in} = kh$ (lineal).
 

La ecuación que describe el sistema es: $\frac{g}{h} + \frac{k}{A}h = \frac{F_{in}}{A}$

Aplicando T. de Laplace, se obtiene: $sH(s) + \frac{k}{A}H(s) = \frac{F_{in}(s)}{A}$

Finalmente la f. de transferencia es: $H(s) = \frac{1}{s + k/A} \frac{F_{in}(s)}{A}$

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.3 T. de Laplace en sistemas

- Del polinomio característico se consigue el polo:

$$s = -\frac{k}{A}$$

- Finalmente se concluye que para todo $k > 0$ el sistema es estable.

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.3 T. de Laplace en sistemas

- Dibuje el diagrama de Bode de ganancia y fase de la función de transferencia de un generador Eólico

$$G(s) = \frac{10}{s(0.02s + 1)(0.2s + 1)}$$

Los polos son:

$$s_1 = 0 \quad s_2 = -5 \quad s_3 = -50$$

Para poder trabajar en el plano complejo se considera $s = j\omega$

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.3 T. de Laplace en sistemas

- Se tienen dos sistemas:

El primero corresponde a uno mecánico de amortiguamiento y el segundo a uno RLC.

Las ecuaciones que describen a cada sistema son:

$$y'' + \frac{b}{m}y' + \frac{k}{m}y = \frac{F(t)}{m}$$

$$q'' + \frac{R}{L}q' + \frac{1}{LC}q = \frac{F(t)}{L}$$

Donde la corriente corresponde a $\frac{dq}{dt}$

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.3 T. de Laplace en sistemas

- Se puede generar la analogía entre los dos sistemas mencionados en base a:

$$m \approx L \quad b \approx R \quad k \approx \frac{1}{C}$$

- Aplicando la T. de Laplace a las f. de transferencia de los sistemas:

$$H(s) = \frac{\frac{R}{L}s}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} \quad y \quad H(s) = \frac{\frac{b}{m}s}{s^2 + \frac{b}{m}s + \frac{k}{m}}$$

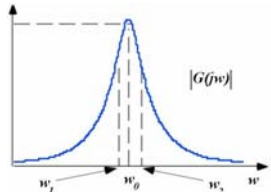
EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.3 T. de Laplace en sistemas

- Con el cambio de variable $s=j\omega$ se tiene la f. de transferencia directamente en el plano ω .

$$H(\omega) = \frac{R/L \omega}{R/L \omega + j[1/LC - \omega^2]}$$

La frecuencia central se define como la frecuencia para la cual la f. de transferencia es puramente real.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$


EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.3 T. de Laplace en sistemas

- Como se había visto en un principio la respuesta del sistema “Resorte Amortiguado” se representa por:

$$s = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}$$

Al tender b a 0 la respuesta pasa a ser imaginaria pura.

Utilizando la analogía con el circuito Pasa Banda RLC, se puede ver como dicho valor es el valor central del filtro.

$$s = \pm j\sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.3 T. de Laplace en sistemas

- Una ecuación diferencial describe un sistema, dicha ecuación se analiza con la T. de Laplace, posteriormente con un cambio de variable conveniente ($s=j\omega$) esta se puede ver en el dominio de la frecuencia, para así generar otro análisis del sistema.

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.4 Serie exponencial de Fourier

- Se considerará la siguiente base:

$$\phi_n = e^{jn\omega_0 t}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

- El valor de n se llama número armónico
- Se calculará el producto interno entre 2 funciones sobre $[t_1, t_2]$

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \phi_n(t) \phi_m(t) dt &= \int_{t_1}^{t_2} e^{jn\omega_0 t} e^{-jm\omega_0 t} dt = \frac{1}{j(n-m)\omega_0} (e^{j(n-m)\omega_0 t_2} - e^{j(n-m)\omega_0 t_1}) \\ &= \frac{1}{j(n-m)\omega_0} e^{j(n-m)\omega_0 t_1} (e^{j(n-m)\omega_0 (t_2 - t_1)} - 1) \end{aligned}$$

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.4 Serie exponencial de Fourier

- Si se elige: $\omega_0(t_2 - t_1) = 2\pi$
- Se logra que:

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{jn\omega_0 t} e^{-jm\omega_0 t} dt = \begin{cases} (t_2 - t_1) & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$
- Se puede demostrar que la base es completa, por lo que cualquier función $f(t)$ de energía finita en $[t_1, t_2]$ se puede representar como:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}, \quad t \in [t_1, t_2], \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{t_2 - t_1} \quad F_n \in \mathbb{C}$$

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.4 Serie exponencial de Fourier

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}, \quad t \in [t_1, t_2], \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{t_2 - t_1}$$

- Para calcular los F_n

$$f(t) e^{-jm\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} e^{-jm\omega_0 t}, \quad t \in [t_1, t_2]$$

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) e^{-jm\omega_0 t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \int_{t_1}^{t_2} e^{jn\omega_0 t} e^{-jm\omega_0 t} dt$$

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t) e^{-jm\omega_0 t} dt = F_m (t_2 - t_1)$$

$$F_n = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.4 Serie exponencial de Fourier

- Ejemplo: Escribir la siguiente función como serie exponencial de Fourier

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 1 \\ -1 & 1 < t < 2 \end{cases}$$
- Solución:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{(t_2 - t_1)} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$F_n = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.4 Serie exponencial de Fourier

$$F_n = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-jn\pi t} dt - \frac{1}{2} \int_1^2 e^{-jn\pi t} dt$$

$$= \frac{1}{2jn\pi} [-e^{-jn\pi} + 1 + e^{-j2n\pi} - e^{-jn\pi}] = \frac{1}{jn\pi} [1 - e^{-jn\pi}]$$

$$F_n = \begin{cases} \frac{2}{jn\pi} & n \text{ impar} \\ 0 & n \text{ par} \end{cases} \quad f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\pi t}$$

$$f(t) = \frac{2}{j\pi} e^{j\pi} + \frac{2}{j3\pi} e^{j3\pi} + \frac{2}{j5\pi} e^{j5\pi} + \dots - \frac{2}{j\pi} e^{-j\pi} - \frac{2}{j3\pi} e^{-j3\pi} - \frac{2}{j5\pi} e^{-j5\pi} - \dots$$

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.4 Serie exponencial de Fourier

- Dada $f(t)$, la serie existe si se satisfacen las condiciones de Dirichlet:
 - $f(t)$ tiene un n° finito de máximos y mínimos en $[t_1, t_2]$
 - $f(t)$ tiene un n° finito de discontinuidades en $[t_1, t_2]$
 - $f(t)$ es absolutamente integrable en $[t_1, t_2]$
$$f(t) = \int_{t_1}^{t_2} |f(t)| dt < \infty$$
- Las condiciones anteriores siempre se cumplen para señales de energía finita en $[t_1, t_2]$

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.5 Señales y representaciones complejas

- Considérese una función $f(\cdot)$ compleja:

$$f = f_{RE} + j f_{IM}$$
- Su conjugada es:

$$f^* = f_{RE} - j f_{IM}$$
- Su parte real e imaginaria son:

$$f_{RE} = \frac{f + f^*}{2}, \quad f_{IM} = \frac{f - f^*}{2j}$$

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.5 Señales y representaciones complejas

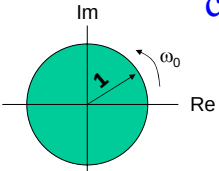
- Su magnitud se puede calcular a partir de:

$$|f|^2 = f f^* = (f_{RE} + j f_{IM})(f_{RE} - j f_{IM}) = |f_{RE}|^2 + |f_{IM}|^2$$
- La exponencial compleja es suma de un seno y un coseno, y describe un círculo de radio 1 en el plano complejo:

$$e^{j\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + j \sin(\omega_0 t)$$

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.5 Señales y representaciones complejas



$$e^{j\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + j \sin(\omega_0 t)$$

$$x(t) = \cos(\omega_0 t)$$

$$y(t) = \sin(\omega_0 t)$$

- Las exponenciales complejas se pueden describir en término de seno y coseno, y viceversa.

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}, \quad \sin(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}$$

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.5 Señales y representaciones complejas

- Recordando la propiedad:

$$x_{RE} = \frac{x + x^*}{2}, \quad x_{IM} = \frac{x - x^*}{2j}, \quad \forall x \in \mathbb{C}$$

se puede concluir la siguiente propiedad para los coeficientes de la serie:

$$F_n = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt, \quad F_{-n} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t) e^{jn\omega_0 t} dt$$

$$F_n^* = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f^*(t) e^{jn\omega_0 t} dt = F_{-n} \text{ para } f(\cdot) \text{ real}$$

Además, $\text{Re}(F_n) = \frac{F_n + F_n^*}{2} = \frac{F_n + F_{-n}}{2}$

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.6 Serie de Fourier trigonométrica

- La serie de Fourier exponencial se puede reescribir en término de senos y cosenos:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} = \sum_{m=-\infty}^{-1} F_m e^{jm\omega_0 t} + F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$f(t) = \sum_{m=-1}^{-\infty} F_m e^{jm\omega_0 t} + F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \quad (n' = -m)$$

$$f(t) = \sum_{n'=1}^{\infty} F_{-n'} e^{-jn'\omega_0 t} + F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \quad \text{Si } f(\cdot) \text{ es real:}$$

$$f(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2F_n e^{jn\omega_0 t} + 2F_{-n} e^{-jn\omega_0 t}}{2} = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2\text{Re}(F_n e^{jn\omega_0 t})$$

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.6 Serie de Fourier trigonométrica

$$f(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2\text{Re}(F_n e^{jn\omega_0 t})$$

$$\text{Re}(F_n e^{jn\omega_0 t}) = \text{Re}\left((F_{nRE} + j F_{nIM})(\cos(n\omega_0 t) + j \sin(n\omega_0 t))\right)$$

$$\text{Re}(F_n e^{jn\omega_0 t}) = F_{nRE} \cos(n\omega_0 t) - F_{nIM} \sin(n\omega_0 t)$$

$$f(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2F_{nRE} \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} (-2F_{nIM}) \sin(n\omega_0 t)$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(n\omega_0 t)$$

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.6 Serie de Fourier trigonométrica

- Las funciones $\cos(n\omega_0 t)$ y $\sin(n\omega_0 t)$ para $n=0, 1, \dots$ forman una base ortogonal en $[t_1, t_2]$ si $(t_2 - t_1)\omega = 2\pi$
- Para poder calcular directamente los valores de a_n y b_n se puede multiplicar $f(t)$ por $\cos(n\omega_0 t)$ o por $\sin(n\omega_0 t)$, y luego integrar en $[t_1, t_2]$.

