



Señales y sistemas I

Capítulo II: Señales y sistemas de tiempo continuo

Profesor: Néstor Becerra Yoma

Agradecimientos:

Profesor Manuel Duarte Mermoud
(transformada de Laplace)

Enrique Guerrero Merino

Adio Stefoni Escudero

2.1 Transformada de Laplace

- Se define la transformada bilateral de Laplace como:

$$L\{f(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

- A lo largo del curso solo se utilizará la transformada unilateral (uso de señales causales)

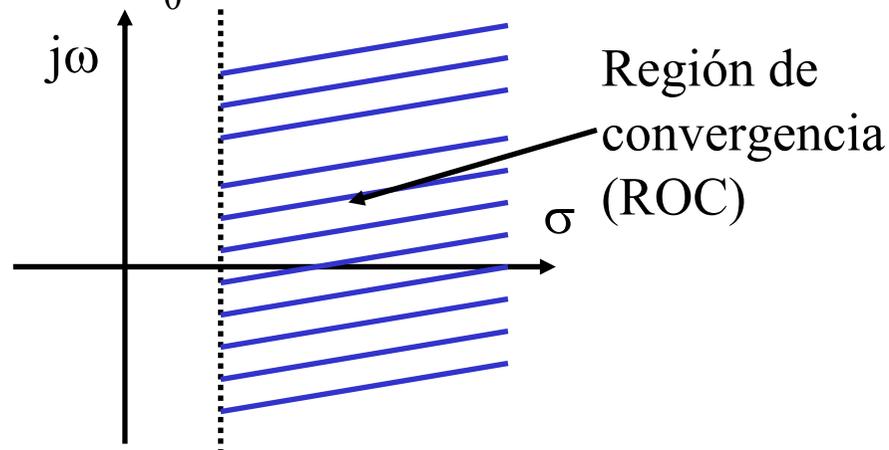
$$L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

2.1 Transformada de Laplace

- Teorema:

Sea $f(t)$ integrable en cada intervalo $a < t < b$, con $0 \leq a < b < \infty$ y c tal que $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-ct} |f(t)|$ existe. Entonces la integral de Laplace converge uniformemente para $\text{Re}\{s\} > c$, es decir,

$$L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt < \infty, \text{ para } \text{Re}\{s\} > c$$



2.1 Transformada de Laplace

- Condiciones suficientes:
 - $f(t)$ es continua por trozos en el intervalo $[0, \infty)$
 - $f(t)$ es de orden exponencial c , es decir,
 $\forall t \in [0, \infty), e^{-ct} | f(t) | \leq M$
- Transformada inversa de Laplace

$$f(t) = L^{-1} \{ F(s) \} = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F(s) e^{st} ds$$

2.1 Transformada de Laplace

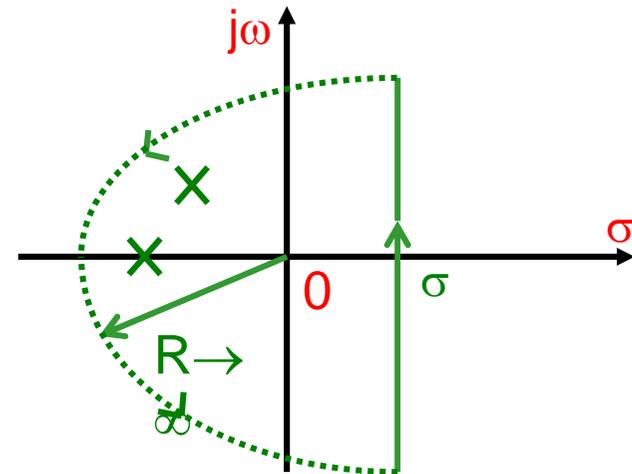
- Teorema del residuo:

Puede utilizarse para obtener la transformada inversa, pues, para una función compleja G ,

$$\oint_{\Gamma} G(s) ds = 2\pi j \sum_{i=1}^n \text{Res}(G, p_i)$$

- Aquí $\{p_1, \dots, p_n\}$ es el conjunto de los polos de $G(s)$ encerrados por la curva Γ .

- Para $f(t)$, $f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds = \sum_{i=1}^n \text{Res}(F(s)e^{st}, p_i)$



2.1 Transformada de Laplace

- Descomposición en fracciones parciales

Polos reales simples (similar para polos complejos conjugados):

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} = \frac{N(s)}{(s+a)D'(s)}$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{A}{s+a} + \frac{B(s)}{D'(s)}$$

$$\text{Con } A = F(s)(s+a) \Big|_{s=-a}$$

2.1 Transformada de Laplace

- Descomposición en fracciones parciales

Polos reales repetidos:

$$F(s) = \frac{N(s)}{(s+a)^p D'(s)}$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{A_p}{(s+a)^p} + \frac{A_{p-1}}{(s+a)^{p-1}} + \dots + \frac{A_1}{(s+a)} + \frac{B(s)}{D'(s)}$$

$$\text{Con } A_{p-k} = \frac{1}{k!} \frac{d^k}{ds^k} [F(s)(s+a)^p] \Big|_{s=-a}$$

2.1 Transformada de Laplace

- Tabla de transformadas de Laplace

	$f(t)$	$F(s)$
1	$\delta(t)$	1
2	$u(t)$	$\frac{1}{s}$
3	e^{-at}	$\frac{1}{s+a}$
4	$\frac{t^n}{n!} e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^{n+1}}$
5	$\cos(\omega_0 t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$
6	$\text{sen}(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$
7	$e^{-at} \cos(\omega_0 t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$
8	$e^{-at} \text{sen}(\omega_0 t)$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$

2.1 Transformada de Laplace

- Propiedades de la transformada de Laplace (I)

1	Linealidad	$L\{f(t) + g(t)\} = F(s) + G(s)$
2	Diferenciación temporal	$L\left\{\frac{d}{dt} f(t)\right\} = sF(s) - f(0)$
3	Enésima diferenciación temporal	$L\left\{\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right\} = s^n F(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} f^{(k-1)}(0)$
4	Desplazamiento temporal	$L\{f(t-a)u(t-a)\} = e^{-as} F(s) \quad a \geq 0$
5	Desplazamiento en frecuencia	$L\{e^{-at} f(t)\} = F(s+a)$
6	Convolución temporal	$L\left\{\int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau\right\} = F(s)G(s)$
7	Escalamiento temporal	$L\left\{f\left(\frac{t}{a}\right)\right\} = a F(as)$

2.1 Transformada de Laplace

- Propiedades de la transformada de Laplace (II)

8	Diferenciación en frecuencia	$L\{t \cdot f(t)\} = -\frac{dF(s)}{ds}$
9	Enésima diferenciación en frecuencia	$L\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$
10	Integración temporal definida	$L\left\{\int_0^t f(t)dt\right\} = \frac{F(s)}{s}$
11	Integración temporal indefinida	$L\left\{\int f(t)dt\right\} = \frac{F(s)}{s} + \frac{1}{s} \left[\int f(t)dt\right]_{t=0}$
13	Integración en frecuencia	$L\left\{\frac{1}{t} f(t)\right\} = \int_s^\infty F(s)ds$ si $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{t} f(t)$ existe.
14	Convolución en frecuencia	$L\{f(t)g(t)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(p)G(s-p)dp$

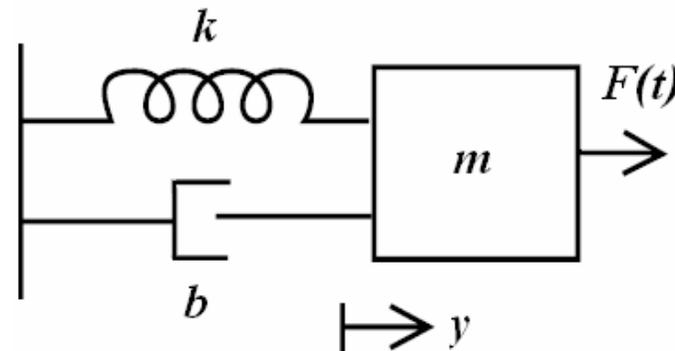
2.2 T. de Laplace y Estabilidad

- Existen diversos sistemas que pueden ser modelados mediante ecuaciones diferenciales, pero dichos sistemas presentan comportamientos diversos aledaños a sus ecuaciones características.

- Ejemplo:

Analizar el caso que se muestra en la figura:

“Resorte Amortiguado”



2.2 T. de Laplace y Estabilidad

- La ecuación que describe el sistema Resorte Amortiguado es: $y'' + \frac{b}{m}y' + \frac{k}{m}y = \frac{F(t)}{m}$
- Del polinomio característico que se desprende de la ecuación diferencial se tienen tres condiciones:

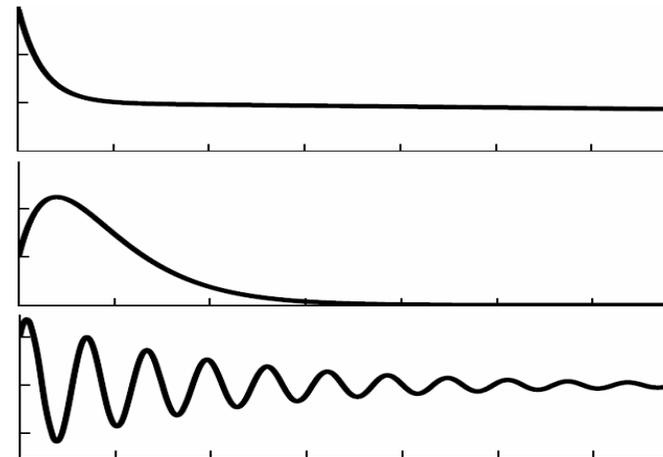
$$\lambda = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m}} \Rightarrow \begin{array}{ll} \frac{b^2}{4m^2} > k & \text{Soluciones reales y diferentes} \\ \frac{b^2}{4m^2} = k & \text{Soluciones reales e iguales} \\ \frac{b^2}{4m^2} < k & \text{Soluciones complejos conjugados} \end{array}$$

2.2 T. de Laplace y Estabilidad

- De dichas condiciones se obtienen

tres respuestas diferentes:

- Régimen Sobreamortiguado
- Régimen Amortiguado
- Régimen Subamortiguado



- Si las soluciones están en el semiplano negativo, las soluciones del sistema serán decrecientes en el tiempo otorgándole estabilidad al sistema.

2.2 T. de Laplace y Estabilidad

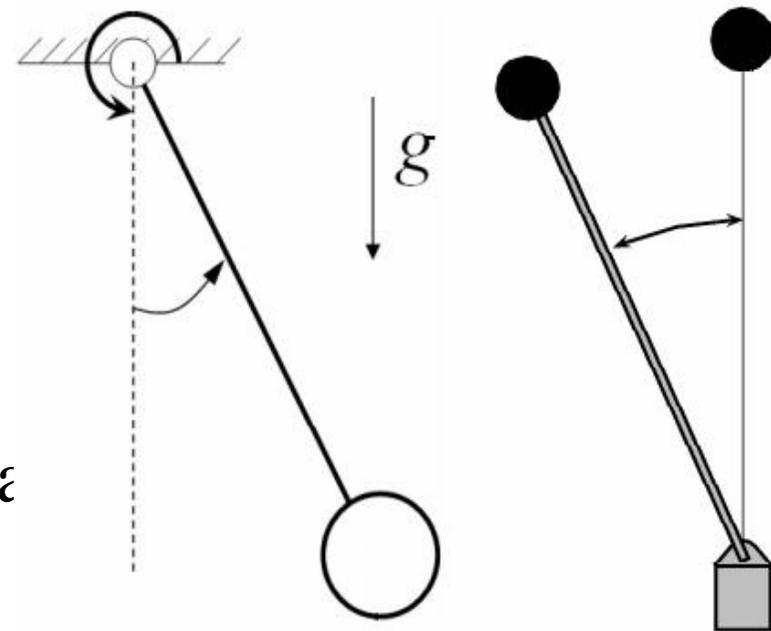
- En el ejemplo anterior sin importar los valores característicos del sistema este siempre volverá a su estado estable.
- Si las soluciones de la ecuación estudiada estuviesen en el semiplano positivo estas tendrán exponenciales de exponente positivo, generando soluciones crecientes.
- De tener una sistema retroalimentado, el comportamiento antes descrito se deberá analizar en el denominador de la f. de transferencia.

2.2 T. de Laplace y Estabilidad

- ¿Que es estabilidad?
 - Matemáticamente la estabilidad se puede interpretar como la tendencia de un sistema numérico cualquiera a estabilizar su comportamiento al propagarse errores en su entrada, ej: ecuación diferencial.
 - Análogamente, de suponer dichos errores como perturbaciones y un sistema numérico como un sistema físico, se puede decir que dicho sistema es estable si a pesar de ser perturbado vuelve a su estado estable, ej: péndulo vertical (invertido y no invertido).

2.2 T. de Laplace y Estabilidad

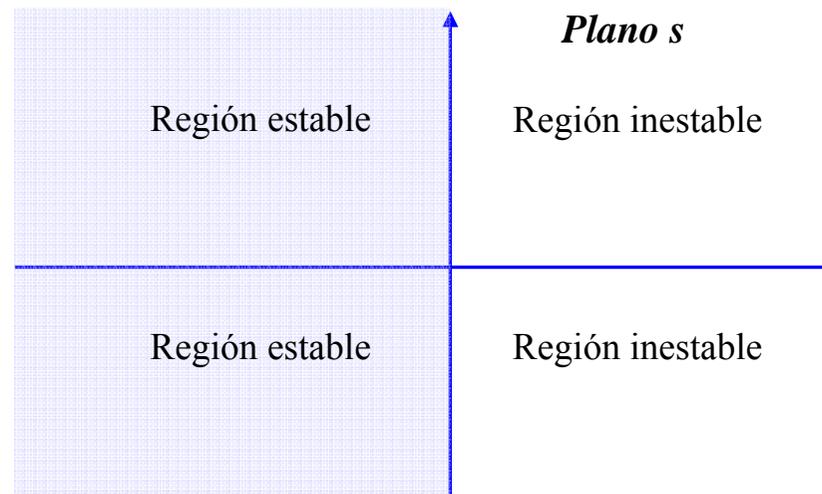
- Si el péndulo vertical no invertido es perturbado el oscilará hasta volver a su estado estable.
- Si el péndulo invertido es perturbado caerá debido a la fuerza de gravedad y no podrá volver a su estado inicial (sistema inestable).



2.2 T. de Laplace y Estabilidad

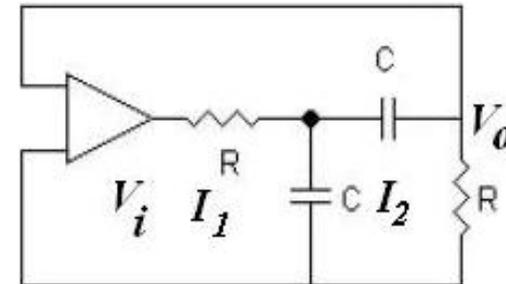
- Criterio de Estabilidad

Si los polos del sistema a analizar se encuentran en el semiplano negativo este será estable pues en dicha región el polinomio característico presenta una respuesta estable.



2.2 T. de Laplace y Estabilidad

- Ejemplo: Calcular la estabilidad del Amplificador retroalimentado



- Las ecuaciones que describen el sistema anterior son:

$$V_i = I_1 R + (I_1 - I_2) \frac{1}{sC} \quad y \quad V_o = I_2 R$$

- La función de transferencia es:
$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{1}{3 + \left(sRC + \frac{1}{sRC} \right)}$$

2.2 T. de Laplace y Estabilidad

- Del polinomio característico se obtienen los polos:

$$s_{1,2} = \frac{1}{2RC}(-3 \pm \sqrt{5})$$

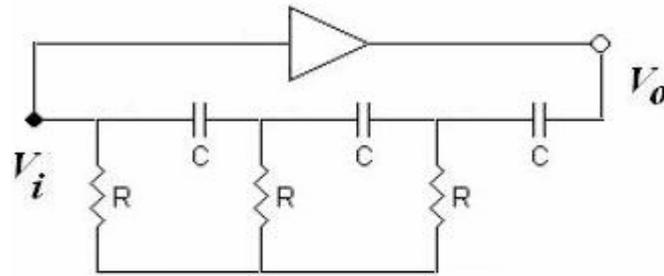
- Estos polos se encuentra en el semiplano negativo ya que $3 > \sqrt{5}$.
- Se concluye que el polinomio característico oscilara asintoticamente al valor estable.

2.2 T. de Laplace y Estabilidad

- La ecuación característica se expresa como un polinomio de parámetro s , que es producto de la transformada de Laplace.
- Uno de los usos del plano complejo se conoce como el plano s , este se usa para visualizar las raíces de la ecuación que describe la conducta del sistema.
- Cabe destacar que el conveniente mapeo de la ecuación diferencial en el plano s , permite analizar el sistema de manera más fácil y rápida.

2.3 T. de Laplace en sistemas

- Calcular la estabilidad del circuito usando T. de Laplace



Mediante el método de mallas se obtiene la función de transferencia del circuito:

$$\frac{V_o}{V_i}(s) = \frac{s^3 R^3 C^3}{4s^3 R^3 C^3 - 8s^2 R^2 C^2 + 5sRC - 1}$$

2.3 T. de Laplace en sistemas

- Analizando el polinomio característico se obtienen los polos:

$$s_1 = -1.35 + 0.93j$$

$$s_2 = -1.35 - 0.93j$$

$$s_3 = -0.23 + 0.81j$$

$$s_4 = 0.58 + 0.82j$$

$$s_5 = 0.58 - 0.82j$$

$$s_6 = -0.23 - 0.81j$$

Dos polos no cumplen con el criterio de estabilidad, se concluye que el circuito analizado no es estable.

2.3 T. de Laplace en sistemas

- Para generalizar más aun se puede considerar un sistema cualquiera descrito por la función de transferencia:

$$H(s) = \frac{s - 50}{s^3 + 8s^2 + 14s + 12}$$

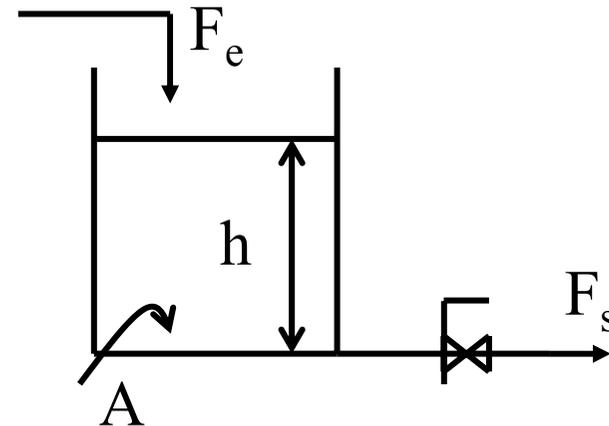
Calcular la estabilidad del sistema:

$$\begin{aligned}
 P(s) = s^3 + 8s^2 + 14s + 12 & \Rightarrow s_1 = -6 \\
 P(s) = (s + 6)(s^2 + 2s + 2) & \Rightarrow s_2 = -1 + j \\
 & \Rightarrow s_3 = -1 - j
 \end{aligned}$$

Se puede ver que dicho sistema cumple con el criterio de estabilidad, condición que se obtiene directamente de la resolución numérica del polinomio característico.

2.3 T. de Laplace en sistemas

- El siguiente sistema es un estanque de sección transversal A al que se le inyecta un fluido a una tasa $F_{in} = kh$ (lineal).



La ecuación que describe el sistema es:

$$sH + \frac{k}{A}H = \frac{F_{in}}{A}$$

Aplicando T. de Laplace, se obtiene:

$$sH(s) + \frac{k}{A}H(s) = \frac{F_{in}(s)}{A}$$

Finalmente la f. de transferencia es:

$$H(s) = \frac{1}{s + k/A} \frac{F_{in}(s)}{A}$$

2.3 T. de Laplace en sistemas

- Del polinomio característico se consigue el polo:

$$s = -\frac{k}{A}$$

- Finalmente se concluye que para todo $k > 0$ el sistema es estable.

