

Señales y sistemas I

Capítulo II: Señales y sistemas de tiempo continuo

Profesor: Néstor Becerra Yoma

Agradecimientos:

Profesor Manuel Duarte Mermoud
(transformada de Laplace)

Enrique Guerrero Merino

Adio Stefoni Escudero

2.1 Transformada de Laplace

- Se define la transformada bilateral de Laplace como:

$$L\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

- A lo largo del curso solo se utilizará la transformada unilateral (uso de señales causales)

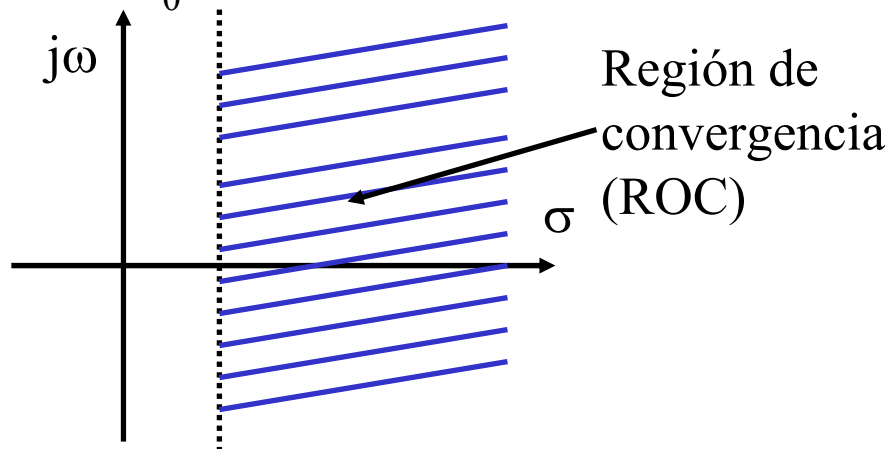
$$L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

2.1 Transformada de Laplace

- Teorema:

Sea $f(t)$ integrable en cada intervalo $a < t < b$, con $0 \leq a < b < \infty$ y c tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-ct} |f(t)|$ existe. Entonces la integral de Laplace converge uniformemente para $\text{Re}\{s\} > c$, es decir,

$$L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt < \infty, \text{ para } \text{Re}\{s\} > c$$



2.1 Transformada de Laplace

- Condiciones suficientes:
 - $f(t)$ es continua por trozos en el intervalo $[0, \infty)$
 - $f(t)$ es de orden exponencial c , es decir,
 $\forall t \in [0, \infty), e^{-ct} | f(t) | \leq M$

- Transformada inversa de Laplace

$$f(t) = L^{-1} \{ F(s) \} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} ds$$

2.1 Transformada de Laplace

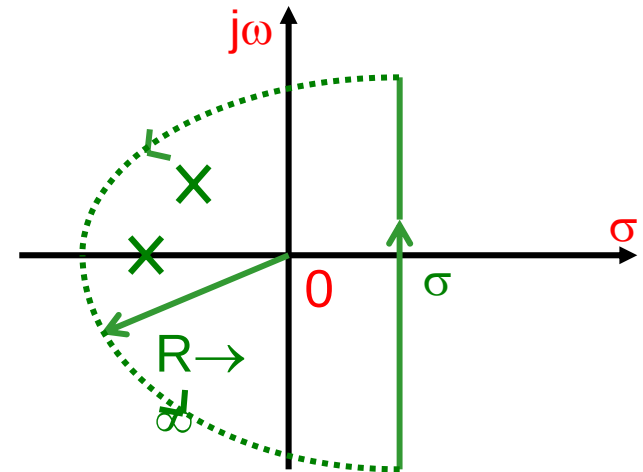
- Teorema del residuo:

Puede utilizarse para obtener la transformada inversa, pues, para una función compleja G ,

$$\oint_{\Gamma} G(s) ds = 2\pi j \sum_{i=1}^n \text{Res}(G, p_i)$$

- Aquí $\{p_1, \dots, p_n\}$ es el conjunto de los polos de $G(s)$ encerrados por la curva Γ .

- Para $f(t)$,
$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s) e^{st} ds = \sum_{i=1}^n \text{Res}(F(s) e^{st}, p_i)$$



2.1 Transformada de Laplace

- Descomposición en fracciones parciales

Polos reales simples (similar para polos complejos conjugados):

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} = \frac{N(s)}{(s+a)D'(s)}$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{A}{s+a} + \frac{B(s)}{D'(s)}$$

$$\text{Con } A = F(s)(s+a) \big|_{s=-a}$$

2.1 Transformada de Laplace

- Descomposición en fracciones parciales

Polos reales repetidos:

$$F(s) = \frac{N(s)}{(s+a)^p D'(s)}$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{A_p}{(s+a)^p} + \frac{A_{p-1}}{(s+a)^{p-1}} + \dots + \frac{A_1}{(s+a)} + \frac{B(s)}{D'(s)}$$

$$\text{Con } A_{p-k} = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{ds^k} [F(s)(s+a)^p] \Big|_{s=-a}$$

2.1 Transformada de Laplace

- Tabla de transformadas de Laplace

	$f(t)$	$F(s)$
1	$\delta(t)$	1
2	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
3	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
4	$\frac{t^n}{n!} e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^{n+1}}$
5	$\cos(\omega_0 t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$
6	$\text{sen}(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$
7	$e^{-at} \cos(\omega_0 t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$
8	$e^{-at} \text{sen}(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$

2.1 Transformada de Laplace

- Propiedades de la transformada de Laplace (I)

1	Linealidad	$L\{f(t) + g(t)\} = F(s) + G(s)$
2	Diferenciación temporal	$L\left\{\frac{d}{dt} f(t)\right\} = sF(s) - f(0)$
3	Enésima diferenciación temporal	$L\left\{\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right\} = s^n F(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} f^{(k-1)}(0)$
4	Desplazamiento temporal	$L\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as}F(s) \quad a \geq 0$
5	Desplazamiento en frecuencia	$L\{e^{-at} f(t)\} = F(s+a)$
6	Convolución temporal	$L\left\{\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau\right\} = F(s)G(s)$
7	Escalamiento temporal	$L\left\{f\left(\frac{t}{a}\right)\right\} = a F(as)$

2.1 Transformada de Laplace

- Propiedades de la transformada de Laplace (II)

8	Diferenciación en frecuencia	$L\{t \cdot f(t)\} = -\frac{dF(s)}{ds}$
9	Enésima diferenciación en frecuencia	$L\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$
10	Integración temporal definida	$L\left\{\int_0^t f(t)dt\right\} = \frac{F(s)}{s}$
11	Integración temporal indefinida	$L\left\{\int f(t)dt\right\} = \frac{F(s)}{s} + \frac{1}{s}\left[\int f(t)dt\right]_{t=0}$
13	Integración en frecuencia	$L\left\{\frac{1}{t} f(t)\right\} = \int_s^\infty F(s)ds$ si $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{t} f(t)$ existe.
14	Convolución en frecuencia	$L\{f(t)g(t)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(p)G(s-p)dp$

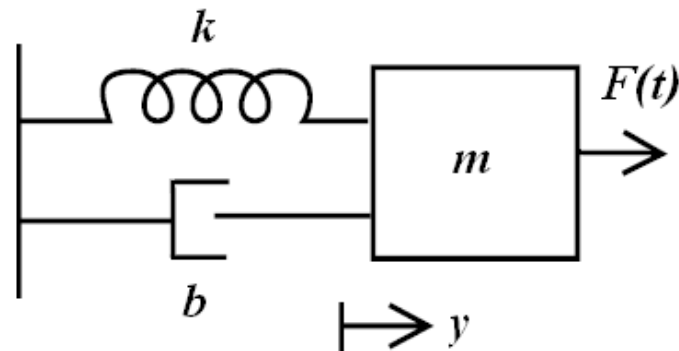
2.2 T. de Laplace y Estabilidad

- Existen diversos sistemas que pueden ser modelados mediante ecuaciones diferenciales, pero dichos sistemas presentan comportamientos diversos aledaños a sus ecuaciones características.

- Ejemplo:

Analizar el caso que se muestra en la figura:

“Resorte Amortiguado”



2.2 T. de Laplace y Estabilidad

- La ecuación que describe el sistema Resorte Amortiguado es: $y'' + \frac{b}{m}y' + \frac{k}{m}y = \frac{F(t)}{m}$
- Del polinomio característico que se desprende de la ecuación diferencial se tienen tres condiciones:

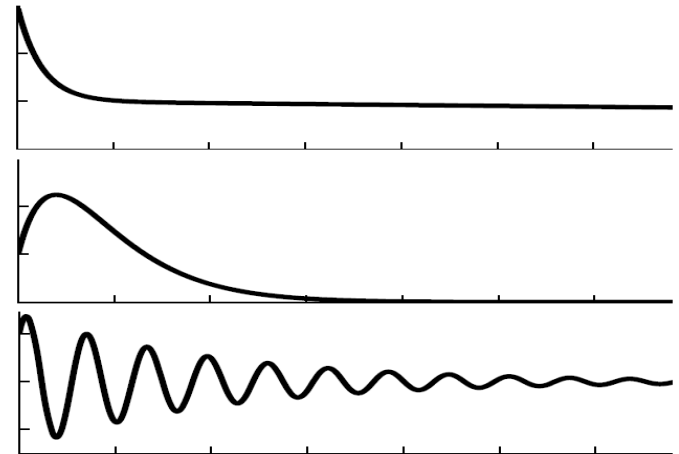
$$\lambda = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m}} \Rightarrow \begin{array}{ll} \frac{b^2}{4m^2} > k & \text{Soluciones reales y diferentes} \\ \frac{b^2}{4m^2} = k & \text{Soluciones reales e iguales} \\ \frac{b^2}{4m^2} < k & \text{Soluciones complejos conjugados} \end{array}$$

2.2 T. de Laplace y Estabilidad

- De dichas condiciones se obtienen

tres respuestas diferentes:

- Régimen Sobreamortiguado
- Régimen Amortiguado
- Régimen Subamortiguado



- Si las soluciones están en el semiplano negativo, las soluciones del sistema serán decrecientes en el tiempo otorgándole estabilidad al sistema.

2.2 T. de Laplace y Estabilidad

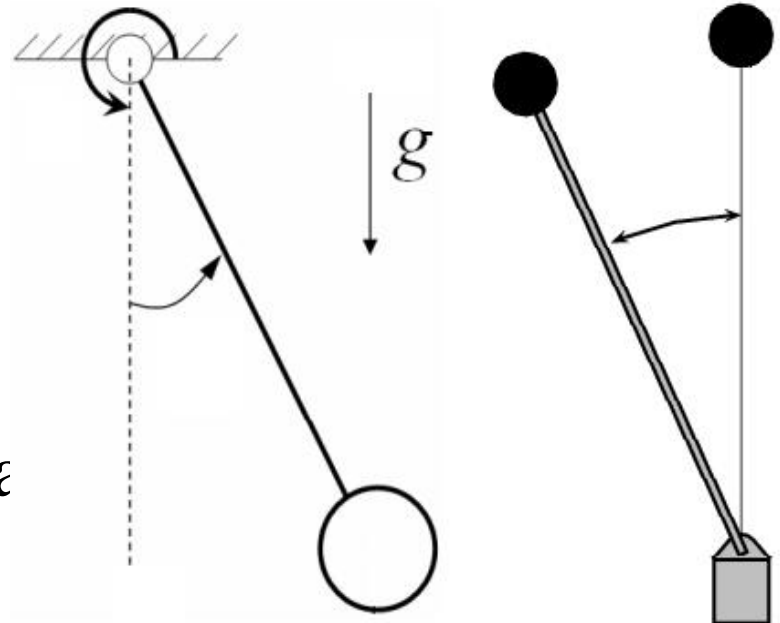
- En el ejemplo anterior sin importar los valores característicos del sistema este siempre volverá a su estado estable.
- Si las soluciones de la ecuación estudiada estuviesen en el semiplano positivo estas tendrán exponenciales de exponente positivo, generando soluciones crecientes.
- De tener una sistema retroalimentado, el comportamiento antes descrito se deberá analizar en el denominador de la f. de transferencia.

2.2 T. de Laplace y Estabilidad

- ¿Que es estabilidad?
 - Matemáticamente la estabilidad se puede interpretar como la tendencia de un sistema numérico cualquiera a estabilizar su comportamiento al propagarse errores en su entrada, ej: ecuación diferencial.
 - Análogamente, de suponer dichos errores como perturbaciones y un sistema numérico como un sistema físico, se puede decir que dicho sistema es estable si a pesar de ser perturbado vuelve a su estado estable, ej: péndulo vertical (invertido y no invertido).

2.2 T. de Laplace y Estabilidad

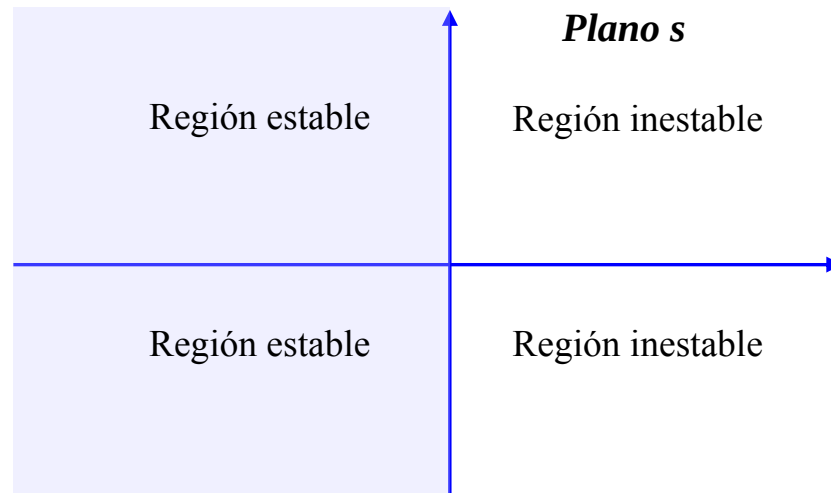
- Si el péndulo vertical no invertido es perturbado el oscilará hasta volver a su estado estable.
- Si el péndulo invertido es perturbado caerá debido a la fuerza de gravedad y no podrá volver a su estado inicial (sistema inestable).



2.2 T. de Laplace y Estabilidad

- Criterio de Estabilidad

Si los polos del sistema a analizar se encuentran en el semiplano negativo este será estable pues en dicha región el polinomio característico presenta una respuesta estable.

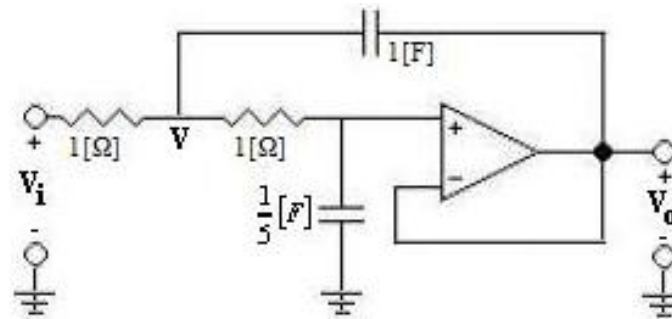


2.2 T. de Laplace y Estabilidad

- La ecuación característica se expresa como un polinomio de parámetro s , que es producto de la transformada de Laplace.
- Uno de los usos del plano complejo se conoce como el plano s , este se usa para visualizar las raíces de la ecuación que describe la conducta del sistema.
- Cabe destacar que el conveniente mapeo de la ecuación diferencial en el plano s , permite analizar el sistema de manera más fácil y rápida.

2.3 T. de Laplace en sistemas

- Calcular la estabilidad del circuito usando T. de Laplace



Condiciones iniciales nulas.

Aplicando Ley de Corriente de Kirchoff:

$$\frac{v - v_i}{1} + \frac{v - v_o}{1} + s(v - v_o) = 0$$

$$\frac{v - v_o}{1} = \frac{sv_o}{5}$$

2.3 T. de Laplace en sistemas

- Luego:
$$v(2 + s) = v_i + v_o(1 + s)$$
$$v = v_o \left(1 + \frac{s}{5} \right)$$
- La Función de Transferencia es:
$$H(s) = \frac{5}{s^2 + 2s + 5}$$
- Fracciones Parciales:
$$H(s) = \frac{5}{4} \frac{j}{(s + 1 + 2j)} - \frac{5}{4} \frac{j}{(s + 1 - 2j)}$$

2.3 T. de Laplace en sistemas

- Aplicando la T. inversa de Laplace:

$$H(t) = \frac{5}{4}e^{-t}\text{sen}(2t) - \frac{5}{4}e^{-t}\text{sen}(-2t)$$

- Se puede ver como esta respuesta se mantiene estable en tiempo.
- Los polos del sistema son: $s^2 + 2s + 5 = 0 \Rightarrow s_{1,2} = -1 \pm 2j$
 - Cumplen el criterio de estabilidad.
 - De no cumplirlos la exponencial crecería dejando el sistema inestable

2.2 T. de Laplace en sistemas

- Calcular la estabilidad del sistema descrito por la función de transferencia $N(s)/D(s)$, donde:

$$D(s) = s^6 + 2s^5 + 2s^4 + s^3 + 3s^2 + s + 2$$

Este sistema se resuelve en MatLab generando las raíces:

$$s_1 = -1.35 + 0.93j$$

$$s_4 = 0.58 + 0.82j$$

$$s_2 = -1.35 - 0.93j$$

$$s_5 = 0.58 - 0.82j$$

$$s_3 = -0.23 + 0.81j$$

$$s_6 = -0.23 - 0.81j$$

Como se puede apreciar dos polos son inestables ya que se encuentran en el semi-plano positivo, luego se infiere que el sistema es inestable.

2.3 T. de Laplace en sistemas

- Para generalizar más aun se puede considerar un sistema cualquiera descrito por la función de transferencia:

$$H(s) = \frac{s - 50}{s^3 + 8s^2 + 14s + 12}$$

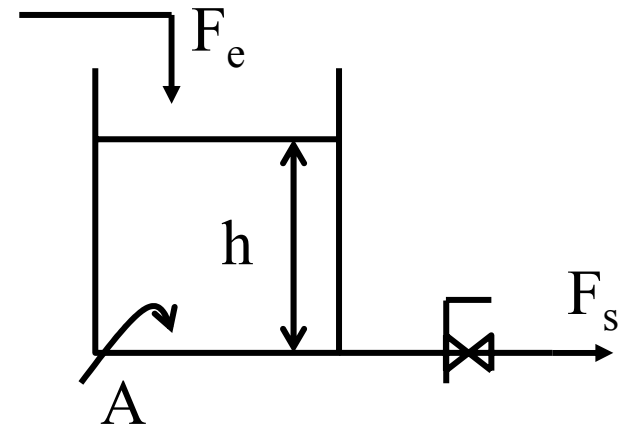
Calcular la estabilidad del sistema:

$$\begin{aligned} P(s) &= s^3 + 8s^2 + 14s + 12 \\ P(s) &= (s + 6)(s^2 + 2s + 2) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} s_1 &= -6 \\ s_2 &= -1 + j \\ s_3 &= -1 - j \end{aligned}$$

Se puede ver que dicho sistema cumple con el criterio de estabilidad, condición que se obtiene directamente de la resolución numérica del polinomio característico.

2.3 T. de Laplace en sistemas

- El siguiente sistema es un estanque de sección transversal A al que se le inyecta un fluido a una tasa $F_{in} = kh$ (lineal).



La ecuación que describe el sistema es:

$$\dot{h} + \frac{k}{A}h = \frac{F_{in}}{A}$$

Aplicando T. de Laplace, se obtiene:

$$sH(s) + \frac{k}{A}H(s) = \frac{F_{in}(s)}{A}$$

Finalmente la f. de transferencia es:

$$H(s) = \frac{1}{s + \frac{k}{A}} \frac{F_{in}(s)}{A}$$

2.3 T. de Laplace en sistemas

- Del polinomio característico se consigue el polo:

$$s = -\frac{k}{A}$$

- Finalmente se concluye que para todo $k > 0$ el sistema es estable.

2.3 T. de Laplace en sistemas

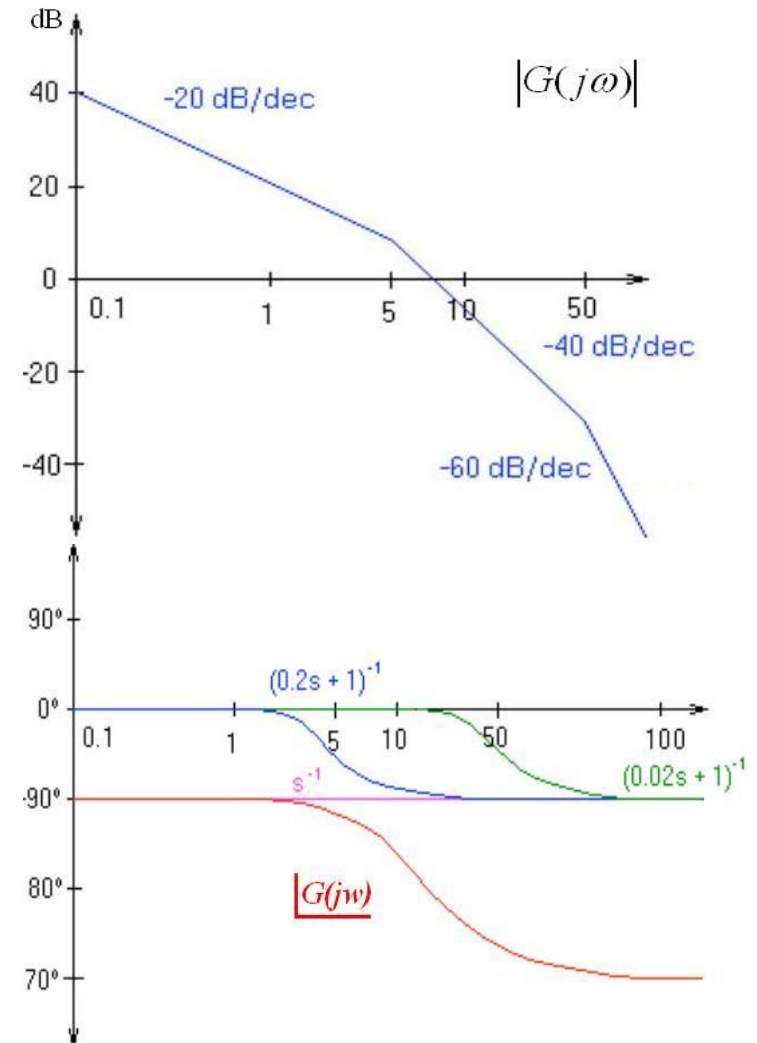
- Dibuje el diagrama de Bode de ganancia y fase de la función de transferencia de un generador Eólico

$$G(s) = \frac{10}{s(0.02s + 1)(0.2s + 1)}$$

Los polos son:

$$s_1 = 0 \quad s_2 = -5 \quad s_3 = -50$$

Para poder trabajar en el plano complejo se considera $s=j\omega$



2.3 T. de Laplace en sistemas

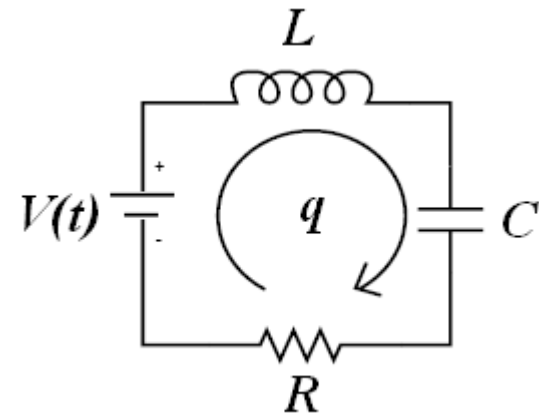
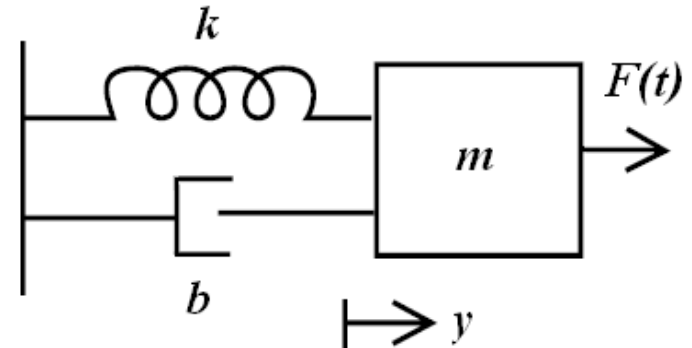
- Se tienen dos sistemas:

El primero corresponde a uno mecánico de amortiguamiento y el segundo a uno RLC.

Las ecuaciones que describen a cada sistema son:

$$y'' + \frac{b}{m}y' + \frac{k}{m}y = \frac{F(t)}{m}$$

$$q'' + \frac{R}{L}q' + \frac{1}{LC}q = \frac{F(t)}{L}$$



Donde la corriente corresponde a $\frac{dq}{dt}$

2.3 T. de Laplace en sistemas

- Se puede generar la analogía entre los dos sistemas mencionados en base a:

$$m \approx L \qquad b \approx R \qquad k \approx \frac{1}{C}$$

- Aplicando la T. de Laplace a las f. de transferencia de los sistemas:

$$H(s) = \frac{R/L s}{s^2 + R/L s + 1/LC} \qquad y \qquad H(s) = \frac{b/m s}{s^2 + b/m s + k/m}$$

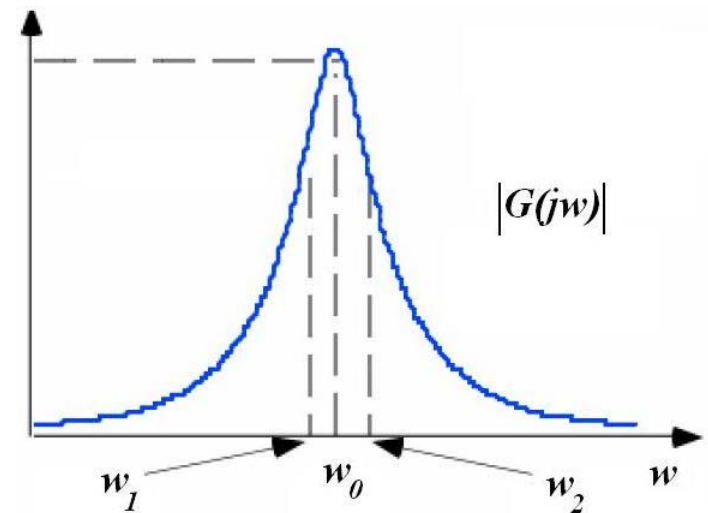
2.3 T. de Laplace en sistemas

- Con el cambio de variable $s=j\omega$ se tiene la f. de transferencia directamente en el plano ω .

$$H(\omega) = \frac{R/L \omega}{R/L \omega + j \left[1/LC - \omega^2 \right]}$$

La frecuencia central se define como la frecuencia para la cual la f. de transferencia es puramente real.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$



2.3 T. de Laplace en sistemas

- Como se había visto en un principio la respuesta del sistema “Resorte Amortiguado” se representa por:

$$s = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}$$

Al tender b a 0 la respuesta pasa a ser imaginaria pura.