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.6 Serie de Fourier trigonométrica

$$a_n = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} \cos^2(n\omega_0 t) dt} = \frac{2}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$

$$b_n = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} \sin^2(n\omega_0 t) dt} = \frac{2}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt$$

$$a_0 = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} dt} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt$$

- a_0 es el valor medio de la señal.

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.6 Serie de Fourier trigonométrica

- La serie trigonométrica de Fourier se puede escribir usando sólo cosenos:

$$f(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re}(F_n e^{jn\omega_0 t}) =$$

$$f(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re}(|F_n| e^{j\phi_n} e^{jn\omega_0 t})$$

$$f(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2|F_n| \cos(n\omega_0 t + \phi_n)$$

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \phi_n)$$

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.6 Serie de Fourier trigonométrica

- Se cumplen las siguientes relaciones:

$$f(t) = \underbrace{F_0}_{a_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{2F_{nRE}}_{a_n} \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(-2F_{nIM})}_{b_n} \sin(n\omega_0 t)$$

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{2|F_n|}_{c_n} \cos(n\omega_0 t + \phi_n)$$

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \phi_n = \tan^{-1} \left(\frac{-b_n}{a_n} \right)$$

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.6 Serie de Fourier trigonométrica

- Ejemplo: representar $f(t)$ como serie trigonométrica de Fourier

$$f(t) = t^2, \quad t \in [0, 2]$$

- Desarrollo: $a_0 = \frac{1}{2} \int_0^2 t^2 dt = \frac{4}{3}$

$$a_n = \frac{2}{2} \int_0^2 t^2 \cos(n\pi t) dt = \frac{4}{(n\pi)^2}$$

$$b_n = \frac{2}{2} \int_0^2 t^2 \sin(n\pi t) dt = \frac{-4}{n\pi}$$

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.6 Serie de Fourier trigonométrica

- Luego, la serie trigonométrica es:

$$f(t) = \frac{4}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos(n\pi t) - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin(n\pi t)$$

- Cualquier función se puede expresar como la suma de una parte par más una parte impar:

$$f(t) = f_p(t) + f_i(t)$$

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.6 Serie de Fourier trigonométrica

$$f(t) = f_p(t) + f_i(t)$$

$$f_p(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2}, \quad f_i(t) = \frac{f(t) - f(-t)}{2}$$

$$f_p(t) = f_p(-t), \quad f_i(t) = -f_i(-t)$$

- Los términos coseno de la serie (incluyendo a_0) permiten representar la parte par, mientras que los términos seno representan la impar.

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.7 Extensión por periodicidad

- Una función definida en el intervalo $[t_1, t_2]$ se puede representar mediante su serie de Fourier:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$$

- Las exponenciales complejas son funciones periódicas:

$$e^{jn\omega_0 t} = \cos(n\omega_0 t) + j \sin(n\omega_0 t)$$

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.7 Extensión por periodicidad

- Luego, si se analiza una serie de Fourier fuera del rango $[t_1, t_2]$ se puede concluir que es periódica, de periodo $T = t_2 - t_1$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0(t+T)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n (e^{jn\omega_0 t} e^{jn\omega_0 T}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$$

- porque:

$$e^{jn\pi T} = e^{jn \frac{2\pi}{T} T} = e^{jn2\pi} = \cos(2\pi n) + j \sin(2\pi n) = 1$$

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.7 Extensión por periodicidad

- Si $f(t)=f(t+T)$, entonces

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}, \forall t \in \mathbf{R} \quad \text{si } \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

- Es decir, la serie de Fourier para una señal periódica vale en todo el eje real.
- Los F_n se calculan considerando sólo 1 periodo de la señal

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.7 Extensión por periodicidad

2		Par	$\begin{cases} \text{Sa}(n\pi/2) & n \text{ par} \\ 0 & n \text{ impar} \end{cases}$
1		Par Ancho de pulso τ	$\frac{\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right)$
1		Par	$\begin{cases} \text{Sa}^2(n\pi/2) & n \neq 0 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$
2		Impar	$\begin{cases} j(-1)^n/(n\pi) & n \neq 0 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$
1		Par	$\begin{cases} \frac{2}{\pi(1-n^2)} & n \text{ par} \\ 0 & n \text{ impar} \end{cases}$

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.7 Extensión por periodicidad

1		Par	$\begin{cases} \frac{1}{\pi(1-n^2)} & n \text{ par} \\ -j/4 & n = \pm 1 \\ 0 & \text{otro} \end{cases}$
---	--	-----	---

- La función Sampling es: $\text{Sa}(x) = \frac{\text{Sen}(x)}{x}$

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.8 Teorema de Parseval

- La potencia de una señal $f(\cdot)$ es:

$$p = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) f^*(t) dt$$

- Si se expresa $f(\cdot)$ mediante serie exponencial:

$$p = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_m e^{jm\omega_0 t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n^* e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$p = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_m \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n^* \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j(m-n)\omega_0 t} dt$$

$$p = \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_m F_m^* = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |F_m|^2$$

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.8 Teorema de Parseval

- El teorema de Parseval indica que:

$$p = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |F_n|^2$$

- La potencia de la señal completa es la suma de las potencias de cada frecuencia
- Ej: Determinar la potencia de la función:

$$f(t) = 2\text{sen}(100t)$$

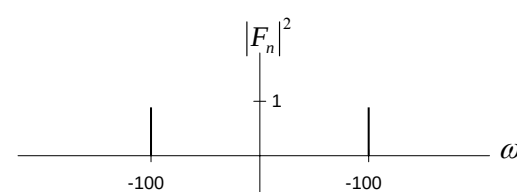
EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.8 Teorema de Parseval

- Los coeficientes de Fourier son:

$$F_1 = -j, F_{-1} = j, F_n = 0 \text{ para otro } n$$

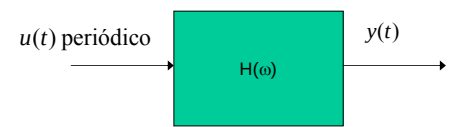
- Luego:

$$P = |j|^2 + |-j|^2 = 2$$


EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.9 Respuesta estacionaria a señales periódicas

- Consideremos un sistema lineal $H(\omega)$ (un filtro lineal) que tiene una entrada periódica $u(t)$ y una salida $y(t)$ en régimen permanente:



$$u(t) = Ae^{j(\omega_1 t + \phi_1)} \Rightarrow y(t) = AH(\omega_1)e^{j(\omega_1 t + \phi_1)}$$

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.9 Respuesta estacionaria a señales periódicas

- Luego, al ser el sistema lineal, la respuesta a una señal periódica es:

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_n e^{j(n\omega_0 t + \phi_n)} \Rightarrow y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_n H(n\omega_0) e^{j(n\omega_0 t + \phi_n)}$$

- La potencia de la salida es:

$$P_y = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |U_n|^2 |H(n\omega_0)|^2$$

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.9 Respuesta estacionaria a señales periódicas

- Ej. Determinar la salida cuando la entrada y el filtro son los siguientes

The input signal $u(t)$ is a periodic square wave with period 1, amplitude 2, and duty cycle 1/2. The filter response $H(\omega)$ is a rectangular function with width 6π (from -3π to 3π) and height 1.

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.9 Respuesta estacionaria a señales periódicas

- La entrada se puede escribir como:

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(n\pi/2)}{n\pi/2} e^{jn2\pi t}$$

- La salida está limitada en frecuencia

$$y(t) = 1 + \frac{4}{\pi} \cos(2\pi t)$$

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.9 Respuesta estacionaria a señales periódicas

- Potencia promedio en la entrada:

$$P_u = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} |u(t)|^2 dt = \int_{-1/4}^{1/4} 4 dt = 2$$

- Potencia promedio en la salida:

$$P_y = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |U_n|^2 |H(n\omega_0)|^2 = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 + 1 + \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 = 1.811$$

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.10 Espectro de Fourier

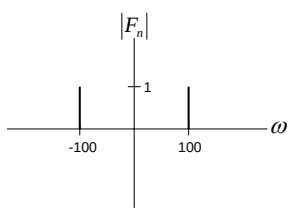
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}, \forall t \in \mathbf{R} \text{ si } \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

- Señal periódica = suma de exponenciales complejas multiplicadas por coeficientes F_n
- F_n : asociado a la amplitud de la frecuencia $n\omega_0$.
- Se puede hacer un gráfico amplitud / frecuencia
- Los F_n se dibujan como líneas verticales
- $\Rightarrow$ Espectro de la señal

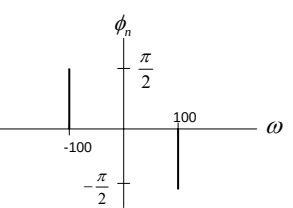
EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.10 Espectro de Fourier

- Ej: Espectro de la función $f(t) = 2 \sin(100t)$
 $\omega_0 = 100, f(t) = (j)e^{-j100t} + (-j)e^{j100t}$