2.3 T. de Laplace en sistemas

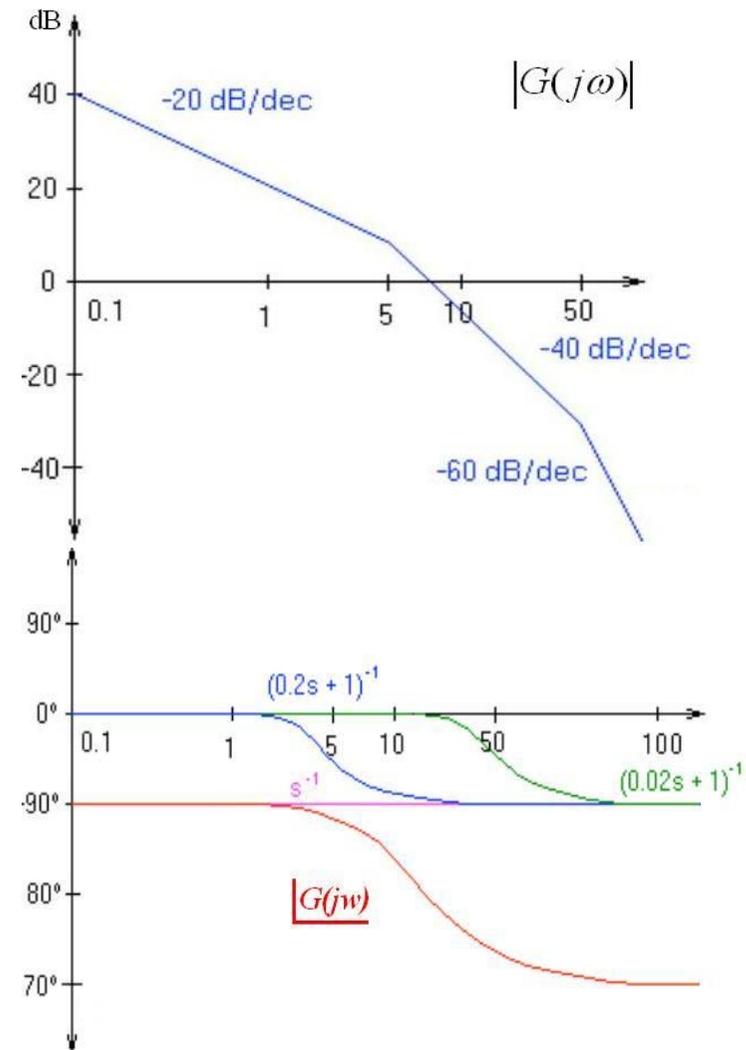
- Dibuje el diagrama de Bode de ganancia y fase de la función de transferencia de un generador Eólico

$$G(s) = \frac{10}{s(0.02s + 1)(0.2s + 1)}$$

Los polos son:

$$s_1 = 0 \quad s_2 = -5 \quad s_3 = -50$$

Para poder trabajar en el plano complejo se considera $s=j\omega$



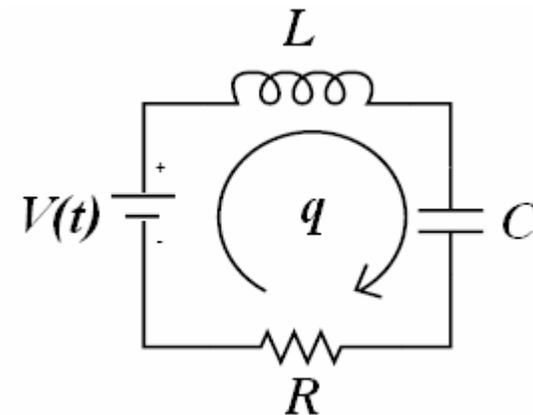
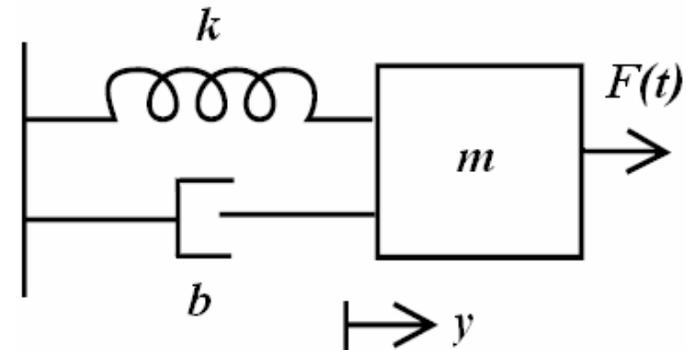
2.3 T. de Laplace en sistemas

- Se tienen dos sistemas:
El primero corresponde a uno mecánico de amortiguamiento y el segundo a uno RLC.

Las ecuaciones que describen a cada sistema son:

$$y'' + \frac{b}{m} y' + \frac{k}{m} y = \frac{F(t)}{m}$$

$$q'' + \frac{R}{L} q' + \frac{1}{LC} q = \frac{F(t)}{L}$$



Donde la corriente corresponde a $\frac{dq}{dt}$

2.3 T. de Laplace en sistemas

- Se puede generar la analogía entre los dos sistemas mencionados en base a:

$$m \approx L \qquad b \approx R \qquad k \approx \frac{1}{C}$$

- Aplicando la T. de Laplace a las f. de transferencia de los sistemas:

$$H(s) = \frac{R/L s}{s^2 + R/L s + 1/LC} \qquad y \qquad H(s) = \frac{b/m s}{s^2 + b/m s + k/m}$$

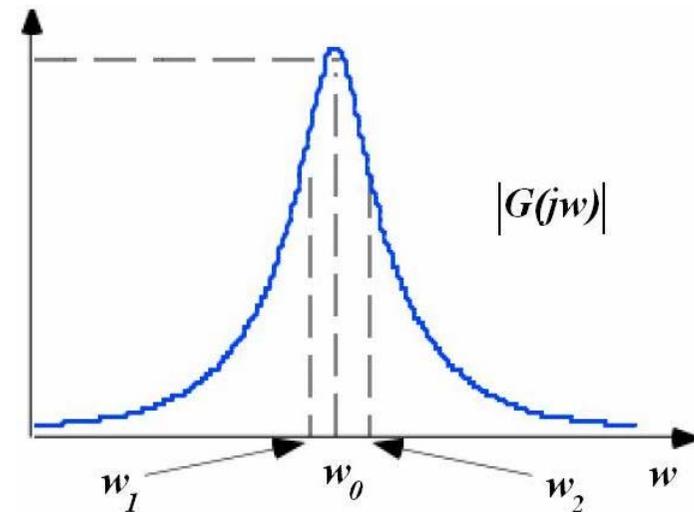
2.3 T. de Laplace en sistemas

- Con el cambio de variable $s=j\omega$ se tiene la f. de transferencia directamente en el plano ω .

$$H(\omega) = \frac{R/L \omega}{R/L \omega + j \left[\frac{1}{LC} - \omega^2 \right]}$$

La frecuencia central se define como la frecuencia para la cual la f. de transferencia es puramente real.

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$



2.3 T. de Laplace en sistemas

- Como se había visto en un principio la respuesta del sistema “Resorte Amortiguado” se representa por:

$$s = -\frac{b}{2m} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}$$

Al tender b a 0 la respuesta pasa a ser imaginaria pura.

Utilizando la analogía con el circuito Pasa Banda RLC, se puede ver como dicho valor es el valor central del filtro.

$$s = \pm j\sqrt{\frac{k}{m}} \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

2.3 T. de Laplace en sistemas

- Una ecuación diferencial describe un sistema, dicha ecuación se analiza con la T. de Laplace, posteriormente con un cambio de variable conveniente ($s=j\omega$) esta se puede ver en el dominio de la frecuencia, para así generar otro análisis del sistema.

2.4 Serie exponencial de Fourier

- Se considerará la siguiente base:

$$\phi_n = e^{jn\omega_0 t}, \quad n \in \mathbb{Z}$$

- El valor de n se llama número armónico
- Se calculará el producto interno entre 2 funciones sobre $[t_1, t_2]$

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \phi_n(t) \phi_m(t) dt &= \int_{t_1}^{t_2} e^{jn\omega_0 t} e^{-jm\omega_0 t} dt = \frac{1}{j(n-m)\omega_0} \left(e^{j(n-m)\omega_0 t_2} - e^{j(n-m)\omega_0 t_1} \right) \\ &= \frac{1}{j(n-m)\omega_0} e^{j(n-m)\omega_0 t_1} \left(e^{j(n-m)\omega_0 (t_2 - t_1)} - 1 \right) \end{aligned}$$

2.4 Serie exponencial de Fourier

- Si se elige: $\omega_0(t_2 - t_1) = 2\pi$
- Se logra que:

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{jn\omega_0 t} e^{-jm\omega_0 t} dt = \begin{cases} (t_2 - t_1) & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

- Se puede demostrar que la base es completa, por lo que cualquier función $f(t)$ de energía finita en $[t_1, t_2]$ se puede representar como:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}, \quad t \in [t_1, t_2], \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{t_2 - t_1} \quad F_n \in \mathbb{C}$$

2.4 Serie exponencial de Fourier

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}, \quad t \in [t_1, t_2], \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{t_2 - t_1}$$

- Para calcular los F_n

$$f(t)e^{-jm\omega_0 t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} e^{-jm\omega_0 t}, \quad t \in [t_1, t_2]$$

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)e^{-jm\omega_0 t} dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \int_{t_1}^{t_2} e^{jn\omega_0 t} e^{-jm\omega_0 t} dt$$

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)e^{-jm\omega_0 t} dt = F_m (t_2 - t_1)$$

$$F_n = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t)e^{-jn\omega_0 t} dt$$

2.4 Serie exponencial de Fourier

- Ejemplo: Escribir la siguiente función como serie exponencial de Fourier

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < 1 \\ -1 & 1 < t < 2 \end{cases}$$

- Solución:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{(t_2 - t_1)} = \frac{2\pi}{2} = \pi$$

$$F_n = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

2.4 Serie exponencial de Fourier

$$\begin{aligned}
 F_n &= \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-jn\pi t} dt - \frac{1}{2} \int_1^2 e^{-jn\pi t} dt \\
 &= \frac{1}{2jn\pi} \left[-e^{-jn\pi} + 1 + e^{-j2n\pi} - e^{-jn\pi} \right] = \frac{1}{jn\pi} \left[1 - e^{-jn\pi} \right]
 \end{aligned}$$

$$F_n = \begin{cases} \frac{2}{jn\pi} & n \text{ impar} \\ 0 & n \text{ par} \end{cases} \quad f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\pi t}$$

$$f(t) = \frac{2}{j\pi} e^{j\pi t} + \frac{2}{j3\pi} e^{j3\pi t} + \frac{2}{j5\pi} e^{j5\pi t} + \dots - \frac{2}{j\pi} e^{-j\pi t} - \frac{2}{j3\pi} e^{-j3\pi t} - \frac{2}{j5\pi} e^{-j5\pi t} - \dots$$

2.4 Serie exponencial de Fourier

- Dada $f(t)$, la serie existe si se satisfacen las condiciones de Dirichlet:
 - $f(t)$ tiene un n° finito de máximos y mínimos en $[t_1, t_2]$
 - $f(t)$ tiene un n° finito de discontinuidades en $[t_1, t_2]$
 - $f(t)$ es absolutamente integrable en $[t_1, t_2]$

$$\int_{t=t_1}^{t_2} |f(t)| dt < \infty$$

- Las condiciones anteriores siempre se cumplen para señales de energía finita en $[t_1, t_2]$

2.5 Señales y representaciones complejas

- Considérese una función $f(\cdot)$ compleja:

$$f = f_{RE} + j f_{IM}$$

- Su conjugada es:

$$f^* = f_{RE} - j f_{IM}$$

- Su parte real e imaginaria son:

$$f_{RE} = \frac{f + f^*}{2}, \quad f_{IM} = \frac{f - f^*}{2j}$$

2.5 Señales y representaciones complejas

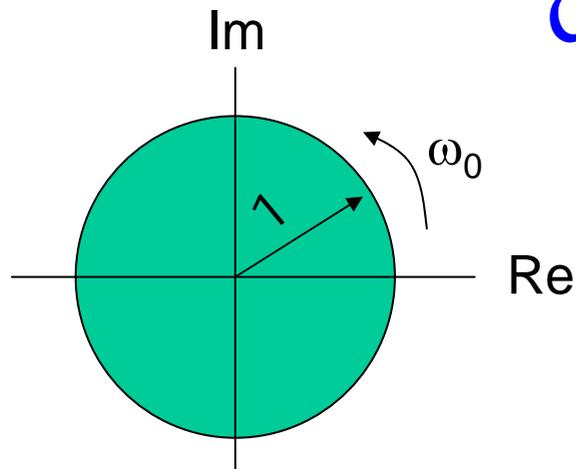
- Su magnitud se puede calcular a partir de:

$$|f|^2 = f f^* = (f_{RE} + j f_{IM})(f_{RE} - j f_{IM}) = |f_{RE}|^2 + |f_{IM}|^2$$

- La exponencial compleja es suma de un seno y un coseno, y describe un círculo de radio 1 en el plano complejo:

$$e^{j\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + j \operatorname{sen}(\omega_0 t)$$

2.5 Señales y representaciones complejas



$$e^{j\omega_0 t} = \cos(\omega_0 t) + j \operatorname{sen}(\omega_0 t)$$

$$x(t) = \cos(\omega_0 t)$$

$$y(t) = \operatorname{sen}(\omega_0 t)$$

- Las exponenciales complejas se pueden describir en término de seno y coseno, y viceversa.

$$\cos(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}, \quad \operatorname{sen}(\omega_0 t) = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}$$

2.5 Señales y representaciones complejas

- Recordando la propiedad:

$$x_{RE} = \frac{x + x^*}{2}, \quad x_{IM} = \frac{x - x^*}{2j}, \quad \forall x \in \mathbb{C}$$

se puede concluir la siguiente propiedad para los coeficientes de la serie:

$$F_n = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt, \quad F_{-n} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t) e^{jn\omega_0 t} dt$$

$$F_n^* = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f^*(t) e^{jn\omega_0 t} dt = F_{-n} \text{ para } f(\cdot) \text{ real}$$

$$\text{Además, } \text{Re}(F_n) = \frac{F_n + F_n^*}{2} = \frac{F_n + F_{-n}}{2}$$

2.6 Serie de Fourier trigonométrica

- La serie de Fourier exponencial se puede reescribir en término de senos y cosenos:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} = \sum_{m=-\infty}^{-1} F_m e^{jm\omega_0 t} + F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$f(t) = \sum_{m=-1}^{-\infty} F_m e^{jm\omega_0 t} + F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t} \quad (n' = -m)$$

$$f(t) = \sum_{n'=1}^{\infty} F_{-n'} e^{-jn'\omega_0 t} + F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}. \quad \text{Si } f(\cdot) \text{ es real:}$$

$$f(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2F_n e^{jn\omega_0 t} + 2F_{-n} e^{-jn\omega_0 t}}{2} = \boxed{F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re}(F_n e^{jn\omega_0 t})}$$

2.6 Serie de Fourier trigonométrica

$$f(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re}(F_n e^{jn\omega_0 t})$$

$$\operatorname{Re}(F_n e^{jn\omega_0 t}) = \operatorname{Re}\left((F_{n_{RE}} + j F_{n_{IM}})(\cos(\omega_0 t) + j \operatorname{sen}(\omega_0 t))\right)$$

$$\operatorname{Re}(F_n e^{jn\omega_0 t}) = F_{n_{RE}} \cos(\omega_0 t) - F_{n_{IM}} \operatorname{sen}(\omega_0 t)$$

$$f(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2F_{n_{RE}} \cos(\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} (-2F_{n_{IM}}) \operatorname{sen}(\omega_0 t)$$

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(\omega_0 t)$$

2.6 Serie de Fourier trigonométrica

- Las funciones $\cos(n\omega_0 t)$ y $\sen(n\omega_0 t)$ para $n=0,1,\dots$ forman una base ortogonal en $[t_1, t_2]$ si $(t_2 - t_1)\omega = 2\pi$
- Para poder calcular directamente los valores de a_n y b_n se puede multiplicar la ecuación anterior por $\cos(m\omega_0 t)$ o por $\sen(n\omega_0 t)$ y luego integrar en $[t_1, t_2]$

2.6 Serie de Fourier trigonométrica

$$a_n = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} \cos^2(n\omega_0 t) dt} = \frac{2}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt$$

$$b_n = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) \text{sen}(n\omega_0 t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} \text{sen}^2(n\omega_0 t) dt} = \frac{2}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t) \text{sen}(n\omega_0 t) dt$$

$$a_0 = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} dt} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt$$

- a_0 es el valor medio de la señal.

2.6 Serie de Fourier trigonométrica

- La serie trigonométrica de Fourier se puede escribir usando sólo cosenos:

$$f(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re}(F_n e^{jn\omega_0 t}) =$$

$$f(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2 \operatorname{Re}(|F_n| e^{j\phi_n} e^{jn\omega_0 t})$$

$$f(t) = F_0 + \sum_{n=1}^{\infty} 2|F_n| \cos(n\omega_0 t + \phi_n)$$

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos(n\omega_0 t + \phi_n)$$

2.6 Serie de Fourier trigonométrica

- Se cumplen las siguientes relaciones:

$$f(t) = \underbrace{F_0}_{a_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{2F_{nRE}}_{a_n} \cos(\omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{(-2F_{nIM})}_{b_n} \text{sen}(\omega_0 t)$$

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{2|F_n|}_{c_n} \cos(n\omega_0 t + \phi_n)$$

$$c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \phi_n = \tan^{-1}\left(\frac{-b_n}{a_n}\right)$$

2.6 Serie de Fourier trigonométrica

- Ejemplo: representar $f(t)$ como serie trigonométrica de Fourier

$$f(t) = t^2, \quad t \in [0, 2]$$

- Desarrollo: $a_0 = \frac{1}{2} \int_0^2 t^2 dt = \frac{4}{3}$

$$a_n = \frac{2}{2} \int_0^2 t^2 \cos(n\pi t) dt = \frac{4}{(n\pi)^2}$$

$$b_n = \frac{2}{2} \int_0^2 t^2 \sin(n\pi t) dt = \frac{-4}{n\pi}$$

2.6 Serie de Fourier trigonométrica

- Luego, la serie trigonométrica es:

$$f(t) = \frac{4}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos(n\pi t) - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \operatorname{sen}(n\pi t)$$

- Cualquier función se puede expresar como la suma de una parte par más una parte impar:

$$f(t) = f_p(t) + f_i(t)$$

2.6 Serie de Fourier trigonométrica

$$f(t) = f_p(t) + f_i(t)$$

$$f_p(t) = \frac{f(t) + f(-t)}{2}, \quad f_i(t) = \frac{f(t) - f(-t)}{2}$$

$$f_p(t) = f_p(-t), \quad f_i(t) = -f_i(-t)$$

- Los términos coseno de la serie (incluyendo a_0) permiten representar la parte par, mientras que los términos seno representan la impar.