Utilizando la analogía con el circuito Pasa Banda RLC, se puede ver como dicho valor es el valor central del filtro.

$$s = \pm j\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

2.3 T. de Laplace en sistemas

- Una ecuación diferencial describe un sistema, dicha ecuación se analiza con la T. de Laplace, posteriormente con un cambio de variable conveniente ($s=j\omega$) esta se puede ver en el dominio de la frecuencia, para así generar otro análisis del sistema.

2.4 Serie exponencial de Fourier

- Se considerará la siguiente base:

$$\phi_n = e^{jn\omega_0 t}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

- El valor de n se llama número armónico
- Se calculará el producto interno entre 2 funciones sobre $[t_1, t_2]$

$$\begin{aligned}
 \int_{t_1}^{t_2} \phi_n(t) \phi_m(t) dt &= \int_{t_1}^{t_2} e^{jn\omega_0 t} e^{-jm\omega_0 t} dt = \frac{1}{j(n-m)\omega_0} \left(e^{j(n-m)\omega_0 t_2} - e^{j(n-m)\omega_0 t_1} \right) \\
 &= \frac{1}{j(n-m)\omega_0} e^{j(n-m)\omega_0 t_1} \left(e^{j(n-m)\omega_0 (t_2 - t_1)} - 1 \right)
 \end{aligned}$$

2.4 Serie exponencial de Fourier

- Si se elige: $\omega_0(t_2 - t_1) = 2\pi$
- Se logra que:

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{jn\omega_0 t} e^{-jm\omega_0 t} dt = \begin{cases} (t_2 - t_1) & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

- Se puede demostrar que la base es completa, por lo que cualquier función $f(t)$ de energía finita en $[t_1, t_2]$ se puede representar como:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}, \quad t \in [t_1, t_2], \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{t_2 - t_1} \quad F_n \in \mathbb{C}$$

2.4 Serie exponencial de Fourier

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}, \quad t \in [t_1, t_2], \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{t_2 - t_1}$$

- Para calcular los F_n

$$f(t)e^{-jm\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} e^{-jm\omega_0 t}, \quad t \in [t_1, t_2]$$

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)e^{-jm\omega_0 t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \int_{t_1}^{t_2} e^{jn\omega_0 t} e^{-jm\omega_0 t} dt$$

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)e^{-jm\omega_0 t} dt = F_m (t_2 - t_1)$$

$$F_n = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t)e^{-jn\omega_0 t} dt$$

2.4 Serie exponencial de Fourier

- Ejemplo: Escribir la siguiente función como serie exponencial de Fourier

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 1 \\ -1 & 1 < t < 2 \end{cases}$$

- Solución:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{(t_2 - t_1)} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$F_n = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

2.4 Serie exponencial de Fourier

$$F_n = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-jn\pi t} dt - \frac{1}{2} \int_1^2 e^{-jn\pi t} dt$$

$$= \frac{1}{2jn\pi} \left[-e^{-jn\pi} + 1 + e^{-j2n\pi} - e^{-jn\pi} \right] = \frac{1}{jn\pi} \left[1 - e^{-jn\pi} \right]$$

$$F_n = \begin{cases} \frac{2}{jn\pi} & n \text{ impar} \\ 0 & n \text{ par} \end{cases}$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\pi t}$$

$$f(t) = \frac{2}{j\pi} e^{j\pi t} + \frac{2}{j3\pi} e^{j3\pi t} + \frac{2}{j5\pi} e^{j5\pi t} + \dots - \frac{2}{j\pi} e^{-j\pi t} - \frac{2}{j3\pi} e^{-j3\pi t} - \frac{2}{j5\pi} e^{-j5\pi t} - \dots$$

2.4 Serie exponencial de Fourier

- Dada $f(t)$, la serie existe si se satisfacen las condiciones de Dirichlet:
 - $f(t)$ tiene un n° finito de máximos y mínimos en $[t_1, t_2]$
 - $f(t)$ tiene un n° finito de discontinuidades en $[t_1, t_2]$
 - $f(t)$ es absolutamente integrable en $[t_1, t_2]$

$$\int_{t=t_1}^{t_2} |f(t)| dt < \infty$$

- Las condiciones anteriores siempre se cumplen para señales de energía finita en $[t_1, t_2]$

2.5 Señales y representaciones complejas

- Considérese una función $f(\cdot)$ compleja:

$$f = f_{RE} + j f_{IM}$$

- Su conjugada es:

$$f^* = f_{RE} - j f_{IM}$$

- Su parte real e imaginaria son:

$$f_{RE} = \frac{f + f^*}{2}, \quad f_{IM} = \frac{f - f^*}{2j}$$

2.5 Señales y representaciones complejas

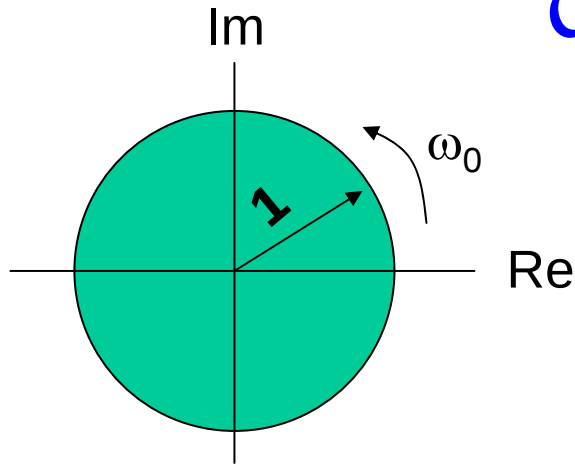
- Su magnitud se puede calcular a partir de:

$$|f|^2 = f f^* = (f_{RE} + j f_{IM})(f_{RE} - j f_{IM}) = |f_{RE}|^2 + |f_{IM}|^2$$

- La exponencial compleja es suma de un seno y un coseno, y describe un círculo de radio 1 en el plano complejo:

$$e^{j\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + j \operatorname{sen}(\omega_0 t)$$

2.5 Señales y representaciones complejas



$$e^{j\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + j \operatorname{sen}(\omega_0 t)$$

$$x(t) = \cos(\omega_0 t)$$

$$y(t) = \operatorname{sen}(\omega_0 t)$$

- Las exponenciales complejas se pueden describir en término de seno y coseno, y viceversa.

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}, \quad \operatorname{sen}(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}$$

2.5 Señales y representaciones complejas

- Recordando la propiedad:

$$x_{RE} = \frac{x + x^*}{2}, \quad x_{IM} = \frac{x - x^*}{2j}, \quad \forall x \in \mathbb{C}$$

se puede concluir la siguiente propiedad para los coeficientes de la serie:

$$F_n = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt, \quad F_{-n} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t) e^{jn\omega_0 t} dt$$

$$F_n^* = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f^*(t) e^{jn\omega_0 t} dt = F_{-n} \text{ para } f(\cdot) \text{ real}$$

$$\text{Además, } \text{Re}(F_n) = \frac{F_n + F_n^*}{2} = \frac{F_n + F_{-n}}{2}$$

2.6 Serie de Fourier trigonométrica

- La serie de Fourier exponencial se puede reescribir en término de senos y cosenos:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} = \sum_{m=-\infty}^{-1} F_m e^{jm\omega_0 t} + F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$f(t) = \sum_{m=-1}^{-\infty} F_m e^{jm\omega_0 t} + F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \quad (n' = -m)$$

$$f(t) = \sum_{n'=1}^{\infty} F_{-n'} e^{-jn'\omega_0 t} + F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}. \quad \text{Si } f(\cdot) \text{ es real:}$$

$$f(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2F_n e^{jn\omega_0 t} + 2F_{-n} e^{-jn\omega_0 t}}{2} = \boxed{F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re}(F_n e^{jn\omega_0 t})}$$

2.6 Serie de Fourier trigonométrica

$$f(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re}(F_n e^{jn\omega_0 t})$$

$$\operatorname{Re}(F_n e^{jn\omega_0 t}) = \operatorname{Re}\left((F_{n_{RE}} + j F_{n_{IM}})(\cos(n\omega_0 t) + j \operatorname{sen}(n\omega_0 t))\right)$$

$$\operatorname{Re}(F_n e^{jn\omega_0 t}) = F_{n_{RE}} \cos(n\omega_0 t) - F_{n_{IM}} \operatorname{sen}(n\omega_0 t)$$

$$f(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2F_{n_{RE}} \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} (-2F_{n_{IM}}) \operatorname{sen}(n\omega_0 t)$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(n\omega_0 t)$$

2.6 Serie de Fourier trigonométrica

- Las funciones $\cos(n\omega_0 t)$ y $\sen(n\omega_0 t)$ para $n=0,1,\dots$ forman una base ortogonal en $[t_1, t_2]$ si $(t_2 - t_1)\omega = 2\pi$
- Para poder calcular directamente los valores de a_n y b_n se puede multiplicar $f(t)$ por $\cos(n\omega_0 t)$ o por $\sen(n\omega_0 t)$, y luego integrar en $[t_1, t_2]$.

2.6 Serie de Fourier trigonométrica

$$a_n = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} \cos^2(n\omega_0 t) dt} = \frac{2}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$

$$b_n = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) \text{sen}(n\omega_0 t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} \text{sen}^2(n\omega_0 t) dt} = \frac{2}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t) \text{sen}(n\omega_0 t) dt$$

$$a_0 = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} dt} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt$$

- a_0 es el valor medio de la señal.

2.6 Serie de Fourier trigonométrica

- La serie trigonométrica de Fourier se puede escribir usando sólo cosenos:

$$f(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re}(F_n e^{jn\omega_0 t}) =$$

$$f(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re}(|F_n| e^{j\phi_n} e^{jn\omega_0 t})$$

$$f(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2|F_n| \cos(n\omega_0 t + \phi_n)$$

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \phi_n)$$

2.6 Serie de Fourier trigonométrica

- Se cumplen las siguientes relaciones:

$$f(t) = \underbrace{F_0}_{a_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{2F_{nRE}}_{a_n} \cos(n\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(-2F_{nIM})}_{b_n} \sin(n\omega_0 t)$$

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{2|F_n|}_{c_n} \cos(n\omega_0 t + \phi_n)$$

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \phi_n = \tan^{-1} \left(\frac{-b_n}{a_n} \right)$$

2.6 Serie de Fourier trigonométrica

- Ejemplo: representar $f(t)$ como serie trigonométrica de Fourier

$$f(t) = t^2, \quad t \in [0, 2]$$

- Desarrollo: $a_0 = \frac{1}{2} \int_0^2 t^2 dt = \frac{4}{3}$

$$a_n = \frac{2}{2} \int_0^2 t^2 \cos(n\pi t) dt = \frac{4}{(n\pi)^2}$$

$$b_n = \frac{2}{2} \int_0^2 t^2 \sin(n\pi t) dt = \frac{-4}{n\pi}$$

2.6 Serie de Fourier trigonométrica

- Luego, la serie trigonométrica es:

$$f(t) = \frac{4}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos(n\pi t) - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen}(n\pi t)$$

- Cualquier función se puede expresar como la suma de una parte par más una parte impar:

$$f(t) = f_p(t) + f_i(t)$$

2.6 Serie de Fourier trigonométrica

$$f(t) = f_p(t) + f_i(t)$$

$$f_p(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2}, \quad f_i(t) = \frac{f(t) - f(-t)}{2}$$

$$f_p(t) = f_p(-t), \quad f_i(t) = -f_i(-t)$$

- Los términos coseno de la serie (incluyendo a_0) permiten representar la parte par, mientras que los términos seno representan la impar.

2.7 Extensión por periodicidad

- Una función definida en el intervalo $[t_1, t_2]$ se puede representar mediante su serie de Fourier:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$$

- Las exponenciales complejas son funciones periódicas:

$$e^{jn\omega_0 t} = \cos(n\omega_0 t) + j \operatorname{sen}(n\omega_0 t)$$

2.7 Extensión por periodicidad

- Luego, si se analiza una serie de Fourier fuera del rango $[t_1, t_2]$ se puede concluir que es periódica, de periodo $T=t_2-t_1$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0(t+T)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \left(e^{jn\omega_0 t} e^{jn\omega_0 T} \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$$

- porque:

$$e^{jn\pi T} = e^{jn \frac{2\pi}{t_2-t_1} T} = e^{jn2\pi} = \cos(2\pi n) + j\sin(2\pi n) = 1$$

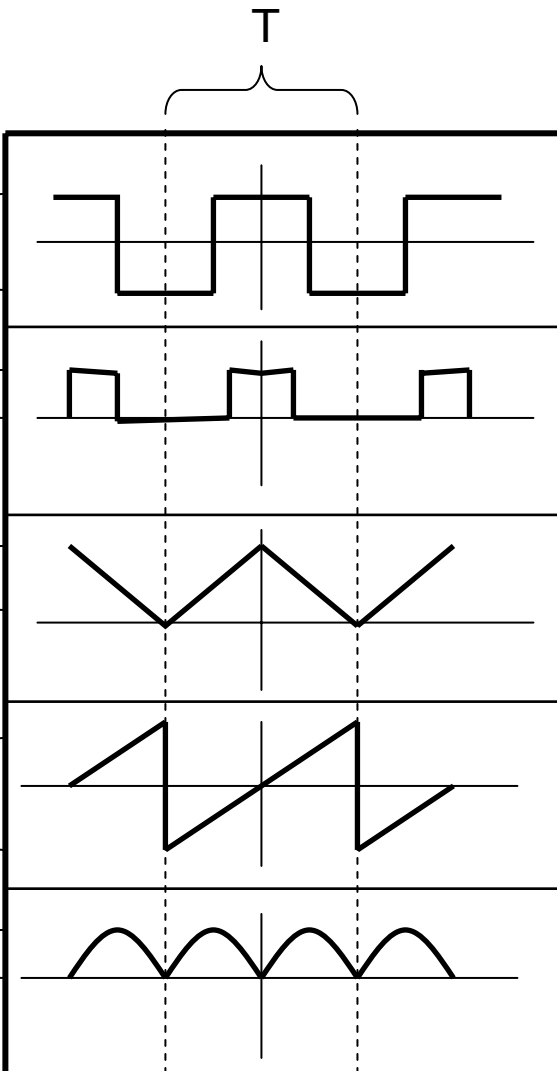
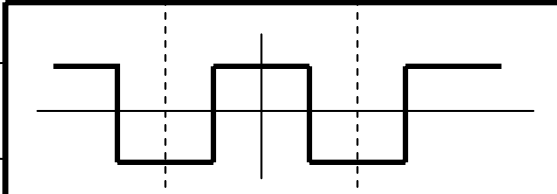
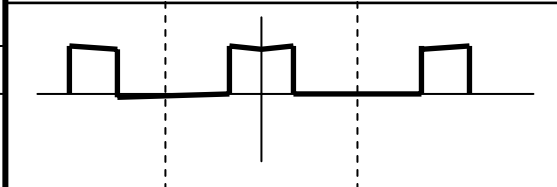
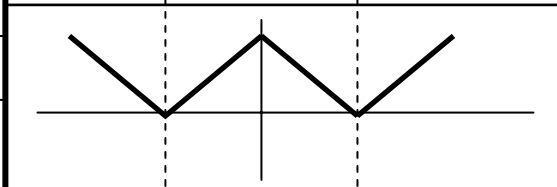
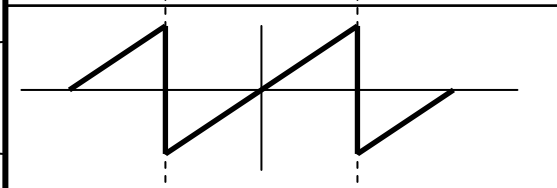
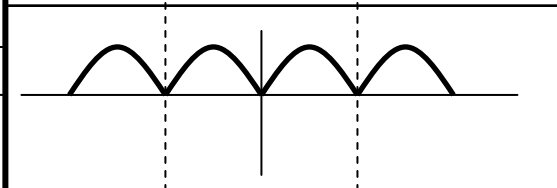
2.7 Extensión por periodicidad

- Si $f(t)=f(t+T)$, entonces

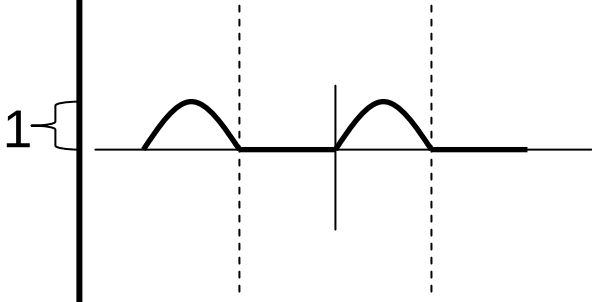
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}, \forall t \in \mathbb{R} \quad \text{si } \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

- Es decir, la serie de Fourier para una señal periódica vale en todo el eje real.
- Los F_n se calculan considerando sólo 1 periodo de la señal

2.7 Extensión por periodicidad

			
2		Par	$\begin{cases} Sa(n\pi/2) & n \text{ par} \\ 0 & n \text{ impar} \end{cases}$
1		Par Ancho de pulso τ	$\frac{\tau}{T} Sa\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right)$
1		Par	$\begin{cases} Sa^2(n\pi/2) & n \neq 0 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$
2		Impar	$\begin{cases} j(-1)^n/(n\pi) & n \neq 0 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$
1		Par	$\begin{cases} \frac{2}{\pi(1-n^2)} & n \text{ par} \\ 0 & n \text{ impar} \end{cases}$

2.7 Extensión por periodicidad

	Par	$\begin{cases} \frac{1}{\pi(1-n^2)} & n \text{ par} \\ -j/4 & n = \pm 1 \\ 0 & \text{otro} \end{cases}$
--	------------	---

- La función Sampling es: $Sa(x) = \frac{\text{Sen}(x)}{x}$

2.8 Teorema de Parseval

- La potencia de una señal $f(\cdot)$ es:

$$p = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) f^*(t) dt$$

- Si se expresa $f(\cdot)$ mediante serie exponencial:

$$p = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_m e^{jm\omega_0 t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n^* e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$p = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_m \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n^* \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j(m-n)\omega_0 t} dt$$

$$p = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_m F_m^* = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |F_m|^2$$

2.8 Teorema de Parseval

- El teorema de Parseval indica que:

$$p = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |F_n|^2$$

- La potencia de la señal completa es la suma de las potencias de cada frecuencia
- Ej: Determinar la potencia de la función:

$$f(t) = 2\text{sen}(100t)$$

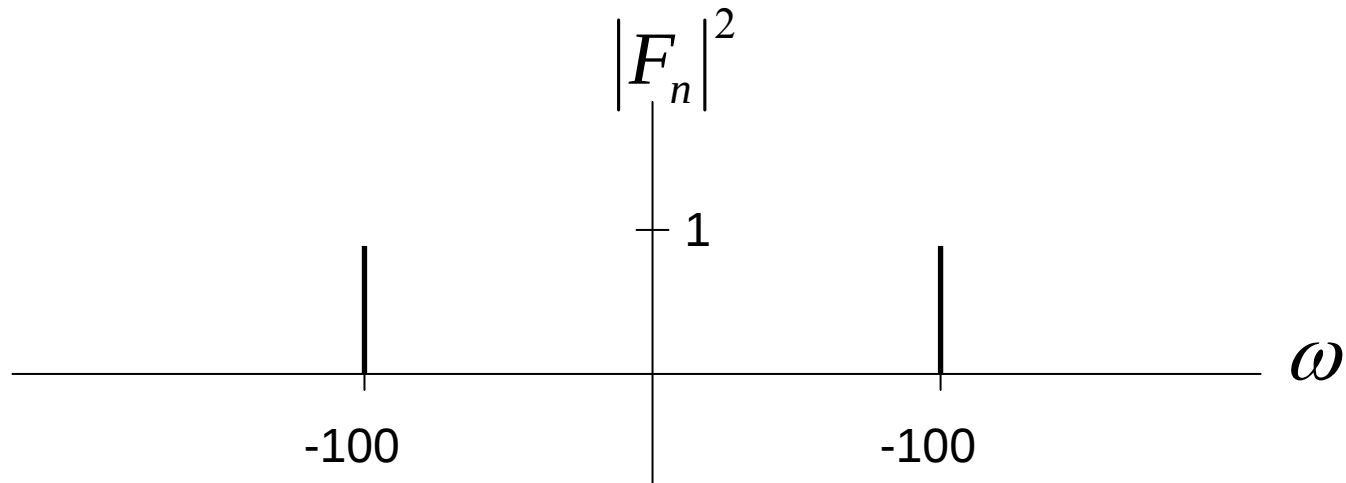
2.8 Teorema de Parseval

- Los coeficientes de Fourier son:

$$F_1 = -j, F_{-1} = j, F_n = 0 \text{ para otro } n$$

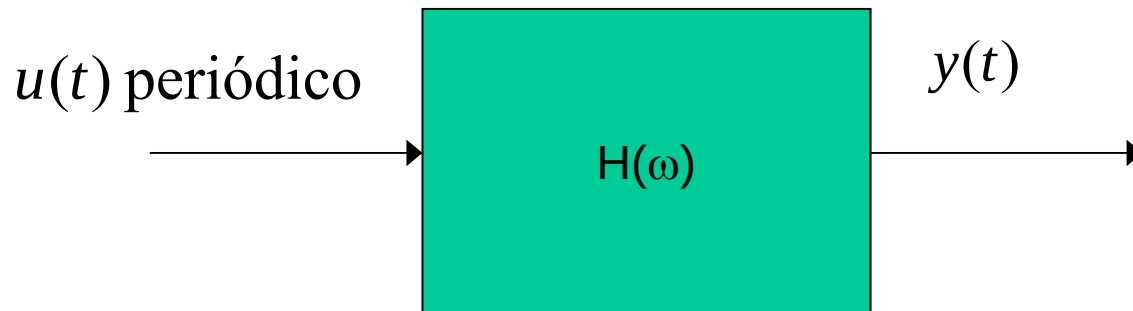
- Luego:

$$P = |j|^2 + |-j|^2 = 2$$



2.9 Respuesta estacionaria a señales periódicas

- Consideremos un sistema lineal $H(\omega)$ (un filtro lineal) que tiene una entrada periódica $u(t)$ y una salida $y(t)$ en régimen permanente:



$$u(t) = Ae^{j(\omega_1 t + \phi_1)} \Rightarrow y(t) = AH(\omega_1)e^{j(\omega_1 t + \phi_1)}$$

2.9 Respuesta estacionaria a señales periódicas

- Luego, al ser el sistema lineal, la respuesta a una señal periódica es:

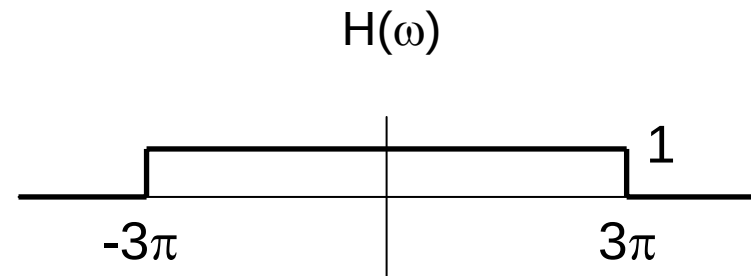
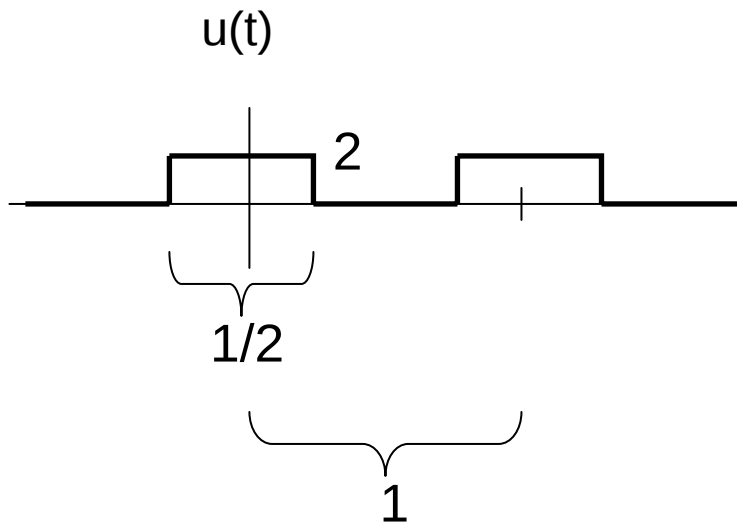
$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_n e^{j(n\omega_0 t + \phi_n)} \Rightarrow y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_n H(n\omega_0) e^{j(n\omega_0 t + \phi_n)}$$

- La potencia de la salida es:

$$P_y = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |U_n|^2 |H(n\omega_0)|^2$$

2.9 Respuesta estacionaria a señales periódicas

- Ej. Determinar la salida cuando la entrada y el filtro son los siguientes



2.9 Respuesta estacionaria a señales periódicas

- La entrada se puede escribir como:

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(n\pi / 2)}{n\pi / 2} e^{jn2\pi t}$$

- La salida está limitada en frecuencia

$$y(t) = 1 + \frac{4}{\pi} \cos(2\pi t)$$

2.9 Respuesta estacionaria a señales periódicas

- Potencia promedio en la entrada:

$$P_u = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} |u(t)|^2 dt = \int_{-1/4}^{1/4} 4 dt = 2$$

- Potencia promedio en la salida:

$$P_y = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |U_n|^2 |H(n\omega_0)|^2 = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 + 1 + \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 = 1.811$$

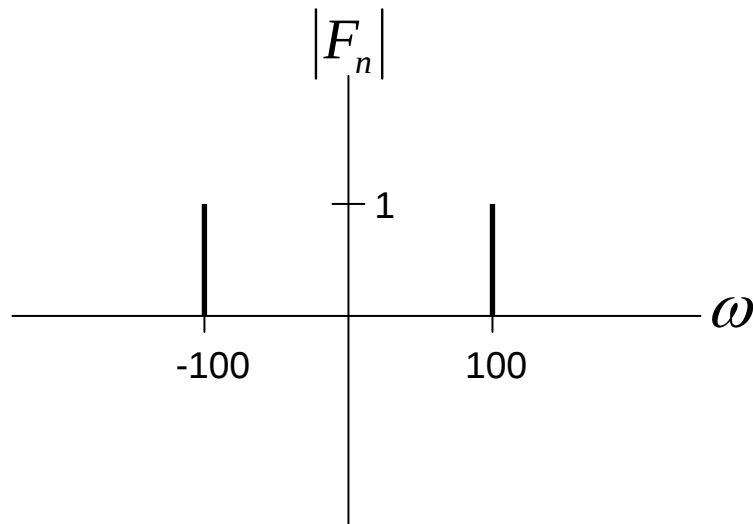
2.10 Espectro de Fourier

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}, \forall t \in \mathbf{R} \quad \text{si } \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