Espectro de magnitud

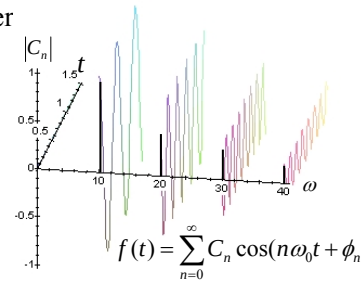


Espectro de fase

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.10 Espectro de Fourier

- También se puede generar un espectro trigonométrico a partir de la serie trigonométrica de Fourier

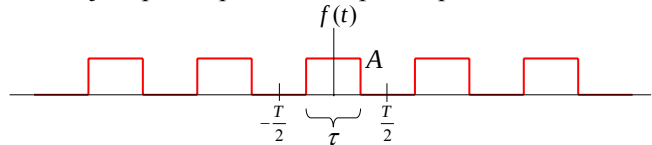


$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \phi_n)$$

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.10 Espectro de Fourier

- Ej. Espectro para tren de pulsos periódico



$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-jn\omega_0 t} dt$$

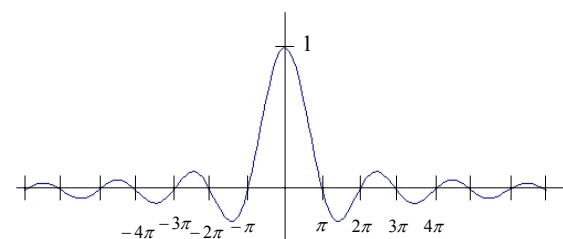
$$F_n = \frac{-A}{jn\omega_0} \left(e^{-jn\omega_0 \tau/2} - e^{jn\omega_0 \tau/2} \right) = \frac{2A}{n\omega_0} \text{sen}(n\omega_0 \tau / 2)$$

$$F_n = \frac{A\tau}{T} \frac{\text{sen}(n\omega_0 \tau / 2)}{n\omega_0 \tau / 2}$$

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.10 Espectro de Fourier

$$F_n = \frac{A\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_0 \tau}{2}\right) \quad \text{Sa}(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x}$$



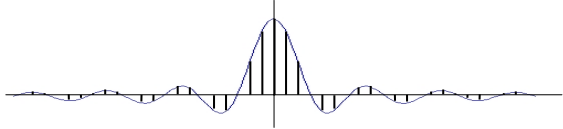
Función Sa(-)

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

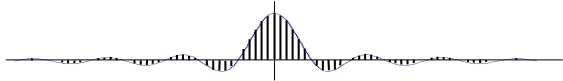
2.10 Espectro de Fourier

$$f(t) = \frac{A\tau}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right) e^{jn\omega_0 t}$$

Con τ fijo:



Al aumentar T:

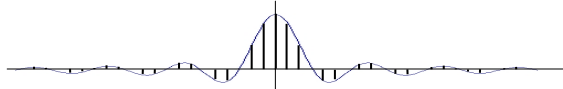


EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

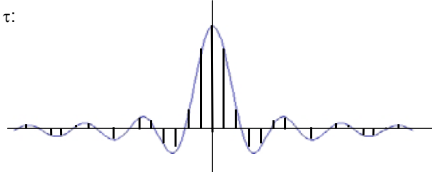
2.10 Espectro de Fourier

$$f(t) = \frac{A\tau}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right) e^{jn\omega_0 t}$$

Con T fijo:



Al aumentar τ :



EL3005 – Señales y sistemas I

2.10 Espectro de Fourier

- Distancia entre líneas espectrales depende de T
- Distancia entre cruces por cero de $\text{Sa}(\cdot)$ depende de τ

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

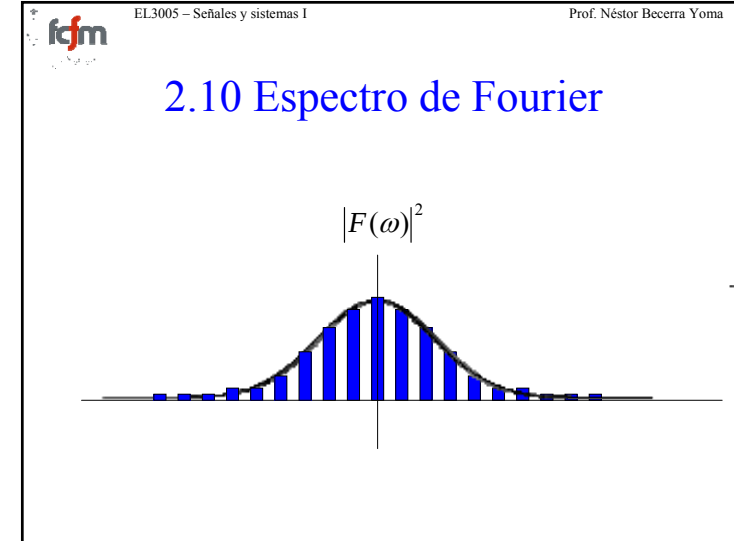
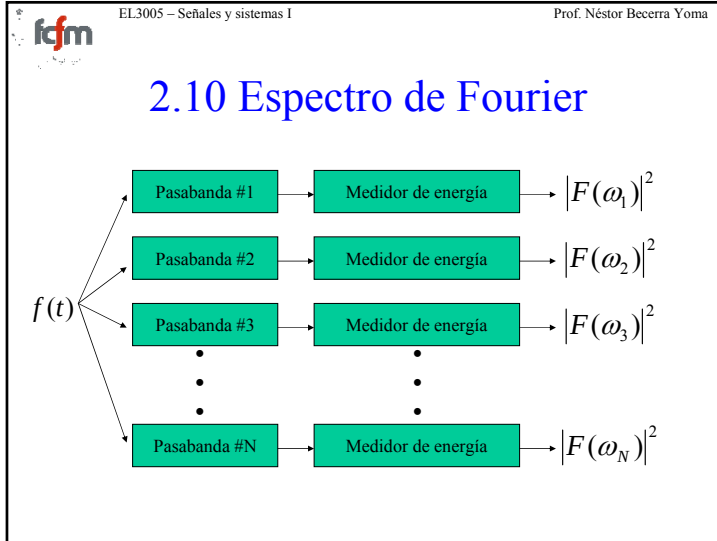
2.10 Espectro de Fourier

- Teorema de Parseval $\Rightarrow$ relación entre $f(t)$ y $F(\omega)$, energía de una señal.

$$E = \int_{t=-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

$|F(\omega)|^2 \Rightarrow$ densidad espectral de energía, permite calcular la energía en una banda de frecuencias

$F(-\omega) = F(\omega)^* \Rightarrow |F(-\omega)|^2 = |F(\omega)|^2 \Rightarrow |F(\omega)|^2$ es par



EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.10 Espectro de Fourier

- No todas las señales tienen energía finita
- Algunas de ellas tienen potencia media finita $\Rightarrow$ señales de potencia

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt = \overline{f^2(t)}$$

Se puede definir una densidad espectral de potencia:

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_f(\omega) d\omega$$

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.11 Representación para señal aperiódica

- Serie de Fourier: A medida que T aumenta, las líneas espectrales se juntan. La forma del espectro no cambia.

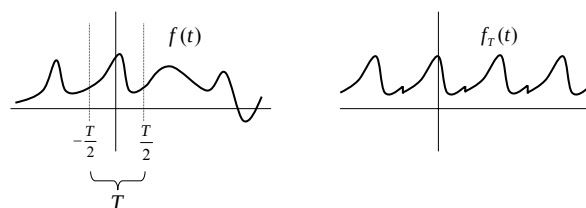
The figure shows two plots of a signal's spectrum. The left plot shows a signal with a discrete spectrum (impulses) for a finite T . The right plot shows the same signal as $T \rightarrow \infty$, where the discrete lines merge into a continuous spectrum.

- Se puede generar espectro de señal aperiódica a partir de serie de Fourier al considerar que $T \rightarrow \infty$

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

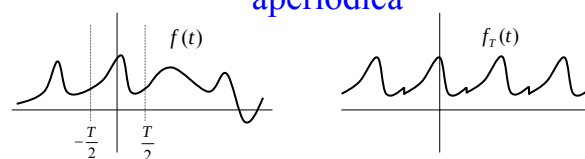
2.11 Representación para señal aperiódica

Sea $f(t)$ una señal aperiódica.
 $f_T(t)$: función periódica asociada a $f(t)$ con período T

$$f_T(t) = f(t + nT), \quad (t + nT) \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right], \quad n \in \mathbb{Z}$$


EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.11 Representación para señal aperiódica



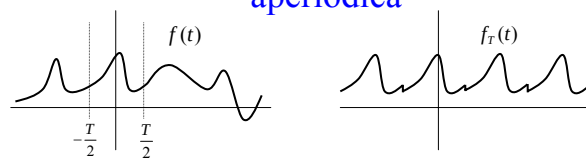
$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}, \quad F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Sea $F(\omega_n) = TF_n$

$$f_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega_n) e^{jn\omega_0 t}, \quad F(\omega_n) = \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt, \quad \omega_n = \frac{2\pi}{T} n$$

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.11 Representación para señal aperiódica

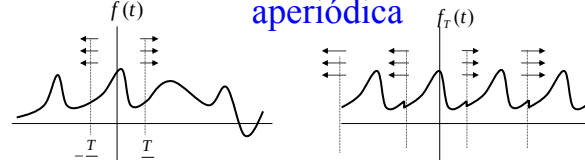


$$f_T(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{2\pi F(\omega_n)}_{\Delta\omega} e^{jn\omega_0 t}, \quad F(\omega_n) = \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt, \quad \omega_n = \frac{2\pi}{T} n$$

$$f_T(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega_n) e^{j\omega_n t} \Delta\omega, \quad F(\omega_n) = \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) e^{-j\omega_n t} dt, \quad \omega_n = \frac{2\pi}{T} n$$

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.11 Representación para señal aperiódica



$$\lim_{T \rightarrow \infty} f_T(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega_n) e^{j\omega_n t} \Delta\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega = f(t)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} F(\omega_n) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) e^{-j\omega_n t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = F(\omega)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F(\omega) = \int_{t=-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \\ f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \end{cases}$$

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.11 Representación para señal aperiódica

- Transformada directa e inversa de Fourier

$$F(\omega) = \mathcal{F}(f(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega_0 t} dt$$

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}(F(\omega)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

- Permite ver una señal:
 - En el dominio del tiempo $\Rightarrow f(t)$
 - En el dominio de la frecuencia $\Rightarrow F(\omega)$

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.12 Función de densidad espectral

- F_n son líneas espectrales: contenido espectral repartido en frecuencias discretas
- $F(\omega)$ es función de densidad espectral: contenido espectral repartido en un continuo
- $dA = F(\omega)d\omega \Rightarrow$ elemento de amplitud dentro de un elemento de frecuencia en torno a ω
- Existe relación entre la serie de Fourier de la señal periódica, y la transformada de Fourier para 1 sólo periodo de la señal (ver próxima transparencia).