2.7 Extensión por periodicidad

- Una función definida en el intervalo $[t_1, t_2]$ se puede representar mediante su serie de Fourier:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$$

- Las exponenciales complejas son funciones periódicas:

$$e^{jn\omega_0 t} = \cos(n\omega_0 t) + j \operatorname{sen}(n\omega_0 t)$$

2.7 Extensión por periodicidad

- Luego, si se analiza una serie de Fourier fuera del rango $[t_1, t_2]$ se puede concluir que es periódica, de periodo $T = t_2 - t_1$:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0(t+T)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \left(e^{jn\omega_0 t} e^{jn\omega_0 T} \right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$$

- porque:

$$e^{jn\pi T} = e^{jn \frac{2\pi}{t_2 - t_1} T} = e^{jn2\pi} = \cos(2\pi n) + j\text{sen}(2\pi n) = 1$$

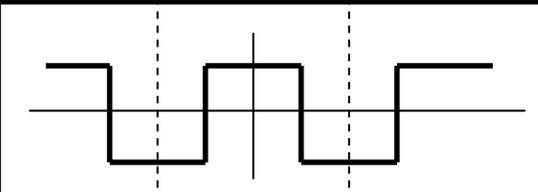
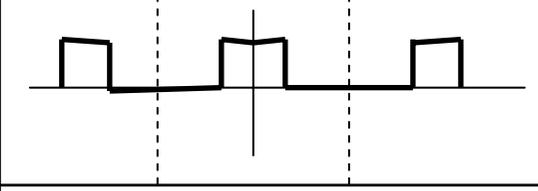
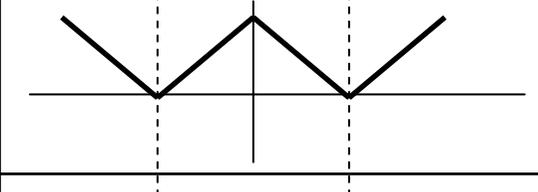
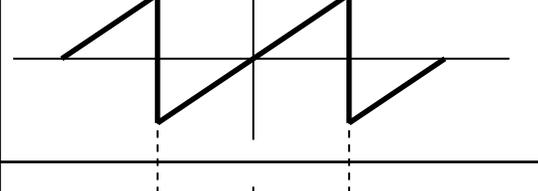
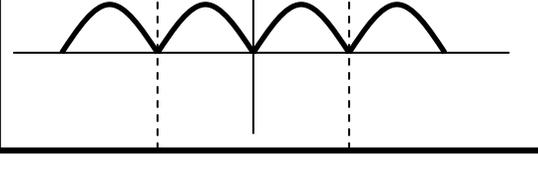
2.7 Extensión por periodicidad

- Si $f(t)=f(t+T)$, entonces

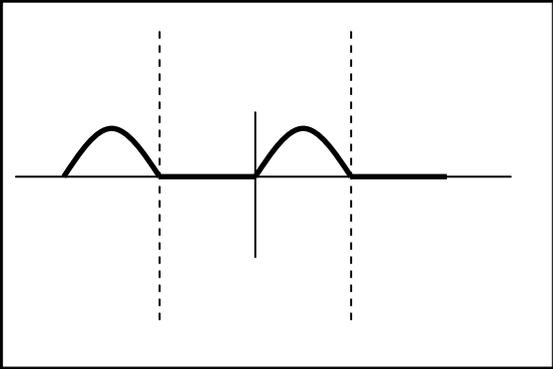
$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}, \forall t \in \mathbf{R} \quad \text{si } \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

- Es decir, la serie de Fourier para una señal periódica vale en todo el eje real.
- Los F_n se calculan considerando sólo 1 periodo de la señal

2.7 Extensión por periodicidad

	T		
2		Par	$\begin{cases} Sa(n\pi/2) & n \text{ par} \\ 0 & n \text{ impar} \end{cases}$
1		Par Ancho de pulso τ	$\frac{\tau}{T} Sa\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right)$
1		Par	$\begin{cases} Sa^2(n\pi/2) & n \neq 0 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$
2		Impar	$\begin{cases} j(-1)^n / (n\pi) & n \neq 0 \\ 0 & n = 0 \end{cases}$
1		Par	$\begin{cases} \frac{2}{\pi(1-n^2)} & n \text{ par} \\ 0 & n \text{ impar} \end{cases}$

2.7 Extensión por periodicidad

	Par	$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{\pi(1-n^2)} & n \text{ par} \\ -j/4 & n = \pm 1 \\ 0 & \text{otro} \end{array} \right.$
---	-----	---

- La función Sampling es: $Sa(x) = \frac{\text{Sen}(x)}{x}$

2.8 Teorema de Parseval

- La potencia de una señal $f(\cdot)$ es:

$$p = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) f^*(t) dt$$

- Si se expresa $f(\cdot)$ mediante serie exponencial:

$$p = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_m e^{jm\omega_0 t} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n^* e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$p = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_m \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n^* \int_{-T/2}^{T/2} e^{-j(m-n)\omega_0 t} dt$$

$$p = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} F_m F_m^* = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |F_m|^2$$

2.8 Teorema de Parseval

- El teorema de Parseval indica que:

$$p = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{T} \sum_{m=-\infty}^{\infty} |F_n|^2$$

- La potencia de la señal completa es la suma de las potencias de cada frecuencia
- Ej: Determinar la potencia de la función:

$$f(t) = 2\text{sen}(100t)$$

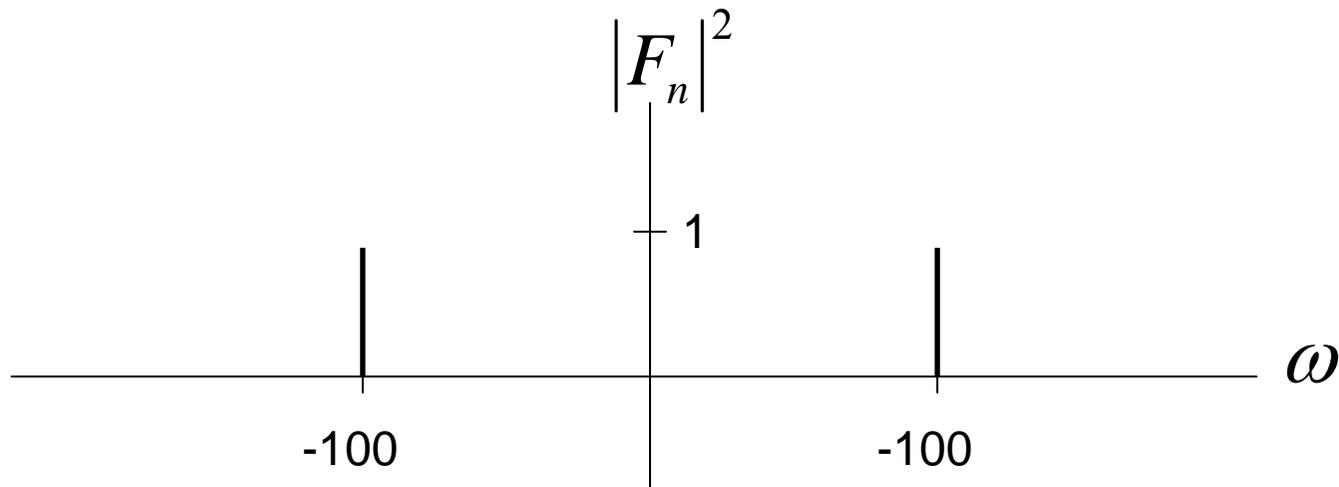
2.8 Teorema de Parseval

- Los coeficientes de Fourier son:

$$F_1 = -j, F_{-1} = j, F_n = 0 \text{ para otro } n$$

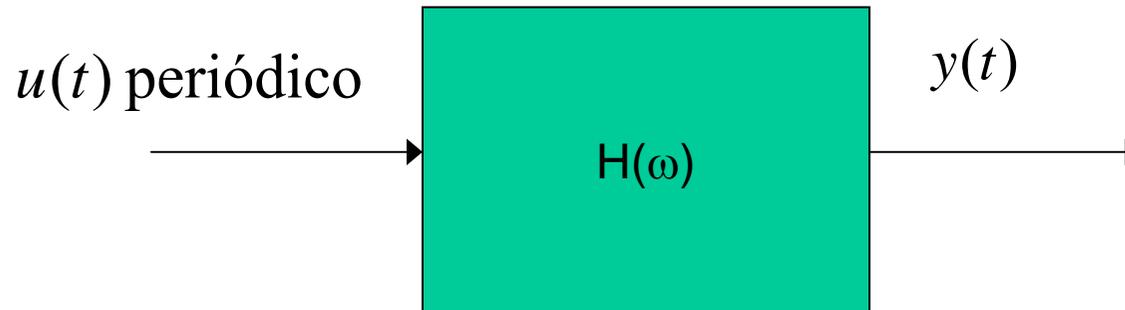
- Luego:

$$P = |j|^2 + |-j|^2 = 2$$



2.9 Respuesta estacionaria a señales periódicas

- Consideremos un sistema lineal $H(\omega)$ (un filtro lineal) que tiene una entrada periódica $u(t)$ y una salida $y(t)$ en régimen permanente:



$$u(t) = Ae^{j(\omega_1 t + \phi_1)} \Rightarrow y(t) = AH(\omega_1)e^{j(\omega_1 t + \phi_1)}$$

2.9 Respuesta estacionaria a señales periódicas

- Luego, al ser el sistema lineal, la respuesta a una señal periódica es:

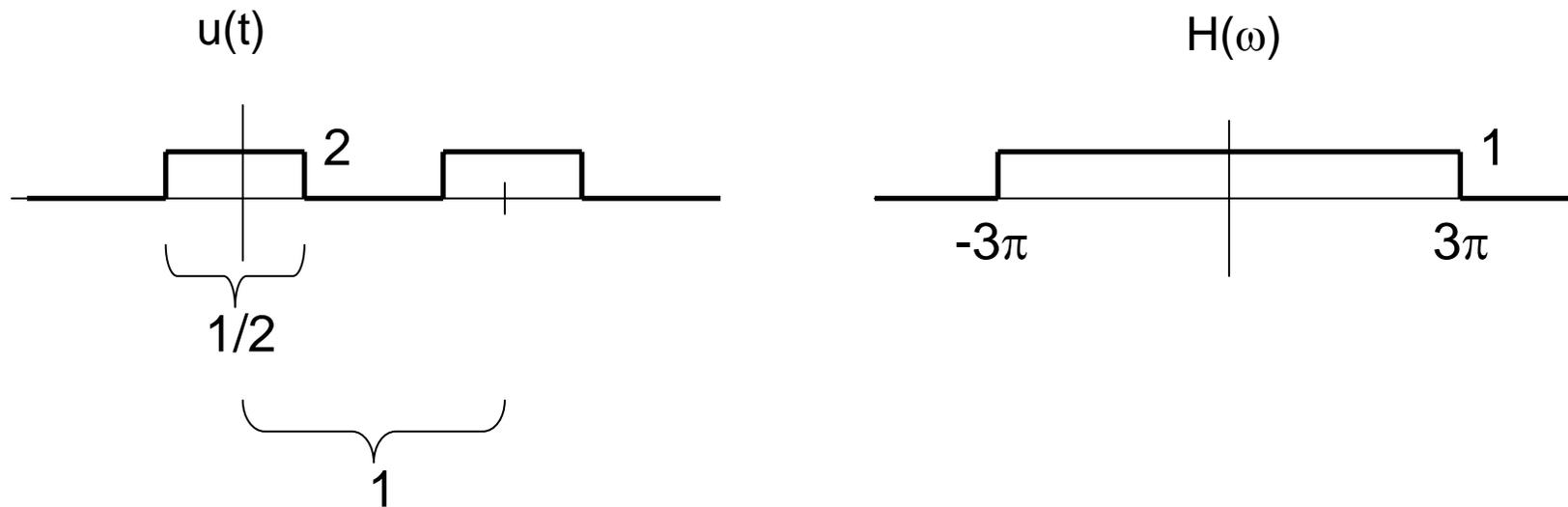
$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_n e^{j(\omega_0 t + \phi_n)} \Rightarrow y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} U_n H(n\omega_0) e^{j(\omega_0 t + \phi_n)}$$

- La potencia de la salida es:

$$P_y = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |U_n|^2 |H(n\omega_0)|^2$$

2.9 Respuesta estacionaria a señales periódicas

- Ej. Determinar la salida cuando la entrada y el filtro son los siguientes



2.9 Respuesta estacionaria a señales periódicas

- La entrada se puede escribir como:

$$u(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}(n\pi / 2)}{n\pi / 2} e^{jn2\pi t}$$

- La salida está limitada en frecuencia

$$y(t) = 1 + \frac{4}{\pi} \cos(2\pi t)$$

2.9 Respuesta estacionaria a señales periódicas

- Potencia promedio en la entrada:

$$P_u = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} |u(t)|^2 dt = \int_{-1/4}^{1/4} 4 dt = 2$$

- Potencia promedio en la salida:

$$P_y = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |U_n|^2 |H(n\omega_0)|^2 = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 + 1 + \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 = 1.811$$

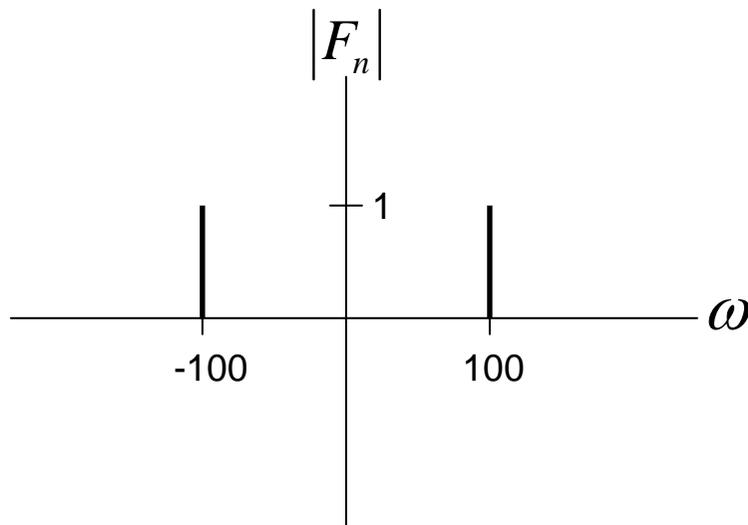
2.10 Espectro de Fourier

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}, \forall t \in \mathbf{R} \quad \text{si } \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

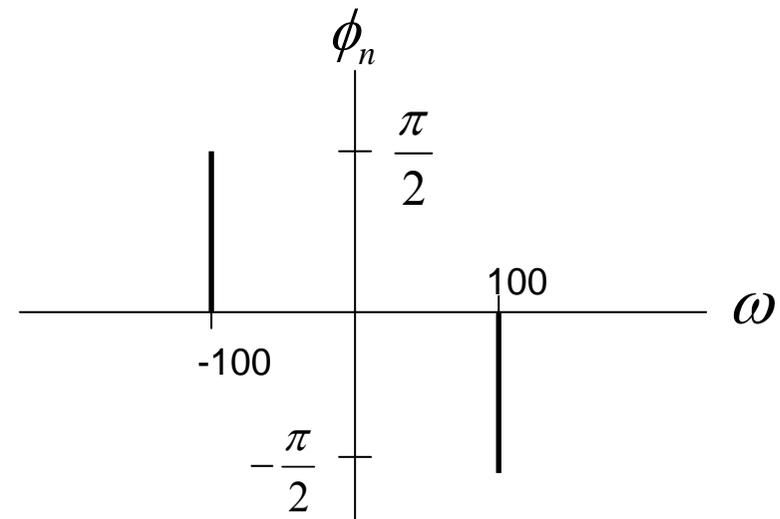
- Señal periódica = suma de exponenciales complejas multiplicadas por coeficientes F_n
- F_n : asociado a la amplitud de la frecuencia $n\omega_0$.
- Se puede hacer un gráfico amplitud / frecuencia
- Los F_n se dibujan como líneas verticales
- \Rightarrow Espectro de la señal

2.10 Espectro de Fourier

- Ej: Espectro de la función $f(t) = 2 \text{sen}(100t)$
 $\omega_0 = 100, f(t) = (j)e^{-j100t} + (-j)e^{j100t}$



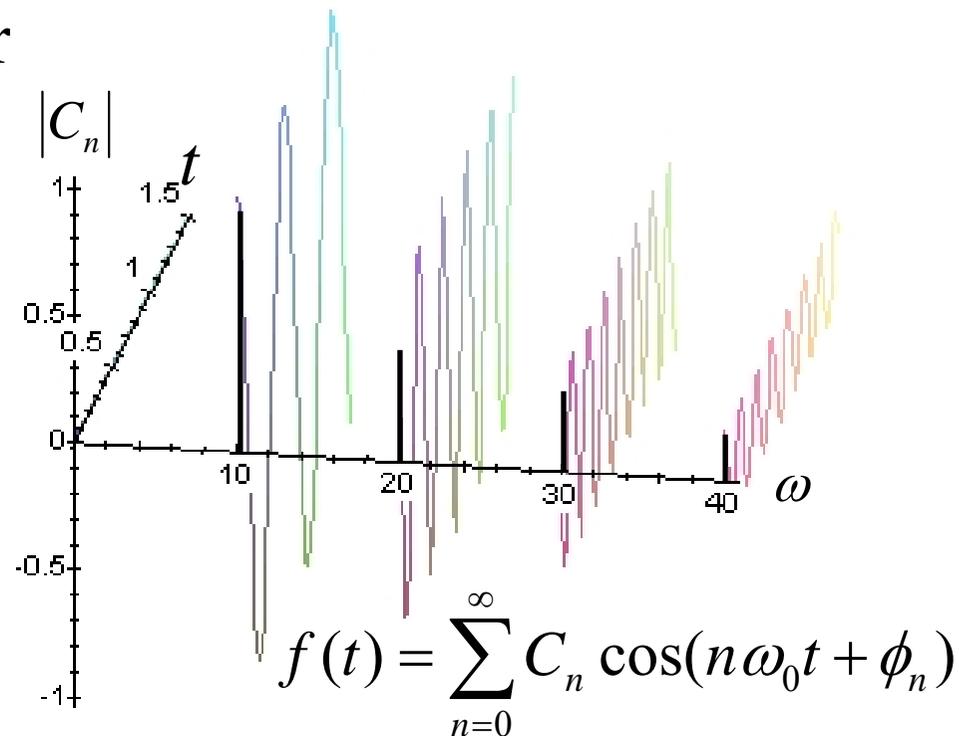
Espectro de magnitud



Espectro de fase

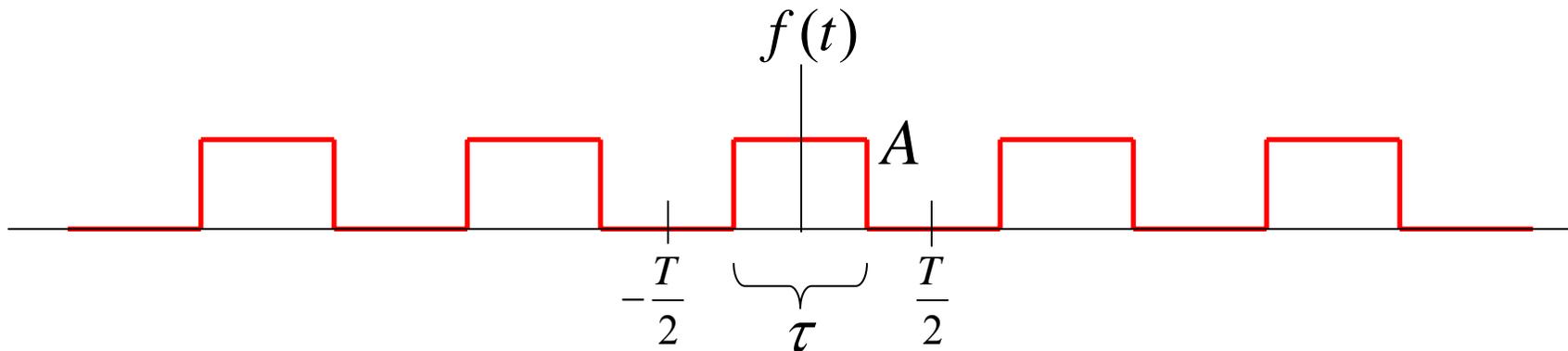
2.10 Espectro de Fourier

- También se puede generar un espectro trigonométrico a partir de la serie trigonométrica de Fourier



2.10 Espectro de Fourier

- Ej. Espectro para tren de pulsos periódico



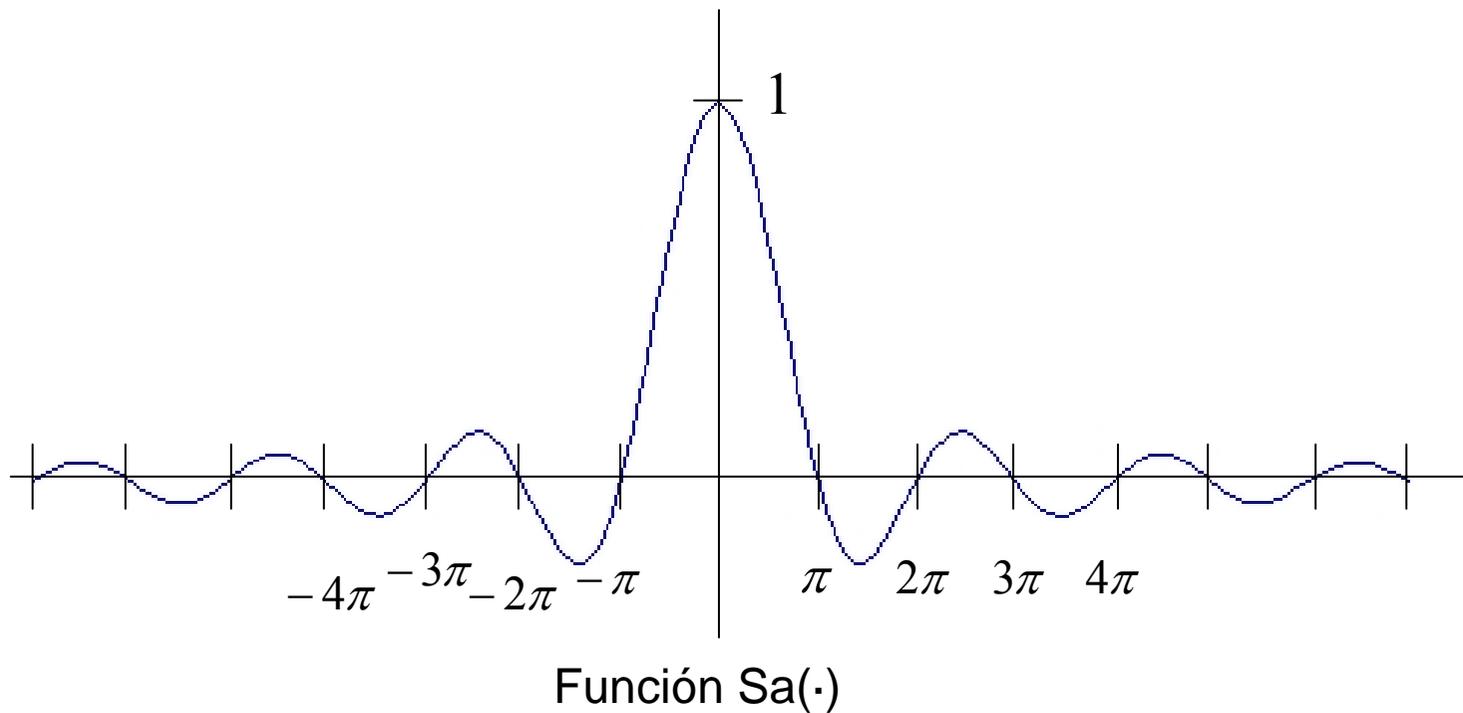
$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} A e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$F_n = \frac{-A}{jn\omega_0} \left(e^{-jn\omega_0 \tau/2} - e^{jn\omega_0 \tau/2} \right) = \frac{2A}{n\omega_0} \text{sen}(n\omega_0 \tau / 2)$$

$$F_n = \frac{A\tau}{T} \frac{\text{sen}(n\omega_0 \tau / 2)}{n\omega_0 \tau / 2}$$