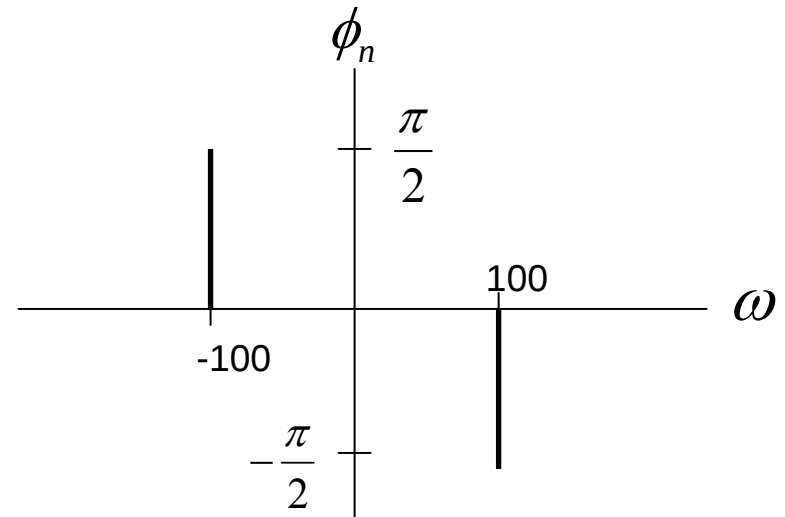
- Señal periódica = suma de exponenciales complejas multiplicadas por coeficientes F_n
- F_n : asociado a la amplitud de la frecuencia $n\omega_0$.
- Se puede hacer un gráfico amplitud / frecuencia
- Los F_n se dibujan como líneas verticales
- $\Rightarrow$ Espectro de la señal

2.10 Espectro de Fourier

- Ej: Espectro de la función $f(t) = 2 \operatorname{sen}(100t)$
 $\omega_0 = 100, \quad f(t) = (j)e^{-j100t} + (-j)e^{j100t}$



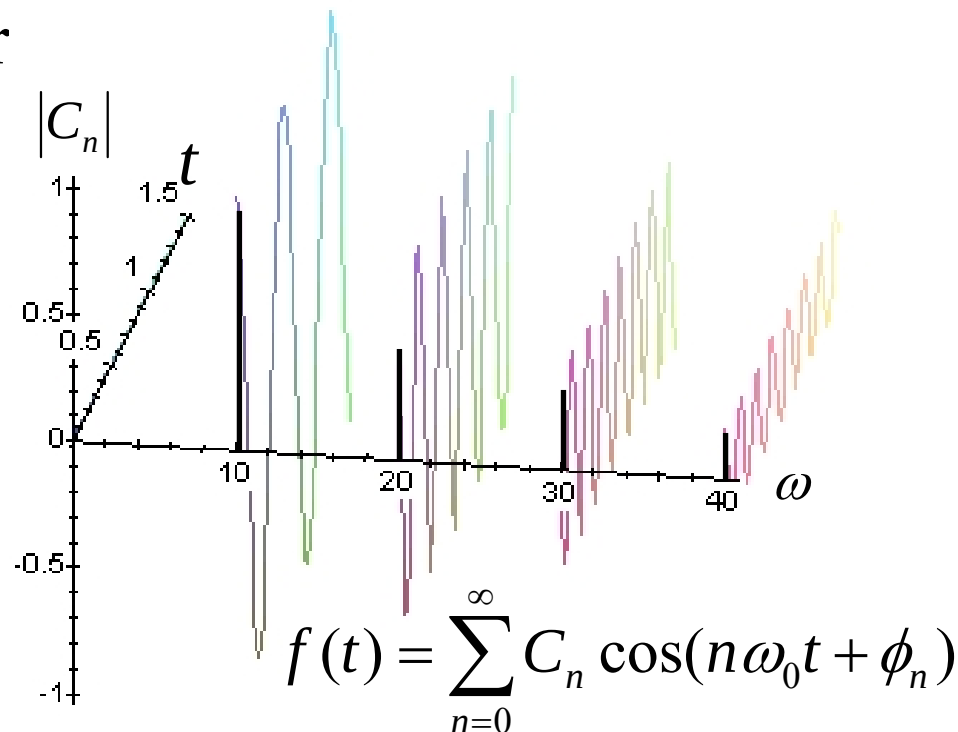
Espectro de magnitud



Espectro de fase

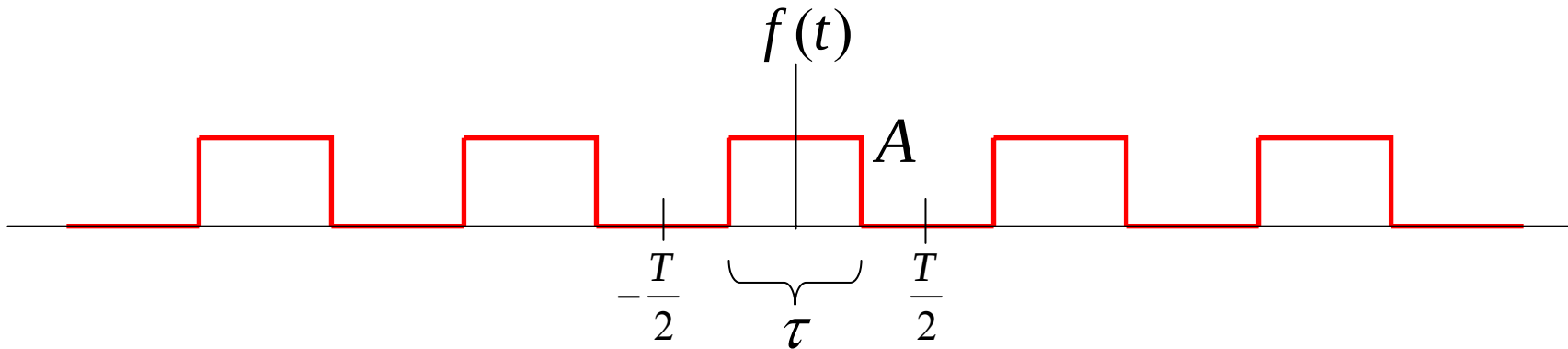
2.10 Espectro de Fourier

- También se puede generar un espectro trigonométrico a partir de la serie trigonométrica de Fourier



2.10 Espectro de Fourier

- Ej. Espectro para tren de pulsos periódico



$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-jn\omega_0 t} dt$$

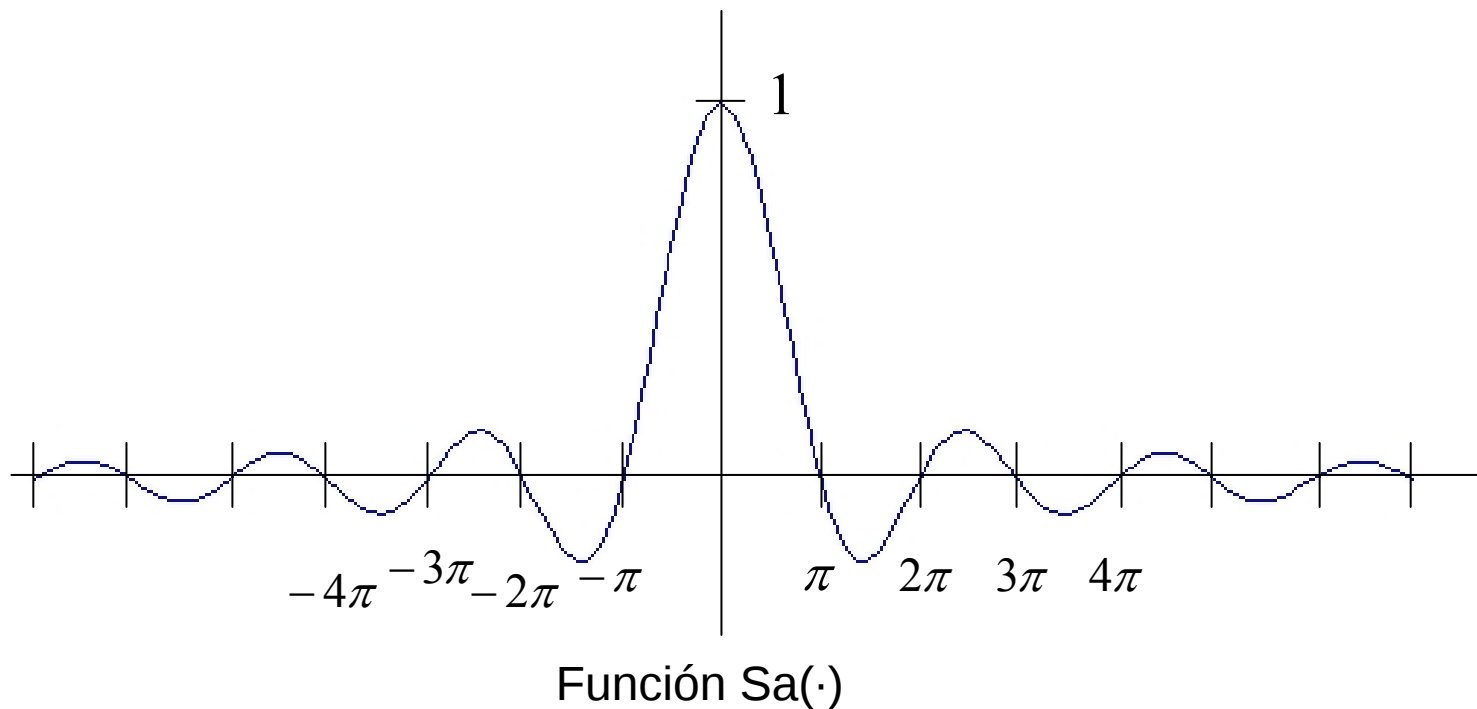
$$F_n = \frac{-A}{jn\omega_0} \left(e^{-jn\omega_0 \tau/2} - e^{jn\omega_0 \tau/2} \right) = \frac{2A}{n\omega_0} \text{sen}(n\omega_0 \tau / 2)$$

$$F_n = \frac{A\tau}{T} \frac{\text{sen}(n\omega_0 \tau / 2)}{n\omega_0 \tau / 2}$$

2.10 Espectro de Fourier

$$F_n = \frac{A\tau}{T} Sa\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right)$$

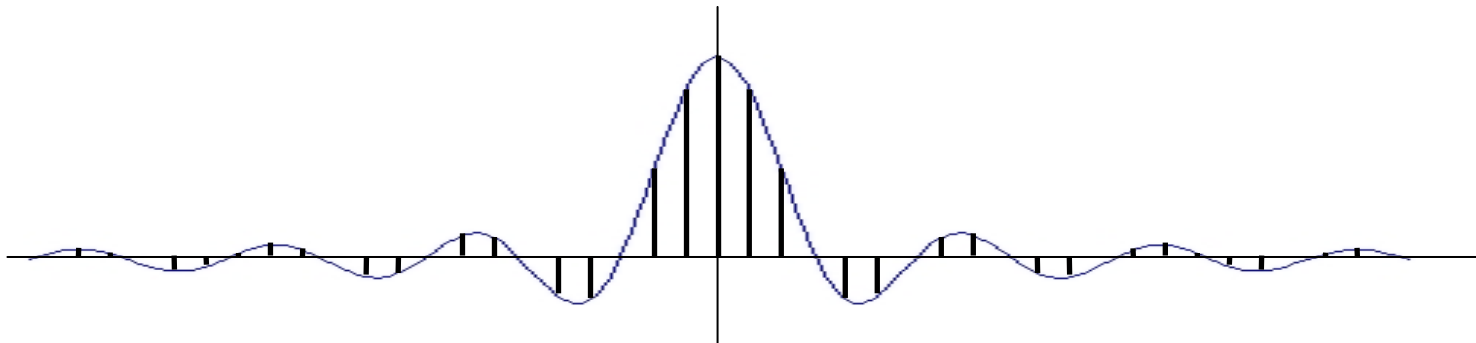
$$Sa(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x}$$



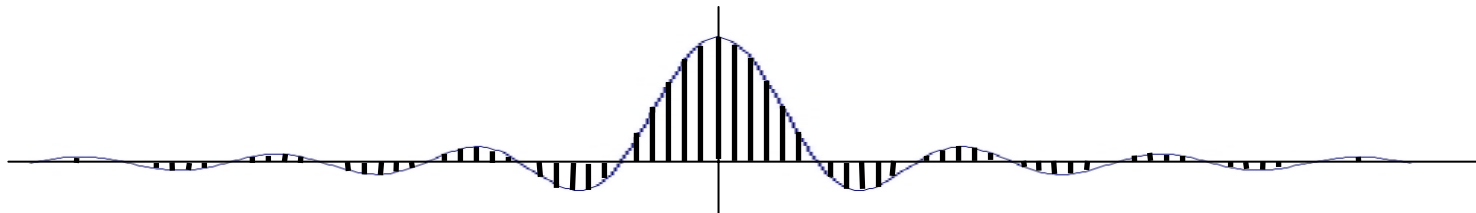
2.10 Espectro de Fourier

$$f(t) = \frac{A\tau}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right) e^{jn\omega_0 t}$$

Con τ fijo:



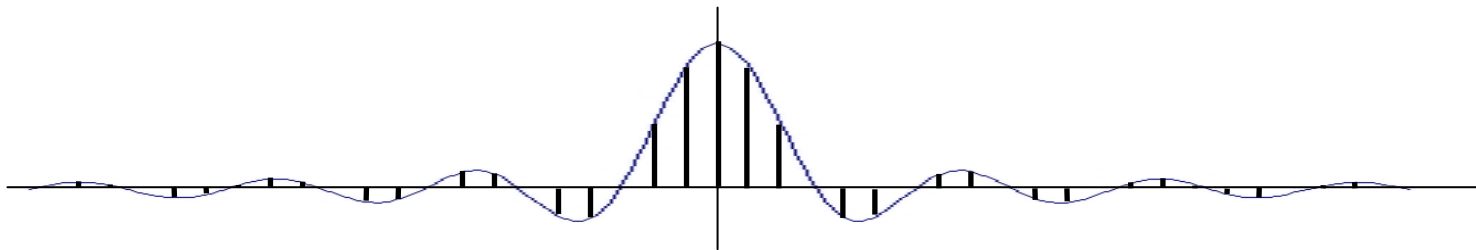
Al aumentar T:



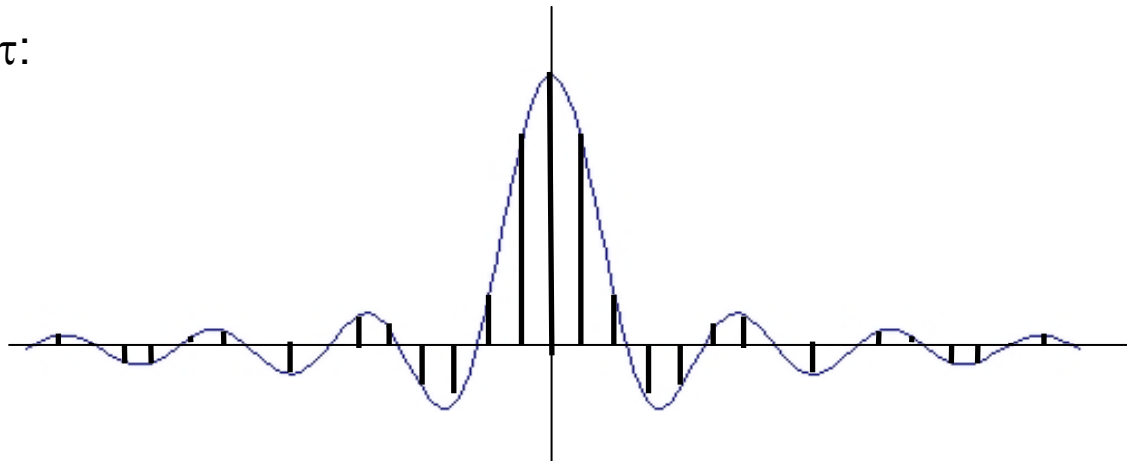
2.10 Espectro de Fourier

$$f(t) = \frac{A\tau}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right) e^{jn\omega_0 t}$$

Con T fijo:



Al aumentar τ :



2.10 Espectro de Fourier

- Distancia entre líneas espectrales depende de T
- Distancia entre cruces por cero de $\text{Sa}(\cdot)$ depende de τ

2.10 Espectro de Fourier

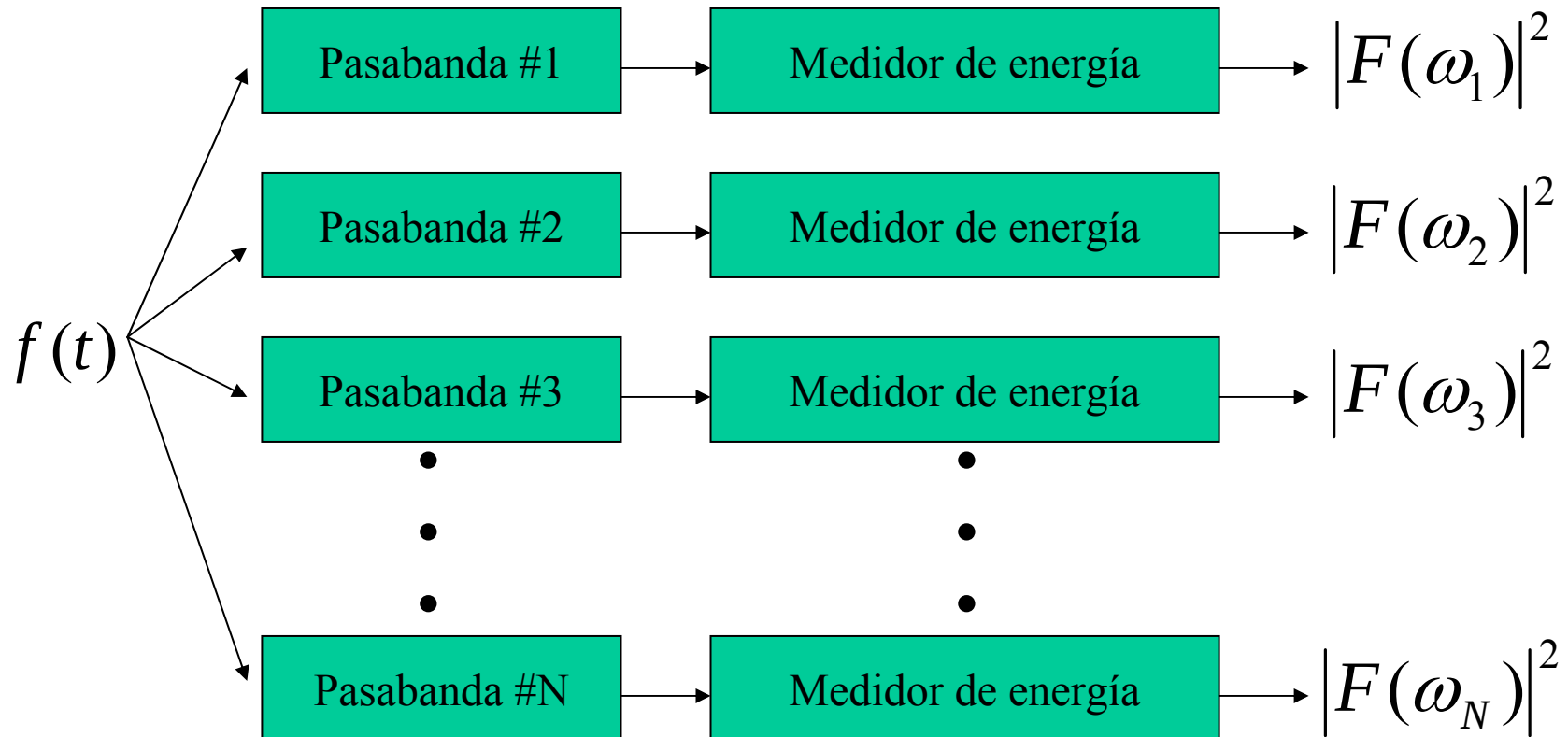
- Teorema de Parseval $\Rightarrow$ relación entre $f(t)$ y $F(\omega)$, energía de una señal.

$$E = \int_{t=-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

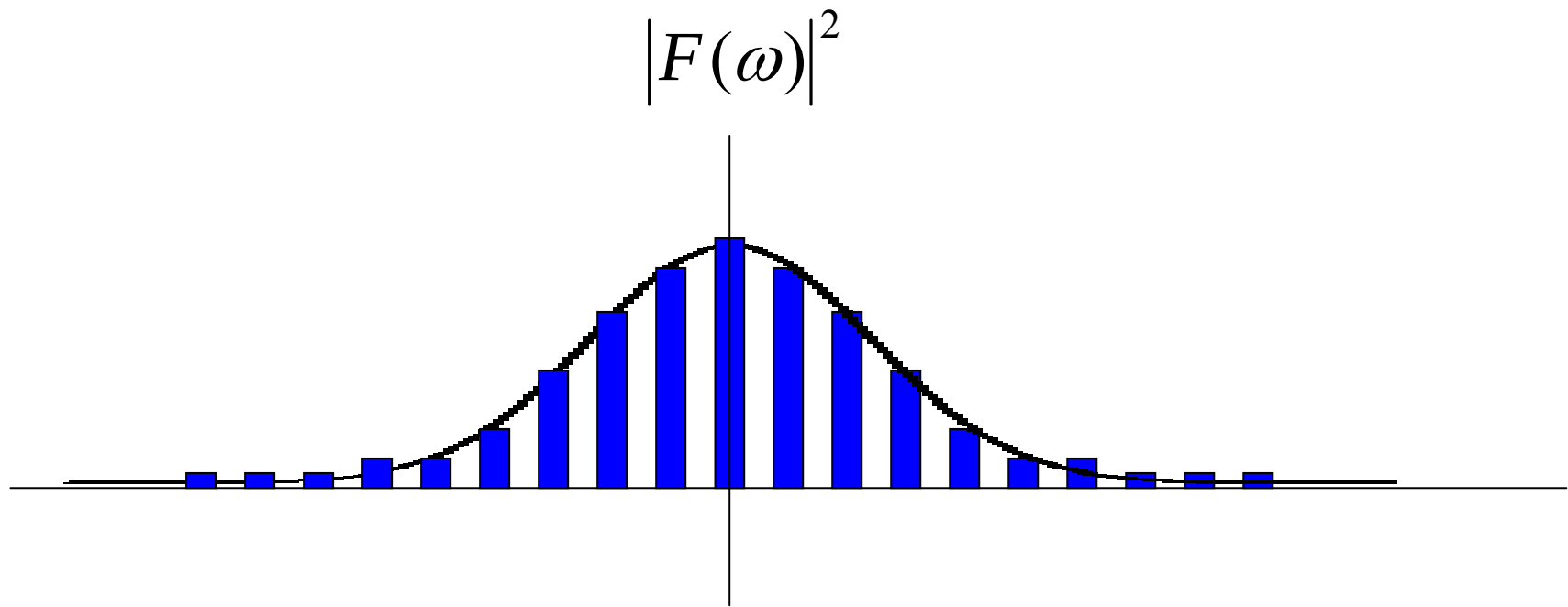
$|F(\omega)|^2 \Rightarrow$ densidad espectral de energía, permite calcular la energía en una banda de frecuencias

$F(-\omega) = F(\omega)^* \Rightarrow |F(-\omega)|^2 = |F(\omega)|^2 \Rightarrow |F(\omega)|^2$ es par

2.10 Espectro de Fourier



2.10 Espectro de Fourier



2.10 Espectro de Fourier

- No todas las señales tienen energía finita
- Algunas de ellas tienen potencia media finita => señales de potencia

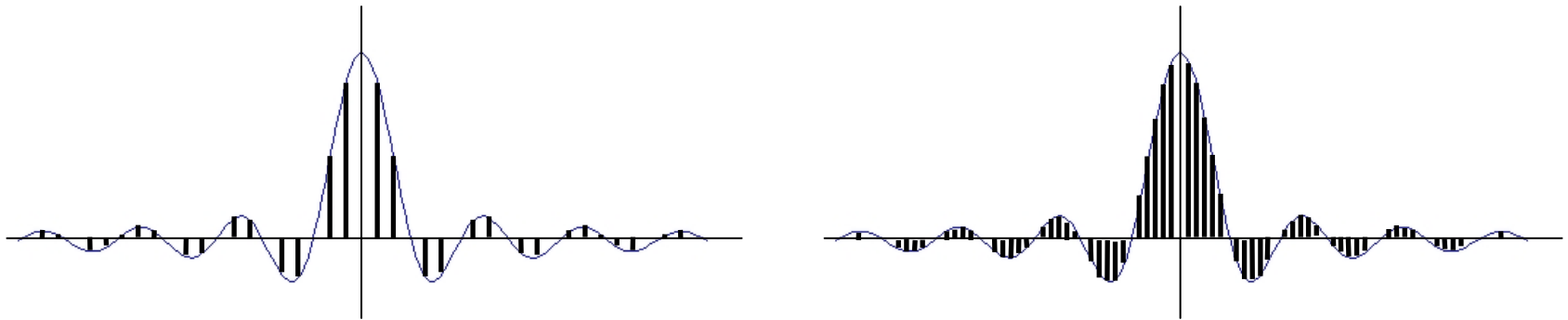
$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt = \overline{f^2(t)}$$

Se puede definir una densidad espectral de potencia:

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_f(\omega) d\omega$$

2.11 Representación para señal aperiódica

- Serie de Fourier: A medida que T aumenta, las líneas espectrales se juntan. La forma del espectro no cambia.