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.12 Función de densidad espectral

$$F_n = \frac{1}{T} F(\omega) |_{\omega=n\omega_0}$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right) e^{jn\omega_0 t} \quad F(\omega) = A\tau \text{Sa}\left(\frac{n\omega\tau}{2}\right)$$

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.12 Función de densidad espectral

- Dada $f(t)$, la transformada existe si se satisfacen las condiciones de Dirichlet para todo $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$
 - $f(t)$ tiene un n° finito de máximos y mínimos en $[t_1, t_2]$
 - $f(t)$ tiene un n° finito de discontinuidades en $[t_1, t_2]$
 - $f(t)$ es absolutamente integrable en $\mathbb{R}$
- Las condiciones anteriores siempre se cumplen para señales de energía finita en $\mathbb{R}$

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.13 Teorema de Parseval

- La energía total disipada por una señal $f(\cdot)$ es:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f^*(t) dt$$
- Si se expresa $f^*(t)$ en términos de $F^*(\omega)$:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\omega) e^{-j\omega t} d\omega \right] dt$$
- Cambiando el orden de integración:

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\omega) \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \right]}_{F(\omega)} d\omega$$

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.13 Teorema de Parseval

$$E = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt}_{\text{Contribución del tiempo } t \text{ a la energía}} = \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega}_{\text{Contribución de la frecuencia } \omega \text{ a la energía}}$$

- La energía de una señal se puede calcular tanto en el dominio del tiempo como en el dominio de la frecuencia
- Se puede calcular la energía contenida en una banda de frecuencias $[\omega_1, \omega_2]$

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.14 Transformadas que incluyen a $\delta(t)$

- Las transformadas de algunas señales de potencia (es decir, de energía infinita) no se pueden calcular usando la integral, por lo que deben calcularse de modo indirecto.
- Función impulso: $\mathfrak{Z}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = e^{j0} = 1$

$$\mathfrak{Z}\{\delta(t - t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t_0}$$
 - La transformada de un impulso tiene amplitud constante para todo ω y fase lineal. Espectro “blanco”.

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.14 Transformadas que incluyen a $\delta(t)$

$F(\omega) = \mathfrak{Z}\{\delta(t - t_0)\} = e^{-j\omega t_0}$

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.14 Transformadas que incluyen a $\delta(t)$

- Exponencial complejo: Su transformada se calcula de modo indirecto.

$$\mathfrak{T}^{-1}\{\delta(\omega - \omega_0)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} e^{j\omega_0 t}$$

$$\mathfrak{T}\{\mathfrak{T}^{-1}\{\delta(\omega - \omega_0)\}\} = \frac{1}{2\pi} \mathfrak{T}\{e^{j\omega_0 t}\} = \delta(\omega - \omega_0)$$

$$\Rightarrow \mathfrak{T}\{e^{j\omega_0 t}\} = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

- Esto permite calcular las transformadas de las sinusoides.

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.14 Transformadas que incluyen a $\delta(t)$

- Sinusoides: $\mathfrak{T}\{e^{j\omega_0 t}\} = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$

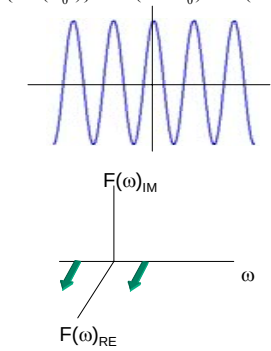
$$\Rightarrow \mathfrak{T}\{\cos(\omega_0 t)\} = \mathfrak{T}\left\{\frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}\right\} = \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$$

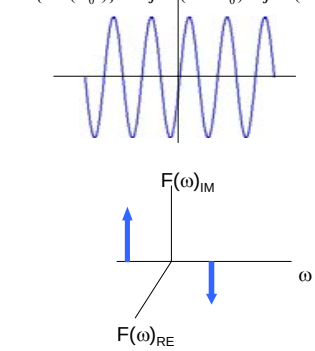
$$\Rightarrow \mathfrak{T}\{\sin(\omega_0 t)\} = \mathfrak{T}\left\{\frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}\right\} = \frac{\pi\delta(\omega - \omega_0) - \pi\delta(\omega + \omega_0)}{j}$$

- El espectro de una senoide son 2 impulsos localizados en ω_0 y $-\omega_0$.

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.14 Transformadas que incluyen a $\delta(t)$

$\mathfrak{T}\{\cos(\omega_0 t)\} = \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$


$\mathfrak{T}\{\sin(\omega_0 t)\} = -j\pi\delta(\omega - \omega_0) + j\pi\delta(\omega + \omega_0)$


EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.14 Transformadas que incluyen a $\delta(t)$

- Función signo: $\text{sgn}(x) = \frac{x}{|x|}$
 - No es absolutamente integrable
 - Se calcula de modo indirecto

$$\mathfrak{T}\{\text{sgn}(x)\} = \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|t|} \text{sgn}(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$\mathfrak{T}\{\text{sgn}(x)\} = \lim_{a \rightarrow 0} - \int_{-\infty}^0 e^{(a-j\omega)t} dt + \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{-2j\omega}{a^2 + \omega^2}$$

$$\mathfrak{T}\{\text{sgn}(x)\} = \frac{2}{j\omega}$$

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.14 Transformadas que incluyen a $\delta(t)$

- Escalón:

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x) \Rightarrow \mathfrak{F}\{u(t)\} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$


The figure shows two plots. On the left, the unit step function $u(t)$ is plotted against t , showing a constant value of 0 for $t < 0$ and 1 for $t > 0$. On the right, the Fourier transform components are plotted against ω . The real part $F(\omega)_{\text{RE}}$ is shown as a blue curve that is zero for $\omega > 0$ and $1/\omega$ for $\omega < 0$. The imaginary part $F(\omega)_{\text{IM}}$ is shown as a green curve that is π for $\omega > 0$ and $-\pi$ for $\omega < 0$, representing the Dirac delta function.

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

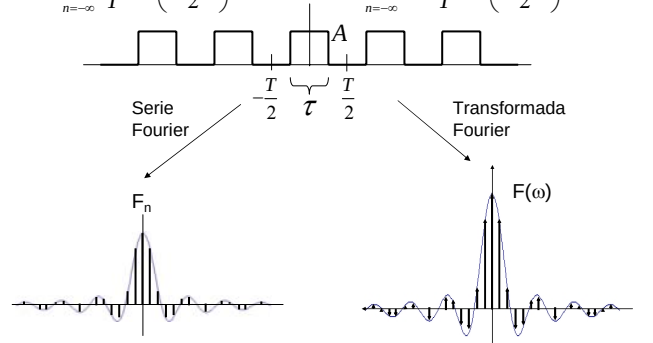
2.14 Transformadas que incluyen a $\delta(t)$

- Funciones periódicas
 - Se pueden expresar como serie de Fourier
 - Cada término de la serie contribuye con un impulso
- Se pueden representar como serie de Fourier o como transformada que incluye impulsos

$$\mathfrak{F}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi F_n \delta(\omega - n\omega_0)$$

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.14 Transformadas que incluyen a $\delta(t)$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A\tau}{T} \operatorname{Sa}\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right) e^{jn\omega_0 t}, \quad F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi \frac{A\tau}{T} \operatorname{Sa}\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right) \delta(\omega - n\omega_0)$$


The figure illustrates the Fourier series and transform of a periodic pulse train. At the top, a pulse train $f(t)$ is shown with period T and pulse width τ . Below it, the Fourier series coefficients F_n are plotted against n , showing a sinc-like envelope. To the right, the Fourier transform $F(\omega)$ is plotted against ω , showing a series of impulses at $\omega = n\omega_0$ with heights $2\pi F_n$. Arrows labeled 'Serie Fourier' and 'Transformada Fourier' point from the pulse train to the respective plots.

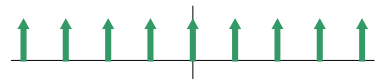
EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.14 Transformadas que incluyen a $\delta(t)$

- Tren de impulsos, “peineta”

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T}$$

$$\Rightarrow \delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t}$$


The figure shows a train of impulses $\delta_T(t)$ plotted against t . The impulses are represented by green vertical arrows of equal height, spaced at intervals of T .