2.10 Espectro de Fourier

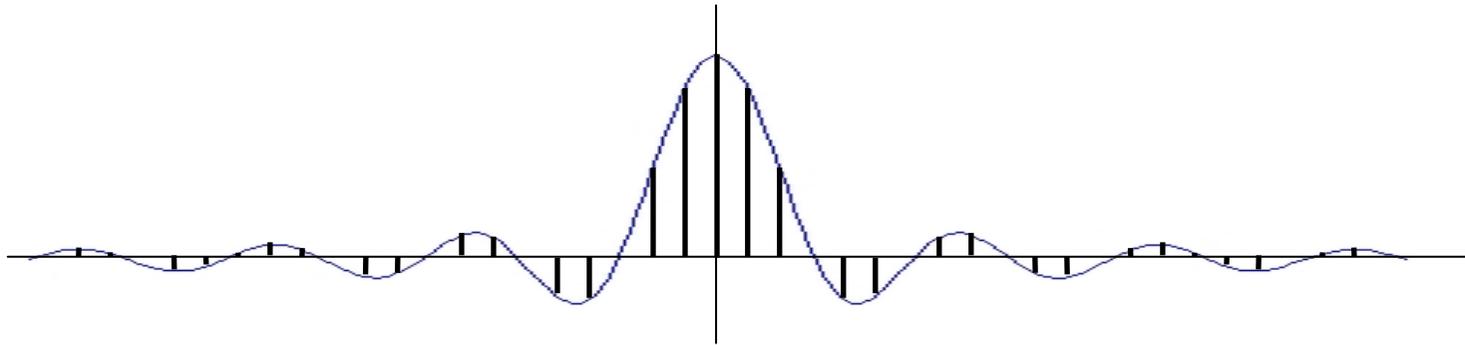
$$F_n = \frac{A\tau}{T} Sa\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right) \quad Sa(x) = \frac{\text{sen}(x)}{x}$$



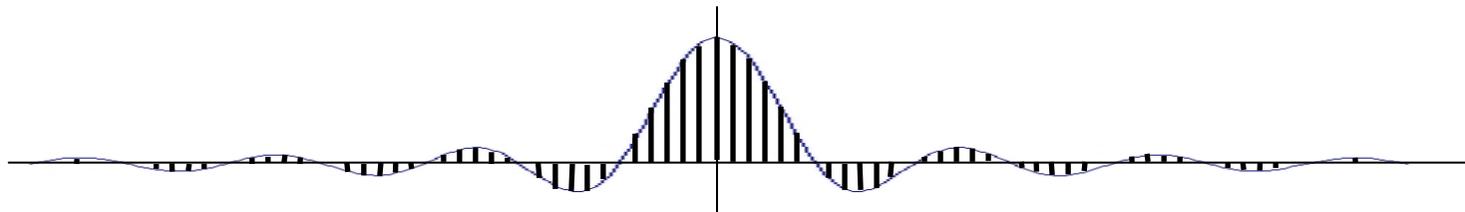
2.10 Espectro de Fourier

$$f(t) = \frac{A\tau}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Sa}\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right) e^{jn\omega_0 t}$$

Con τ fijo:



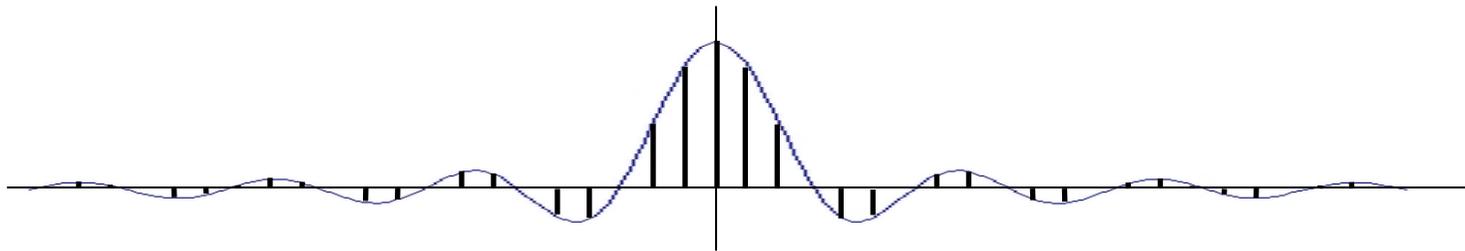
Al aumentar T:



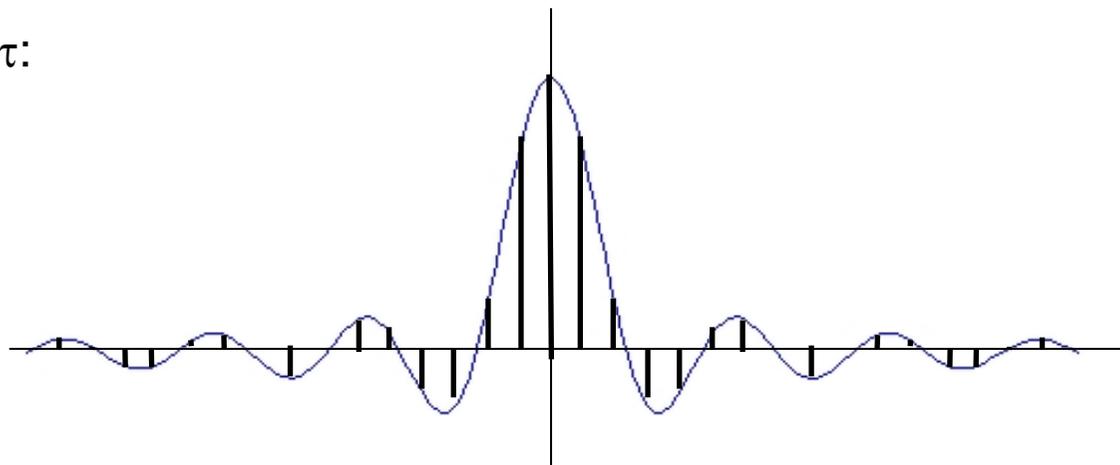
2.10 Espectro de Fourier

$$f(t) = \frac{A\tau}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Sa\left(\frac{n\pi\tau}{T}\right) e^{jn\omega_0 t}$$

Con T fijo:



Al aumentar τ :



2.10 Espectro de Fourier

- Distancia entre líneas espectrales depende de T
- Distancia entre cruces por cero de $Sa(\cdot)$ depende de τ

2.10 Espectro de Fourier

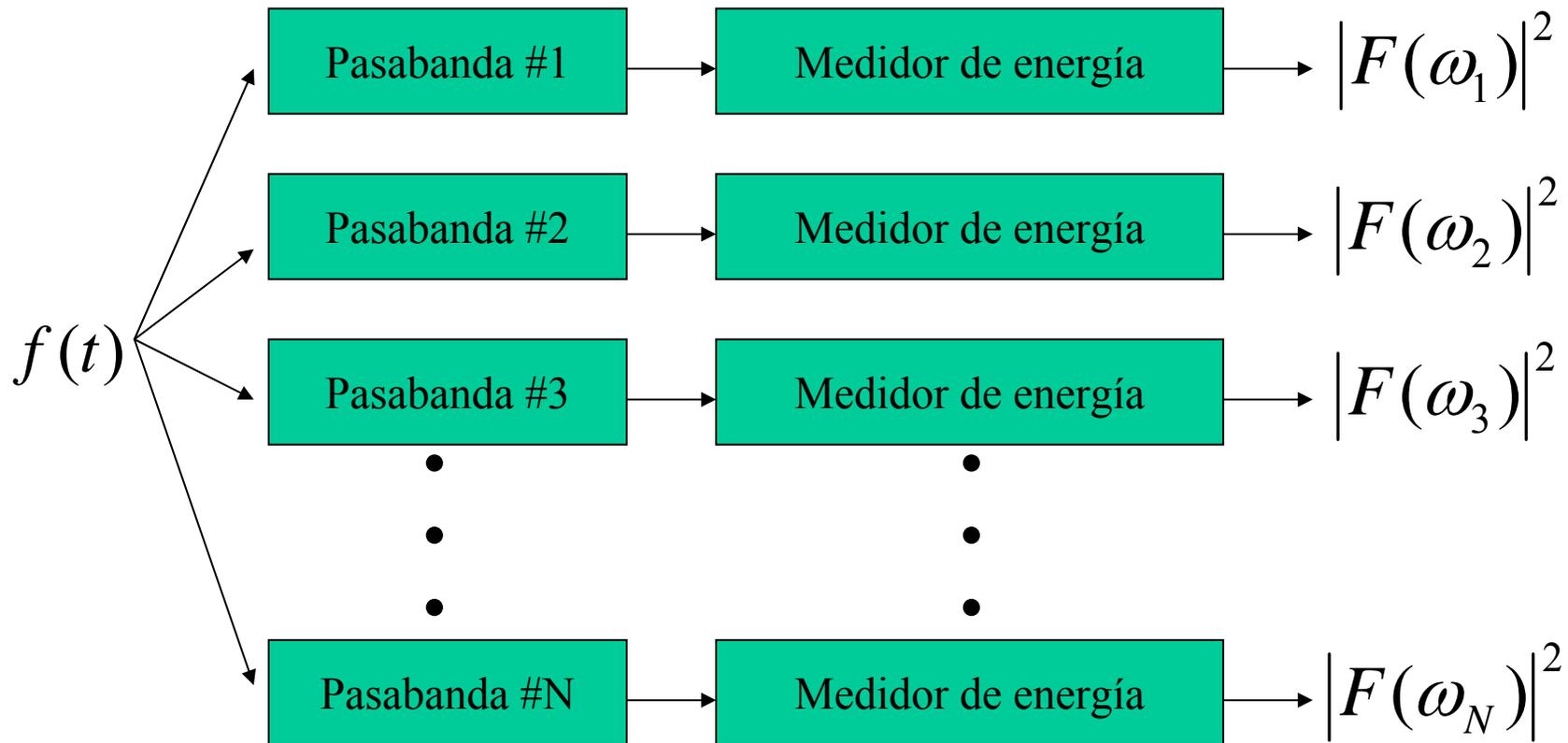
- Teorema de Parseval \Rightarrow relación entre $f(t)$ y $F(\omega)$, energía de una señal.

$$E = \int_{t=-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega$$

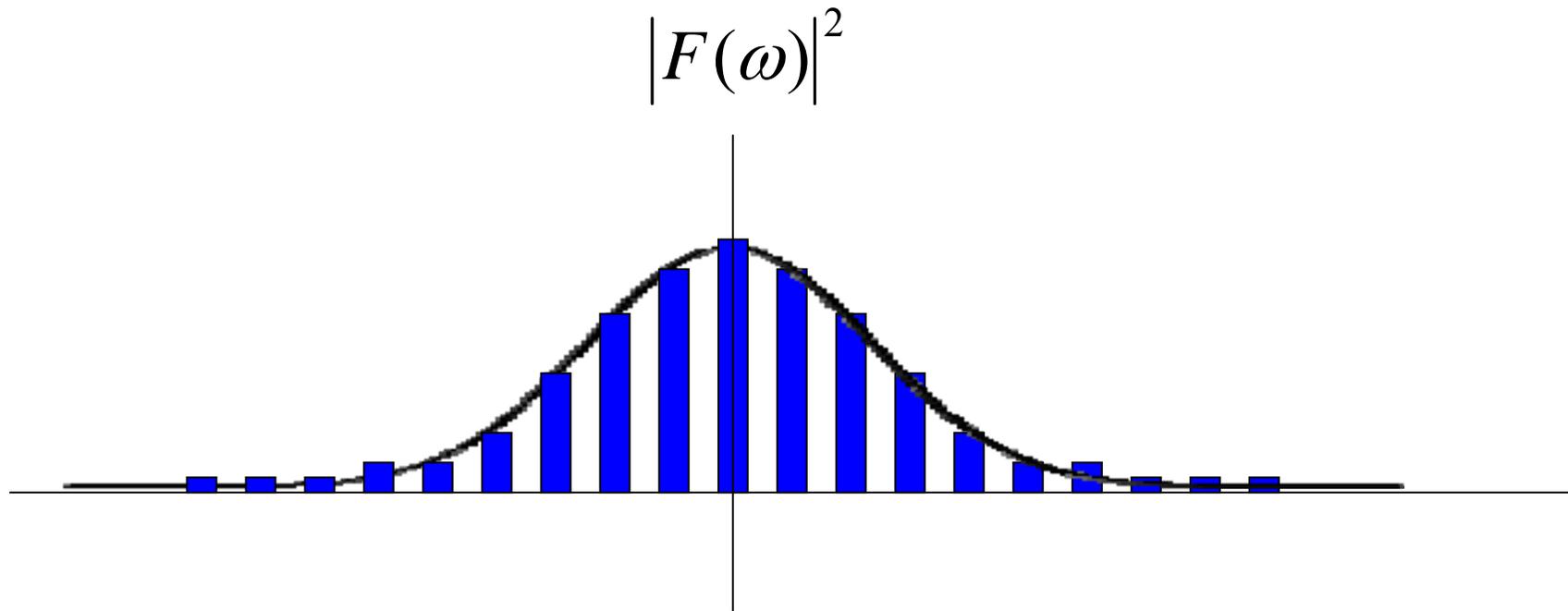
$|F(\omega)|^2 \Rightarrow$ densidad espectral de energía, permite calcular la energía en una banda de frecuencias

$F(-\omega) = F(\omega)^* \Rightarrow |F(-\omega)|^2 = |F(\omega)|^2 \Rightarrow |F(\omega)|^2$ es par

2.10 Espectro de Fourier



2.10 Espectro de Fourier



2.10 Espectro de Fourier

- No todas las señales tienen energía finita
- Algunas de ellas tienen potencia media finita => señales de potencia

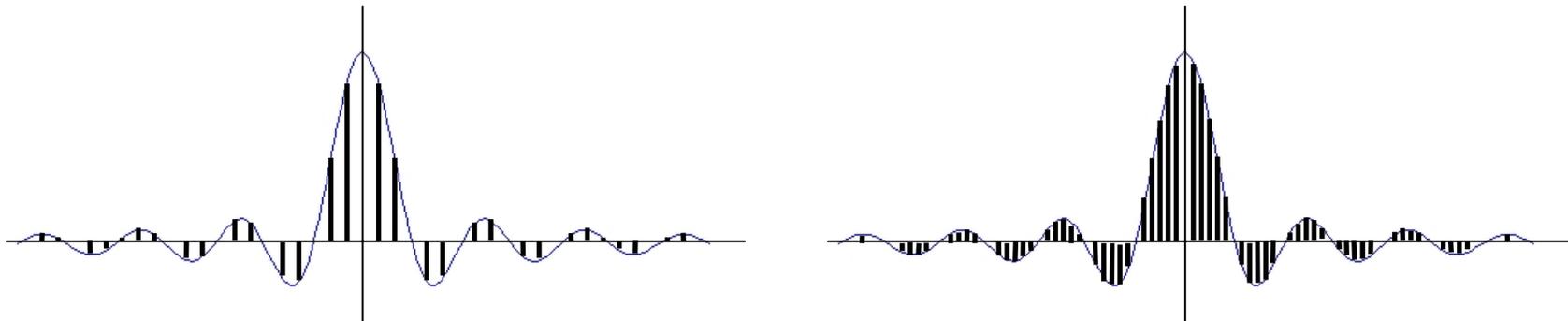
$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt = \overline{f^2(t)}$$

Se puede definir una densidad espectral de potencia:

$$P = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_f(\omega) d\omega$$

2.11 Representación para señal aperiódica

- Serie de Fourier: A medida que T aumenta, las líneas espectrales se juntan. La forma del espectro no cambia.



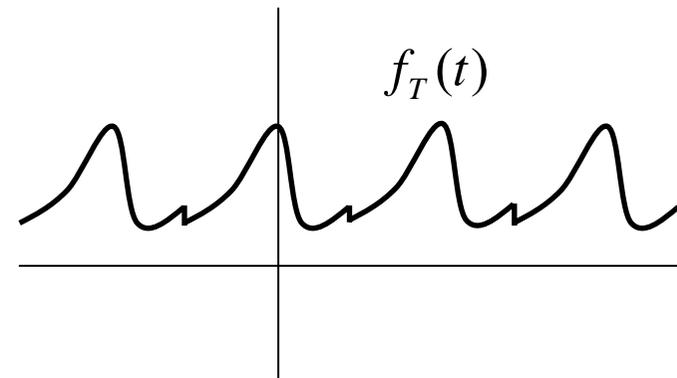
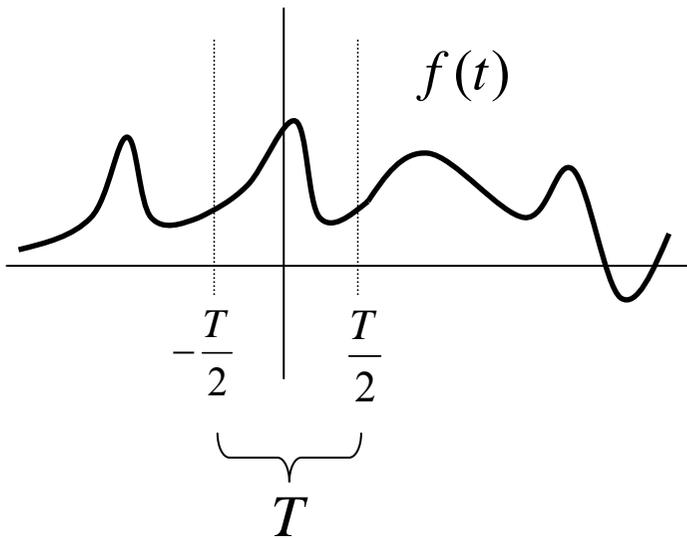
- Se puede generar espectro de señal aperiódica a partir de serie de Fourier al considerar que $T \rightarrow \infty$

2.11 Representación para señal aperiódica

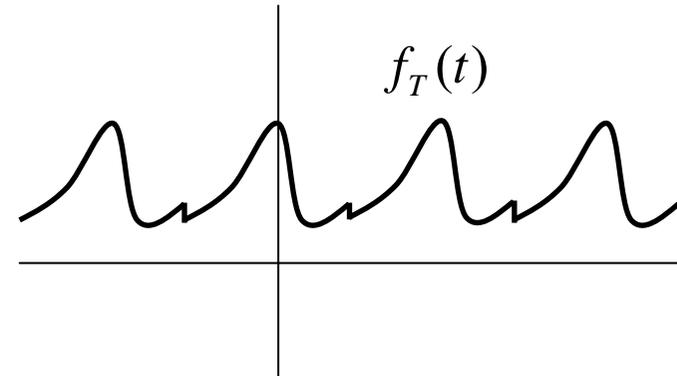
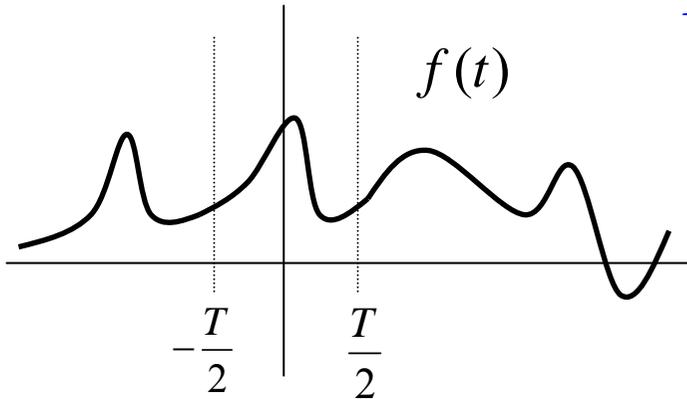
Sea $f(t)$ una señal aperiódica.