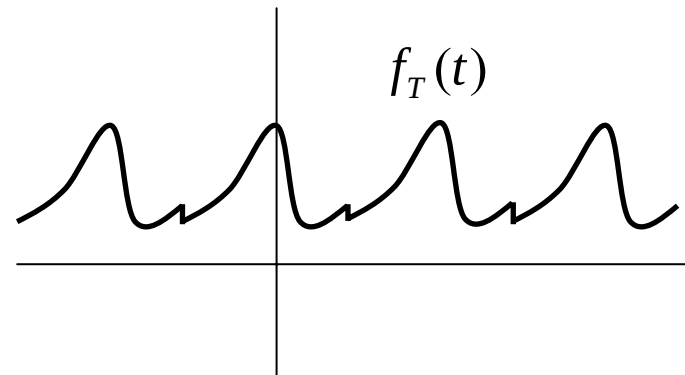
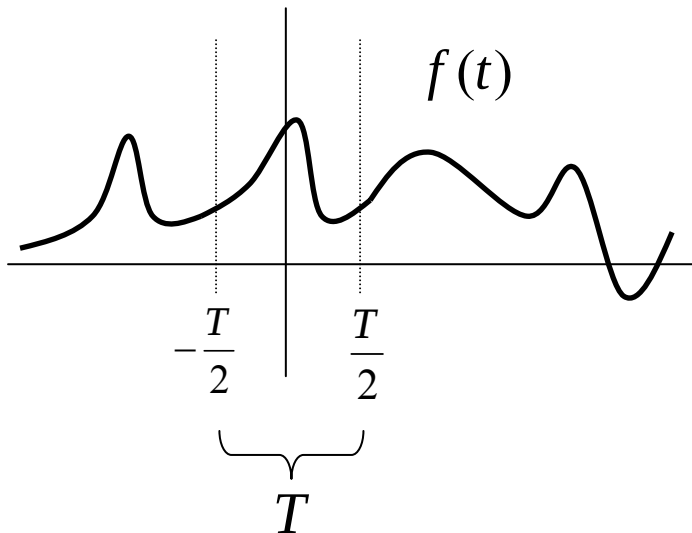
- Se puede generar espectro de señal aperiódica a partir de serie de Fourier al considerar que $T \rightarrow \infty$

2.11 Representación para señal aperiódica

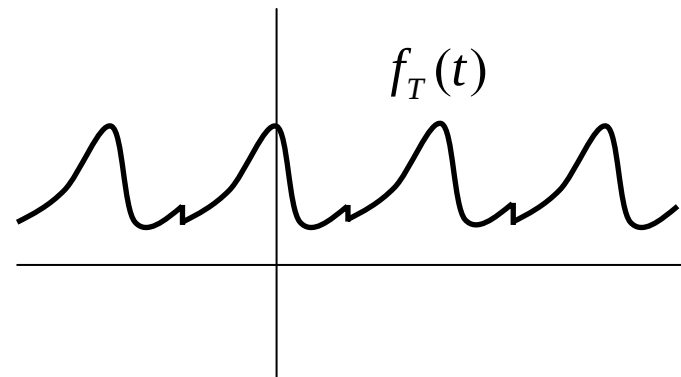
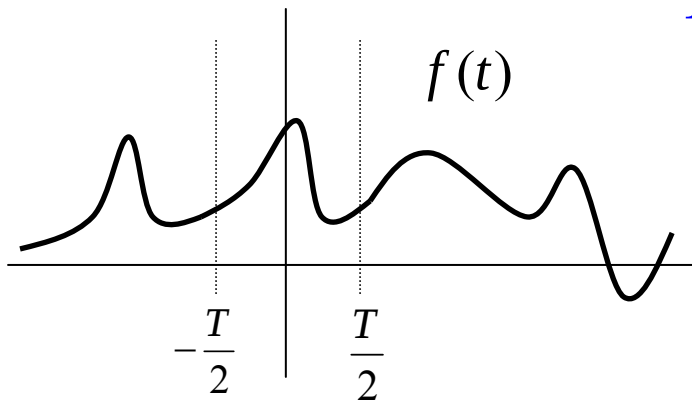
Sea $f(t)$ una señal aperiódica.

$f_T(t)$: función periódica asociada a $f(t)$ con período T

$$f_T(t) = f(t + nT), \quad (t + nT) \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right], \quad n \in \mathbb{Z}$$



2.11 Representación para señal aperiódica

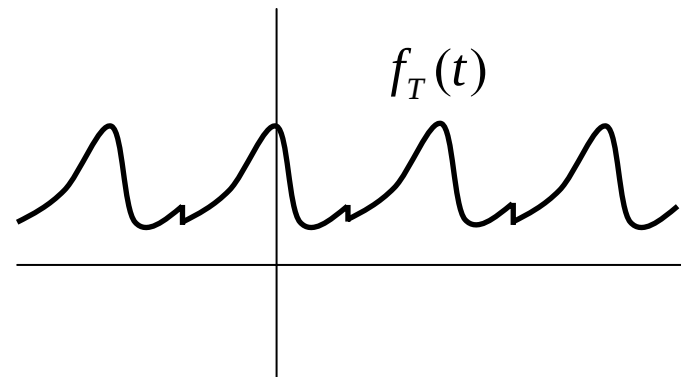
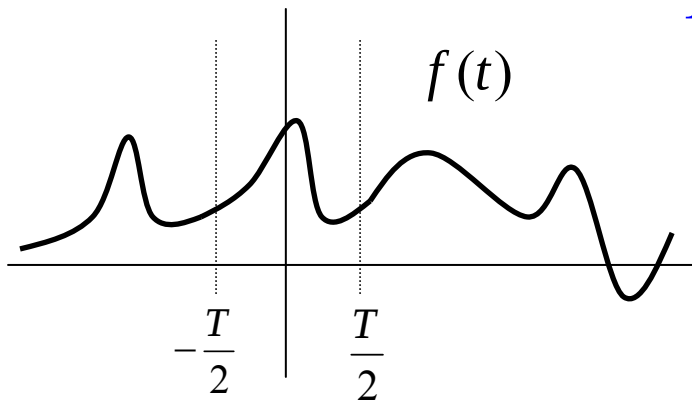


$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}, \quad F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Sea $F(\omega_n) = TF_n$

$$f_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega_n) e^{jn\omega_0 t}, \quad F(\omega_n) = \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt, \quad \omega_n = \frac{2\pi}{T} n$$

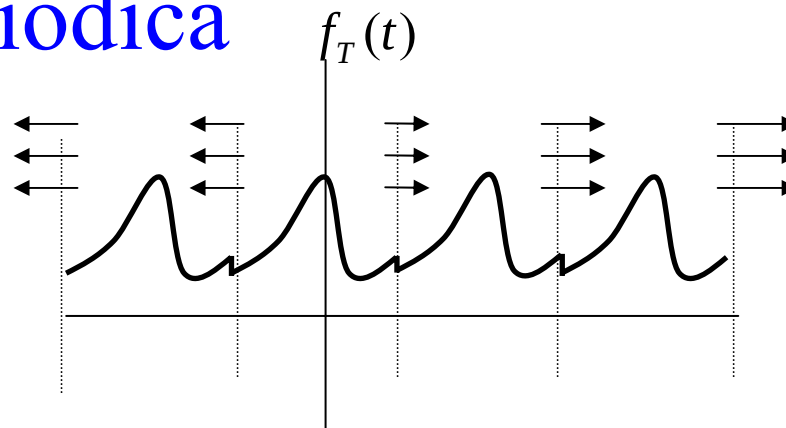
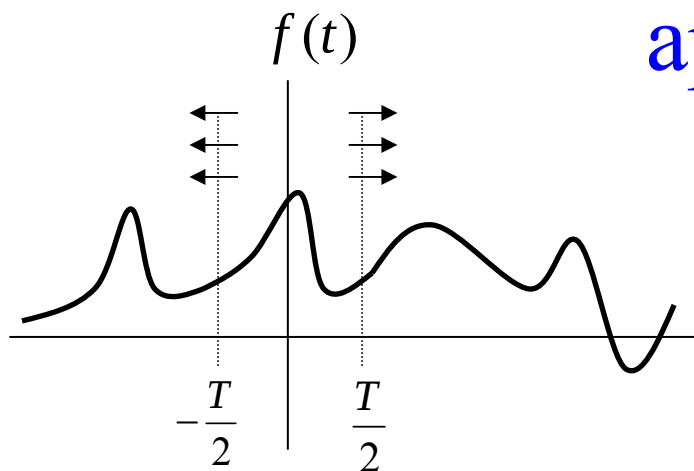
2.11 Representación para señal aperiódica



$$f_T(t) = \frac{1}{2\pi} \underbrace{\frac{2\pi}{T}}_{\Delta\omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega_n) e^{jn\omega_0 t}, \quad F(\omega_n) = \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt, \quad \omega_n = \frac{2\pi}{T} n$$

$$f_T(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega_n) e^{j\omega_n t} \Delta\omega, \quad F(\omega_n) = \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) e^{-j\omega_n t} dt, \quad \omega_n = \frac{2\pi}{T} n$$

2.11 Representación para señal aperiódica



$$\lim_{T \rightarrow \infty} f_T(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega_n) e^{j\omega_n t} \Delta\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega = f(t)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} F(\omega_n) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) e^{-j\omega_n t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = F(\omega)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F(\omega) = \int_{t=-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \\ f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \end{cases}$$

2.11 Representación para señal aperiódica

- Transformada directa e inversa de Fourier

$$F(\omega) = \mathfrak{F}(f(t)) = \int_{t=-\infty}^{\infty} f(t)e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$f(t) = \mathfrak{F}^{-1}(F(\omega)) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

- Permite ver una señal:
 - En el dominio del tiempo $\Rightarrow f(t)$
 - En el dominio de la frecuencia $\Rightarrow F(\omega)$

2.12 Función de densidad espectral

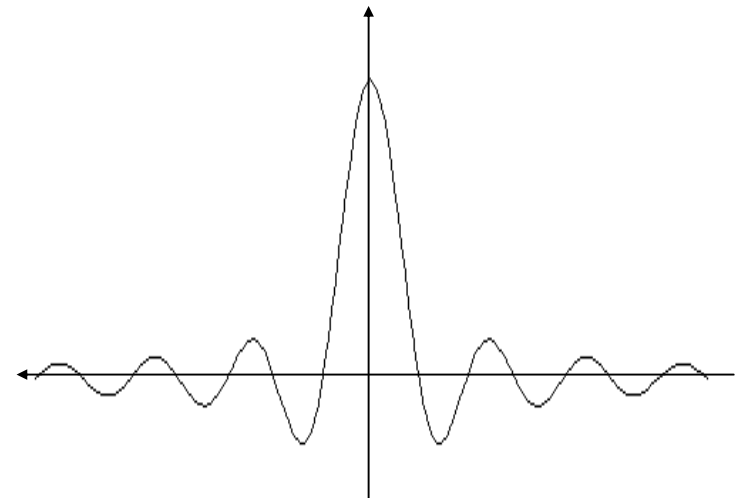
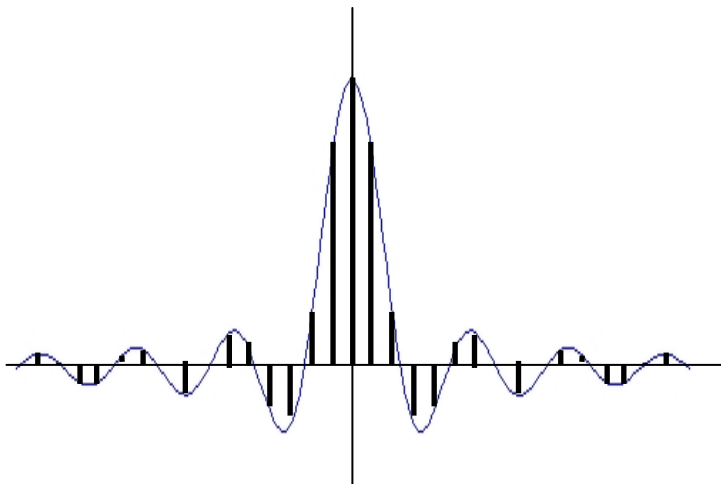
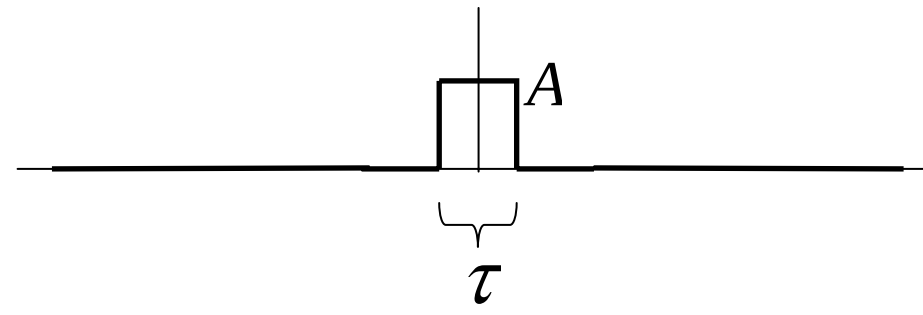
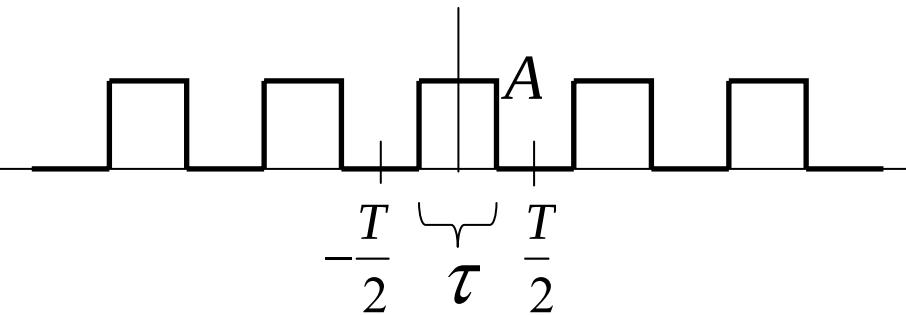
- F_n son líneas espectrales: contenido espectral repartido en frecuencias discretas
- $F(\omega)$ es función de densidad espectral: contenido espectral repartido en un continuo
- $dA=F(\omega)d\omega \Rightarrow$ elemento de amplitud dentro de un elemento de frecuencia en torno a ω
- Existe relación entre la serie de Fourier de la señal periódica, y la transformada de Fourier para 1 sólo periodo de la señal (ver próxima transparencia).

2.12 Función de densidad espectral

$$F_n = \frac{1}{T} F(\omega) \big|_{\omega=n\omega_0}$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right) e^{jn\omega_0 t}$$

$$F(\omega) = A\tau \text{Sa}\left(\frac{n\omega\tau}{2}\right)$$



2.12 Función de densidad espectral

- Dada $f(t)$, la transformada existe si se satisfacen las condiciones de Dirichlet para todo $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$
 - $f(t)$ tiene un n° finito de máximos y mínimos en $[t_1, t_2]$
 - $f(t)$ tiene un n° finito de discontinuidades en $[t_1, t_2]$
 - $f(t)$ es absolutamente integrable en $\mathbb{R}$

$$\int_{t=-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

- Las condiciones anteriores siempre se cumplen para señales de energía finita en $\mathbb{R}$

2.13 Teorema de Parseval

- La energía total disipada por una señal $f(\cdot)$ es:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f^*(t) dt$$

- Si se expresa $f^*(t)$ en términos de $F^*(\omega)$:

$$E = \int_{t=-\infty}^{\infty} f(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} F^*(\omega) e^{-j\omega t} d\omega \right] dt$$

- Cambiando el orden de integración:

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} F^*(\omega) \underbrace{\left[\int_{t=-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \right]}_{F(\omega)} d\omega$$

2.13 Teorema de Parseval

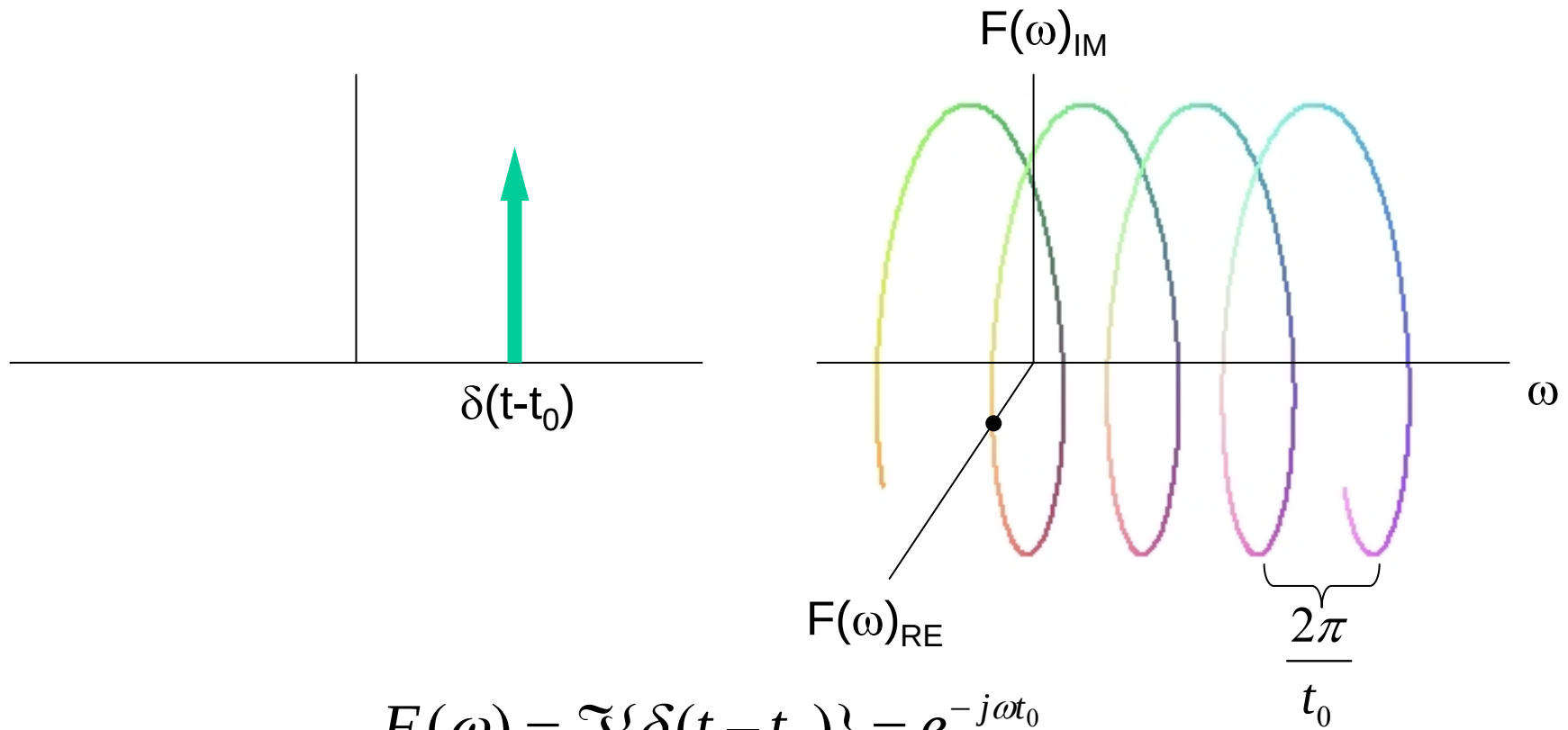
$$E = \underbrace{\int_{t=-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt}_{\text{Contribución del tiempo } t \text{ a la energía}} = \frac{1}{2\pi} \underbrace{\int_{\omega=-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega}_{\text{Contribución de la frecuencia } \omega \text{ a la energía}}$$

- La energía de una señal se puede calcular tanto en el dominio del tiempo como en el dominio de la frecuencia
- Se puede calcular la energía contenida en una banda de frecuencias $[\omega_1, \omega_2]$

2.14 Transformadas que incluyen a $\delta(t)$

- Las transformadas de algunas señales de potencia (es decir, de energía infinita) no se pueden calcular usando la integral, por lo que deben calcularse de modo indirecto.
- Función impulso: $\mathfrak{T}\{\delta(t)\} = \int_{t=-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega t} dt = e^{j0} = 1$
$$\mathfrak{T}\{\delta(t - t_0)\} = \int_{t=-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t_0}$$
 - La transformada de un impulso tiene amplitud constante para todo ω y fase lineal. Espectro “blanco”.

2.14 Transformadas que incluyen a $\delta(t)$



2.14 Transformadas que incluyen a $\delta(t)$

- Exponencial complejo: Su transformada se calcula de modo indirecto.

$$\mathfrak{T}^{-1}\{\delta(\omega - \omega_0)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} e^{j\omega_0 t}$$

$$\mathfrak{T}\left\{\mathfrak{T}^{-1}\{\delta(\omega - \omega_0)\}\right\} = \frac{1}{2\pi} \mathfrak{T}\{e^{j\omega_0 t}\} = \delta(\omega - \omega_0)$$

$$\Rightarrow \mathfrak{T}\{e^{j\omega_0 t}\} = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

- Esto permite calcular las transformadas de las sinusoides.

2.14 Transformadas que incluyen a $\delta(t)$

- Sinusoides: $\mathfrak{T}\{e^{j\omega_0 t}\} = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$

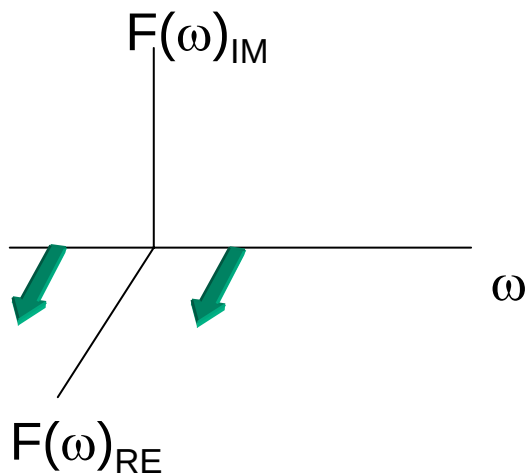
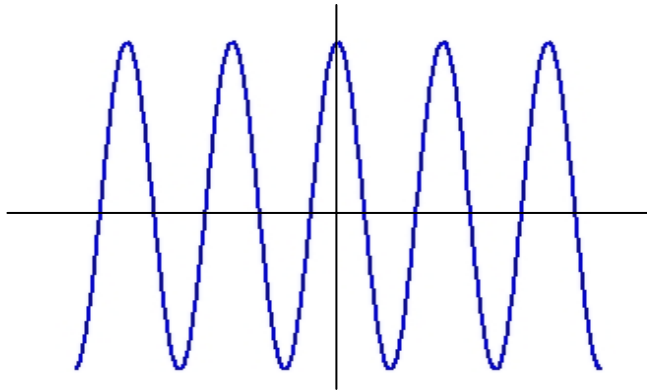
$$\Rightarrow \mathfrak{T}\{\cos(\omega_0 t)\} = \mathfrak{T}\left\{\frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}\right\} = \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$$

$$\Rightarrow \mathfrak{T}\{\sin(\omega_0 t)\} = \mathfrak{T}\left\{\frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}\right\} = \frac{\pi\delta(\omega - \omega_0) - \pi\delta(\omega + \omega_0)}{j}$$

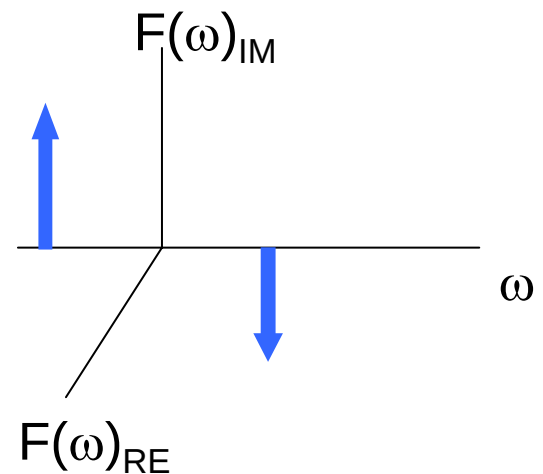
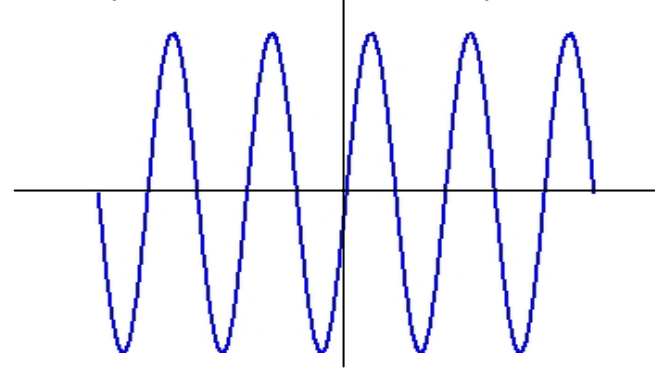
- El espectro de una senoide son 2 impulsos localizados en ω_0 y $-\omega_0$.