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.14 Transformadas que incluyen a $\delta(t)$

$e^{-at}u(t)$	$1/(a + j\omega)$
$te^{-at}u(t)$	$1/(a + j\omega)^2$
$e^{- a t}$	$2a/(a^2 + \omega^2)$
$e^{-t^2/(2\sigma^2)}$	$\sigma\sqrt{2\pi}e^{-\sigma^2\omega^2/2}$
$\text{sgn}(t)$	$2/(j\omega)$
$j/(\pi)$	$\text{sgn}(\omega)$

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.14 Transformadas que incluyen a $\delta(t)$

$u(t)$	$\pi\delta(\omega) + 1/(j\omega)$
$\delta(t)$	1
1	$2\pi\delta(\omega)$
$e^{\pm j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega \mp \omega_0)$
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$
$\sin(\omega_0 t)$	$-j\pi[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.14 Transformadas que incluyen a $\delta(t)$

$\text{rect}(t/\tau)$	$\tau \text{Sa}(\omega\tau/2)$
$\frac{W}{2\pi} \text{Sa}\left(\frac{W\tau}{2}\right)$	$\text{rect}(\omega/W)$
$\Lambda(t/\tau)$	$\tau \text{Sa}^2(\omega\tau/2)$
$\frac{W}{2\pi} \text{Sa}^2(W\tau/2)$	$\Lambda(\omega/W)$
$\cos(\pi t/\tau) \text{rect}(t/\tau)$	$\frac{2\tau}{\pi} \frac{\cos(\omega\tau/2)}{1 - (\omega\tau/\pi)^2}$
$\frac{2W}{\pi^2} \frac{\cos(W\tau)}{1 - (2W\tau/\pi)^2}$	$\Lambda(\omega/W)$
$\delta_T(t)$	$\omega_0 \delta_{\omega_0}(\omega)$

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.15 Propiedades de la transformada de Fourier

- Linealidad (debido a que es una integral)

$$\mathfrak{T}\{a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\} = a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega)$$
- Conjugadas complejas

$$\mathfrak{T}\{f^*(t)\} = F^*(-\omega)$$
 - Si f es real, $F^*(-\omega) = F(\omega)$
 - Se prueba directamente calculando

$$\mathfrak{T}\{f^*(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t) e^{-j\omega t} dt = \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{j\omega t} dt \right)^*$$

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.15 Propiedades de la transformada de Fourier

- Simetría: Cualquier función es la suma de una parte par más una impar

$$\mathfrak{F}\{f_{PAR}(t)\} = F_{PAR}(\omega) \text{ real}$$

$$\mathfrak{F}\{f_{IMPAR}(t)\} = F_{IMPAR}(\omega) \text{ imaginario}$$
- Por ejemplo, para la función par:

$$\mathfrak{F}\{f_{PAR}(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f_{PAR}(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_{PAR}(t) \cos(\omega t) dt - j \int_{-\infty}^{\infty} f_{PAR}(t) \sin(\omega t) dt$$

$$= 2 \int_0^{\infty} f_{PAR}(t) \cos(\omega t) dt \text{ que es par}$$

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.15 Propiedades de la transformada de Fourier

- Dualidad

$$\text{si } \mathfrak{F}\{f(t)\} = F(\omega)$$

$$\Rightarrow \mathfrak{F}\{F(t)\} = 2\pi f(-\omega)$$

– Para probarlo basta hacer un cambio de variables entre t y ω en la transformada

$$\mathfrak{F}\{f(t)\} = \int_{t=-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{\omega'=-\infty}^{\infty} f(\omega') e^{-j t' \omega'} d\omega' = 2\pi \mathfrak{F}^{-1}\{f(-\omega')\}_{\omega'=t}$$

$\omega' = t$
 $t' = \omega$

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.15 Propiedades de la transformada de Fourier

- Ejemplo

– Si se sabe que $\mathfrak{F}\{\text{rect}(t)\} = \text{Sa}(\omega/2)$, calcular $\mathfrak{F}\{\text{Sa}(t/2)\}$

$$\mathfrak{F}\{\text{Sa}(t/2)\} = 2\pi \text{rect}(-\omega) = 2\pi \text{rect}(\omega)$$

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.15 Propiedades de la transformada de Fourier

- Escala de Coordenadas

$$\mathfrak{F}\{f(\alpha t)\} = \frac{1}{|\alpha|} F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$$
- Prueba: 2 casos: α positivo y α negativo

$$\mathfrak{F}\{f(\alpha t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega x/a} dx / \alpha = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$$

$$\mathfrak{F}\{f(\alpha t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha t) e^{-j\omega t} dt = \int_{\infty}^{-\infty} f(x) e^{-j\omega x/a} dx / \alpha = \frac{1}{-\alpha} F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$$

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.15 Propiedades de la transformada de Fourier

- Si $f(t)$ se vuelve ancho, $F(\omega)$ se vuelve angosto y viceversa:

$\alpha = \frac{1}{2}$:

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.15 Propiedades de la transformada de Fourier

- Desplazamiento en el tiempo (retardo)

$$\Im\{f(t - t_0)\} = F(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

$$\Im\{f(t - t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j\omega(x+t_0)} dx$$

- Al retardar la señal, la amplitud del espectro no varía, pero su fase si $\Rightarrow$ información temporal en la fase.

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.15 Propiedades de la transformada de Fourier

- Ej: Determinar la transformada de:

$$\Im\{f(t)\} = \Im\{\text{rect}[(t + \tau/2)/\tau] - \text{rect}[(t - \tau/2)/\tau]\}$$

$$= \tau \text{Sa}(\omega\tau/2)\{e^{j\omega\tau/2} - e^{-j\omega\tau/2}\} = j(4/\omega)\text{sen}^2(\omega\tau/2)$$

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.15 Propiedades de la transformada de Fourier

- Desplazamiento de frecuencia (modulación)

- Es la propiedad dual a la del retardo

$$\Im\{f(t)e^{j\omega_0 t}\} = F(\omega - \omega_0)$$

$$\Im\{f(t)e^{j\omega_0 t}\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j\omega_0 t}e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt$$

- También ocurre con $\cos(\cdot)$

$$\Im\{f(t)\cos(\omega_0 t)\} = \Im\left\{\frac{1}{2}f(t)e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}f(t)e^{-j\omega_0 t}\right\} = \frac{1}{2}F(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}F(\omega + \omega_0)$$

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

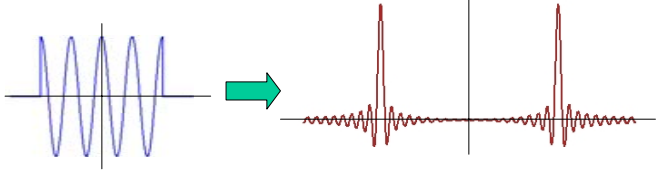
2.15 Propiedades de la transformada de Fourier

- Ej: hallar el espectro de:

$$\Im\{A \text{rect}(t/\tau) \cos(\omega_0 t)\} =$$

$$= \frac{A}{2} \Im\{\text{rect}(t/\tau) e^{j\omega_0 t}\} + \frac{A}{2} \Im\{\text{rect}(t/\tau) e^{-j\omega_0 t}\}$$

$$= \frac{A}{2} \tau \text{Sa}\left(\tau \frac{\omega - \omega_0}{2}\right) + \frac{A}{2} \tau \text{Sa}\left(\tau \frac{\omega + \omega_0}{2}\right)$$



EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.15 Propiedades de la transformada de Fourier

- Derivación

$$\Im\left\{\frac{d}{dt} f(t)\right\} = j\omega F(\omega)$$
- Porque:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$\frac{d}{dt} f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) j\omega e^{j\omega t} d\omega = \Im^{-1}\{F(\omega) j\omega\}$$

$$\Im\left\{\frac{d}{dt} f(t)\right\} = F(\omega) j\omega$$

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.15 Propiedades de la transformada de Fourier

- Integración:

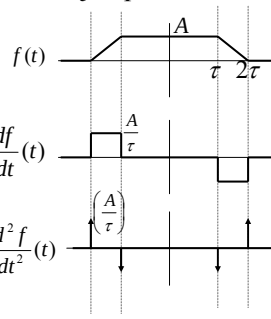
$$\Im\left\{\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau\right\} = \frac{1}{j\omega} F(\omega) + \pi F(0) \delta(\omega)$$
- donde:

$$F(0) = \int_{t=-\infty}^{\infty} f(t) dt$$

es la componente continua de la señal.

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.15 Propiedades de la transformada de Fourier

- Ejemplo: Determinar la transformada de $f(t)$:


$$\Im\left\{\frac{d^2 f}{dt^2}(t)\right\} = (j\omega)^2 F(\omega)$$

$$(j\omega)^2 F(\omega) = \frac{A}{\tau} (e^{j2\omega\tau} - e^{j\omega\tau} - e^{-j\omega\tau} + e^{-j2\omega\tau})$$

$$F(\omega) = -\frac{A(e^{j2\omega\tau} - e^{j\omega\tau} - e^{-j\omega\tau} + e^{-j2\omega\tau})}{\omega^2 \tau}$$

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.15 Propiedades de la transformada de Fourier

- Convolución en el tiempo
 - Se denomina convolución entre dos funciones a la siguiente operación:

$$f(t) * h(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

- Se cumple la propiedad:

$$\mathfrak{F}\{f(t) * h(t)\} = F(\omega)H(\omega)$$

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.15 Propiedades de la transformada de Fourier

$$\mathfrak{F}\{f(t) * h(t)\} = \int_{t=-\infty}^{\infty} \left(\int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau \right) e^{-j\omega t} dt$$

- Cambiando el orden de integración:

$$\mathfrak{F}\{f(t) * h(t)\} = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau) \left(\int_{t=-\infty}^{\infty} h(t-\tau)e^{-j\omega t} dt \right) d\tau$$

$$\mathfrak{F}\{f(t) * h(t)\} = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau) \mathfrak{F}\{h(t-\tau)\} d\tau$$

- Propiedad de desplazamiento en el tiempo:

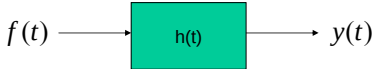
$$\mathfrak{F}\{f(t) * h(t)\} = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)H(\omega)e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$\mathfrak{F}\{f(t) * h(t)\} = H(\omega)F(\omega)$$

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.15 Propiedades de la transformada de Fourier

- Si el sistema es lineal y $h(t)$ es la respuesta al impulso, se cumple:



$$y(t) = f(t) * h(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$Y(\omega) = F(\omega)H(\omega)$

 con $H(\omega) = \mathfrak{F}\{h(t)\}$

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.15 Propiedades de la transformada de Fourier

- Convolución en la frecuencia: Si

$$\mathfrak{F}\{f_1(t)\} = F_1(\omega), \quad \mathfrak{F}\{f_2(t)\} = F_2(\omega)$$

$$\Rightarrow \mathfrak{F}\{f_1(t)f_2(t)\} = \frac{1}{2\pi} [F_1(\omega) * F_2(\omega)]$$

- Se prueba de forma semejante a la convolución en el tiempo



EL3005 – Señales y sistemas I

Prof. Néstor Becerra Yoma

2.15 Propiedades de la transformada de Fourier

Linealidad (superposición)	$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$	$a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega)$
Conjugada compleja	$f^*(t)$	$F^*(-\omega)$
Escala	$f(\alpha t)$	$\frac{1}{ \alpha } F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$
Retardo	$f(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0} F(\omega)$
Traslación en frecuencia	$e^{j\omega_0 t} f(t)$	$F(\omega - \omega_0)$



EL3005 – Señales y sistemas I

Prof. Néstor Becerra Yoma

2.15 Propiedades de la transformada de Fourier

Modulación de amplitud	$f(t) \cos(\omega_0 t)$	$\frac{1}{2} F(\omega + \omega_0) + \frac{1}{2} F(\omega - \omega_0)$
Convolución en el tiempo	$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t - \tau) d\tau$	$F(\omega) H(\omega)$
Convolución en la frecuencia	$f_1(t) f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(u) F_2(\omega - u) du$
Dualidad tiempo - frecuencia	$F(t)$	$2\pi f(-\omega)$
Simetría par - impar	$f_{PAR}(t)$	$F_{PAR}(\omega) \text{ real}$
	$f_{IMPAR}(t)$	$F_{IMPAR}(\omega) \text{ imaginario}$



EL3005 – Señales y sistemas I

Prof. Néstor Becerra Yoma

2.15 Propiedades de la transformada de Fourier

Derivación en el tiempo	$\frac{d}{dt} f(t)$	$j\omega F(\omega)$
Integración en el tiempo	$\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$	$\frac{1}{j\omega} F(\omega) + \pi F(0) \delta(\omega)$

Como las transformadas de Fourier se obtienen a partir de las series de Fourier, las propiedades de una son aplicables a la otra cambiando ω por $n\omega_0$.



EL3005 – Señales y sistemas I

Prof. Néstor Becerra Yoma

2.16 Relaciones de convolución

- La convolución se define por:
$$f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t - \tau) d\tau$$
- Si el sistema es causal, entonces $h(t)=0$ para $t<0$ ($h(t)$ es la respuesta al impulso $\delta(t)$)
- Si además la entrada $f(\cdot)$ cumple $f(t)=0$ para $t<0$, la convolución se puede reescribir:
$$f(t) * h(t) = \int_{\tau=0}^t f(\tau) h(t - \tau) d\tau$$

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.16 Relaciones de convolución

- Propiedades: conmutatividad

$$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$$
- Distributividad

$$f_1(t) * (f_2(t) + f_3(t)) = f_1(t) * f_2(t) + f_1(t) * f_3(t)$$
- Asociatividad: no se requieren ()

$$(f_1(t) * f_2(t)) * f_3(t) = f_1(t) * (f_2(t) * f_3(t)) = f_1(t) * f_2(t) * f_3(t)$$

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.16 Relaciones de convolución

- Respuesta al escalón: La respuesta al escalón es la integral de la respuesta al impulso para un sistema lineal invariante:

$$\Re\{u(t)\} = u(t) * h(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} u(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{\tau=0}^{\infty} h(t-\tau)d\tau$$
- Haciendo $x=t-\tau$.

$$\Re\{u(t)\} = \int_{x=-\infty}^t h(x)dx$$

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.16 Relaciones de convolución

- La respuesta al impulso puede determinarse derivando la respuesta al escalón
- La respuesta al escalón puede determinarse, usando una onda cuadrada lenta, en los flancos positivos:

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.16 Relaciones de convolución

- Convolución con impulso => retraso

$$f(t) * \delta(t-t_0) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-t_0-\tau)d\tau = f(t-t_0)$$
- Ejemplo: Calcular $f(t) * g(t)$ si

$$f(t) = A \sin(\pi t) \cdot u(t), \quad g(t) = \delta(t) - \delta(t-2)$$

$$f(t) * g(t) = f(t) * \delta(t) - f(t) * \delta(t-2)$$

$$= f(t) - f(t-2) = A \sin(\pi t)u(t) - A \sin(\pi(t-2))u(t)$$

$$= A \sin(\pi t)(u(t) - u(t-2))$$

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.17 Interpretación gráfica de la convolución

- La convolución se define por la integral:
$$f(t) * h(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau$$
- Se quiere ver qué significa en el dominio del tiempo de un modo intuitivo.
- $h(t)$, al ser invertido en el eje horizontal se comporta como un promediador móvil: permite calcular un “promedio ponderado” de la entrada en cada t :

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.17 Interpretación gráfica de la convolución

Ahora, $h(\cdot)$ se desplazará en t

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.17 Interpretación gráfica de la convolución

Promediador móvil

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.17 Interpretación gráfica de la convolución

El promediador avanza al pasar el tiempo. La salida en el tiempo t es el área común que resulta al multiplicarlos.

Promediador móvil

$$f(t) * h(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau, \forall t$$

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.17 Interpretación gráfica de la convolución

- La salida, en el dominio del tiempo, es un promedio ponderado de la señal de entrada. El promediador avanza junto con t
- El cálculo de la integral puede discretizarse => permite cálculo en un computador

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.18 Característica de filtro de los sistemas lineales

- La salida de un sistema lineal se puede ver también en el dominio de la frecuencia:

$$y(t) = f(t) * h(t)$$

$$Y(\omega) = F(\omega)H(\omega)$$
- $H(\omega)$ indica la ganancia del filtro en función de la frecuencia => función de transferencia
- A la salida, sólo quedan las frecuencias de $F(\omega)$ que están también en $H(\omega)$

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.18 Característica de filtro de los sistemas lineales

- Para cada frecuencia ω :
 - $|H(\omega)|$: ganancia de amplitud
 - Fase de $H(\omega)$: desfase entre salida y entrada. A la fase de la entrada se le suma la fase de $H(\omega)$
- Ejemplo: calcular el espectro de salida si $\tau=4RC$:

$$F(\omega) = \tau \text{Sa}(\omega\tau/2)$$

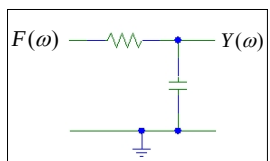
$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau/4)^2}} e^{j\phi}$$

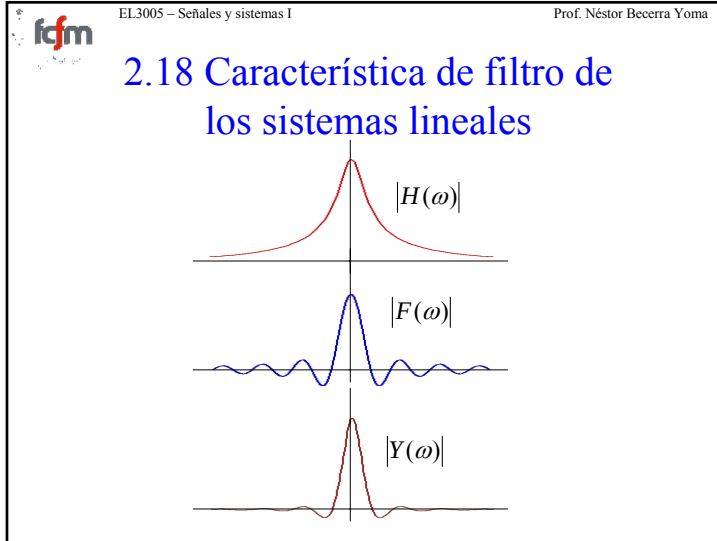
EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.18 Característica de filtro de los sistemas lineales

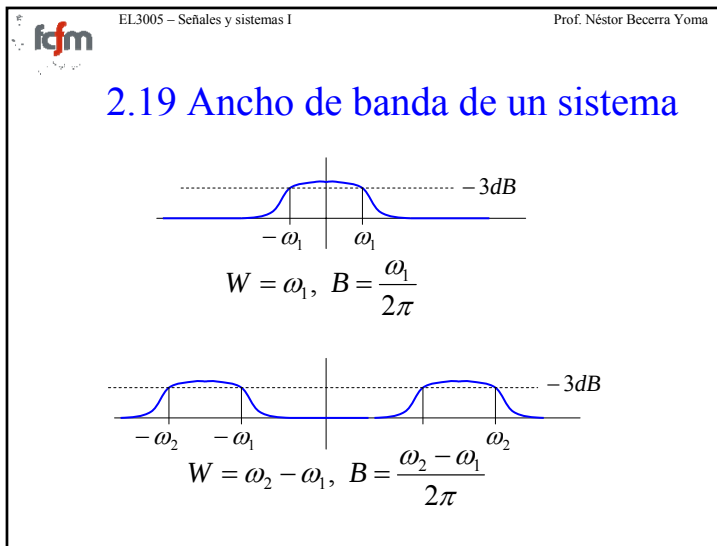
$$F(\omega) = \tau \text{Sa}(\omega\tau/2)$$