$f_T(t)$: función periódica asociada a $f(t)$ con período T

$$f_T(t) = f(t + nT), \quad (t + nT) \in \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right], \quad n \in \mathbb{Z}$$



2.11 Representación para señal aperiódica

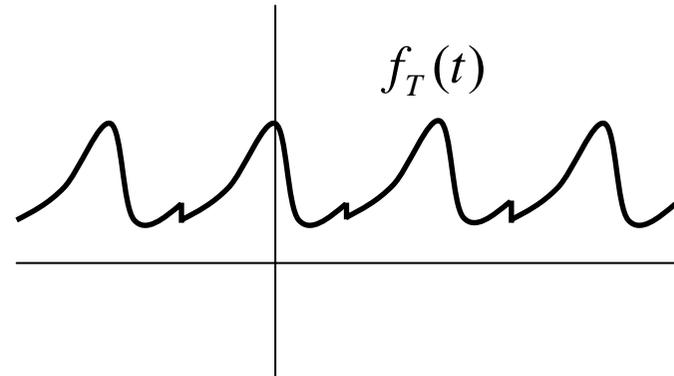
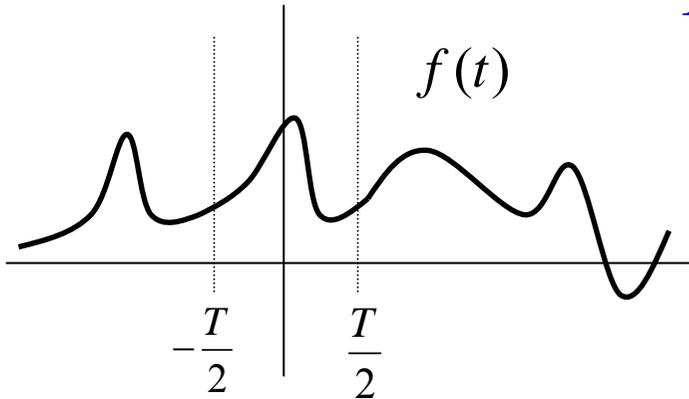


$$f_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}, \quad F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$$

Sea $F(\omega_n) = TF_n$

$$f_T(t) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega_n) e^{jn\omega_0 t}, \quad F(\omega_n) = \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt, \quad \omega_n = \frac{2\pi}{T} n$$

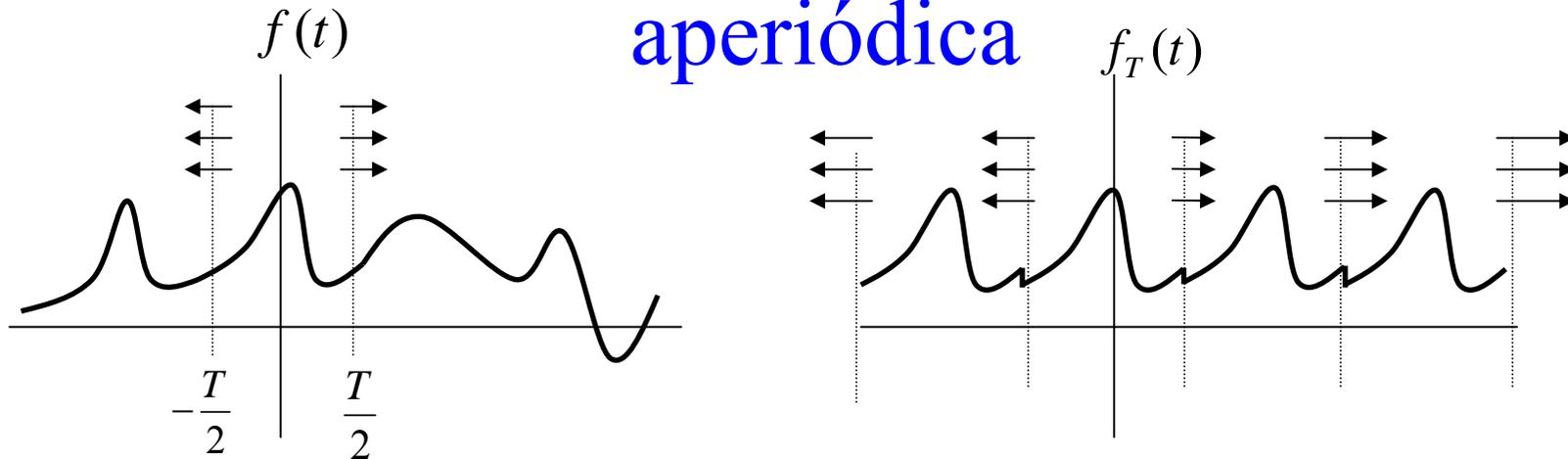
2.11 Representación para señal aperiódica



$$f_T(t) = \frac{1}{2\pi} \underbrace{\frac{2\pi}{T}}_{\Delta\omega} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega_n) e^{jn\omega_0 t}, \quad F(\omega_n) = \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt, \quad \omega_n = \frac{2\pi}{T} n$$

$$f_T(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega_n) e^{j\omega_n t} \Delta\omega, \quad F(\omega_n) = \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) e^{-j\omega_n t} dt, \quad \omega_n = \frac{2\pi}{T} n$$

2.11 Representación para señal aperiódica



$$\lim_{T \rightarrow \infty} f_T(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega_n) e^{j\omega_n t} \Delta\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega = f(t)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} F(\omega_n) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-T/2}^{T/2} f_T(t) e^{-j\omega_n t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = F(\omega)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F(\omega) = \int_{t=-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \\ f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \end{cases}$$

2.11 Representación para señal aperiódica

- Transformada directa e inversa de Fourier

$$F(\omega) = \mathfrak{F}(f(t)) = \int_{t=-\infty}^{\infty} f(t)e^{-jn\omega_0 t} dt$$

$$f(t) = \mathfrak{F}^{-1}(F(\omega)) = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega$$

- Permite ver una señal:
 - En el dominio del tiempo $\Rightarrow f(t)$
 - En el dominio de la frecuencia $\Rightarrow F(\omega)$

2.12 Función de densidad espectral

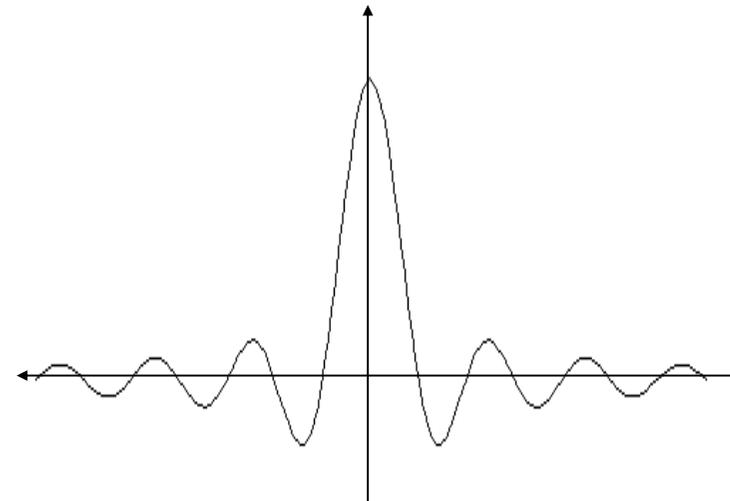
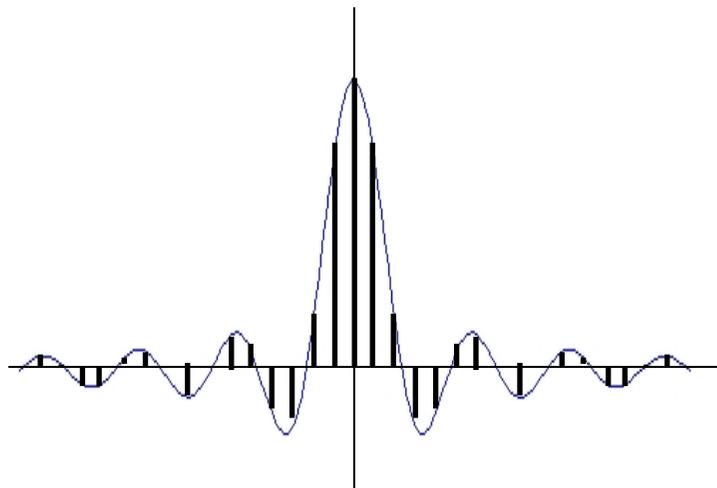
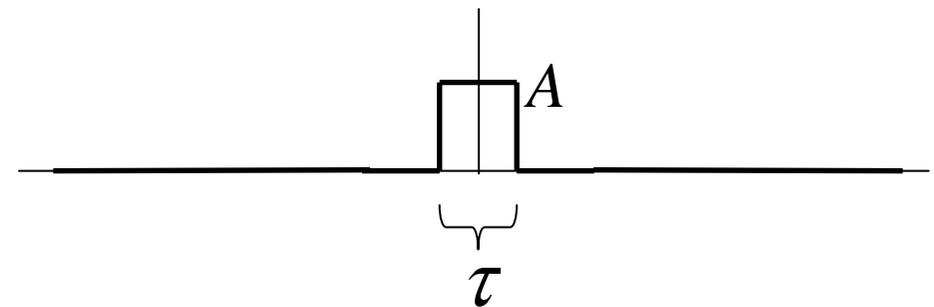
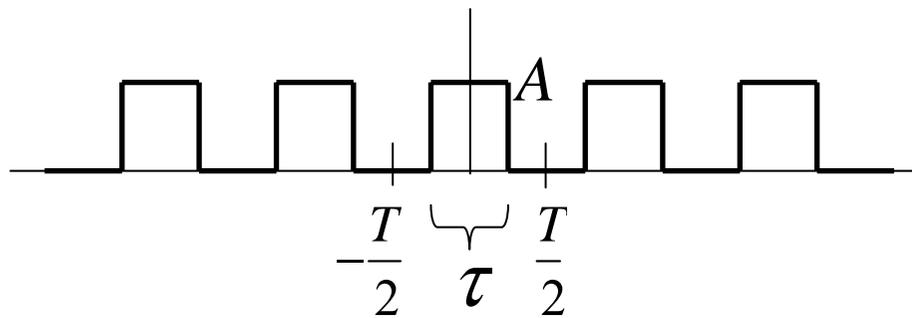
- F_n son líneas espectrales: contenido espectral repartido en frecuencias discretas
- $F(\omega)$ es función de densidad espectral: contenido espectral repartido en un continuo
- $dA=F(\omega)d\omega \Rightarrow$ elemento de amplitud dentro de un elemento de frecuencia en torno a ω
- Existe relación entre la serie de Fourier de la señal periódica, y la transformada de Fourier para 1 sólo periodo de la señal (ver próxima transparencia).

2.12 Función de densidad espectral

$$F_n = \frac{1}{T} F(\omega) \Big|_{\omega=n\omega_0}$$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right) e^{jn\omega_0 t}$$

$$F(\omega) = A\tau \text{Sa}\left(\frac{n\omega\tau}{2}\right)$$



2.12 Función de densidad espectral

- Dada $f(t)$, la transformada existe si se satisfacen las condiciones de Dirichlet para todo $t_1, t_2 \in \mathbf{R}$
 - $f(t)$ tiene un n° finito de máximos y mínimos en $[t_1, t_2]$
 - $f(t)$ tiene un n° finito de discontinuidades en $[t_1, t_2]$
 - $f(t)$ es absolutamente integrable en \mathbf{R}

$$\int_{t=-\infty}^{\infty} |f(t)| dt < \infty$$

- Las condiciones anteriores siempre se cumplen para señales de energía finita en \mathbf{R}

2.13 Teorema de Parseval

- La energía total disipada por una señal $f(\cdot)$ es:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) f^*(t) dt$$

- Si se expresa $f^*(t)$ en términos de $F^*(\omega)$:

$$E = \int_{t=-\infty}^{\infty} f(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} F^*(\omega) e^{-j\omega t} d\omega \right] dt$$

- Cambiando el orden de integración:

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} F^*(\omega) \underbrace{\left[\int_{t=-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \right]}_{F(\omega)} d\omega$$

2.13 Teorema de Parseval

$$E = \underbrace{\int_{t=-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt}_{\text{Contribución del tiempo } t \text{ a la energía}} = \frac{1}{2\pi} \underbrace{\int_{\omega=-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega}_{\text{Contribución de la frecuencia } \omega \text{ a la energía}}$$

- La energía de una señal se puede calcular tanto en el dominio del tiempo como en el dominio de la frecuencia
- Se puede calcular la energía contenida en una banda de frecuencias $[\omega_1, \omega_2]$

2.14 Transformadas que incluyen a $\delta(t)$

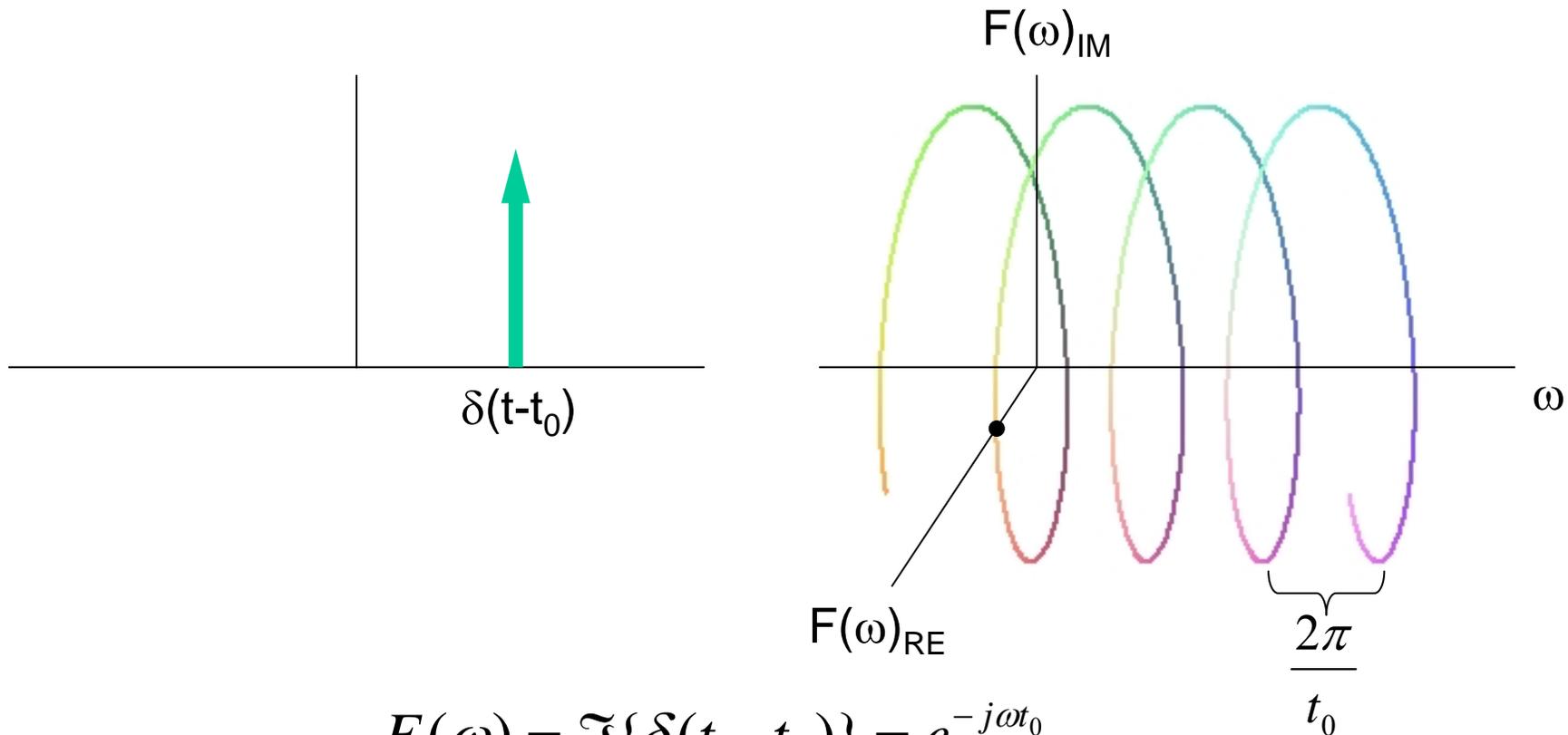
- Las transformadas de algunas señales de potencia (es decir, de energía infinita) no se pueden calcular usando la integral, por lo que deben calcularse de modo indirecto.

- Función impulso: $\mathfrak{F}\{\delta(t)\} = \int_{t=-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega t} dt = e^{j0} = 1$

$$\mathfrak{F}\{\delta(t - t_0)\} = \int_{t=-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0)e^{-j\omega t} dt = e^{-j\omega t_0}$$

- La transformada de un impulso tiene amplitud constante para todo ω y fase lineal. Espectro “blanco”.

2.14 Transformadas que incluyen a $\delta(t)$



$$F(\omega) = \mathfrak{F}\{\delta(t - t_0)\} = e^{-j\omega t_0}$$

2.14 Transformadas que incluyen a $\delta(t)$

- Exponencial complejo: Su transformada se calcula de modo indirecto.

$$\mathfrak{F}^{-1}\{\delta(\omega - \omega_0)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0) e^{-j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} e^{j\omega_0 t}$$

$$\mathfrak{F}\{\mathfrak{F}^{-1}\{\delta(\omega - \omega_0)\}\} = \frac{1}{2\pi} \mathfrak{F}\{e^{j\omega_0 t}\} = \delta(\omega - \omega_0)$$

$$\Rightarrow \mathfrak{F}\{e^{j\omega_0 t}\} = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

- Esto permite calcular las transformadas de las sinusoides.

2.14 Transformadas que incluyen a $\delta(t)$

- Sinusoides: $\mathfrak{F}\{e^{j\omega_0 t}\} = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$

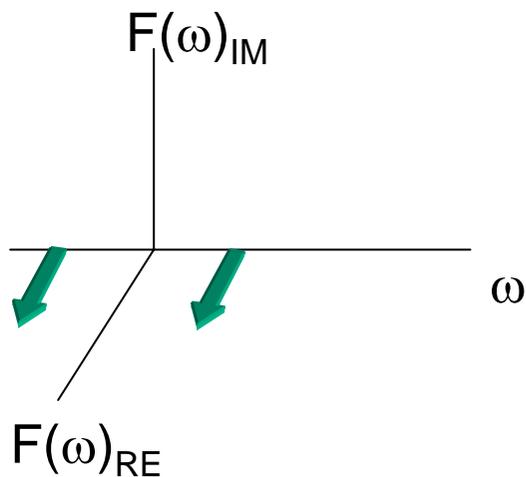
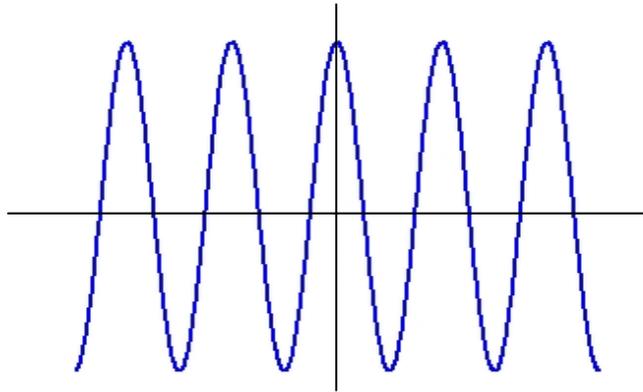
$$\Rightarrow \mathfrak{F}\{\cos(\omega_0 t)\} = \mathfrak{F}\left\{\frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}\right\} = \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$$

$$\Rightarrow \mathfrak{F}\{\text{sen}(\omega_0 t)\} = \mathfrak{F}\left\{\frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}\right\} = \frac{\pi\delta(\omega - \omega_0) - \pi\delta(\omega + \omega_0)}{j}$$

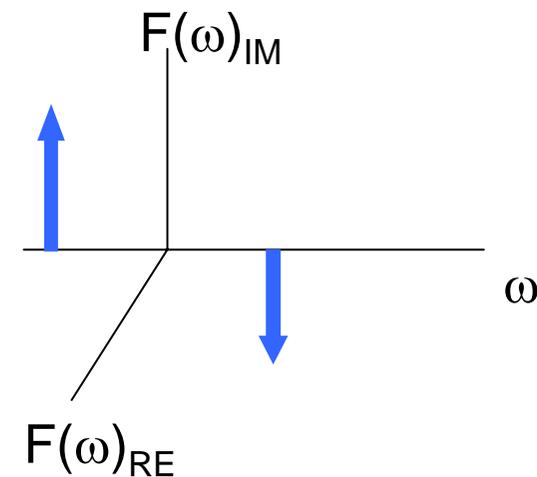
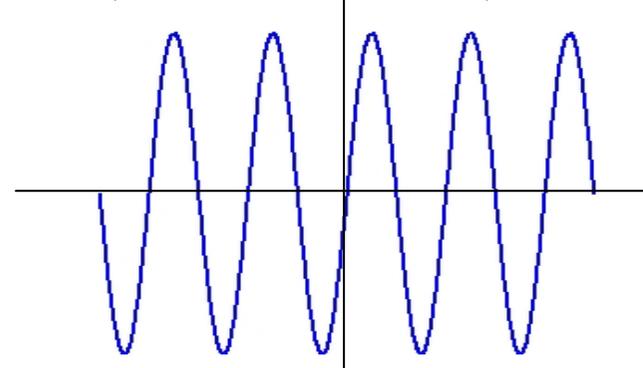
- El espectro de una senoide son 2 impulsos localizados en ω_0 y $-\omega_0$.