2.14 Transformadas que incluyen a $\delta(t)$

$$\mathfrak{I}\{\cos(\omega_0 t)\} = \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$$



$$\mathfrak{I}\{\sin(\omega_0 t)\} = -j\pi\delta(\omega - \omega_0) + j\pi\delta(\omega + \omega_0)$$



2.14 Transformadas que incluyen a $\delta(t)$

- Función signo: $\text{sgn}(x) = \frac{x}{|x|}$
 - No es absolutamente integrable
 - Se calcula de modo indirecto

$$\mathfrak{T}\{\text{sgn}(x)\} = \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|a|t} \text{sgn}(t) e^{-j\omega t} dt$$

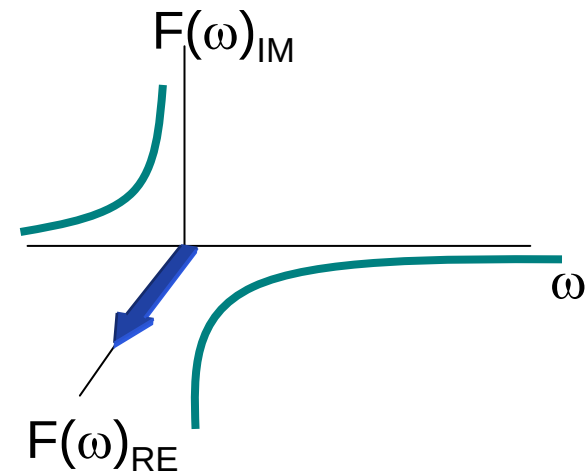
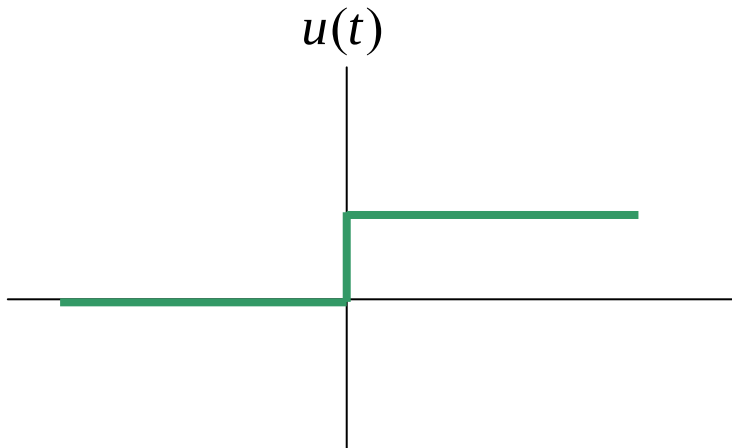
$$\mathfrak{T}\{\text{sgn}(x)\} = \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty}^0 e^{(a-j\omega)t} dt + \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{-2j\omega}{a^2 + \omega^2}$$

$$\mathfrak{T}\{\text{sgn}(x)\} = \frac{2}{j\omega}$$

2.14 Transformadas que incluyen a $\delta(t)$

- Escalón:

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x) \Rightarrow \mathfrak{F}\{u(t)\} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$



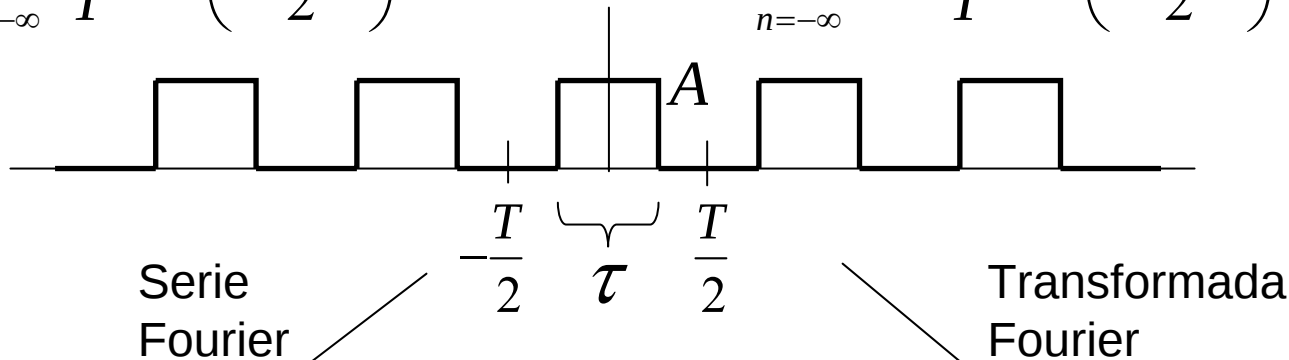
2.14 Transformadas que incluyen a $\delta(t)$

- Funciones periódicas
 - Se pueden expresar como serie de Fourier
 - Cada término de la serie contribuye con un impulso
- Se pueden representar como serie de Fourier o como transformada que incluye impulsos

$$\mathfrak{F}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi F_n \delta(\omega - n\omega_0)$$

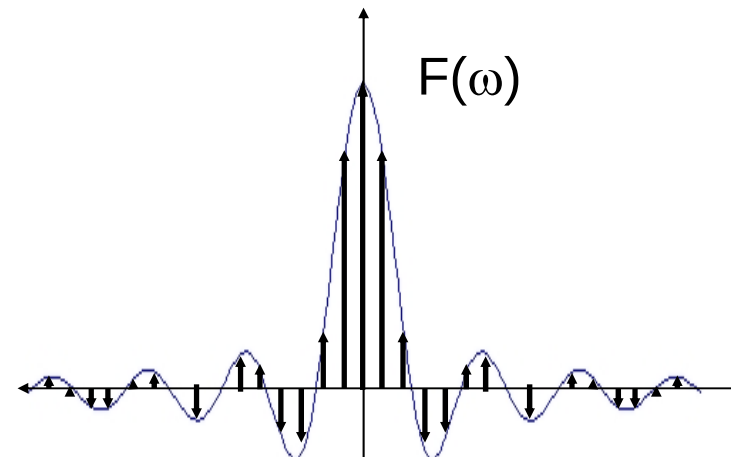
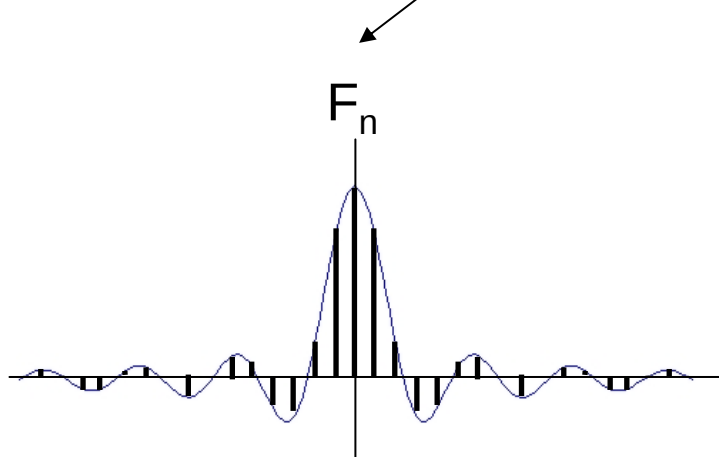
2.14 Transformadas que incluyen a $\delta(t)$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right) e^{jn\omega_0 t}, \quad F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi \frac{A\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right) \delta(\omega - n\omega_0)$$



Serie
Fourier

Transformada
Fourier



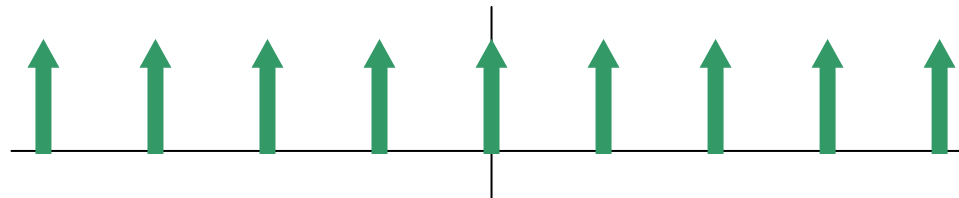
2.14 Transformadas que incluyen a $\delta(t)$

- Tren de impulsos, “peineta”

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T}$$

$$\Rightarrow \delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t}$$



2.14 Transformadas que incluyen a $\delta(t)$

$e^{-at}u(t)$	$1/(a + j\omega)$
$te^{-at}u(t)$	$1/(a + j\omega)^2$
$e^{- a t}$	$2a/(a^2 + \omega^2)$
$e^{-t^2/(2\sigma^2)}$	$\sigma\sqrt{2\pi}e^{-\sigma^2\omega^2/2}$
$\text{sgn}(t)$	$2/(j\omega)$
$j/(\pi t)$	$\text{sgn}(\omega)$

2.14 Transformadas que incluyen a $\delta(t)$

$u(t)$	$\pi\delta(\omega) + 1/(j\omega)$
$\delta(t)$	1
1	$2\pi\delta(\omega)$
$e^{\pm j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega \mp \omega_0)$
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$
$\text{sen}(\omega_0 t)$	$-j\pi[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$

2.14 Transformadas que incluyen a $\delta(t)$

$rect(t / \tau)$	$\tau Sa(\omega\tau / 2)$
$\frac{W}{2\pi} Sa\left(\frac{W\tau}{2}\right)$	$rect(\omega / W)$
$\Lambda(t / \tau)$	$\tau Sa^2(\omega\tau / 2)$
$\frac{W}{2\pi} Sa^2(Wt / 2)$	$\Lambda(\omega / W)$
$\cos(\pi t / \tau) rect(t / \tau)$	$\frac{2\tau}{\pi} \frac{\cos(\omega\tau / 2)}{1 - (\omega\tau / \pi)^2}$
$\frac{2W}{\pi^2} \frac{\cos(Wt)}{1 - (2Wt / \pi)^2}$	$\Lambda(\omega / W)$
$\delta_T(t)$	$\omega_0 \delta_{\omega_0}(\omega)$

2.15 Propiedades de la transformada de Fourier

- Linealidad (debido a que es una integral)

$$\mathfrak{F}\{a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\} = a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega)$$

- Conjugadas complejas

$$\mathfrak{F}\{f^*(t)\} = F^*(-\omega)$$

- Si f es real, $F^*(-\omega) = F(\omega)$
- Se prueba directamente calculando

$$\mathfrak{F}\{f^*(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t) e^{-j\omega t} dt = \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{j\omega t} dt \right)^*$$

2.15 Propiedades de la transformada de Fourier

- Simetría: Cualquier función es la suma de una parte par más una impar

$$\Im\{f_{PAR}(t)\} = F_{PAR}(\omega) \text{ real}$$

$$\Im\{f_{IMPAR}(t)\} = F_{IMPAR}(\omega) \text{ imaginario}$$

- Por ejemplo, para la función par:

$$\begin{aligned}\Im\{f_{PAR}(t)\} &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{PAR}(t)e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{PAR}(t)\cos(\omega t)dt - j\int_{-\infty}^{\infty} f_{PAR}(t)\sen(\omega t)dt \\ &= 2\int_0^{\infty} f_{PAR}(t)\cos(\omega t)dt \text{ que es par}\end{aligned}$$

2.15 Propiedades de la transformada de Fourier

- Dualidad

$$\text{si } \mathfrak{F}\{f(t)\} = F(\omega)$$

$$\Rightarrow \mathfrak{F}\{F(t)\} = 2\pi f(-\omega)$$

– Para probarlo basta hacer un cambio de variables entre t y ω en la transformada

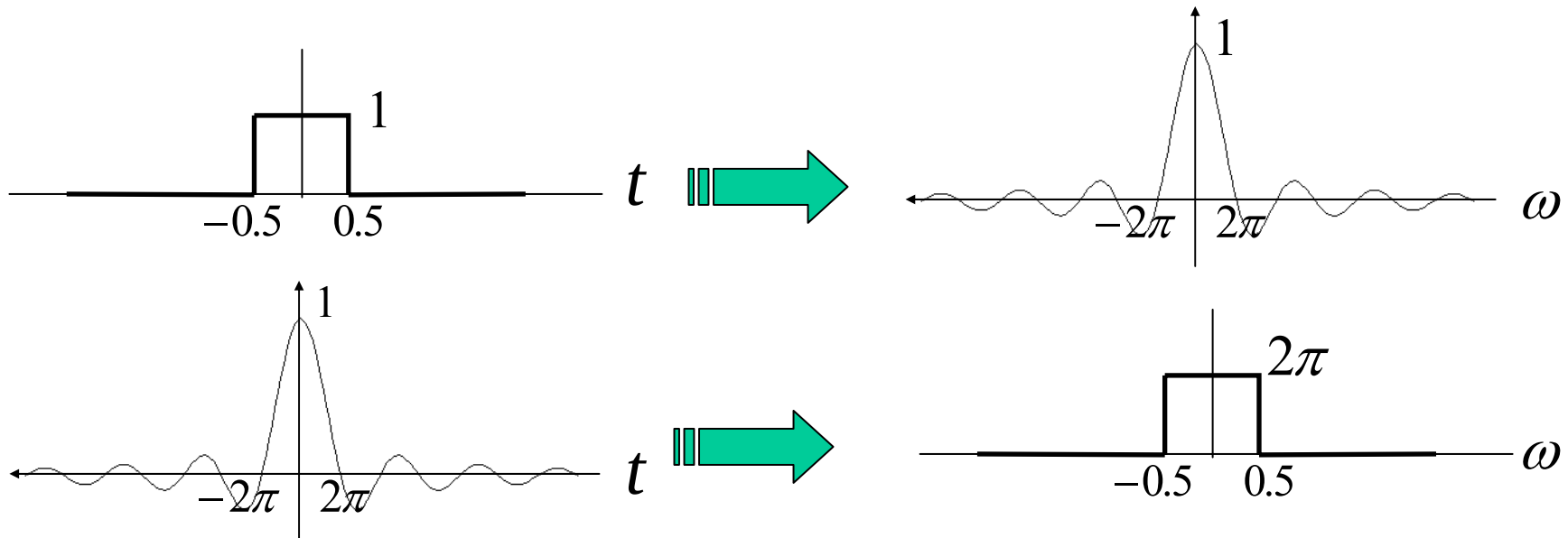
$$\begin{aligned} \mathfrak{F}\{f(t)\} &= \int_{t=-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \begin{matrix} \omega' = t \\ t' = \omega \end{matrix} \leftarrow \\ &= 2\pi \frac{1}{2\pi} \int_{\omega'=-\infty}^{\infty} f(\omega') e^{-jt'\omega'} d\omega' = 2\pi \mathfrak{F}^{-1}\{f(-\omega')\}|_{\omega'=t} \end{aligned}$$

2.15 Propiedades de la transformada de Fourier

- Ejemplo

– Si se sabe que $\mathfrak{T}\{rect(t)\} = Sa(\omega/2)$, calcular $\mathfrak{T}\{Sa(t/2)\}$

$$\mathfrak{T}\{Sa(t/2)\} = 2\pi rect(-\omega) = 2\pi rect(\omega)$$



2.15 Propiedades de la transformada de Fourier

- Escala de Coordenadas

$$\mathfrak{F}\{f(\alpha t)\} = \frac{1}{|\alpha|} F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$$

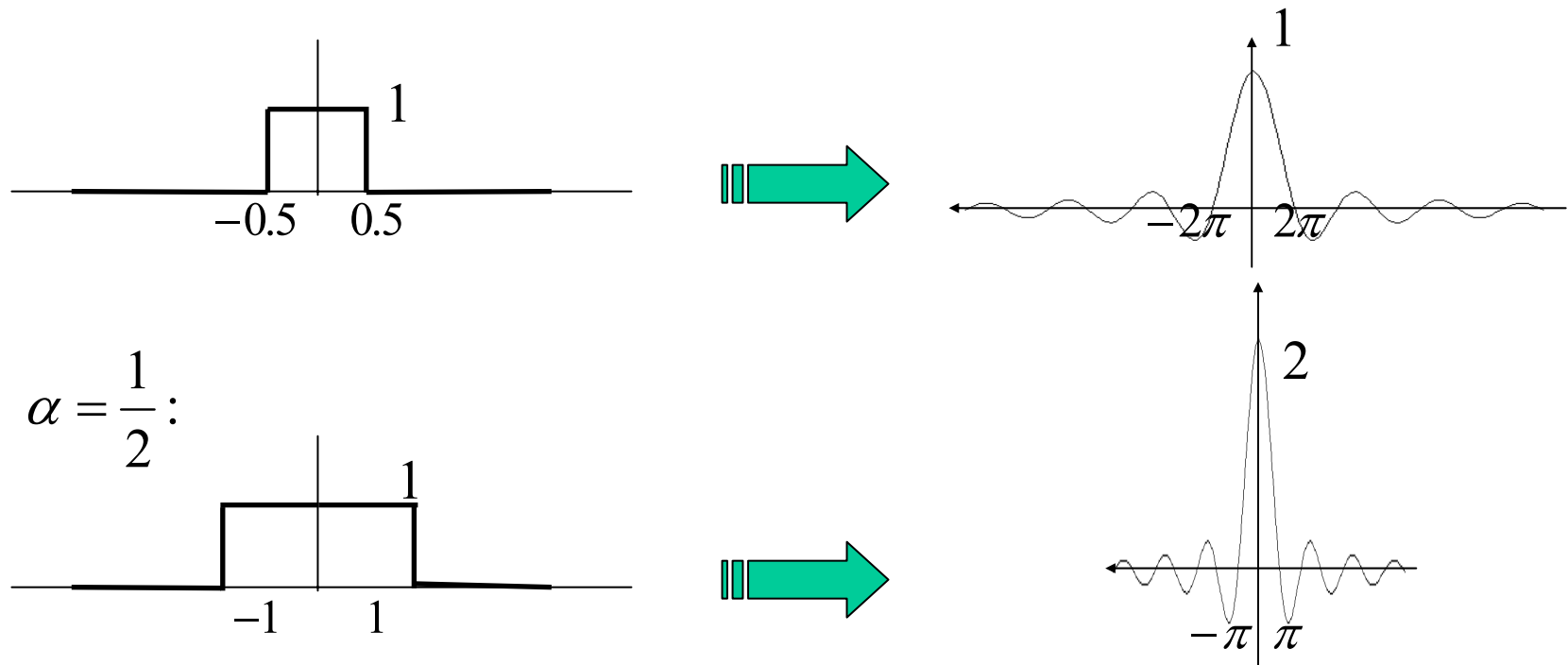
- Prueba: 2 casos: α positivo y α negativo

$$\mathfrak{F}\{f(\alpha t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega x/\alpha} dx / \alpha = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$$

$$\mathfrak{F}\{f(\alpha t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha t) e^{-j\omega t} dt = \int_{\infty}^{-\infty} f(x) e^{-j\omega x/\alpha} dx / \alpha = \frac{1}{-\alpha} F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$$

2.15 Propiedades de la transformada de Fourier

- Si $f(t)$ se vuelve ancho, $F(\omega)$ se vuelve angosto y viceversa:



2.15 Propiedades de la transformada de Fourier

- Desplazamiento en el tiempo (retardo)

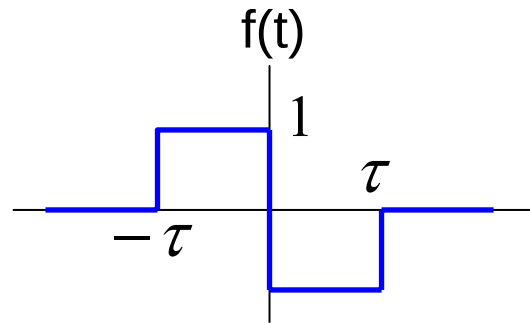
$$\mathfrak{F}\{f(t - t_0)\} = F(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

$$\mathfrak{F}\{f(t - t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j\omega(x+t_0)} dx$$

- Al retardar la señal, la amplitud del espectro no varía, pero su fase si $\Rightarrow$ información temporal en la fase.

2.15 Propiedades de la transformada de Fourier

- Ej: Determinar la transformada de:



$$\begin{aligned}\mathfrak{F}\{f(t)\} &= \mathfrak{F}\{\text{rect}[(t + \tau/2)/\tau] - \text{rect}[(t - \tau/2)/\tau]\} \\ &= \tau \text{Sa}(\omega\tau/2) \{e^{j\omega\tau/2} - e^{-j\omega\tau/2}\} = j(4/\omega) \text{sen}^2(\omega\tau/2)\end{aligned}$$

2.15 Propiedades de la transformada de Fourier

- Desplazamiento de frecuencia (modulación)
 - Es la propiedad dual a la del retardo

$$\mathfrak{F}\{f(t)e^{j\omega_0 t}\} = F(\omega - \omega_0)$$

$$\mathfrak{F}\{f(t)e^{j\omega_0 t}\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt$$

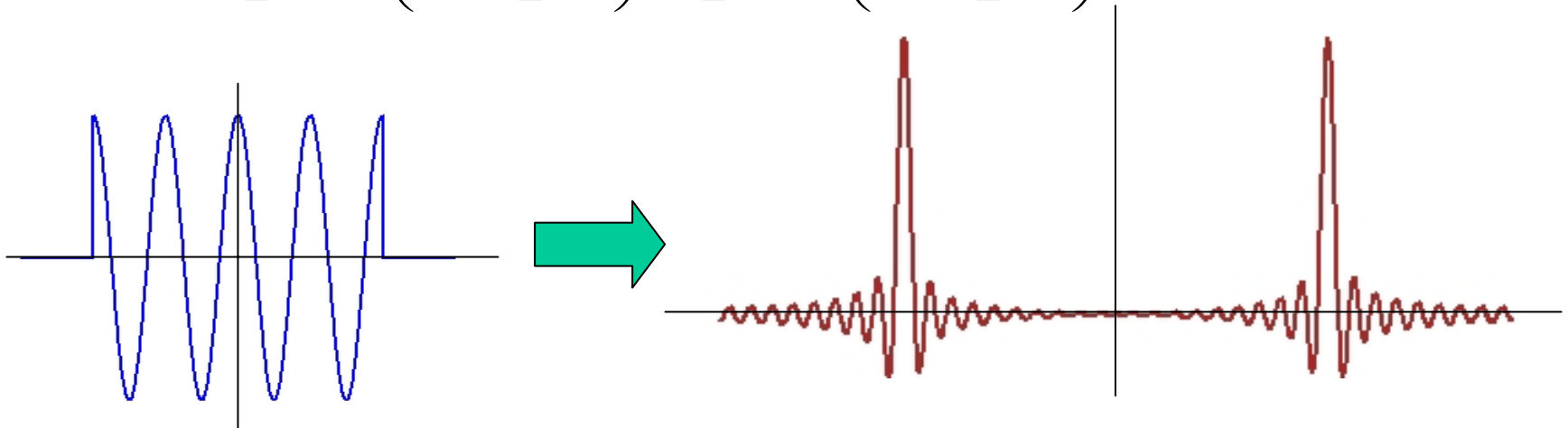
- También ocurre con $\cos(\cdot)$

$$\mathfrak{F}\{f(t)\cos(\omega_0 t)\} = \mathfrak{F}\left\{\frac{1}{2} f(t)e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2} f(t)e^{-j\omega_0 t}\right\} = \frac{1}{2} F(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} F(\omega + \omega_0)$$

2.15 Propiedades de la transformada de Fourier

- Ej: hallar el espectro de:

$$\begin{aligned}\mathfrak{T}\{A \operatorname{rect}(t / \tau) \cos(\omega_0 t)\} &= \\ &= \frac{A}{2} \mathfrak{T}\{\operatorname{rect}(t / \tau) e^{j\omega_0 t}\} + \frac{A}{2} \mathfrak{T}\{\operatorname{rect}(t / \tau) e^{-j\omega_0 t}\} \\ &= \frac{A}{2} \tau \operatorname{Sa}\left(\tau \frac{\omega - \omega_0}{2}\right) + \frac{A}{2} \tau \operatorname{Sa}\left(\tau \frac{\omega + \omega_0}{2}\right)\end{aligned}$$



2.15 Propiedades de la transformada de Fourier

- Derivación

$$\mathfrak{T}\left\{\frac{d}{dt} f(t)\right\} = j\omega F(\omega)$$

– Porque:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$\frac{d}{dt} f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) j\omega e^{j\omega t} d\omega = \mathfrak{T}^{-1}\{F(\omega) j\omega\}$$

$$\mathfrak{T}\left\{\frac{d}{dt} f(t)\right\} = F(\omega) j\omega$$

2.15 Propiedades de la transformada de Fourier

- Integración:

$$\mathfrak{I}\left\{\int_{\tau=-\infty}^t f(\tau)d\tau\right\}=\frac{1}{j\omega}F(\omega)+\pi F(0)\delta(\omega)$$

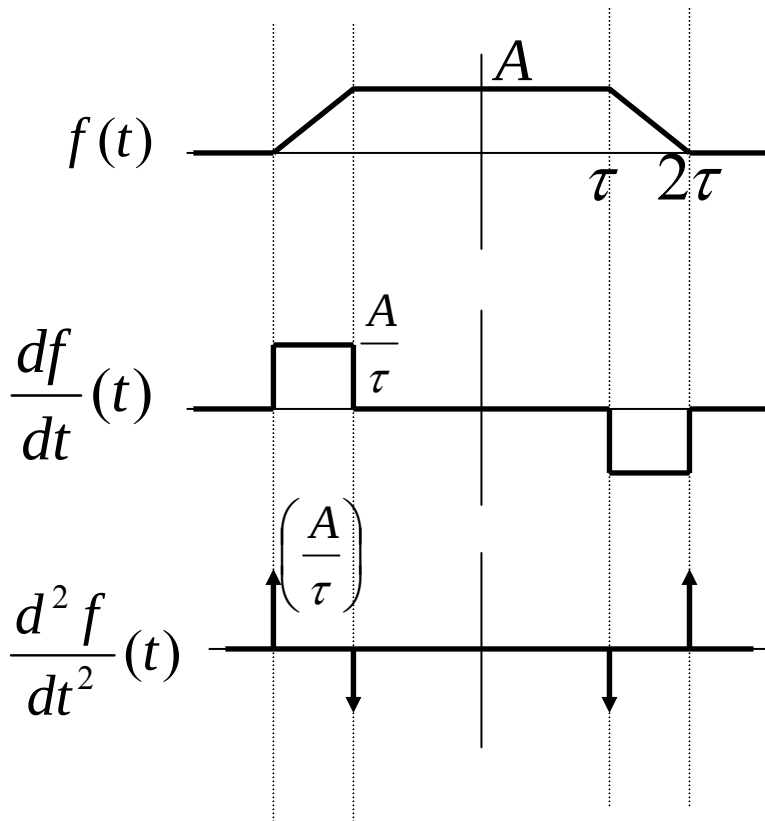
– donde:

$$F(0)=\int_{t=-\infty}^{\infty} f(t)dt$$

es la componente continua de la señal.

2.15 Propiedades de la transformada de Fourier

- Ejemplo: Determinar la transformada de $f(t)$:



$$\mathfrak{F}\left\{\frac{d^2 f}{dt^2}(t)\right\} = (j\omega)^2 F(\omega)$$

$$(j\omega)^2 F(\omega) = \frac{A}{\tau} \left(e^{j2\omega\tau} - e^{j\omega\tau} - e^{-j\omega\tau} + e^{-j2\omega\tau} \right)$$

$$F(\omega) = -\frac{A \left(e^{j2\omega\tau} - e^{j\omega\tau} - e^{-j\omega\tau} + e^{-j2\omega\tau} \right)}{\omega^2 \tau}$$

2.15 Propiedades de la transformada de Fourier

- Convolución en el tiempo
 - Se denomina convolución entre dos funciones a la siguiente operación:

$$f(t) * h(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

- Se cumple la propiedad:

$$\mathfrak{F}\{f(t) * h(t)\} = F(\omega)H(\omega)$$

2.15 Propiedades de la transformada de Fourier

$$\mathfrak{F}\{f(t) * h(t)\} = \int_{t=-\infty}^{\infty} \left(\int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t-\tau) d\tau \right) e^{-j\omega t} dt$$

- Cambiando el orden de integración:

$$\mathfrak{F}\{f(t) * h(t)\} = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau) \left(\int_{t=-\infty}^{\infty} h(t-\tau) e^{-j\omega t} dt \right) d\tau$$

$$\mathfrak{F}\{f(t) * h(t)\} = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau) \mathfrak{F}\{h(t-\tau)\} d\tau$$

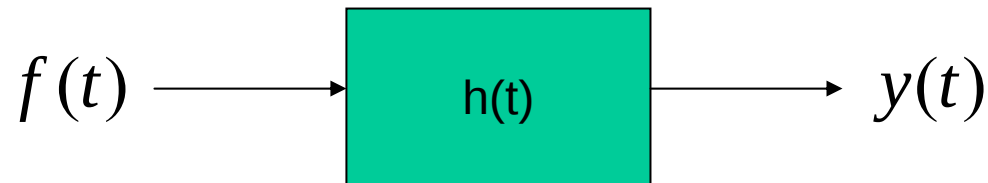
- Propiedad de desplazamiento en el tiempo:

$$\mathfrak{F}\{f(t) * h(t)\} = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau) H(\omega) e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$\mathfrak{F}\{f(t) * h(t)\} = H(\omega) F(\omega)$$

2.15 Propiedades de la transformada de Fourier

- Si el sistema es lineal y $h(t)$ es la respuesta al impulso, se cumple:



$$y(t) = f(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

$$Y(\omega) = F(\omega)H(\omega) \quad \text{con } H(\omega) = \mathfrak{F}\{h(t)\}$$

2.15 Propiedades de la transformada de Fourier

- Convolución en la frecuencia: Si

$$\mathfrak{F}\{f_1(t)\} = F_1(\omega), \quad \mathfrak{F}\{f_2(t)\} = F_2(\omega)$$

$$\Rightarrow \mathfrak{F}\{f_1(t) f_2(t)\} = \frac{1}{2\pi} [F_1(\omega) * F_2(\omega)]$$

- Se prueba de forma semejante a la convolución en el tiempo

2.15 Propiedades de la transformada de Fourier

Linealidad (superposición)	$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$	$a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega)$
Conjugada compleja	$f^*(t)$	$F^*(-\omega)$
Escala	$f(\alpha t)$	$\frac{1}{ \alpha } F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$
Retardo	$f(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0} F(\omega)$
Traslación en frecuencia	$e^{j\omega_0 t} f(t)$	$F(\omega - \omega_0)$

2.15 Propiedades de la transformada de Fourier

Modulación de amplitud	$f(t) \cos(\omega_0 t)$	$\frac{1}{2} F(\omega + \omega_0) + \frac{1}{2} F(\omega - \omega_0)$
Convolución en el tiempo	$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t - \tau) d\tau$	$F(\omega) H(\omega)$
Convolución en la frecuencia	$f_1(t) f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(u) F_2(\omega - u) du$
Dualidad tiempo - frecuencia	$F(t)$	$2\pi f(-\omega)$
Simetría par - impar	$f_{PAR}(t)$	$F_{PAR}(t) \text{ real}$
	$f_{IMPAR}(t)$	$F_{IMPAR}(t) \text{ imaginario}$

2.15 Propiedades de la transformada de Fourier

Derivación en el tiempo	$\frac{d}{dt} f(t)$	$j\omega F(\omega)$
Integración en el tiempo	$\int_{\tau=-\infty}^t f(\tau) d\tau$	$\frac{1}{j\omega} F(\omega) + \pi F(0)\delta(\omega)$

Como las transformadas de Fourier se obtienen a partir de las series de Fourier, las propiedades de una son aplicables a la otra cambiando ω por $n\omega_0$.