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau/4)^2}} e^{j\phi}$$

$$Y(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau/4)^2}} \tau \text{Sa}(\omega\tau/2) e^{j\phi}$$




- EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma
- ## 2.19 Ancho de banda de un sistema
- Zona en que $H(\omega)$ deja pasar la señal $\Rightarrow$ ancho de banda
 - Intervalo W (en rad/s) donde la magnitud es mayor que un cierto umbral (factor numérico)
 - Típicamente: ancho de banda de -3dB = ancho de banda de potencia media: umbral = $1/\sqrt{2}$ en amplitud = $1/2$ en potencia.
 - Ancho de banda en Hz $\Rightarrow B$



- EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma
- ## 2.20 Transmisión sin distorsión
- Requisito para que un sistema lineal no distorsione la forma de onda: debe ser del tipo:

$$y(t) = Kf(t - t_0)$$
 - Tomando transformada de Fourier:

$$Y(\omega) = Ke^{-j\omega t_0} F(\omega)$$
 - Es decir,

$$H(\omega) = Ke^{-j\omega t_0}$$

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.20 Transmisión sin distorsión

- Requisito para que un sistema lineal no distorsione la forma de onda: debe tener ganancia constante y fase lineal

$$H(\omega) = Ke^{-j\omega t_0}$$

- Ganancia K para todo ω
- Fase: $\phi_H = -t_0\omega$

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.21 Modulación de amplitud: portadora suprimida

- Radio y televisión:
 - Se requiere transmitir muchas señales con espectros semejantes por un mismo canal (el aire) evitando superposición
 - Se requiere transmitir dichas señales en ciertas bandas de frecuencia específicas (ej: para sintonizar un canal o una radio)
- Solución: modulación

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.21 Modulación de amplitud: portadora suprimida

- La ecuación general de una señal senoidal es:

$$\phi(t) = a(t) \cos \theta(t)$$

$a(t)$: amplitud

$\theta(t)$: ángulo
- El ángulo se puede expresar en función de una frecuencia y una fase:

$$\phi(t) = a(t) \cos(\omega_c t + \gamma(t))$$
- Se supone que $a(t)$ y $\gamma(t)$ varían lentamente comparados con $\omega_c t$

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.21 Modulación de amplitud: portadora suprimida

$a(t)$: envolvente

ω_c : portadora

$\phi(t) = a(t) \cos(\omega_c t + \gamma(t))$

$\gamma(t)$: modulación de fase

- En la modulación de amplitud, la modulación de fase es cero (o constante):

$\phi(t) = f(t) \cos(\omega_c t)$

$\cos(\omega_c t)$: señal portadora
 $f(t)$: señal moduladora
 $\phi(t)$: señal modulada

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.21 Modulación de amplitud: portadora suprimida

- Aplicando la propiedad de modulación, se tiene que:

$$\phi(t) = f(t) \cos(\omega_c t) \Rightarrow \Phi(\omega) = \frac{1}{2} F(\omega + \omega_0) + \frac{1}{2} F(\omega - \omega_0)$$

- La modulación de amplitud traslada el espectro de frecuencia dejando inalterada su forma
- Portadora suprimida $\Rightarrow$ no aparece una portadora identificable (un impulso visible) en el espectro

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.21 Modulación de amplitud: portadora suprimida

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.21 Modulación de amplitud: portadora suprimida

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.21 Modulación de amplitud: portadora suprimida

- El ancho de banda necesario para transmitir se duplica:

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.21 Modulación de amplitud: portadora suprimida

- Bandas laterales superior e inferior: corresponden a los lados derecho e izquierdo del espectro original, “simetría conjugada”

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.21 Modulación de amplitud: portadora suprimida

- DSB-SC (double sideband, suppressed carrier)
 - Tiene 2 bandas laterales (superior e inferior)
 - No tiene portadora explícita (impulso)
- Recuperación de la señal original volviendo a modular del mismo modo, más un filtro pasabajos.

$$\phi(t) \cos(\omega_c t) = f(t) \cos^2(\omega_c t)$$

$$\phi(t) \cos(\omega_c t) = \frac{1}{2} f(t) + \frac{1}{2} f(t) \cos(2\omega_c t)$$

$$\mathfrak{T}\{\phi(t) \cos(\omega_c t)\} = \frac{1}{2} F(\omega) + \frac{1}{4} F(\omega + 2\omega_c) + \frac{1}{4} F(\omega - 2\omega_c)$$

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.21 Modulación de amplitud: portadora suprimida

$$\mathfrak{T}\{\phi(t) \cos(\omega_c t)\} = \frac{1}{2} F(\omega) + \frac{1}{4} F(\omega + 2\omega_c) + \frac{1}{4} F(\omega - 2\omega_c)$$

- Con un pasabajos se deja sólo $F(\omega)$

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.21 Modulación de amplitud: portadora suprimida

- Para demodular se debe conocer tanto la frecuencia correcta como la fase correcta.
 - Error en la fase $\Rightarrow$ señal atenuada
 - Error en la frecuencia $\Rightarrow$ distorsión de la señal

$$\phi(t) \cos((\omega_c + \Delta\omega)t + \Delta\theta) = f(t) \cos(\omega_c t) \cos((\omega_c + \Delta\omega)t + \Delta\theta)$$

$$\phi(t) \cos((\omega_c + \Delta\omega)t + \Delta\theta) = \frac{1}{2} f(t) \cos(\Delta\omega t + \Delta\theta) + \frac{1}{2} f(t) \cos((2\omega_c + \Delta\omega)t + \Delta\theta)$$

- Tras el pasabajos:

$$\phi(t) \cos((\omega_c + \Delta\omega)t + \Delta\theta) = \frac{1}{2} f(t) \cos(\Delta\omega t + \Delta\theta)$$

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.21 Modulación de amplitud: portadora suprimida

- Requiere sincronización muy precisa
- Poco robusto ante errores $\Delta\omega$, $\Delta\theta$.
- Multiplexión en cuadratura: Como $\cos(\cdot)$ y $\sin(\cdot)$ son ortogonales, se pueden transmitir 2 señales a la vez

$$\phi(t) = f(t) \cos(\omega_c t) + g(t) \sin(\omega_c t)$$

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.21 Modulación de amplitud: portadora suprimida

$$\phi(t) = f(t) \cos(\omega_c t) + g(t) \sin(\omega_c t)$$

$$\phi(t) \cos(\omega_c t) = f_1(t) \cos^2(\omega_c t) + f_2(t) \sin(\omega_c t) \cos(\omega_c t)$$

$$\phi(t) \cos(\omega_c t) = \frac{1}{2} f_1(t) + \frac{1}{2} f_1(t) \cos(2\omega_c t) + \frac{1}{2} f_2(t) \sin(2\omega_c t)$$

$$\phi(t) \sin(\omega_c t) = f_1(t) \cos(\omega_c t) \sin(\omega_c t) + f_2(t) \sin^2(\omega_c t)$$

$$\phi(t) \sin(\omega_c t) = \frac{1}{2} f_2(t) + \frac{1}{2} f_1(t) \sin(2\omega_c t) - \frac{1}{2} f_2(t) \cos(2\omega_c t)$$

- Al filtrar pasabajos, se recuperan las señales originales separadas.

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.21 Modulación de amplitud: portadora suprimida

- Para asegurar sincronismo se usa un circuito llamado PLL (phase locked loop, lazo cerrado de fase), que genera una senoide cuya frecuencia va siguiendo a la de la entrada. Se compone de un detector de desfase y un oscilador cuya frecuencia es proporcional al voltaje que entra.

$f(t) \cos(\theta_1(t)) \rightarrow \text{Detector de fase} \xrightarrow{\Delta\theta} \text{Oscilador VCO} \rightarrow \cos(\theta_2(t))$
 $\frac{d}{dt} \theta_2 = \theta_1 - \theta_2$
 $\frac{d}{dt} \omega_2 = \omega_1 - \omega_2$

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.22 Modulación de amplitud: gran portadora

- Transmisión AM comercial: problema de sincronización exacta poco deseable $\Rightarrow$ sistema de modulación alternativo, no requiere sincronización
- Se agrega una componente continua a la señal antes de multiplicarla por $\cos(\cdot)$ para que sea siempre positiva
- La forma de la señal original es evidente en la señal final $\Rightarrow$ demodulación simple

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.22 Modulación de amplitud: gran portadora

Diagram illustrating the modulation process for a large carrier. The input signal $A + f(t)$ is multiplied by the carrier $\cos(\omega_0 t)$ to produce the modulated signal $\phi(t)$, which is then transmitted by an antenna.

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.22 Modulación de amplitud: gran portadora

$$\phi_{AM}(t) = (A + f(t))\cos(\omega_c t)$$

$$\phi_{AM}(t) = A\cos(\omega_c t) + f(t)\cos(\omega_c t)$$

$$\Phi_{AM}(\omega) = \frac{1}{2}F(\omega + \omega_c) + \frac{1}{2}F(\omega - \omega_c) + \pi A\delta(\omega + \omega_c) + \pi A\delta(\omega - \omega_c)$$

DSB-LC: doble banda lateral, con portadora explícita (impulsos)

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.22 Modulación de amplitud: gran portadora

- La demodulación se puede realizar simplemente con un detector de envoltura (un diodo con un circuito RC)

Diagram illustrating the demodulation process using an envelope detector (a diode and an RC circuit). The input signal is processed to extract the envelope, which is then compared to the original modulated signal.