2.14 Transformadas que incluyen a $\delta(t)$

$$\mathfrak{T}\{\cos(\omega_0 t)\} = \pi\delta(\omega - \omega_0) + \pi\delta(\omega + \omega_0)$$



$$\mathfrak{T}\{\sin(\omega_0 t)\} = -j\pi\delta(\omega - \omega_0) + j\pi\delta(\omega + \omega_0)$$



2.14 Transformadas que incluyen a $\delta(t)$

- Función signo: $\text{sgn}(x) = \frac{x}{|x|}$
 - No es absolutamente integrable
 - Se calcula de modo indirecto

$$\mathfrak{F}\{\text{sgn}(x)\} = \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|a|t} \text{sgn}(t) e^{-j\omega t} dt$$

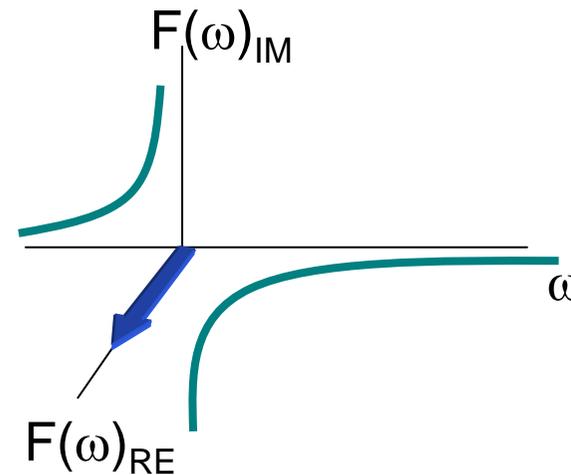
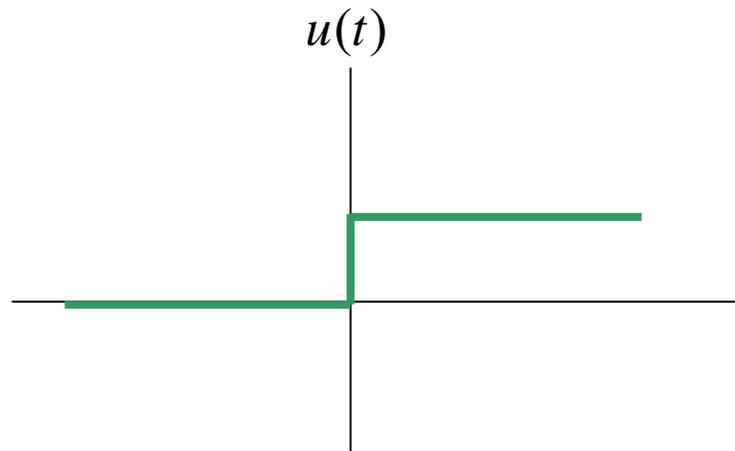
$$\mathfrak{F}\{\text{sgn}(x)\} = \lim_{a \rightarrow 0} \int_{-\infty}^0 e^{(a-j\omega)t} dt + \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{-2j\omega}{a^2 + \omega^2}$$

$$\mathfrak{F}\{\text{sgn}(x)\} = \frac{2}{j\omega}$$

2.14 Transformadas que incluyen a $\delta(t)$

- Escalón:

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x) \Rightarrow \mathcal{F}\{u(t)\} = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$



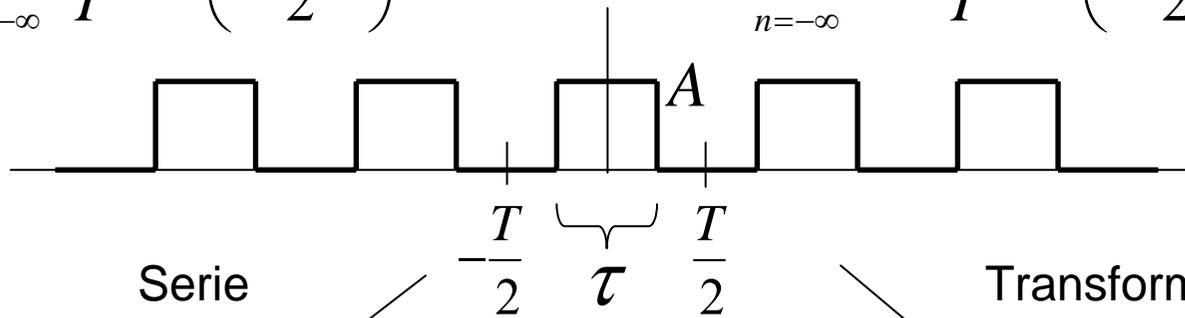
2.14 Transformadas que incluyen a $\delta(t)$

- Funciones periódicas
 - Se pueden expresar como serie de Fourier
 - Cada término de la serie contribuye con un impulso
- Se pueden representar como serie de Fourier o como transformada que incluye impulsos

$$\mathfrak{F}\left\{\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}\right\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi F_n \delta(\omega - n\omega_0)$$

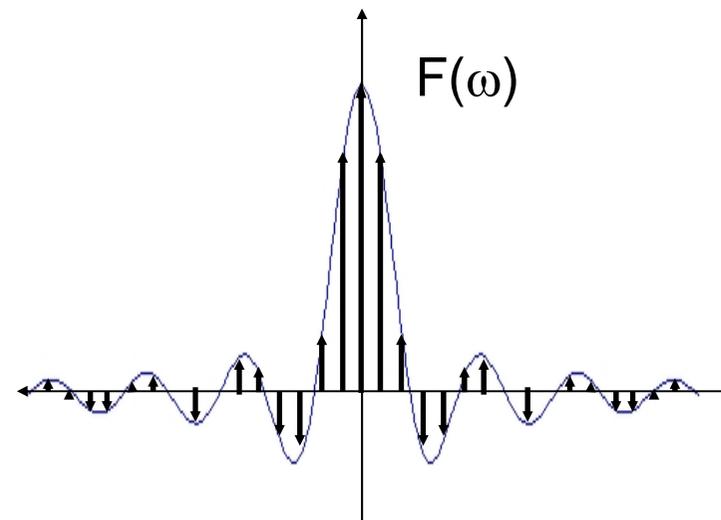
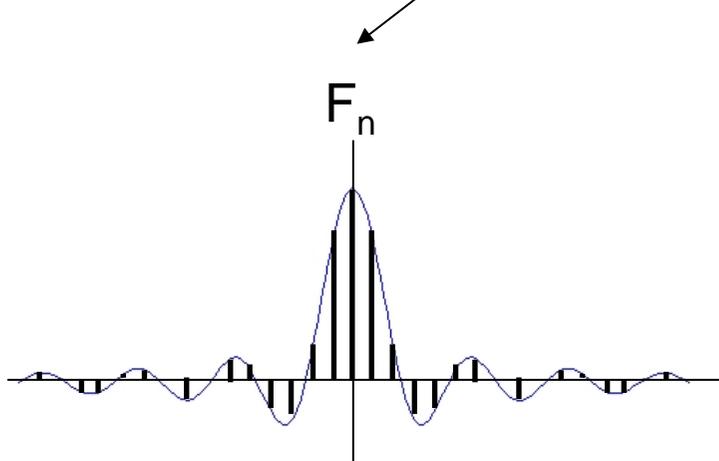
2.14 Transformadas que incluyen a $\delta(t)$

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{A\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right) e^{jn\omega_0 t}, \quad F(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi \frac{A\tau}{T} \text{Sa}\left(\frac{n\omega_0\tau}{2}\right) \delta(\omega - n\omega_0)$$



Serie Fourier

Transformada Fourier



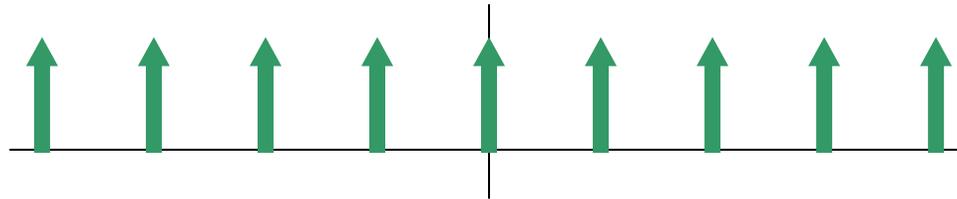
2.14 Transformadas que incluyen a $\delta(t)$

- Tren de impulsos, “peineta”

$$\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$F_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jn\omega_0 t} dt = \frac{1}{T}$$

$$\Rightarrow \delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{jn\omega_0 t}$$



2.14 Transformadas que incluyen a $\delta(t)$

$e^{-at} u(t)$	$1/(a + j\omega)$
$te^{-at} u(t)$	$1/(a + j\omega)^2$
$e^{- a t}$	$2a/(a^2 + \omega^2)$
$e^{-t^2/(2\sigma^2)}$	$\sigma\sqrt{2\pi}e^{-\sigma^2\omega^2/2}$
$\text{sgn}(t)$	$2/(j\omega)$
$j/(\pi t)$	$\text{sgn}(\omega)$

2.14 Transformadas que incluyen a $\delta(t)$

$u(t)$	$\pi\delta(\omega) + 1/(j\omega)$
$\delta(t)$	1
1	$2\pi\delta(\omega)$
$e^{\pm j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega \mp \omega_0)$
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$
$\text{sen}(\omega_0 t)$	$-j\pi[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$

2.14 Transformadas que incluyen a $\delta(t)$

$rect(t / \tau)$	$\tau Sa(\omega\tau / 2)$
$\frac{W}{2\pi} Sa\left(\frac{W\tau}{2}\right)$	$rect(\omega / W)$
$\Lambda(t / \tau)$	$\tau Sa^2(\omega\tau / 2)$
$\frac{W}{2\pi} Sa^2(Wt / 2)$	$\Lambda(\omega / W)$
$\cos(\pi t / \tau) rect(t / \tau)$	$\frac{2\tau \cos(\omega\tau / 2)}{\pi 1 - (\omega\tau / \pi)^2}$
$\frac{2W}{\pi^2} \frac{\cos(Wt)}{1 - (2Wt / \pi)^2}$	$\Lambda(\omega / W)$
$\delta_T(t)$	$\omega_0 \delta_{\omega_0}(\omega)$

2.15 Propiedades de la transformada de Fourier

- Linealidad (debido a que es una integral)

$$\mathfrak{F}\{a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\} = a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega)$$

- Conjugadas complejas

$$\mathfrak{F}\{f^*(t)\} = F^*(-\omega)$$

– Si f es real, $F^*(-\omega) = F(\omega)$

– Se prueba directamente calculando

$$\mathfrak{F}\{f^*(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(t) e^{-j\omega t} dt = \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{j\omega t} dt \right)^*$$

2.15 Propiedades de la transformada de Fourier

- Simetría: Cualquier función es la suma de una parte par más una impar

$$\mathfrak{F}\{f_{PAR}(t)\} = F_{PAR}(\omega) \text{ real}$$

$$\mathfrak{F}\{f_{IMPAR}(t)\} = F_{IMPAR}(\omega) \text{ imaginario}$$

- Por ejemplo, para la función par:

$$\mathfrak{F}\{f_{PAR}(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f_{PAR}(t)e^{-j\omega t} dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_{PAR}(t) \cos(\omega t) dt - j \int_{-\infty}^{\infty} f_{PAR}(t) \text{sen}(\omega t) dt$$

$$= 2 \int_0^{\infty} f_{PAR}(t) \cos(\omega t) dt \text{ que es par}$$

2.15 Propiedades de la transformada de Fourier

- Dualidad

$$\text{si } \mathfrak{F}\{f(t)\} = F(\omega)$$

$$\Rightarrow \mathfrak{F}\{F(t)\} = 2\pi f(-\omega)$$

– Para probarlo basta hacer un cambio de variables entre t y ω en la transformada

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}\{f(t)\} &= \int_{t=-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{\omega'=-\infty}^{\infty} f(\omega') e^{-jt'\omega'} d\omega' \\ &= 2\pi \frac{1}{2\pi} \int_{\omega'=-\infty}^{\infty} f(\omega') e^{-jt'\omega'} d\omega' = 2\pi \mathfrak{F}^{-1}\{f(-\omega')\} |_{\omega'=t} \end{aligned}$$

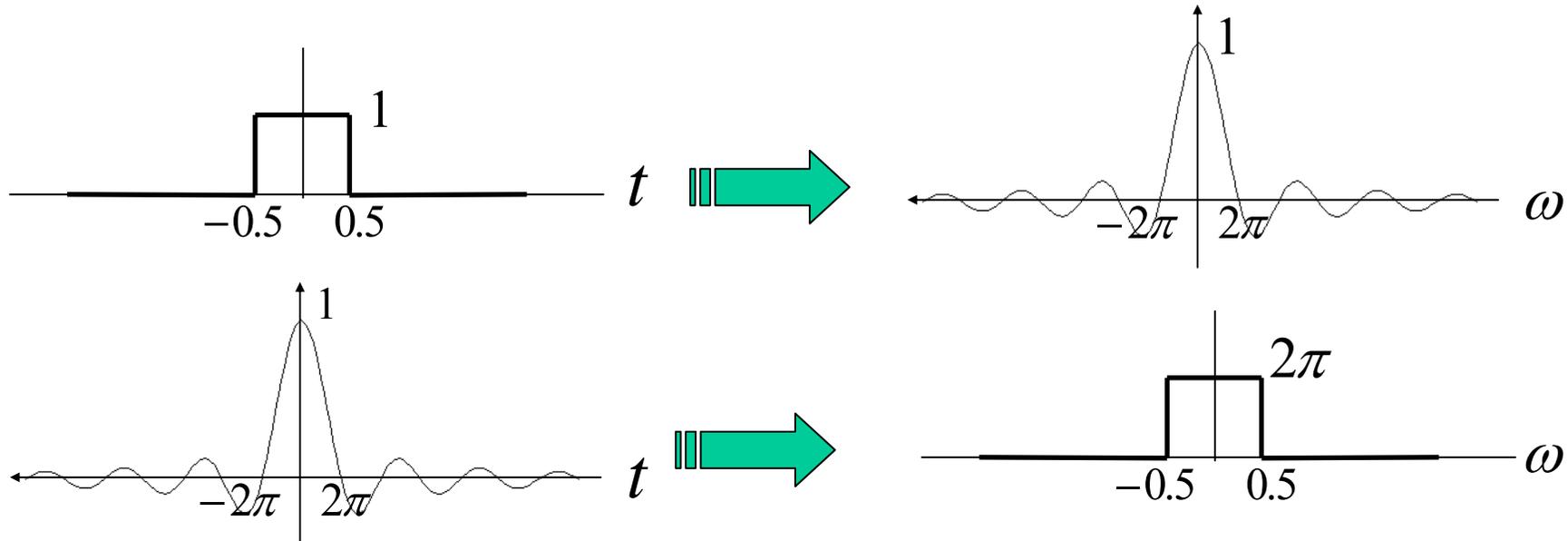
$\omega' = t$
 $t' = \omega$

2.15 Propiedades de la transformada de Fourier

- Ejemplo

– Si se sabe que $\mathcal{F}\{rect(t)\} = Sa(\omega/2)$, calcular $\mathcal{F}\{Sa(t/2)\}$

$$\mathcal{F}\{Sa(t/2)\} = 2\pi rect(-\omega) = 2\pi rect(\omega)$$



2.15 Propiedades de la transformada de Fourier

- Escala de Coordenadas

$$\mathfrak{F}\{f(\alpha t)\} = \frac{1}{|\alpha|} F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$$

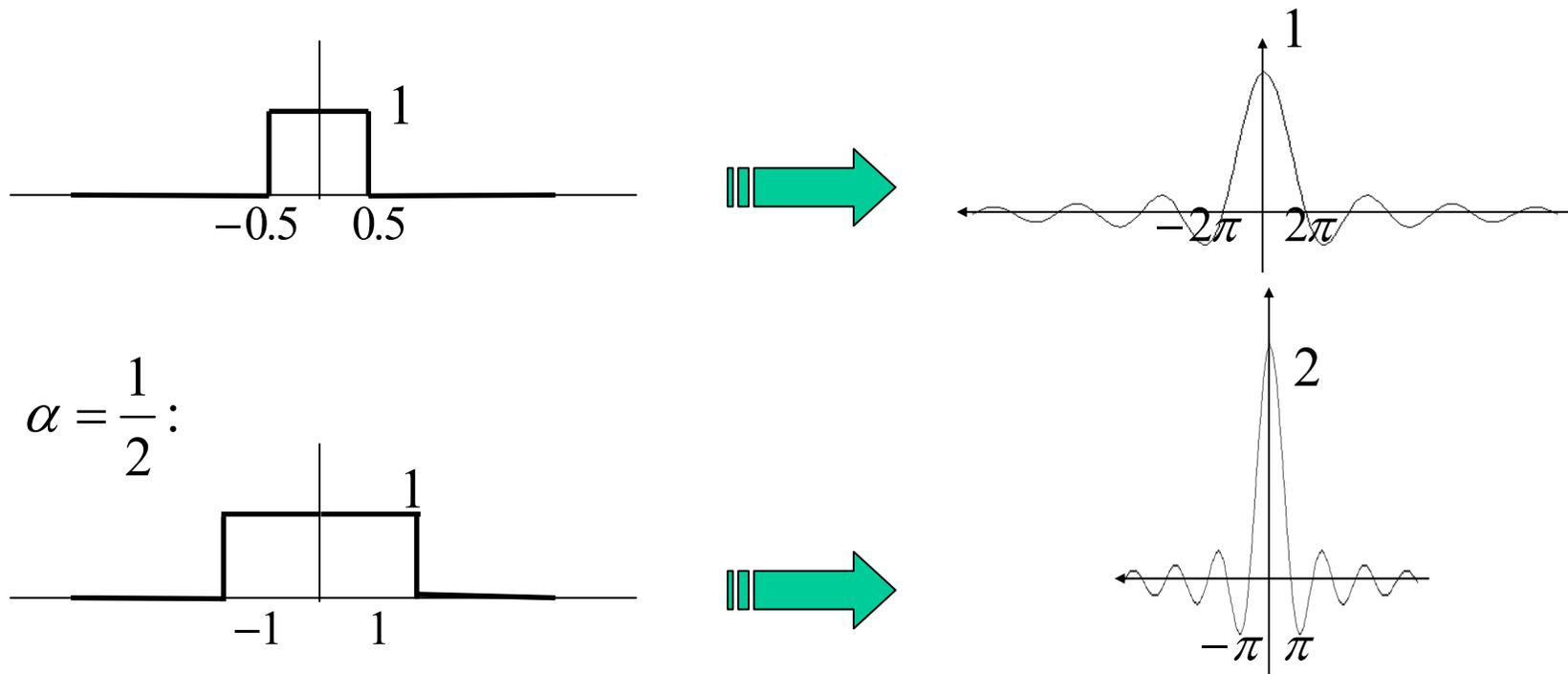
- Prueba: 2 casos: α positivo y α negativo

$$\mathfrak{F}\{f(\alpha t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-j\omega x/\alpha} dx / \alpha = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$$

$$\mathfrak{F}\{f(\alpha t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha t) e^{-j\omega t} dt = \int_{\infty}^{-\infty} f(x) e^{-j\omega x/\alpha} dx / \alpha = \frac{1}{-\alpha} F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$$

2.15 Propiedades de la transformada de Fourier

- Si $f(t)$ se vuelve ancho, $F(\omega)$ se vuelve angosto y viceversa:



2.15 Propiedades de la transformada de Fourier

- Desplazamiento en el tiempo (retardo)

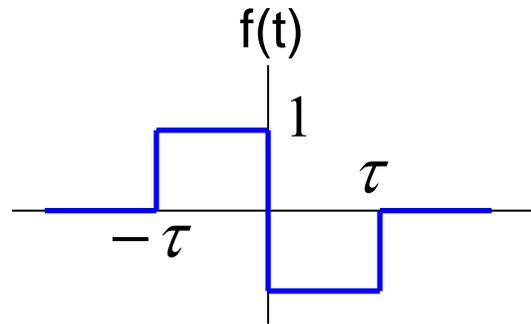
$$\mathfrak{F}\{f(t - t_0)\} = F(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

$$\mathfrak{F}\{f(t - t_0)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - t_0)e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-j\omega(t+t_0)} dx$$

- Al retardar la señal, la amplitud del espectro no varía, pero su fase si \Rightarrow información temporal en la fase.