2.16 Relaciones de convolución

- La convolución se define por:

$$f(t) * h(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

- Si el sistema es causal, entonces $h(t)=0$ para $t<0$ ($h(t)$ es la respuesta al impulso $\delta(t)$)
- Si además la entrada $f(\cdot)$ cumple $f(t)=0$ para $t<0$, la convolución se puede reescribir:

$$f(t) * h(t) = \int_{\tau=0}^t f(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

2.16 Relaciones de convolución

- Propiedades: conmutatividad

$$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$$

- Distributividad

$$f_1(t) * (f_2(t) + f_3(t)) = f_1(t) * f_2(t) + f_1(t) * f_3(t)$$

- Asociatividad: no se requieren ()

$$\begin{aligned} (f_1(t) * f_2(t)) * f_3(t) &= f_1(t) * (f_2(t) * f_3(t)) = \\ &= f_1(t) * f_2(t) * f_3(t) \end{aligned}$$

2.16 Relaciones de convolución

- Respuesta al escalón: La respuesta al escalón es la integral de la respuesta al impulso para un sistema lineal invariante:

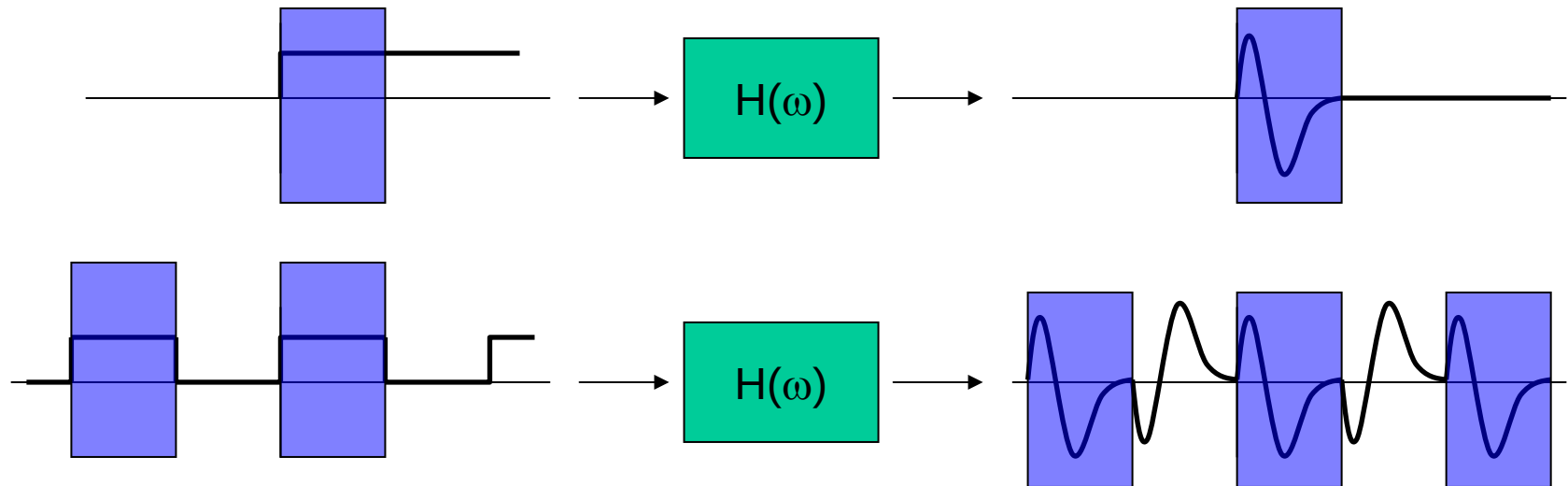
$$\begin{aligned}\Re\{u(t)\} &= u(t) * h(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} u(\tau)h(t-\tau)d\tau = \\ &= \int_{\tau=0}^{\infty} h(t-\tau)d\tau\end{aligned}$$

- Haciendo $x=t-\tau$:

$$\Re\{u(t)\} = \int_{x=-\infty}^t h(x)dx$$

2.16 Relaciones de convolución

- La respuesta al impulso puede determinarse derivando la respuesta al escalón
- La respuesta al escalón puede determinarse, usando una onda cuadrada lenta, en los flancos positivos:



2.16 Relaciones de convolución

- Convolución con impulso $\Rightarrow$ retraso

$$f(t) * \delta(t - t_0) = \int_{\tau=0}^{\infty} f(\tau) \delta(t - t_0 - \tau) d\tau = f(t - t_0)$$

- Ejemplo: Calcular $f(t) * g(t)$ si

$$f(t) = A \operatorname{sen}(\pi t) \cdot u(t), \quad g(t) = \delta(t) - \delta(t - 2)$$

$$f(t) * g(t) = f(t) * \delta(t) - f(t) * \delta(t - 2)$$

$$= f(t) - f(t - 2) = A \operatorname{sen}(\pi t) u(t) - A \operatorname{sen}(\pi(t - 2)) u(t)$$

$$= A \operatorname{sen}(\pi t) (u(t) - u(t - 2))$$

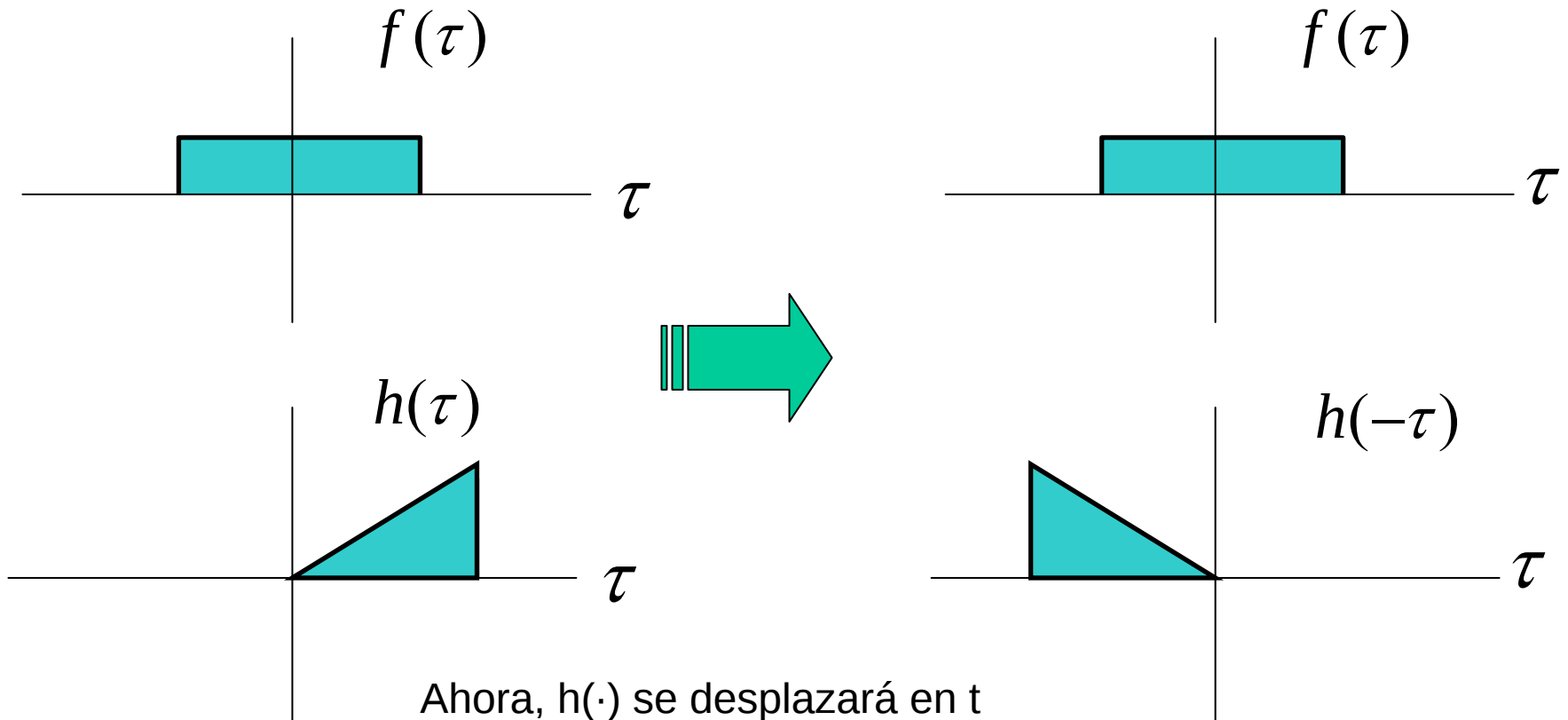
2.17 Interpretación gráfica de la convolución

- La convolución se define por la integral:

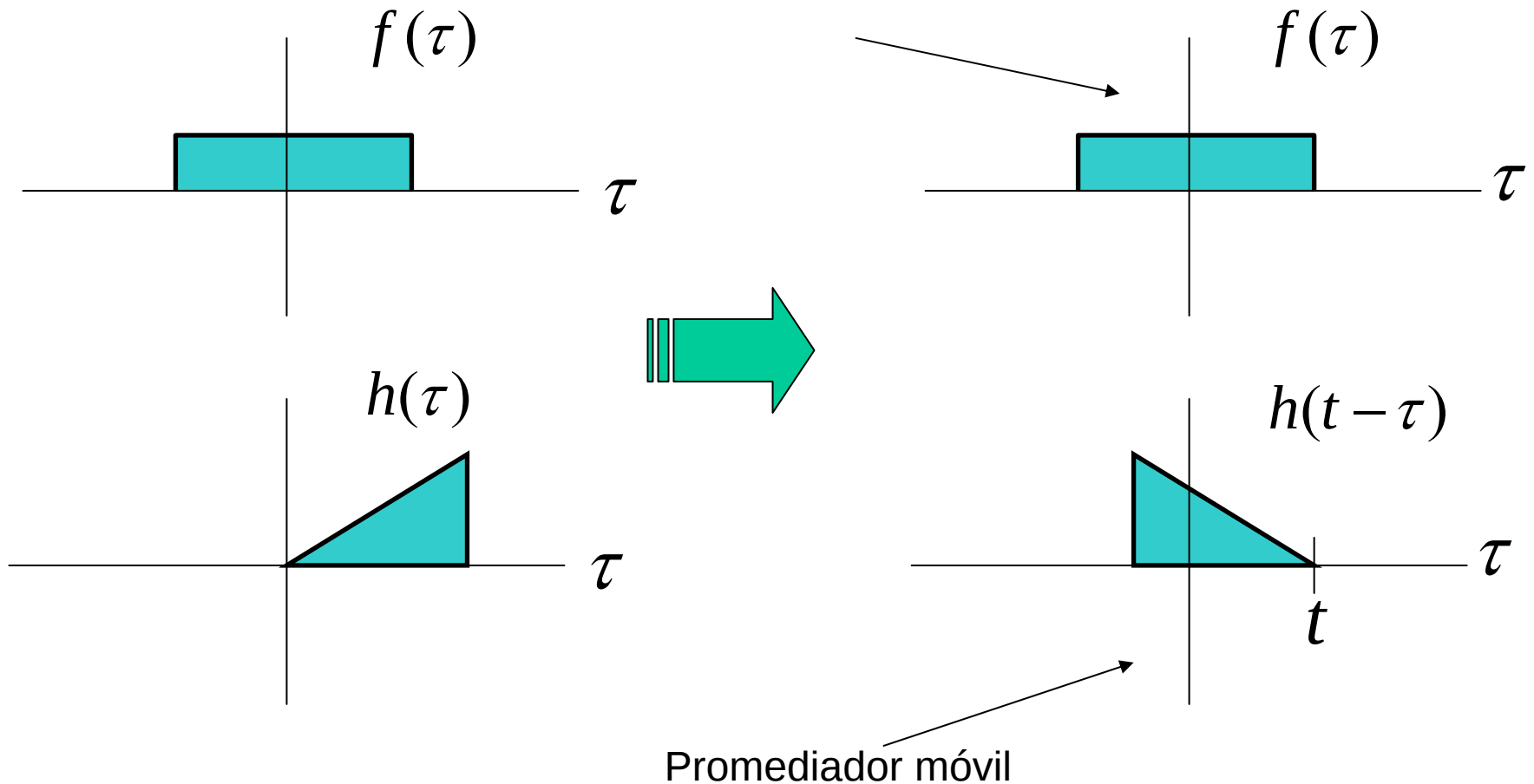
$$f(t) * h(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

- Se quiere ver qué significa en el dominio del tiempo de un modo intuitivo.
- $h(t)$, al ser invertido en el eje horizontal se comporta como un promediador móvil: permite calcular un “promedio ponderado” de la entrada en cada t :

2.17 Interpretación gráfica de la convolución

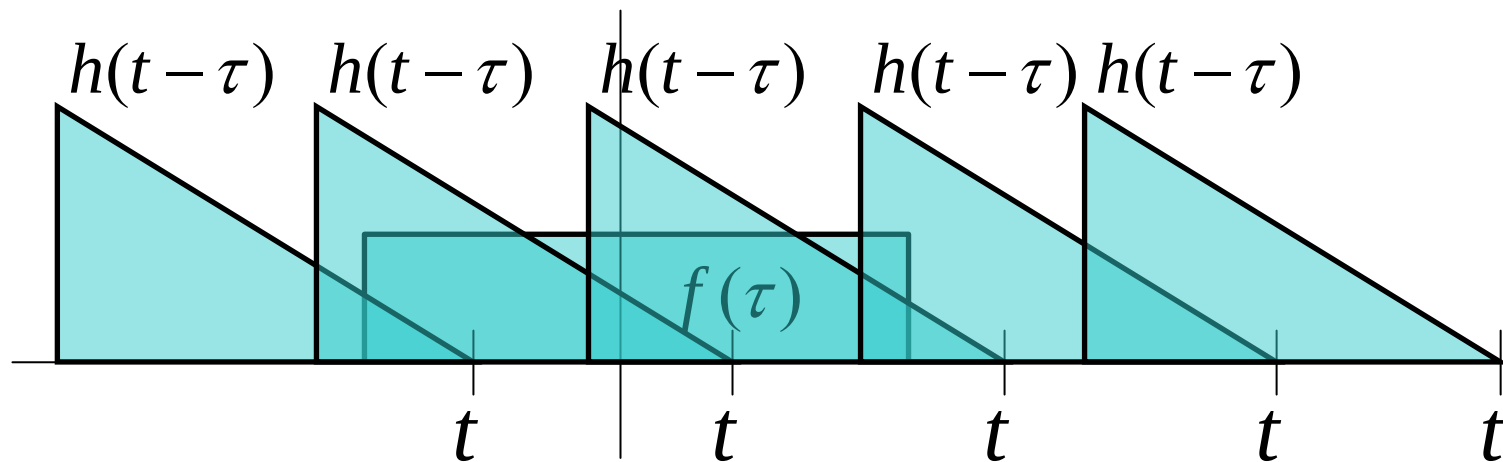


2.17 Interpretación gráfica de la convolución



2.17 Interpretación gráfica de la convolución

El promediador avanza al pasar el tiempo. La salida en el tiempo t es el área común que resulta al multiplicarlos.



$$f(t) * h(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t - \tau)d\tau, \quad \forall t$$

2.17 Interpretación gráfica de la convolución

- La salida, en el dominio del tiempo, es un promedio ponderado de la señal de entrada. El promediador avanza junto con t
- El cálculo de la integral puede discretizarse $\Rightarrow$ permite cálculo en un computador

2.18 Característica de filtro de los sistemas lineales

- La salida de un sistema lineal se puede ver también en el dominio de la frecuencia:

$$y(t) = f(t) * h(t)$$

$$Y(\omega) = F(\omega)H(\omega)$$

- $H(\omega)$ indica la ganancia del filtro en función de la frecuencia $\Rightarrow$ función de transferencia
- A la salida, sólo quedan las frecuencias de $F(\omega)$ que están también en $H(\omega)$

2.18 Característica de filtro de los sistemas lineales

- Para cada frecuencia ω :
 - $|H(\omega)|$: ganancia de amplitud
 - Fase de $H(\omega)$: desfase entre salida y entrada. A la fase de la entrada se le suma la fase de $H(\omega)$
- Ejemplo: calcular el espectro de salida si $\tau=4RC$: $F(\omega) = \tau \text{Sa}(\omega\tau / 2)$

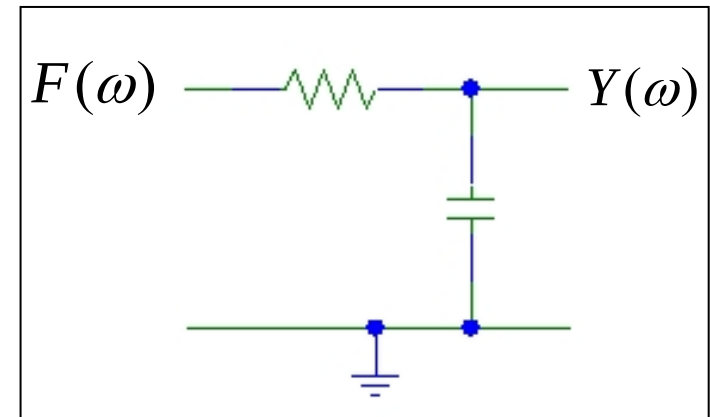
$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau / 4)^2}} e^{j\phi}$$

2.18 Característica de filtro de los sistemas lineales

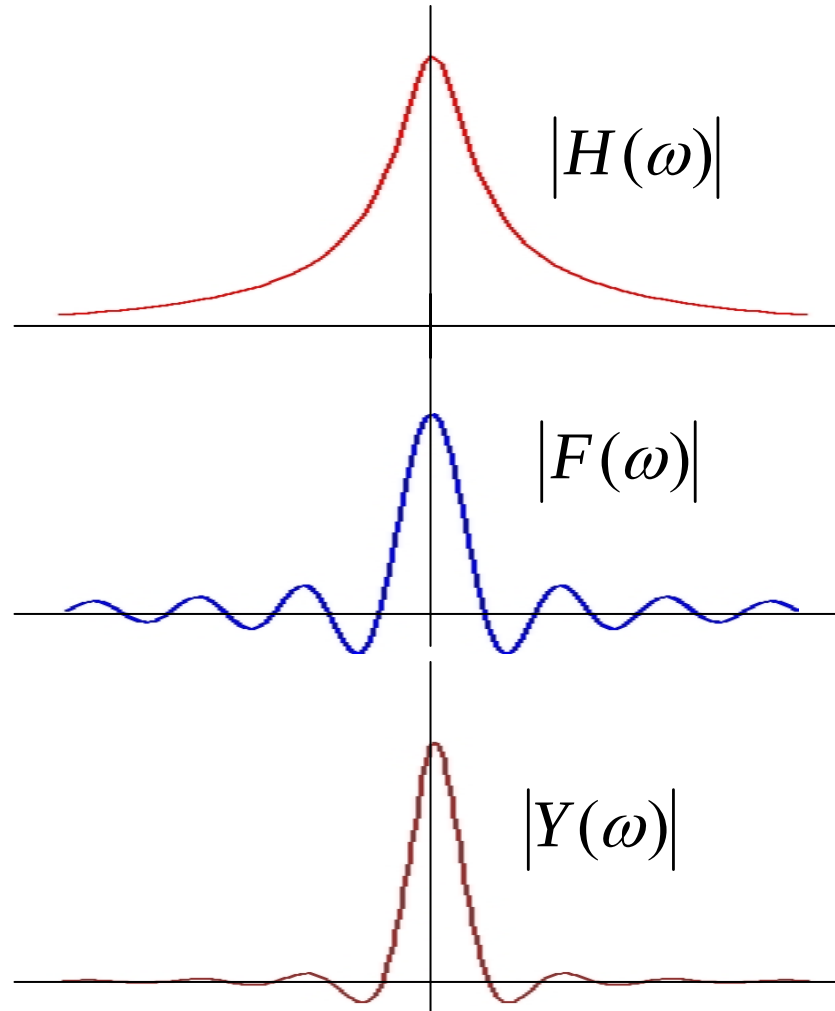
$$F(\omega) = \tau \operatorname{Sa}(\omega\tau / 2)$$

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau / 4)^2}} e^{j\phi}$$

$$Y(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau / 4)^2}} \tau \operatorname{Sa}(\omega\tau / 2) e^{j\phi}$$



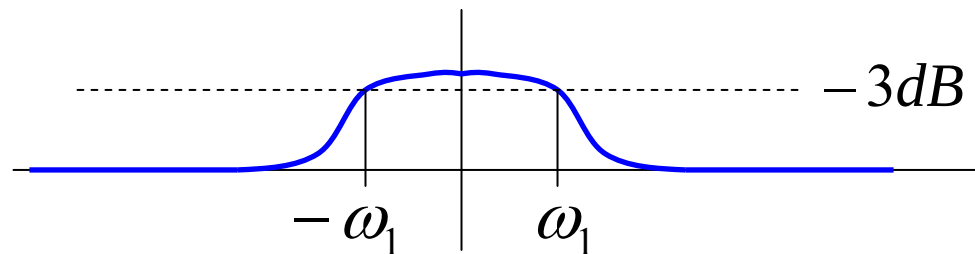
2.18 Característica de filtro de los sistemas lineales



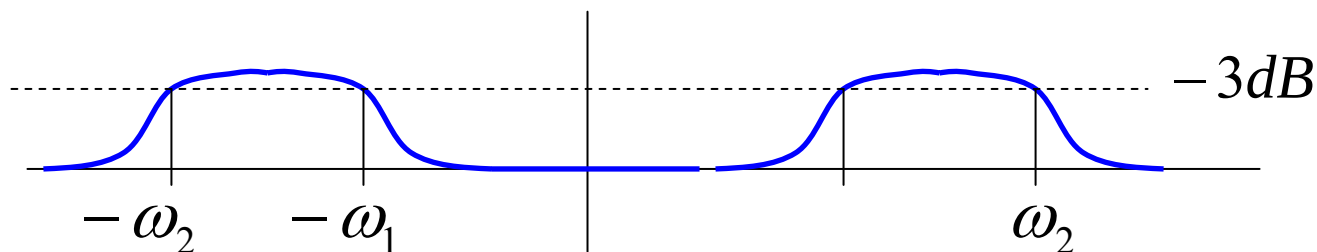
2.19 Ancho de banda de un sistema

- Zona en que $H(\omega)$ deja pasar la señal $\Rightarrow$ ancho de banda
- Intervalo W (en rad/s) donde la magnitud es mayor que un cierto umbral (factor numérico)
- Típicamente: ancho de banda de -3dB = ancho de banda de potencia media: umbral = $1/\sqrt{2}$ en amplitud = $1/2$ en potencia.
- Ancho de banda en Hz $\Rightarrow B$

2.19 Ancho de banda de un sistema



$$W = \omega_1, \quad B = \frac{\omega_1}{2\pi}$$



$$W = \omega_2 - \omega_1, \quad B = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi}$$

2.20 Transmisión sin distorsión

- Requisito para que un sistema lineal no distorsione la forma de onda: debe ser del tipo:

$$y(t) = Kf(t - t_0)$$

- Tomando transformada de Fourier:

$$Y(\omega) = Ke^{-j\omega t_0} F(\omega)$$

- Es decir, $H(\omega) = Ke^{-j\omega t_0}$

2.20 Transmisión sin distorsión

- Requisito para que un sistema lineal no distorsione la forma de onda: debe tener ganancia constante y fase lineal

$$H(\omega) = Ke^{-j\omega t_0}$$

- Ganancia K para todo ω
- Fase: $\phi_H = -t_0\omega$

2.21 Modulación de amplitud: portadora suprimida

- Radio y televisión:
 - Se requiere transmitir muchas señales con espectros semejantes por un mismo canal (el aire) evitando superposición
 - Se requiere transmitir dichas señales en ciertas bandas de frecuencia específicas (ej: para sintonizar un canal o una radio)
- Solución: modulación

2.21 Modulación de amplitud: portadora suprimida

- La ecuación general de una señal senoidal es:

$$\phi(t) = a(t) \cos \theta(t)$$

$a(t) : \textit{amplitud}$
 $\theta(t) : \textit{ángulo}$

- El ángulo se puede expresar en función de una frecuencia y una fase:

$$\phi(t) = a(t) \cos(\omega_c t + \gamma(t))$$

- Se supone que $a(t)$ y $\gamma(t)$ varían lentamente comparados con $\omega_c t$

2.21 Modulación de amplitud: portadora suprimida

$a(t)$: envolvente

$$\phi(t) = a(t) \cos(\omega_c t + \gamma(t))$$

ω_c : portadora

$\gamma(t)$: modulación de fase

- En la modulación de amplitud, la modulación de fase es cero (o constante):