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.22 Modulación de amplitud: gran portadora

- El transmitir el carrier significa gasto extra de potencia para transmitir la señal.
- Se requiere que la componente continua sea mayor que la amplitud de la señal
- Razón de eficiencia entre la potencia de la señal y la potencia total transmitida.

$$\phi_{AM}(t) = (A + f(t))\cos(\omega_c t)$$

$$\overline{\phi_{AM}^2(t)} = A^2 \overline{\cos^2(\omega_c t)} + \overline{f^2(t) \cos^2(\omega_c t)} = \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{2}\overline{f^2(t)}$$

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.22 Modulación de amplitud: gran portadora

$$\overline{\phi_{AM}^2(t)} = \frac{1}{2} A^2 + \frac{1}{2} \overline{f^2(t)}$$

$$\mu = \frac{P_{señal}}{P_{total}} = \frac{\overline{f^2(t)}}{A^2 + \overline{f^2(t)}}, |f(t)|_{MAX} < A$$

- Si $f(t) = mA \cos(\omega_0 t)$, $m < 1$ (índice de modulación)

$$\overline{f^2(t)} = \frac{m^2 A^2}{2} \Rightarrow \mu = \frac{m^2}{2 + m^2} < 33\%$$

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.22 Modulación de amplitud: gran portadora

- Ej: Una estación de radio AM transmite una potencia portadora de 40kW y usa un índice de modulación de 0.707. Calcular la potencia de salida

portadora $\Rightarrow$ potencia $\frac{1}{2} A^2 = 40kW$

$f(t) \Rightarrow$ potencia $\frac{1}{2} m^2 (A^2) = \frac{1}{2} \times 0.707^2 \times 80kW$

$f(t) \Rightarrow$ potencia 20kW

$A + f(t) \Rightarrow$ potencia 60kW

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

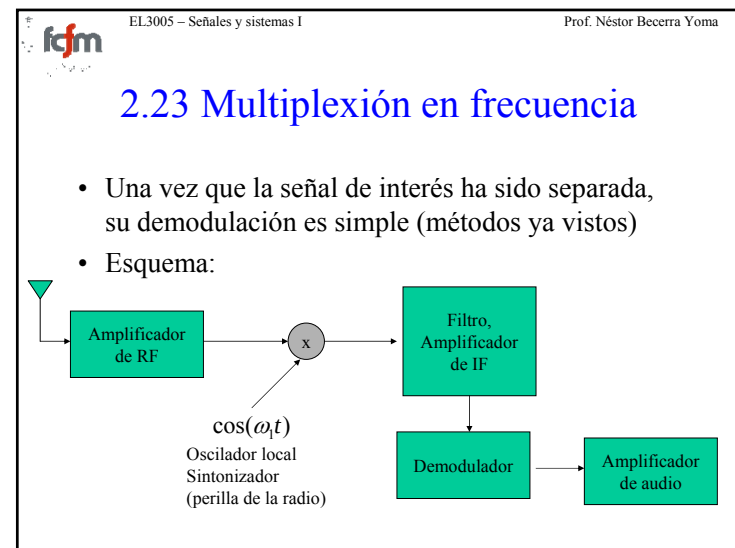
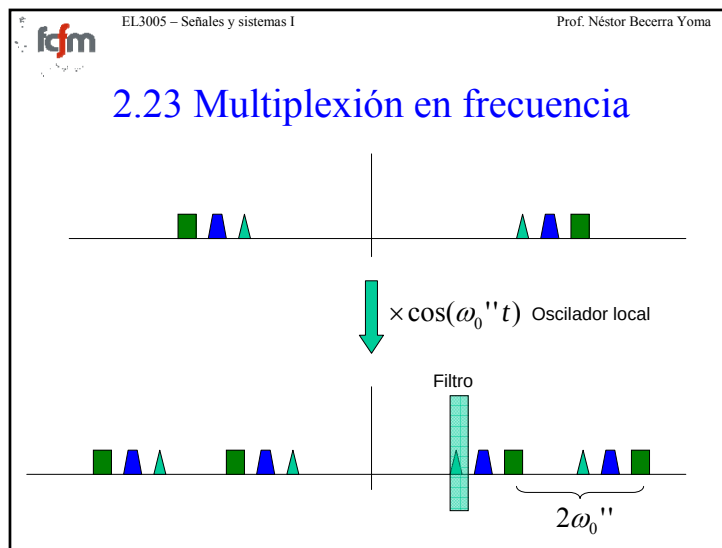
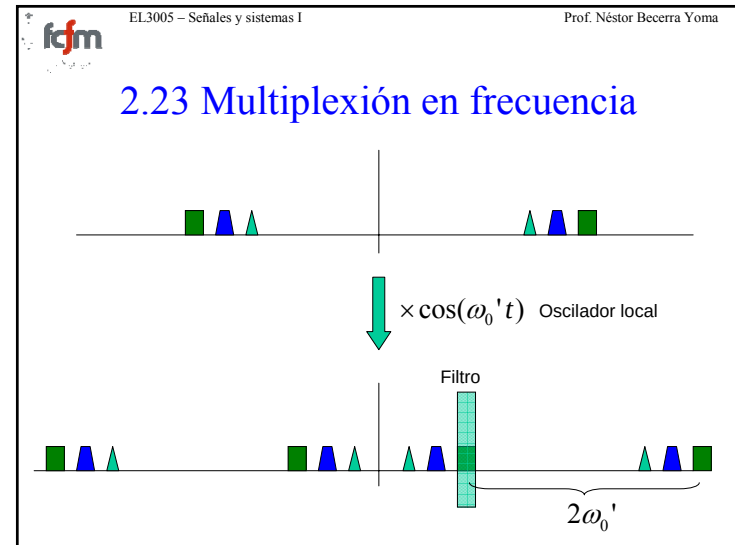
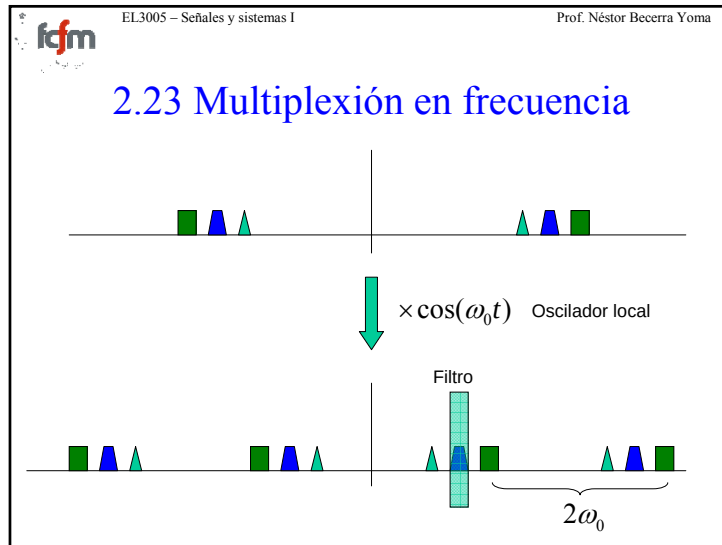
2.23 Multiplexión en frecuencia

- Es posible transmitir varias señales si se elige una frecuencia portadora distinta para cada una $\Rightarrow$ FDM (multiplexión por división en frecuencia)

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.23 Multiplexión en frecuencia

- Para poder recuperar alguna de las señales, es necesario ocupar primero un filtro pasabandas, Idea: que se pueda mover para sintonizar distintas señales
- Fabricar un “pasabandas móvil” no es simple: problema.
- Solución: filtro pasabandas fijo, se desplaza la señal de entrada para que la señal de interés quede en la banda de paso $\Rightarrow$ receptor superheterodino.



EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.24 Banda lateral única (SSB)

- A veces es molesto que se duplique el ancho de banda al modular AM
- Solución: eliminar una de las bandas laterales

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.24 Banda lateral única (SSB)

- Implementar este tipo de modulación es muy difícil, de hecho no se usa.

$$\phi_{SSB}(t) = f(t)\cos(\omega_c t) + \hat{f}(t)\sin(\omega_c t)$$

$$\hat{f}(t) = f(t) \text{ más } 90^\circ \text{ en cada frecuencia que contenga}$$

$$\hat{F}(\omega) = F(\omega)e^{j90^\circ} = jF(\omega)$$

- Sumarle 90° a cada frecuencia que contenga $f(t)$ es complicado.

EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.24 Banda lateral única (SSB)

- También se puede implementar de un modo “aproximado”: filtrando de modo que se elimine una de las bandas => como los filtros no son perfectos, la banda que debía quedar entera queda atenuada

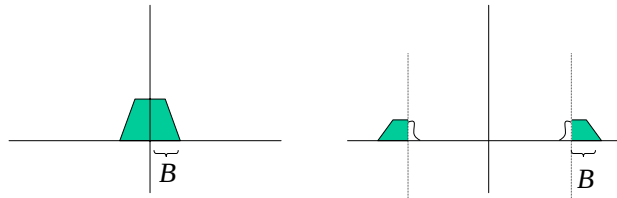
EL3005 – Señales y sistemas I Prof. Néstor Becerra Yoma

2.24 Banda lateral única (SSB)

- Se pueden demodular volviendo a multiplicar por $\cos(\omega_c t)$ y filtrando pasabajos (igual que en el primer caso)
- En el caso “aproximado”, las bajas frecuencias pueden quedar un poco atenuadas (mirar gráfico anterior)

2.25 Banda lateral residual (VSB)

- Aquí se elimina una de las bandas usando un filtro
=> una de las bandas queda entera, pero la otra no se elimina completamente => queda un residuo



2.25 Banda lateral residual (VSB)

- Se pueden demodular volviendo a multiplicar por $\cos(\omega_c t)$ y filtrando pasabajos (igual que en el primer caso)
- En este caso, las bajas frecuencias pueden quedar un poco amplificadas (mirar gráfico anterior)