$\cos(\omega_c t)$: señal portadora

$$\phi(t) = f(t) \cos(\omega_c t)$$

$f(t)$: señal moduladora

$\phi(t)$: señal modulada

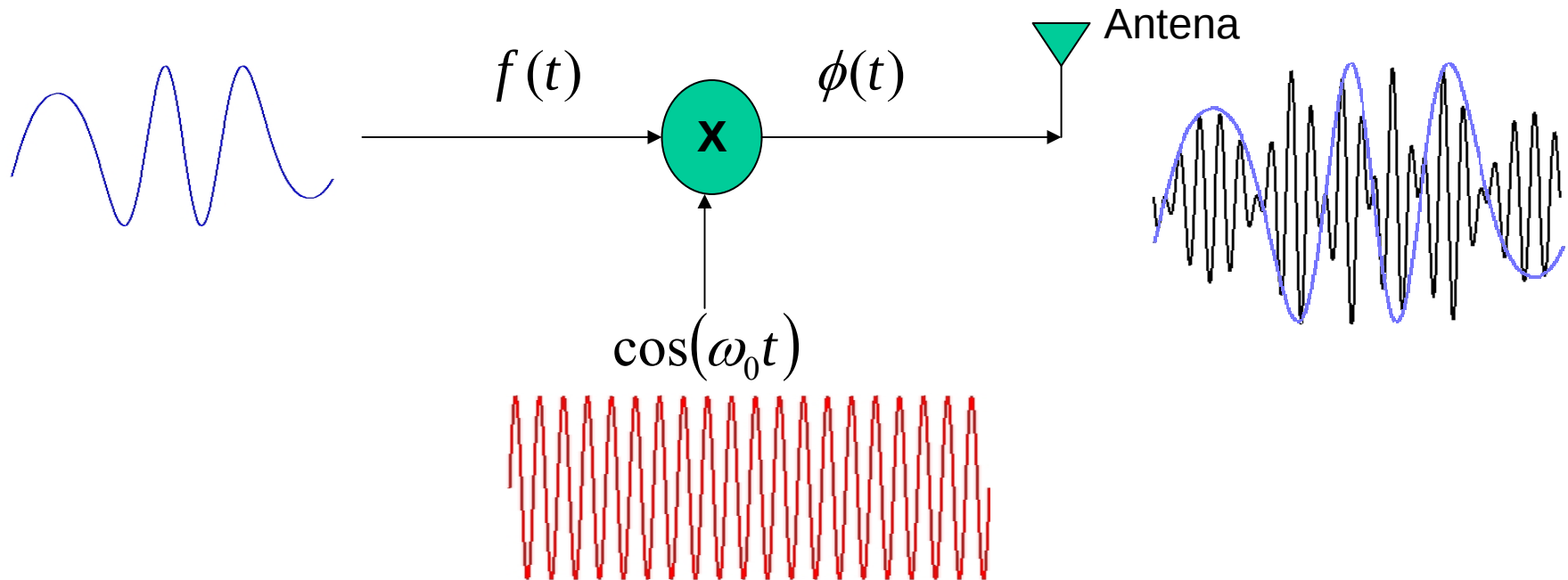
2.21 Modulación de amplitud: portadora suprimida

- Aplicando la propiedad de modulación, se tiene que:

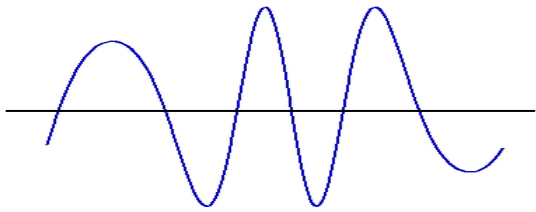
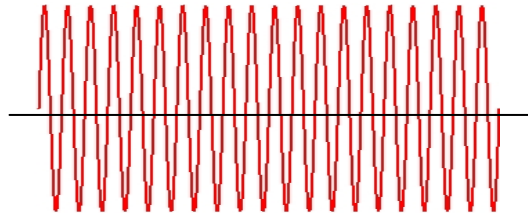
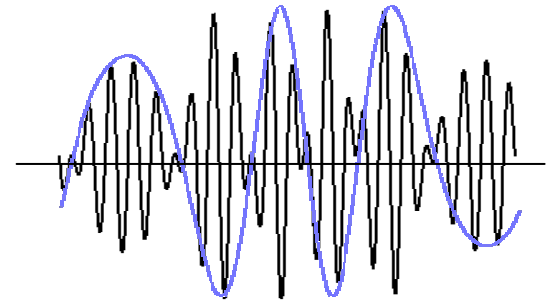
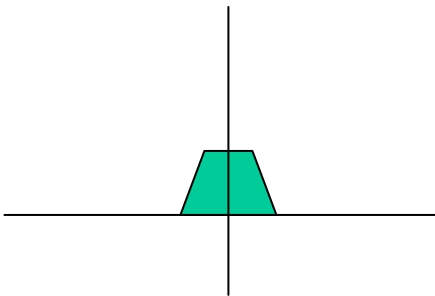
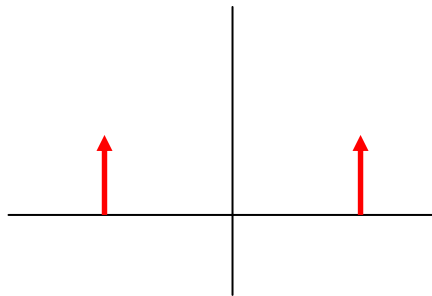
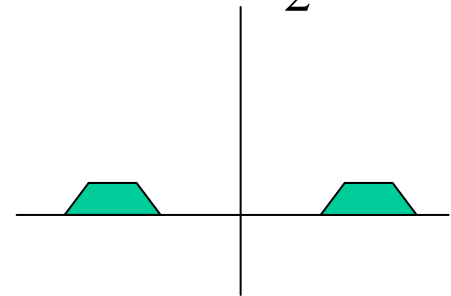
$$\phi(t) = f(t) \cos(\omega_c t) \Rightarrow \Phi(\omega) = \frac{1}{2} F(\omega + \omega_0) + \frac{1}{2} F(\omega - \omega_0)$$

- La modulación de amplitud traslada el espectro de frecuencia dejando inalterada su forma
- Portadora suprimida $\Rightarrow$ no aparece una portadora identificable (un impulso visible) en el espectro

2.21 Modulación de amplitud: portadora suprimida

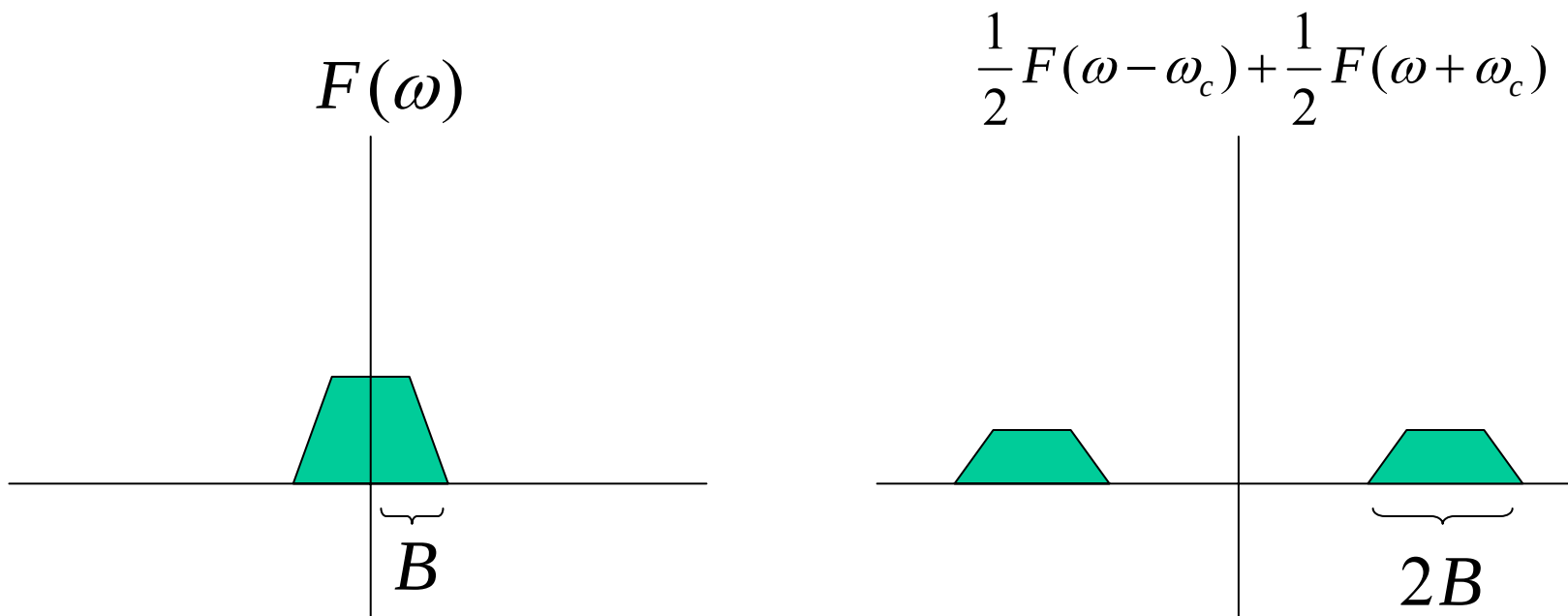


2.21 Modulación de amplitud: portadora suprimida

 $f(t)$

 $\cos(\omega_c t)$

 $\phi(t) = f(t) \cos(\omega_c t)$

 $F(\omega)$

 $\pi\delta(\omega - \omega_c) + \pi\delta(\omega + \omega_c)$

 $\frac{1}{2}F(\omega - \omega_c) + \frac{1}{2}F(\omega + \omega_c)$


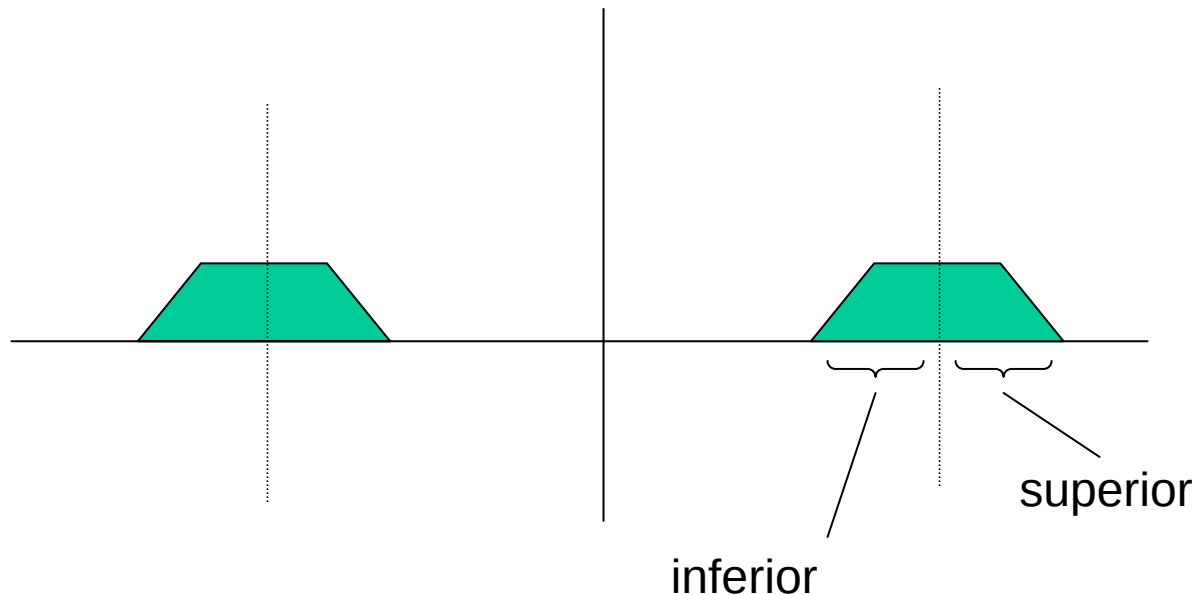
2.21 Modulación de amplitud: portadora suprimida

- El ancho de banda necesario para transmitir se duplica:



2.21 Modulación de amplitud: portadora suprimida

- Bandas laterales superior e inferior: corresponden a los lados derecho e izquierdo del espectro original, “simetría conjugada”



2.21 Modulación de amplitud: portadora suprimida

- DSB-SC (double sideband, suppressed carrier)
 - Tiene 2 bandas laterales (superior e inferior)
 - No tiene portadora explícita (impulso)
- Recuperación de la señal original volviendo a modular del mismo modo, más un filtro pasabajos.

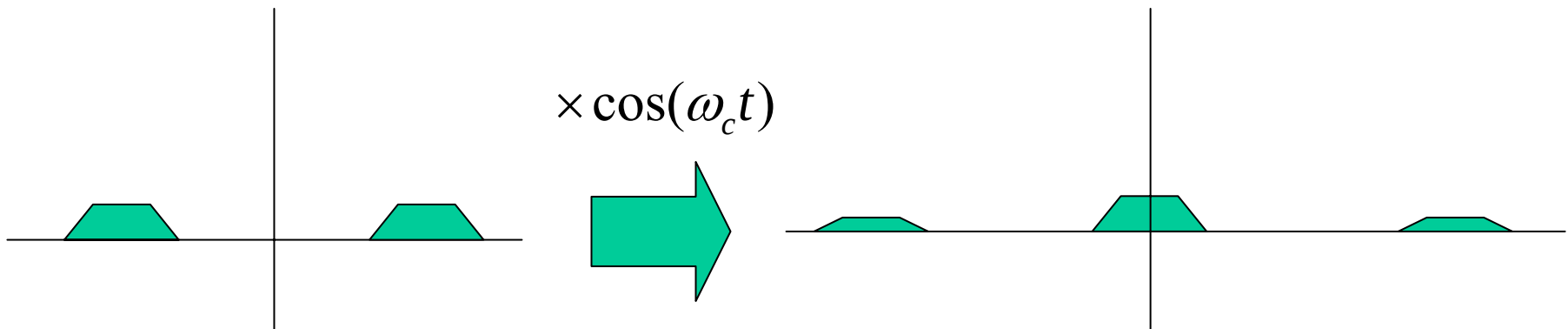
$$\phi(t) \cos(\omega_c t) = f(t) \cos^2(\omega_c t)$$

$$\phi(t) \cos(\omega_c t) = \frac{1}{2} f(t) + \frac{1}{2} f(t) \cos(2\omega_c t)$$

$$\mathfrak{F}\{\phi(t) \cos(\omega_c t)\} = \frac{1}{2} F(\omega) + \frac{1}{4} F(\omega + 2\omega_c) + \frac{1}{4} F(\omega - 2\omega_c)$$

2.21 Modulación de amplitud: portadora suprimida

$$\mathfrak{I}\{\phi(t) \cos(\omega_c t)\} = \frac{1}{2} F(\omega) + \frac{1}{4} F(\omega + 2\omega_c) + \frac{1}{4} F(\omega - 2\omega_c)$$



- Con un pasabajos se deja sólo $F(\omega)$

2.21 Modulación de amplitud: portadora suprimida

- Para demodular se debe conocer tanto la frecuencia correcta como la fase correcta.
 - Error en la fase $\Rightarrow$ señal atenuada
 - Error en la frecuencia $\Rightarrow$ distorsión de la señal

$$\phi(t) \cos((\omega_c + \Delta\omega)t + \Delta\theta) = f(t) \cos(\omega_c t) \cos((\omega_c + \Delta\omega)t + \Delta\theta)$$

$$\phi(t) \cos((\omega_c + \Delta\omega)t + \Delta\theta) = \frac{1}{2} f(t) \cos(\Delta\omega t + \Delta\theta) + \frac{1}{2} f(t) \cos((2\omega_c + \Delta\omega)t + \Delta\theta)$$

- Tras el pasabajos:

$$\phi(t) \cos((\omega_c + \Delta\omega)t + \Delta\theta) = \frac{1}{2} f(t) \cos(\Delta\omega t + \Delta\theta)$$

2.21 Modulación de amplitud: portadora suprimida

- Requiere sincronización muy precisa
- Poco robusto ante errores $\Delta\omega$, $\Delta\theta$.
- Multiplexión en cuadratura: Como $\cos(\cdot)$ y $\sin(\cdot)$ son ortogonales, se pueden transmitir 2 señales a la vez

$$\phi(t) = f(t)\cos(\omega_c t) + g(t)\sin(\omega_c t)$$

2.21 Modulación de amplitud: portadora suprimida

$$\phi(t) = f(t) \cos(\omega_c t) + g(t) \sin(\omega_c t)$$

$$\phi(t) \cos(\omega_c t) = f_1(t) \cos^2(\omega_c t) + f_2 \sin(\omega_c t) \cos(\omega_c t)$$

$$\phi(t) \cos(\omega_c t) = \frac{1}{2} f_1(t) + \frac{1}{2} f_1(t) \cos(2\omega_c t) + \frac{1}{2} f_2(t) \sin(2\omega_c t)$$

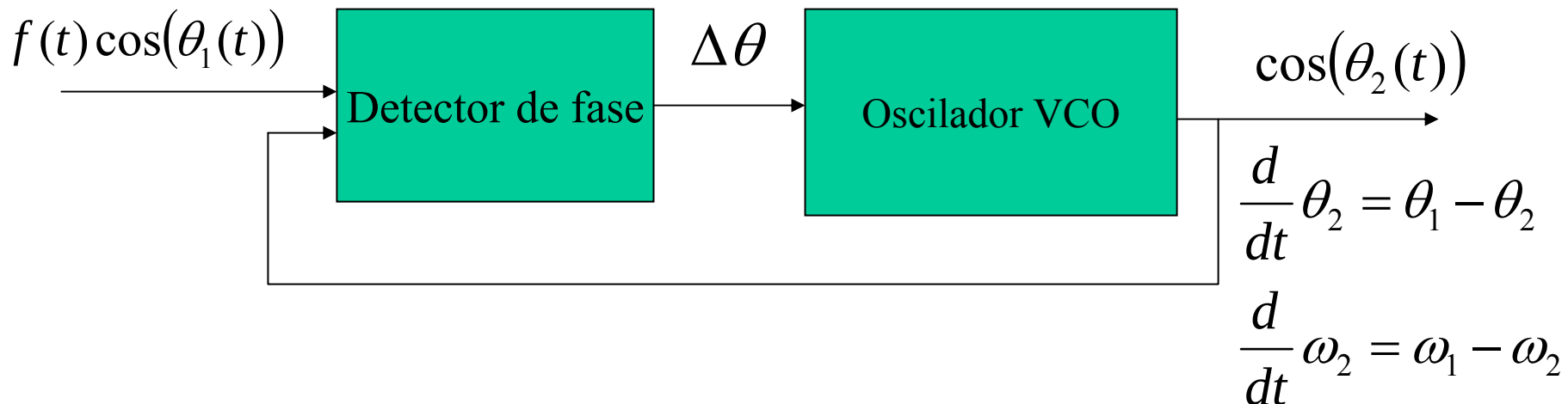
$$\phi(t) \sin(\omega_c t) = f_1(t) \cos(\omega_c t) \sin(\omega_c t) + f_2(t) \sin^2(\omega_c t)$$

$$\phi(t) \sin(\omega_c t) = \frac{1}{2} f_2(t) + \frac{1}{2} f_1(t) \sin(2\omega_c t) - \frac{1}{2} f_2(t) \cos(2\omega_c t)$$

- Al filtrar pasabajos, se recuperan las señales originales separadas.

2.21 Modulación de amplitud: portadora suprimida

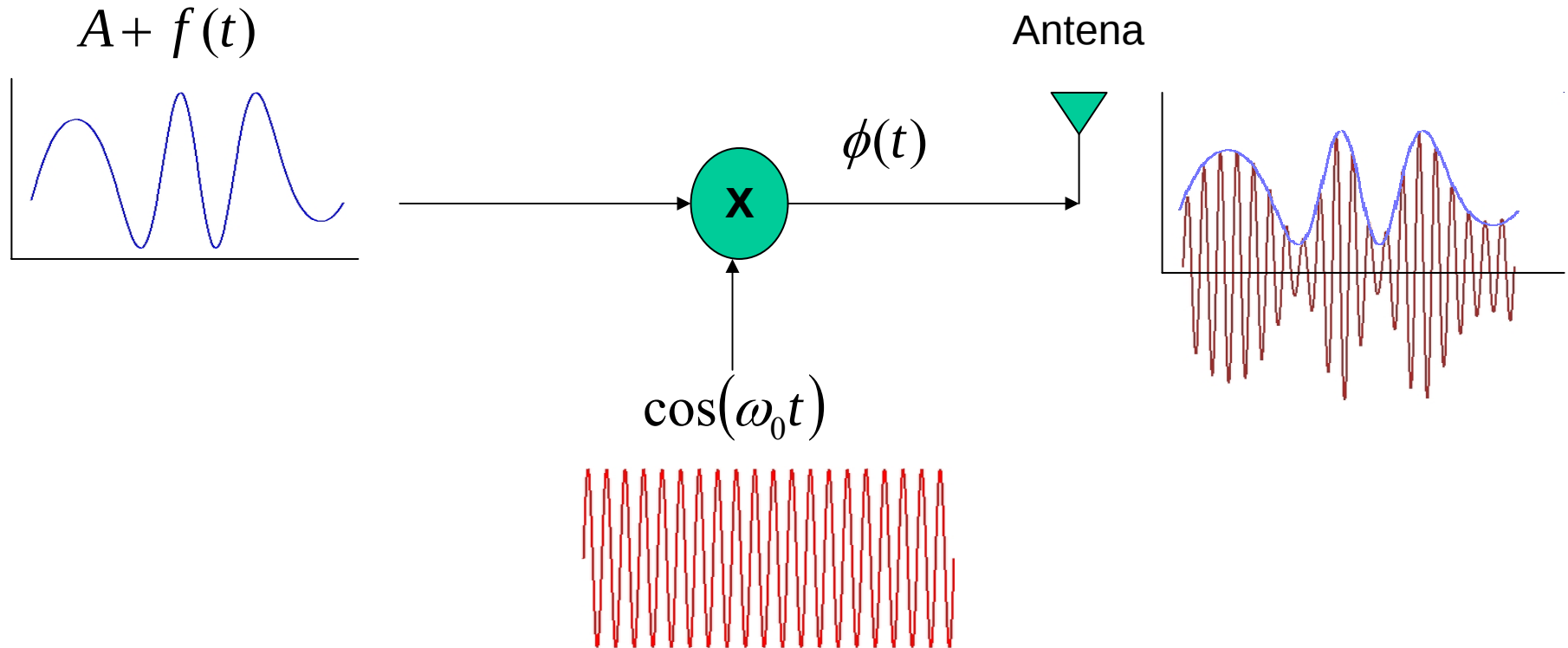
- Para asegurar sincronismo se usa un circuito llamado PLL (phase locked loop, lazo cerrado de fase), que genera una senoide cuya frecuencia va siguiendo a la de la entrada. Se compone de un detector de desfase y un oscilador cuya frecuencia es proporcional al voltaje que entra.



2.22 Modulación de amplitud: gran portadora

- Transmisión AM comercial: problema de sincronización exacta poco deseable $\Rightarrow$ sistema de modulación alternativo, no requiere sincronización
- Se agrega una componente continua a la señal antes de multiplicarla por $\cos(\cdot)$ para que sea siempre positiva
- La forma de la señal original es evidente en la señal final $\Rightarrow$ demodulación simple

2.22 Modulación de amplitud: gran portadora



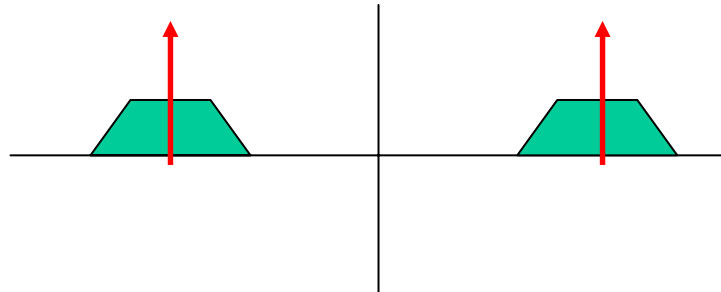
2.22 Modulación de amplitud: gran portadora

$$\phi_{AM}(t) = (A + f(t))\cos(\omega_c t)$$

$$\phi_{AM}(t) = A\cos(\omega_c t) + f(t)\cos(\omega_c t)$$

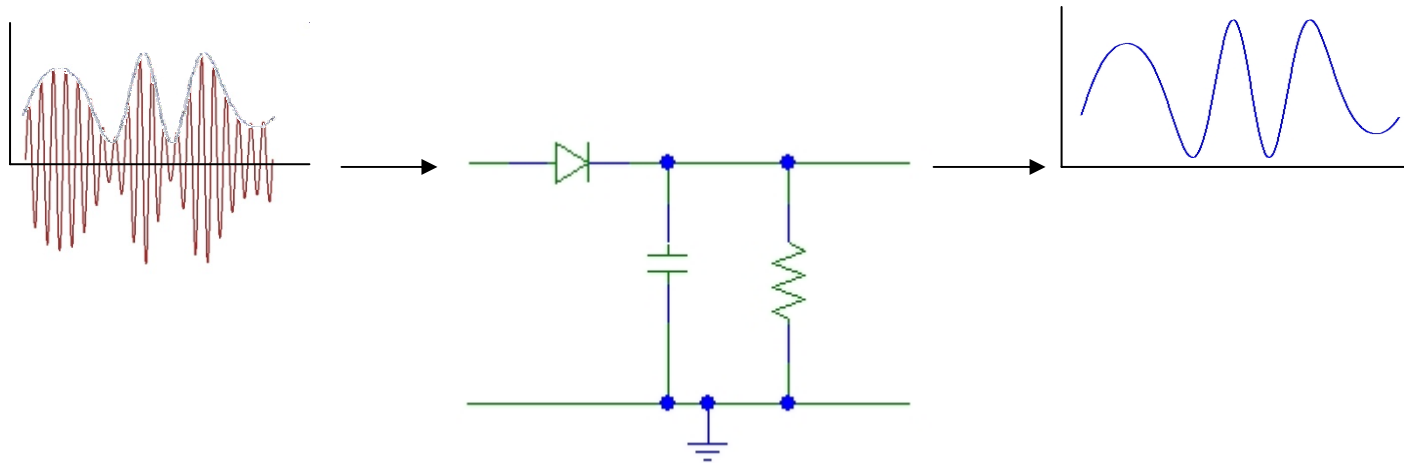
$$\Phi_{AM}(\omega) = \frac{1}{2}F(\omega + \omega_c) + \frac{1}{2}F(\omega - \omega_c) + \pi A\delta(\omega + \omega_c) + \pi A\delta(\omega - \omega_c)$$

DSB-LC: doble banda lateral, con portadora explícita (impulsos)



2.22 Modulación de amplitud: gran portadora

- La demodulación se puede realizar simplemente con un detector de envolvente (un diodo con un circuito RC)



2.22 Modulación de amplitud: gran portadora

- El transmitir el carrier significa gasto extra de potencia para transmitir la señal.
- Se requiere que la componente continua sea mayor que la amplitud de la señal
- Razón de eficiencia entre la potencia de la señal y la potencia total transmitida.

$$\phi_{AM}(t) = (A + f(t)) \cos(\omega_c t)$$

$$\overline{\phi_{AM}^2(t)} = A^2 \overline{\cos^2(\omega_c t)} + \overline{f^2(t)} \overline{\cos^2(\omega_c t)} = \frac{1}{2} A^2 + \frac{1}{2} \overline{f^2(t)}$$

2.22 Modulación de amplitud: gran portadora

$$\overline{\phi_{AM}^2(t)} = \frac{1}{2} A^2 + \frac{1}{2} \overline{f^2(t)}$$

$$\mu = \frac{P_{señal}}{P_{total}} = \frac{\overline{f^2(t)}}{A^2 + \overline{f^2(t)}}, \quad |f(t)|_{MAX} < A$$

- Si $f(t) = mA \cos(\omega_0 t)$, $m < 1$ (índice de modulación)

$$\overline{f^2(t)} = \frac{m^2 A^2}{2} \Rightarrow \mu = \frac{m^2}{1 + m^2} < 33\%$$

2.22 Modulación de amplitud: gran portadora

- Ej: Una estación de radio AM transmite una potencia portadora de 40kW y usa un índice de modulación de 0.707. Calcular la potencia de salida

$$\text{portadora} \Rightarrow \text{potencia } \frac{1}{2} A^2 = 40kW$$

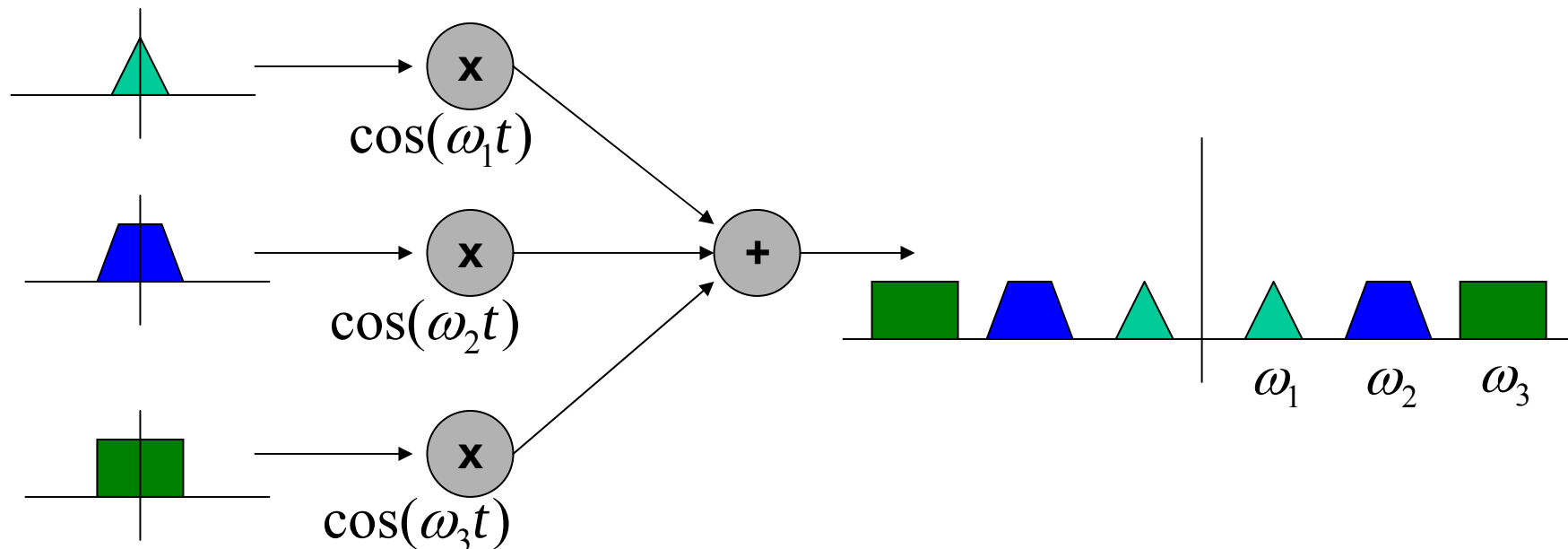
$$f(t) \Rightarrow \text{potencia } \frac{1}{2} m^2 (A^2) = \frac{1}{2} \times 0.707^2 \times 80kW$$

$$f(t) \Rightarrow \text{potencia } 20kW$$

$$A + f(t) \Rightarrow \text{potencia } 60kW$$

2.23 Multiplexión en frecuencia

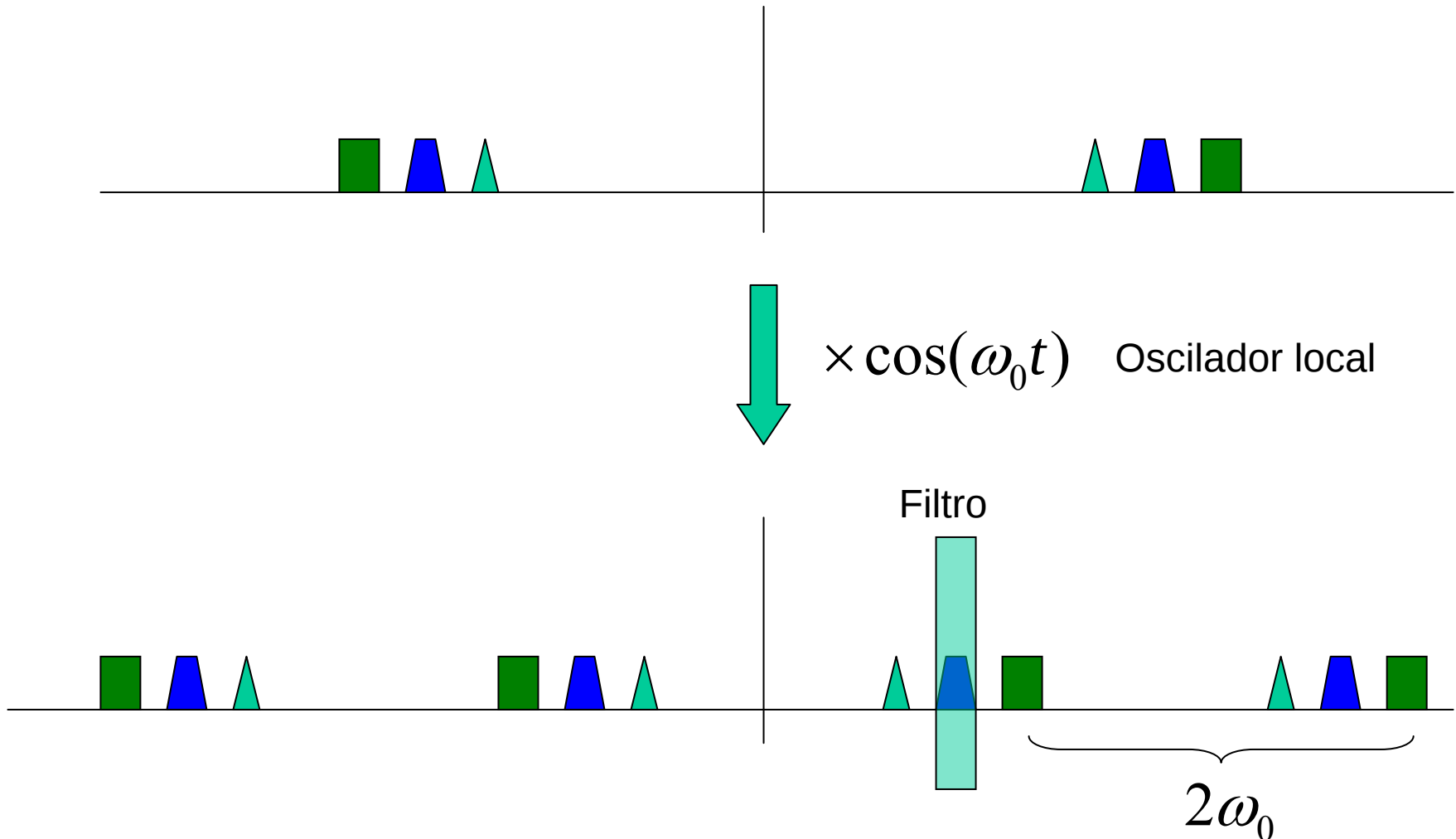
- Es posible transmitir varias señales si se elige una frecuencia portadora distinta para cada una => FDM (multiplexión por división en frecuencia)



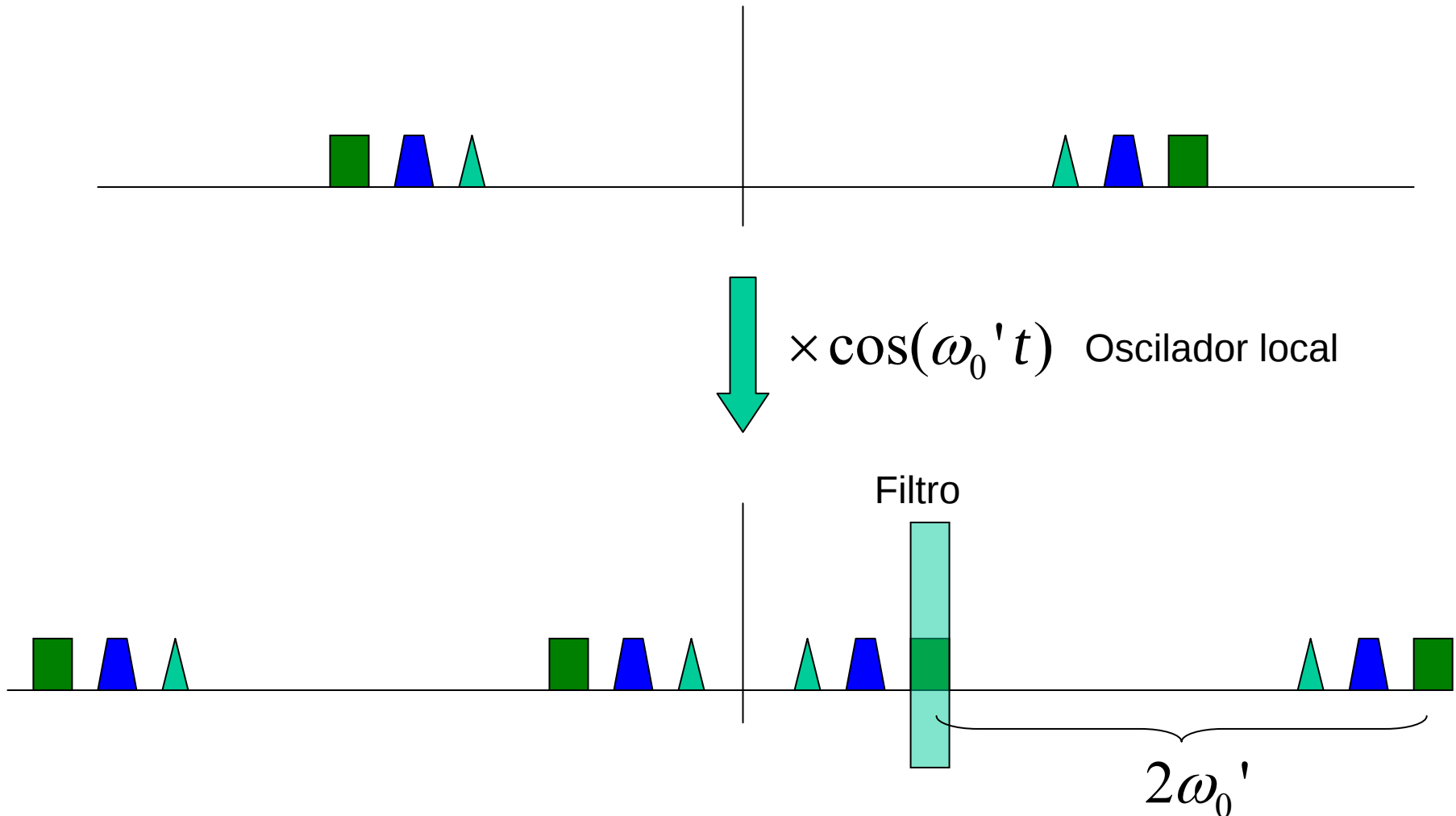
2.23 Multiplexión en frecuencia

- Para poder recuperar alguna de las señales, es necesario ocupar primero un filtro pasabandas, Idea: que se pueda mover para sintonizar distintas señales
- Fabricar un “pasabandas móvil” no es simple: problema.
- Solución: filtro pasabandas fijo, se desplaza la señal de entrada para que la señal de interés quede en la banda de paso => receptor superheterodino.

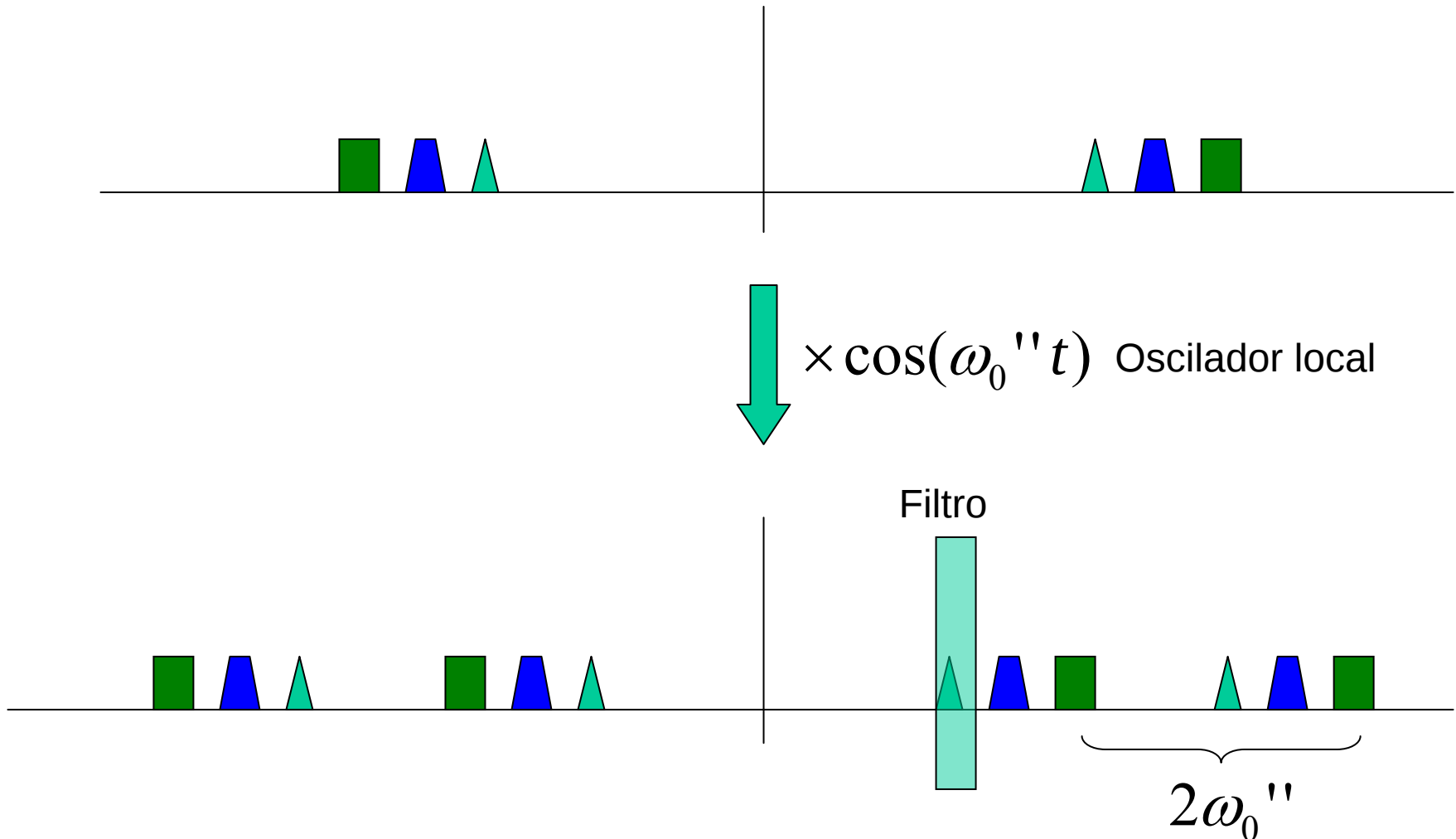
2.23 Multiplexión en frecuencia



2.23 Multiplexión en frecuencia

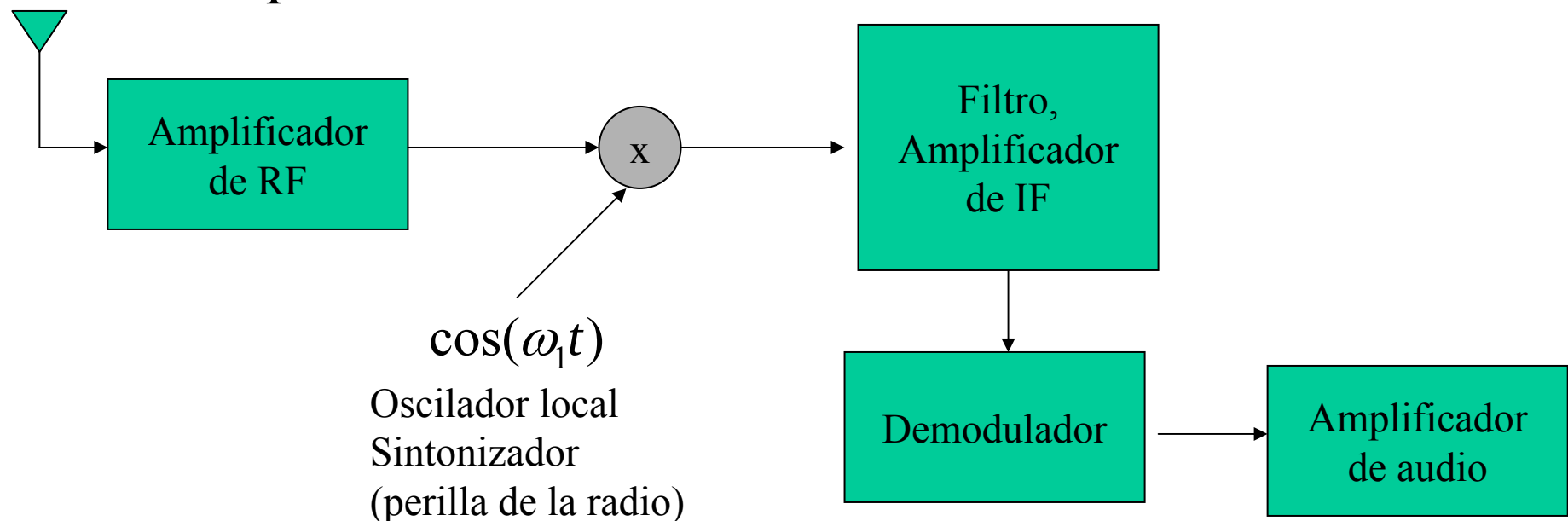


2.23 Multiplexión en frecuencia



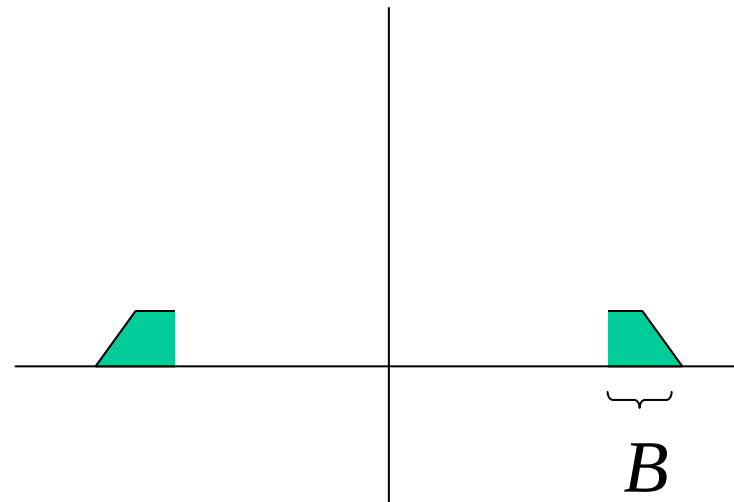
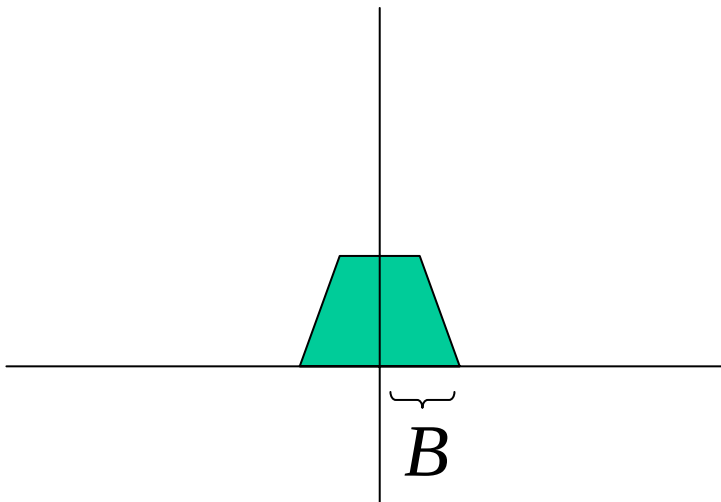
2.23 Multiplexión en frecuencia

- Una vez que la señal de interés ha sido separada, su demodulación es simple (métodos ya vistos)
- Esquema:



2.24 Banda lateral única (SSB)

- A veces es molesto que se duplique el ancho de banda al modular AM
- Solución: eliminar una de las bandas laterales



2.24 Banda lateral única (SSB)

- Implementar este tipo de modulación es muy difícil, de hecho no se usa.

$$\phi_{SSB}(t) = f(t) \cos(\omega_c t) + \hat{f}(t) \sin(\omega_c t)$$

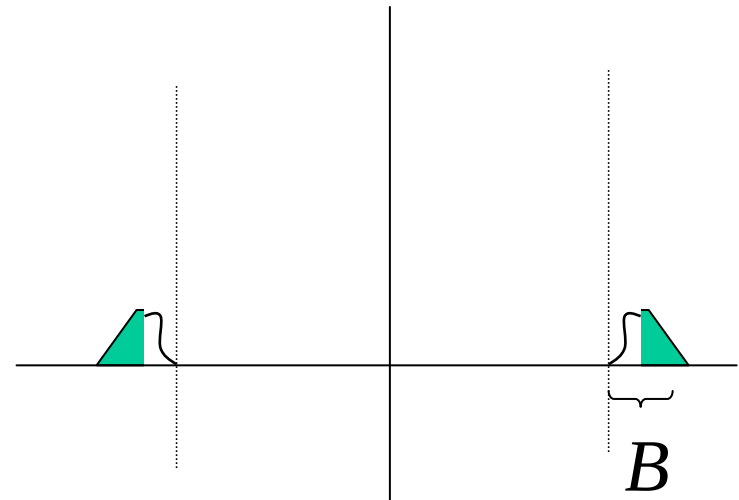
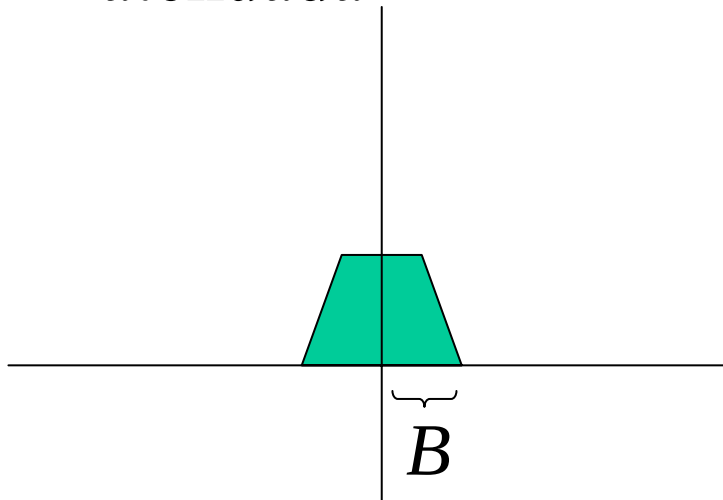
$\hat{f}(t) = f(t)$ más 90° en cada frecuencia que contenga

$$\hat{F}(\omega) = F(\omega)e^{j90^\circ} = jF(\omega)$$

- Sumarle 90° a cada frecuencia que contenga $f(t)$ es complicado.

2.24 Banda lateral única (SSB)

- También se puede implementar de un modo “aproximado”: filtrando de modo que se elimine una de las bandas => como los filtros no son perfectos, la banda que debía quedar entera queda atenuada

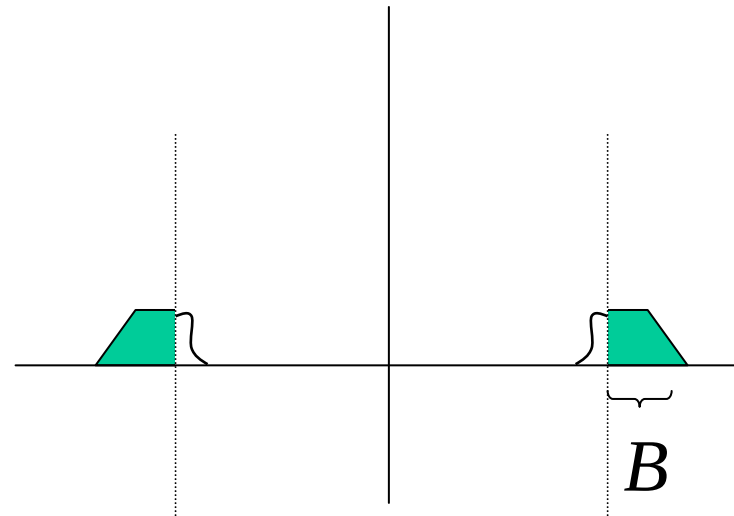
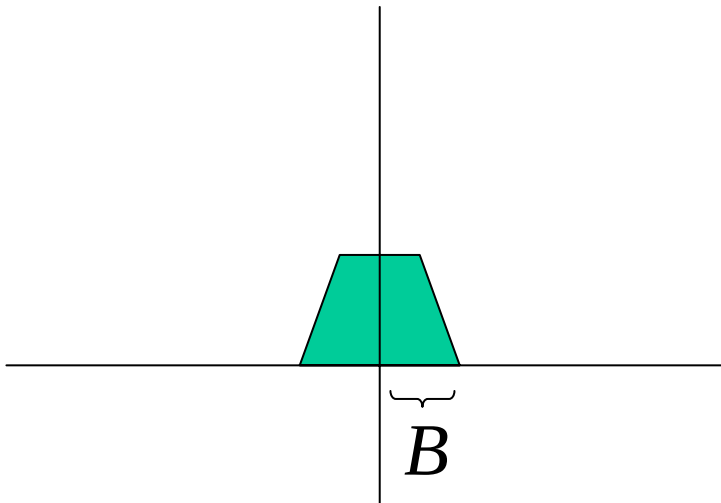


2.24 Banda lateral única (SSB)

- Se pueden demodular volviendo a multiplicar por $\cos(w_c t)$ y filtrando pasabajos (igual que en el primer caso)
- En el caso “aproximado”, las bajas frecuencias pueden quedar un poco atenuadas (mirar gráfico anterior)

2.25 Banda lateral residual (VSB)

- Aquí se elimina una de las bandas usando un filtro
 $\Rightarrow$ una de las bandas queda entera, pero la otra no se elimina completamente $\Rightarrow$ queda un residuo



2.25 Banda lateral residual (VSB)

- Se pueden demodular volviendo a multiplicar por $\cos(w_c t)$ y filtrando pasabajos (igual que en el primer caso)
- En este caso, las bajas frecuencias pueden quedar un poco amplificadas (mirar gráfico anterior)