2.15 Propiedades de la transformada de Fourier

- Ej: Determinar la transformada de:



$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}\{f(t)\} &= \mathcal{F}\{\text{rect}[(t + \tau/2)/\tau] - \text{rect}[(t - \tau/2)/\tau]\} \\
 &= \tau \mathcal{F}\{\text{rect}[t + \tau/2] - \text{rect}[t - \tau/2]\} \\
 &= \tau \text{Sa}(\omega\tau/2) \{e^{j\omega\tau/2} - e^{-j\omega\tau/2}\} = j(4/\omega) \text{sen}^2(\omega\tau/2)
 \end{aligned}$$

2.15 Propiedades de la transformada de Fourier

- Desplazamiento de frecuencia (modulación)
 - Es la propiedad dual a la del retardo

$$\mathfrak{F}\{f(t)e^{j\omega_0 t}\} = F(\omega - \omega_0)$$

$$\mathfrak{F}\{f(t)e^{j\omega_0 t}\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j(\omega - \omega_0)t} dt$$

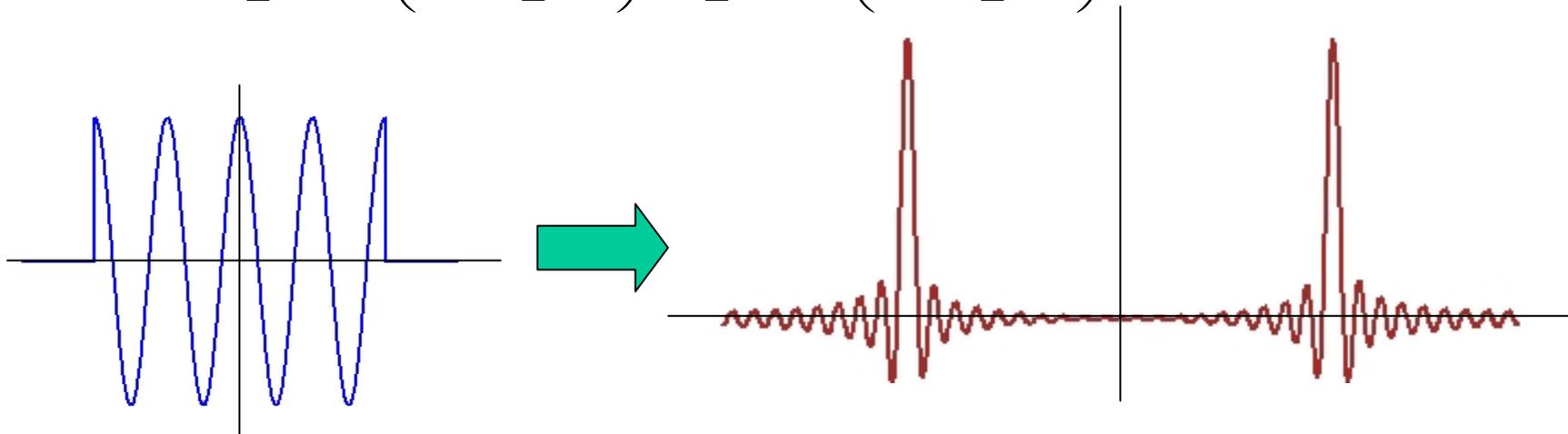
- También ocurre con $\cos(\cdot)$

$$\mathfrak{F}\{f(t)\cos(\omega_0 t)\} = \mathfrak{F}\left\{\frac{1}{2}f(t)e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}f(t)e^{-j\omega_0 t}\right\} = \frac{1}{2}F(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}F(\omega + \omega_0)$$

2.15 Propiedades de la transformada de Fourier

- Ej: hallar el espectro de:

$$\begin{aligned}
 \mathfrak{T}\{A \operatorname{rect}(t / \tau) \cos(\omega_0 t)\} &= \\
 &= \frac{A}{2} \mathfrak{T}\{\operatorname{rect}(t / \tau) e^{j\omega_0 t}\} + \frac{A}{2} \mathfrak{T}\{\operatorname{rect}(t / \tau) e^{-j\omega_0 t}\} \\
 &= \frac{A}{2} \tau \operatorname{Sa}\left(\tau \frac{\omega - \omega_0}{2}\right) + \frac{A}{2} \tau \operatorname{Sa}\left(\tau \frac{\omega + \omega_0}{2}\right)
 \end{aligned}$$



2.15 Propiedades de la transformada de Fourier

- Derivación

$$\mathfrak{F}\left\{\frac{d}{dt} f(t)\right\} = j\omega F(\omega)$$

– Porque:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

$$\frac{d}{dt} f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) j\omega e^{j\omega t} d\omega = \mathfrak{F}^{-1}\{F(\omega) j\omega\}$$

$$\mathfrak{F}\left\{\frac{d}{dt} f(t)\right\} = F(\omega) j\omega$$

2.15 Propiedades de la transformada de Fourier

- Integración:

$$\mathfrak{S} \left\{ \int_{\tau=-\infty}^t f(\tau) d\tau \right\} = \frac{1}{j\omega} F(\omega) + \pi F(0) \delta(\omega)$$

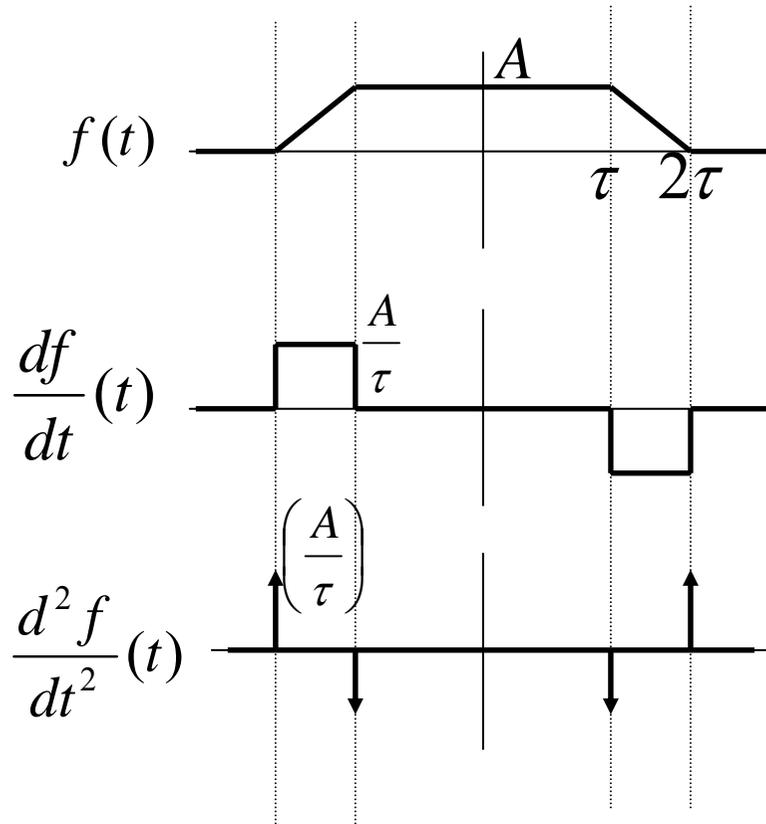
– donde:

$$F(0) = \int_{t=-\infty}^{\infty} f(t) dt$$

es la componente continua de la señal.

2.15 Propiedades de la transformada de Fourier

- Ejemplo: Determinar la transformada de $f(t)$:



$$\mathfrak{F}\left\{\frac{d^2 f}{dt^2}(t)\right\} = (j\omega)^2 F(\omega)$$

$$(j\omega)^2 F(\omega) = \frac{A}{\tau} \left(e^{j2\omega\tau} - e^{j\omega\tau} - e^{-j\omega\tau} + e^{-j2\omega\tau} \right)$$

$$F(\omega) = -\frac{A \left(e^{j2\omega\tau} - e^{j\omega\tau} - e^{-j\omega\tau} + e^{-j2\omega\tau} \right)}{\omega^2 \tau}$$

2.15 Propiedades de la transformada de Fourier

- Convolución en el tiempo
 - Se denomina convolución entre dos funciones a la siguiente operación:

$$f(t) * h(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

- Se cumple la propiedad:

$$\mathcal{F}\{f(t) * h(t)\} = F(\omega)H(\omega)$$

2.15 Propiedades de la transformada de Fourier

$$\mathfrak{F}\{f(t) * h(t)\} = \int_{t=-\infty}^{\infty} \left(\int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau \right) e^{-j\omega t} dt$$

- Cambiando el orden de integración:

$$\mathfrak{F}\{f(t) * h(t)\} = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau) \left(\int_{t=-\infty}^{\infty} h(t-\tau)e^{-j\omega t} dt \right) d\tau$$

$$\mathfrak{F}\{f(t) * h(t)\} = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau) \mathfrak{F}\{h(t-\tau)\} d\tau$$

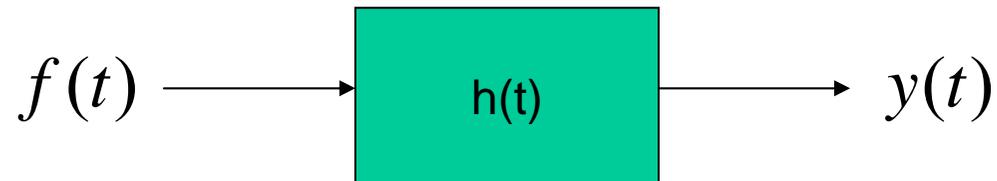
- Propiedad de desplazamiento en el tiempo:

$$\mathfrak{F}\{f(t) * h(t)\} = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)H(\omega)e^{-j\omega\tau} d\tau$$

$$\mathfrak{F}\{f(t) * h(t)\} = H(\omega)F(\omega)$$

2.15 Propiedades de la transformada de Fourier

- Si el sistema es lineal y $h(t)$ es la respuesta al impulso, se cumple:



$$y(t) = f(t) * h(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

$$Y(\omega) = F(\omega)H(\omega) \quad \text{con } H(\omega) = \mathfrak{T}\{h(t)\}$$

2.15 Propiedades de la transformada de Fourier

- Convolución en la frecuencia: Si

$$\mathfrak{F}\{f_1(t)\} = F_1(\omega), \quad \mathfrak{F}\{f_2(t)\} = F_2(\omega)$$

$$\Rightarrow \mathfrak{F}\{f_1(t)f_2(t)\} = \frac{1}{2\pi} [F_1(\omega) * F_2(\omega)]$$

- Se prueba de forma semejante a la convolución en el tiempo

2.15 Propiedades de la transformada de Fourier

Linealidad (superposición)	$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$	$a_1 F_1(\omega) + a_2 F_2(\omega)$
Conjugada compleja	$f^*(t)$	$F^*(-\omega)$
Escala	$f(\alpha t)$	$\frac{1}{ \alpha } F\left(\frac{\omega}{\alpha}\right)$
Retardo	$f(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0} F(\omega)$
Traslación en frecuencia	$e^{j\omega_0 t} f(t)$	$F(\omega - \omega_0)$

2.15 Propiedades de la transformada de Fourier

Modulación de amplitud	$f(t) \cos(\omega_0 t)$	$\frac{1}{2} F(\omega + \omega_0) + \frac{1}{2} F(\omega - \omega_0)$
Convolución en el tiempo	$\int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau) h(t - \tau) d\tau$	$F(\omega) H(\omega)$
Convolución en la frecuencia	$f_1(t) f_2(t)$	$\frac{1}{2\pi} \int_{u=-\infty}^{\infty} F_1(u) F_2(\omega - u) du$
Dualidad tiempo - frecuencia	$F(t)$	$2\pi f(-\omega)$
Simetría par - impar	$f_{PAR}(t)$	$F_{PAR}(t) \text{ real}$
	$f_{IMPAR}(t)$	$F_{IMPAR}(t) \text{ imaginario}$

2.15 Propiedades de la transformada de Fourier

Derivación en el tiempo	$\frac{d}{dt} f(t)$	$j\omega F(\omega)$
Integración en el tiempo	$\int_{\tau=-\infty}^t f(\tau) d\tau$	$\frac{1}{j\omega} F(\omega) + \pi F(0)\delta(\omega)$

Como las transformadas de Fourier se obtienen a partir de las series de Fourier, las propiedades de una son aplicables a la otra cambiando ω por $n\omega_0$.

2.16 Relaciones de convolución

- La convolución se define por:

$$f(t) * h(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

- Si el sistema es causal, entonces $h(t)=0$ para $t<0$ ($h(t)$ es la respuesta al impulso $\delta(t)$)
- Si además la entrada $f(\cdot)$ cumple $f(t)=0$ para $t<0$, la convolución se puede reescribir:

$$f(t) * h(t) = \int_{\tau=0}^t f(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

2.16 Relaciones de convolución

- Propiedades: conmutatividad

$$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t)$$

- Distributividad

$$f_1(t) * (f_2(t) + f_3(t)) = f_1(t) * f_2(t) + f_1(t) * f_3(t)$$

- Asociatividad: no se requieren ()

$$\begin{aligned} (f_1(t) * f_2(t)) * f_3(t) &= f_1(t) * (f_2(t) * f_3(t)) = \\ &= f_1(t) * f_2(t) * f_3(t) \end{aligned}$$

2.16 Relaciones de convolución

- Respuesta al escalón: La respuesta al escalón es la integral de la respuesta al impulso para un sistema lineal invariante:

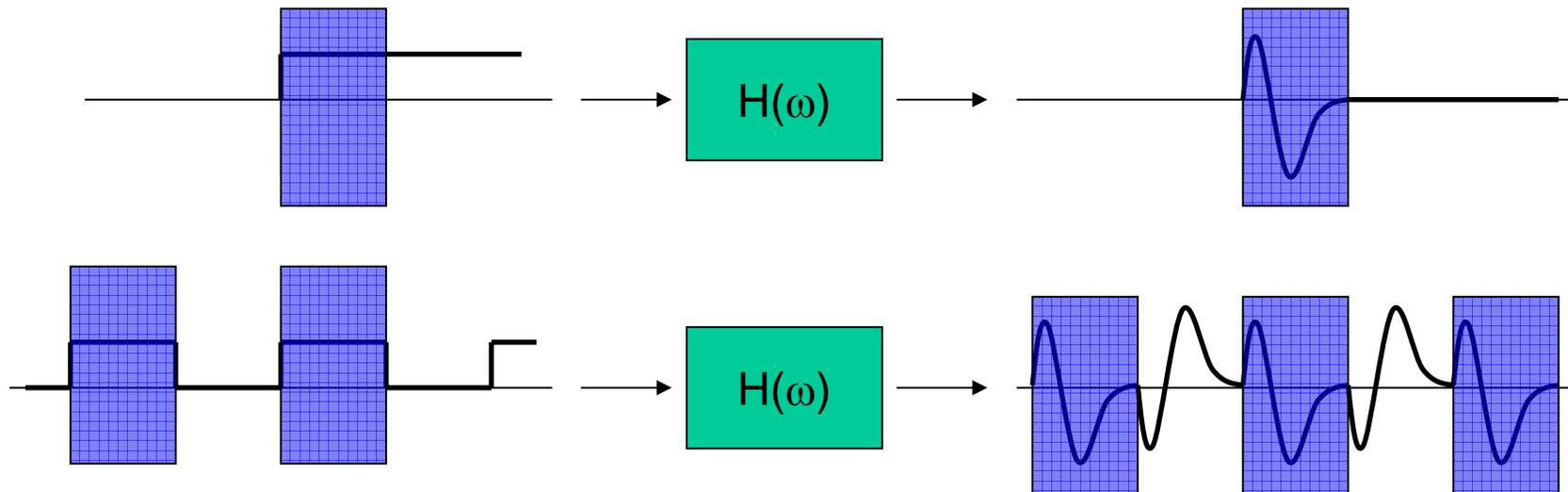
$$\begin{aligned} \mathfrak{R}\{u(t)\} &= u(t) * h(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} u(\tau)h(t - \tau)d\tau = \\ &= \int_{\tau=0}^{\infty} h(t - \tau)d\tau \end{aligned}$$

- Haciendo $x=t-\tau$:

$$\mathfrak{R}\{u(t)\} = \int_{x=-\infty}^t h(x)dx$$

2.16 Relaciones de convolución

- La respuesta al impulso puede determinarse derivando la respuesta al escalón
- La respuesta al escalón puede determinarse, usando una onda cuadrada lenta, en los flancos positivos:



2.16 Relaciones de convolución

- Convolución con impulso \Rightarrow retraso

$$f(t) * \delta(t - t_0) = \int_{\tau=0}^{\infty} f(\tau) \delta(t - t_0 - \tau) d\tau = f(t - t_0)$$

- Ejemplo: Calcular $f(t) * g(t)$ si

$$f(t) = A \operatorname{sen}(\pi t) \cdot u(t), \quad g(t) = \delta(t) - \delta(t - 2)$$

$$f(t) * g(t) = f(t) * \delta(t) - f(t) * \delta(t - 2)$$

$$= f(t) - f(t - 2) = A \operatorname{sen}(\pi t) u(t) - A \operatorname{sen}(\pi(t - 2)) u(t)$$

$$= A \operatorname{sen}(\pi t) (u(t) - u(t - 2))$$

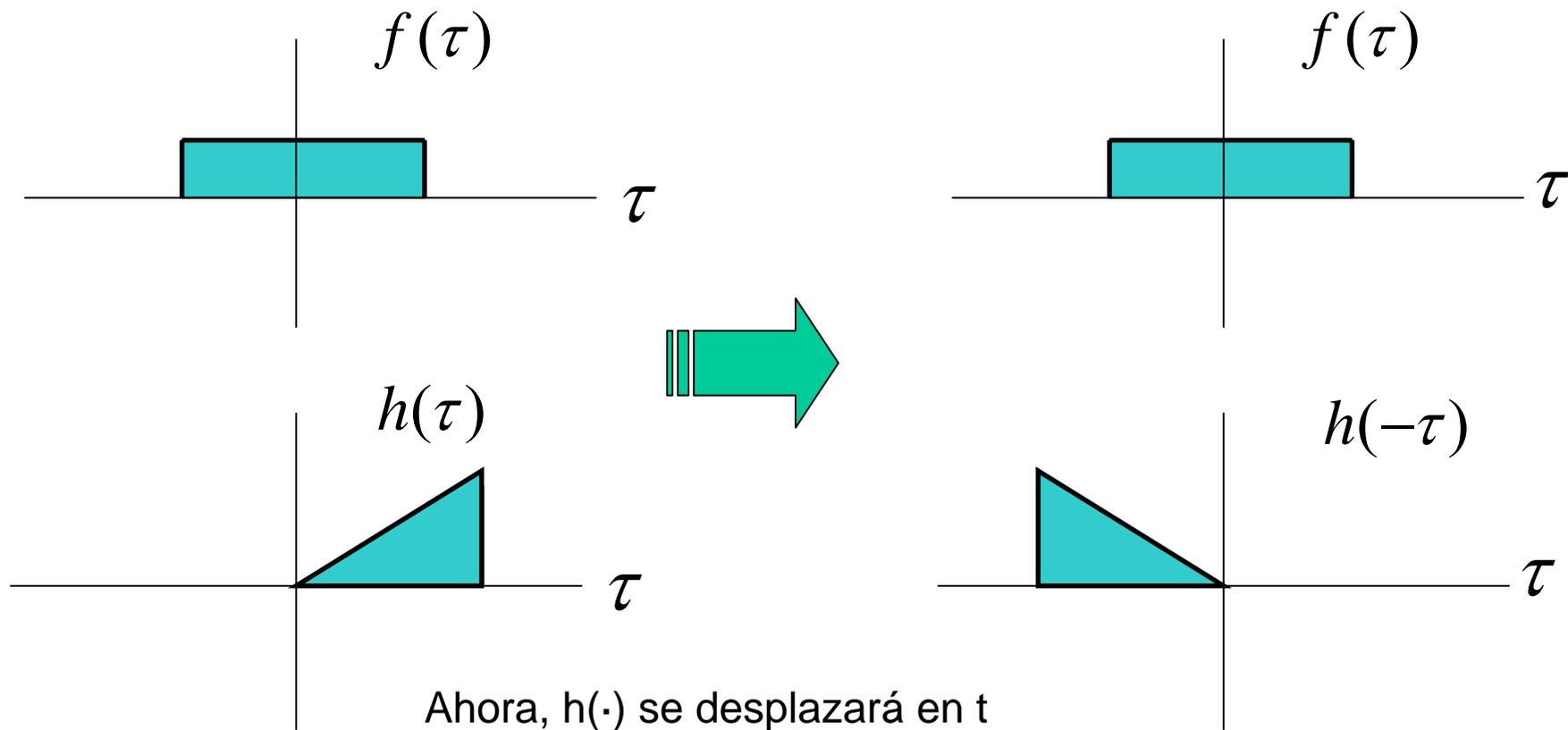
2.17 Interpretación gráfica de la convolución

- La convolución se define por la integral:

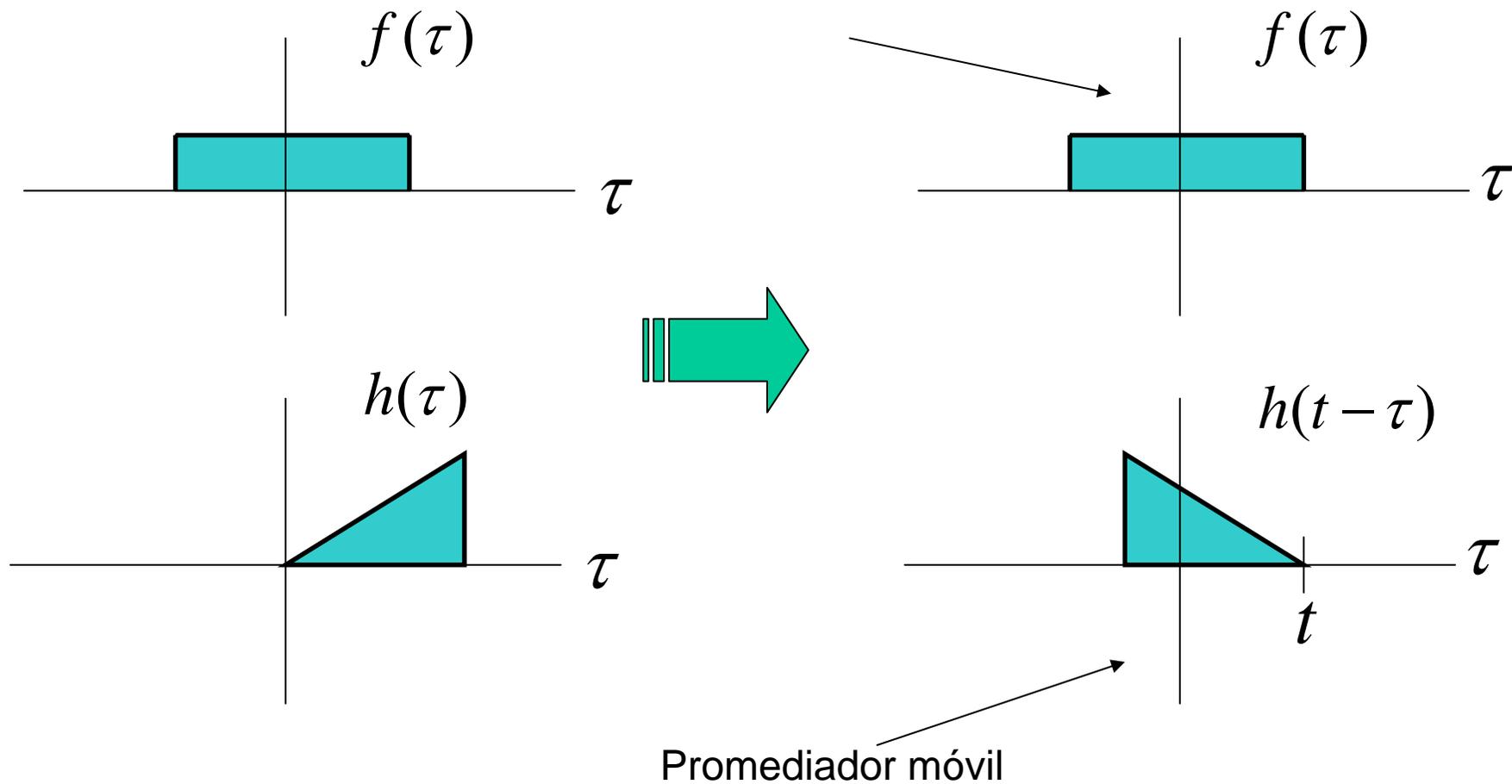
$$f(t) * h(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

- Se quiere ver qué significa en el dominio del tiempo de un modo intuitivo.
- $h(t)$, al ser invertido en el eje horizontal se comporta como un promediador móvil: permite calcular un “promedio ponderado” de la entrada en cada t :

2.17 Interpretación gráfica de la convolución

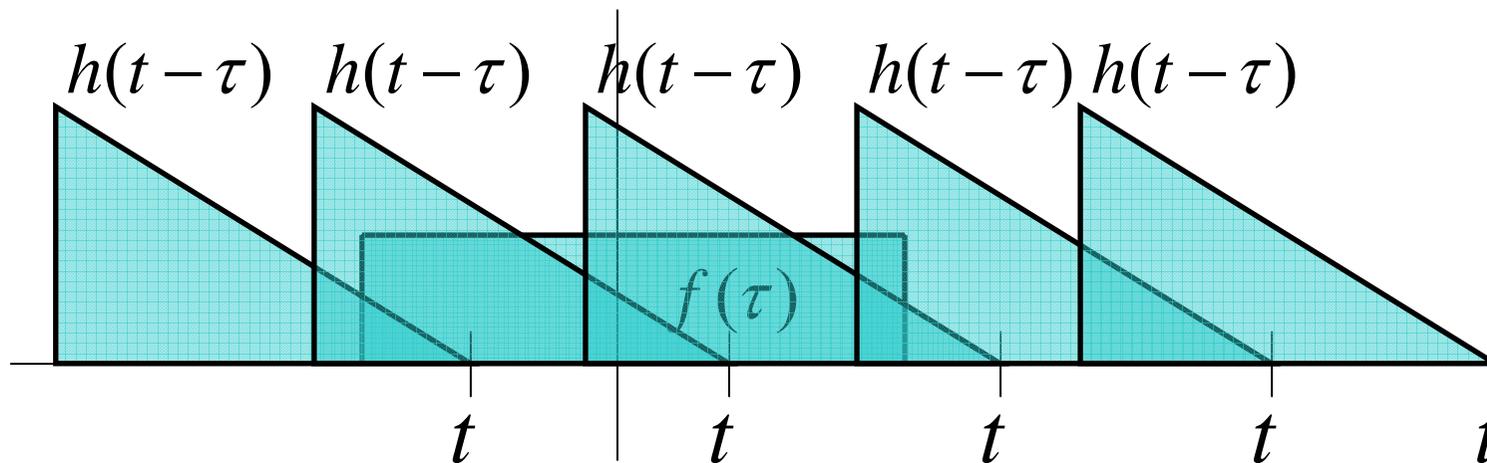


2.17 Interpretación gráfica de la convolución



2.17 Interpretación gráfica de la convolución

El promediador avanza al pasar el tiempo. La salida en el tiempo t es el área común que resulta al multiplicarlos.



$$f(t) * h(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\infty} f(\tau)h(t-\tau)d\tau, \quad \forall t$$

2.17 Interpretación gráfica de la convolución

- La salida, en el dominio del tiempo, es un promedio ponderado de la señal de entrada. El promediador avanza junto con t
- El cálculo de la integral puede discretizarse \Rightarrow permite cálculo en un computador

2.18 Característica de filtro de los sistemas lineales

- La salida de un sistema lineal se puede ver también en el dominio de la frecuencia:

$$y(t) = f(t) * h(t)$$

$$Y(\omega) = F(\omega)H(\omega)$$

- $H(\omega)$ indica la ganancia del filtro en función de la frecuencia \Rightarrow función de transferencia
- A la salida, sólo quedan las frecuencias de $F(\omega)$ que están también en $H(\omega)$

2.18 Característica de filtro de los sistemas lineales

- Para cada frecuencia ω :
 - $|H(\omega)|$: ganancia de amplitud
 - Fase de $H(\omega)$: desfase entre salida y entrada. A la fase de la entrada se le suma la fase de $H(\omega)$
- Ejemplo: calcular el espectro de salida si

$$\tau=4RC: \quad F(\omega) = \tau \text{Sa}(\omega\tau / 2)$$

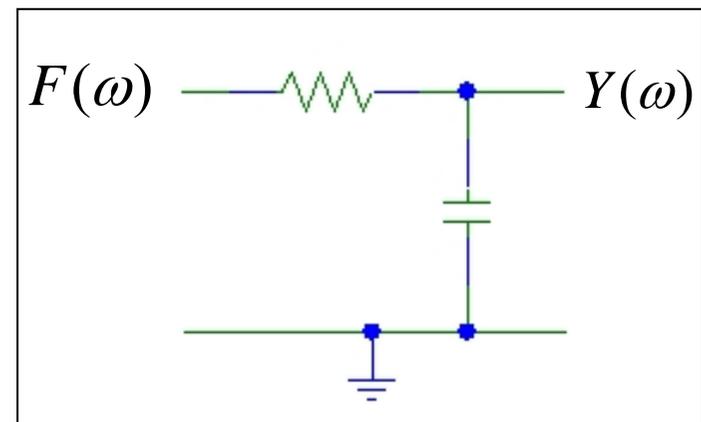
$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau / 4)^2}} e^{j\phi}$$

2.18 Característica de filtro de los sistemas lineales

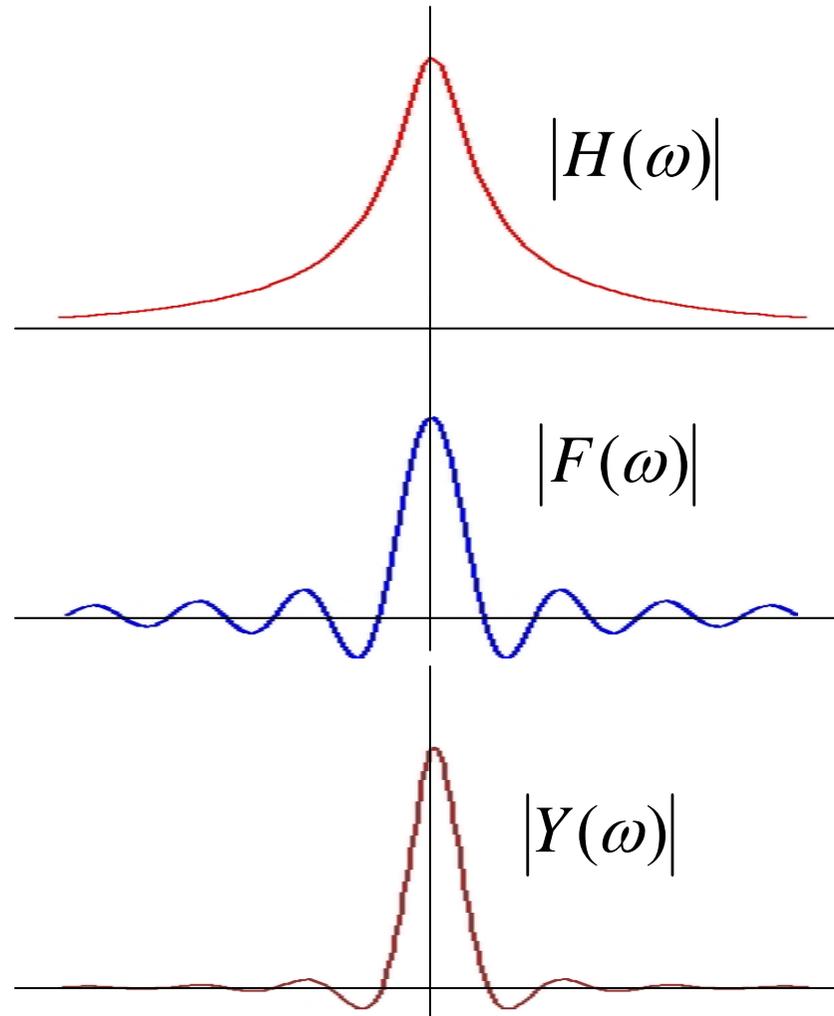
$$F(\omega) = \tau \text{Sa}(\omega\tau / 2)$$

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau / 4)^2}} e^{j\phi}$$

$$Y(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau / 4)^2}} \tau \text{Sa}(\omega\tau / 2) e^{j\phi}$$



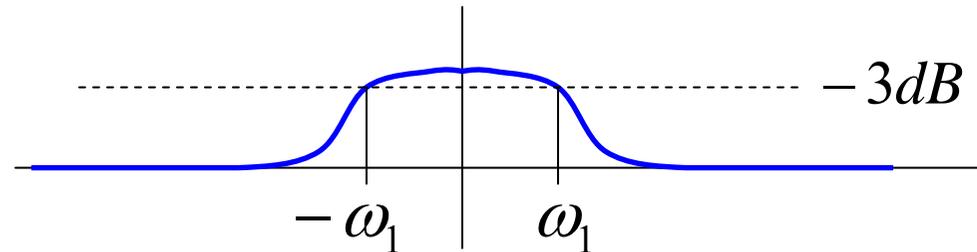
2.18 Característica de filtro de los sistemas lineales



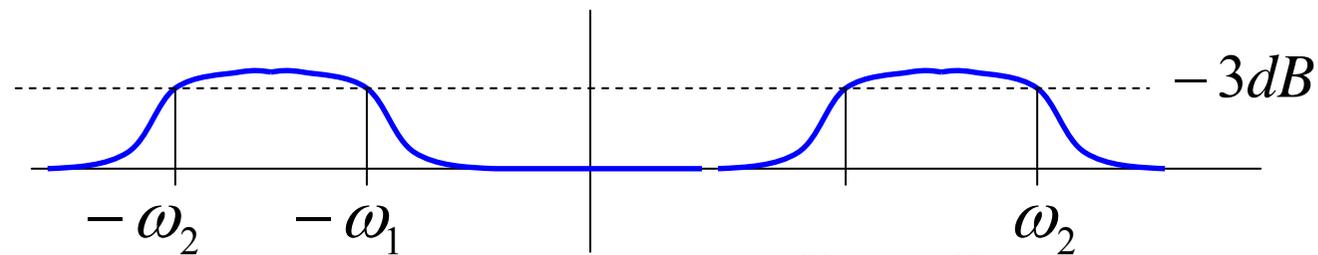
2.19 Ancho de banda de un sistema

- Zona en que $H(\omega)$ deja pasar la señal \Rightarrow ancho de banda
- Intervalo W (en rad/s) donde la magnitud es mayor que un cierto umbral (factor numérico)
- Típicamente: ancho de banda de -3dB = ancho de banda de potencia media: umbral = $1/\sqrt{2}$ en amplitud = $1/2$ en potencia.
- Ancho de banda en Hz $\Rightarrow B$

2.19 Ancho de banda de un sistema



$$W = \omega_1, \quad B = \frac{\omega_1}{2\pi}$$



$$W = \omega_2 - \omega_1, \quad B = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2\pi}$$

2.20 Transmisión sin distorsión

- Requisito para que un sistema lineal no distorsione la forma de onda: debe ser del tipo:

$$y(t) = Kf(t - t_0)$$

- Tomando transformada de Fourier:

$$Y(\omega) = Ke^{-j\omega t_0} F(\omega)$$

- Es decir, $H(\omega) = Ke^{-j\omega t_0}$

2.20 Transmisión sin distorsión

- Requisito para que un sistema lineal no distorsione la forma de onda: debe tener ganancia constante y fase lineal

$$H(\omega) = Ke^{-j\omega t_0}$$

- Ganancia K para todo ω
- Fase: $\phi_H = -t_0\omega$

2.21 Modulación de amplitud: portadora suprimida

- Radio y televisión:
 - Se requiere transmitir muchas señales con espectros semejantes por un mismo canal (el aire) evitando superposición
 - Se requiere transmitir dichas señales en ciertas bandas de frecuencia específicas (ej: para sintonizar un canal o una radio)
- Solución: modulación

2.21 Modulación de amplitud: portadora suprimida

- La ecuación general de una señal senoidal es:

$$\phi(t) = a(t) \cos \theta(t)$$

$a(t) : \textit{amplitud}$
 $\theta(t) : \textit{ángulo}$

- El ángulo se puede expresar en función de una frecuencia y una fase:

$$\phi(t) = a(t) \cos(\omega_c t + \gamma(t))$$

- Se supone que $a(t)$ y $\gamma(t)$ varían lentamente comparados con $\omega_c t$

2.21 Modulación de amplitud: portadora suprimida

$a(t)$: envolvente

$$\phi(t) = a(t) \cos(\omega_c t + \gamma(t))$$

ω_c : portadora

$\gamma(t)$: modulación de fase

- En la modulación de amplitud, la modulación de fase es cero (o constante):

$\cos(\omega_c t)$: señal portadora

$$\phi(t) = f(t) \cos(\omega_c t)$$

$f(t)$: señal moduladora

$\phi(t)$: señal modulada

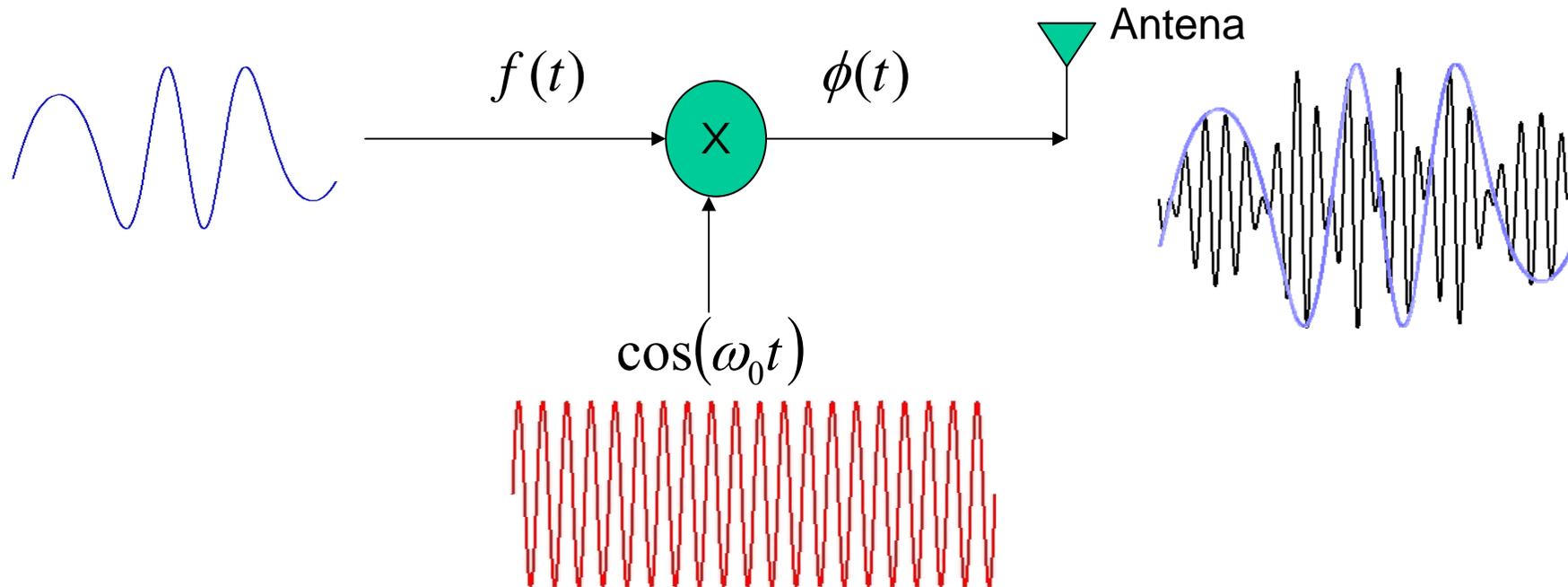
2.21 Modulación de amplitud: portadora suprimida

- Aplicando la propiedad de modulación, se tiene que:

$$\phi(t) = f(t) \cos(\omega_c t) \Rightarrow \Phi(\omega) = \frac{1}{2} F(\omega + \omega_0) + \frac{1}{2} F(\omega - \omega_0)$$

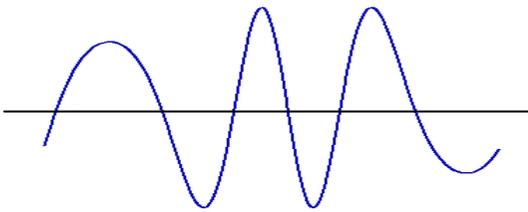
- La modulación de amplitud traslada el espectro de frecuencia dejando inalterada su forma
- Portadora suprimida \Rightarrow no aparece una portadora identificable (un impulso visible) en el espectro

2.21 Modulación de amplitud: portadora suprimida

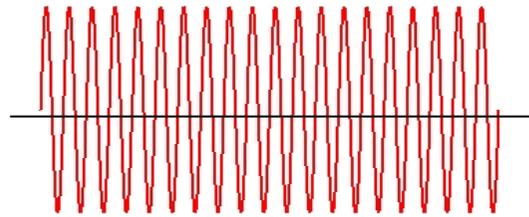


2.21 Modulación de amplitud: portadora suprimida

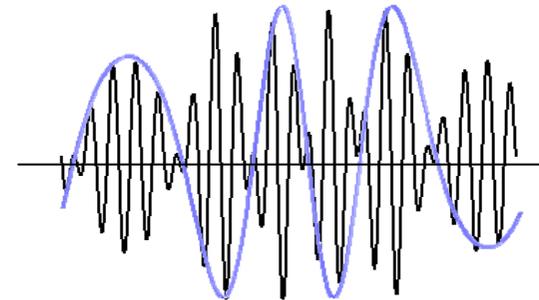
$f(t)$



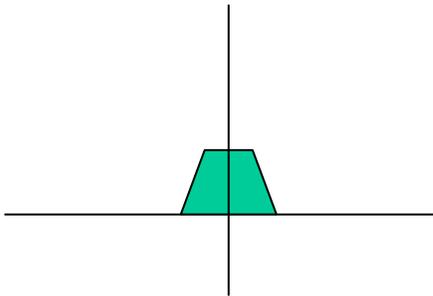
$\cos(\omega_c t)$



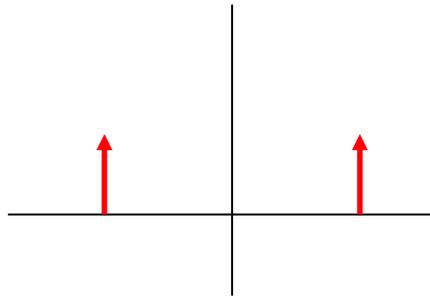
$\phi(t) = f(t) \cos(\omega_c t)$



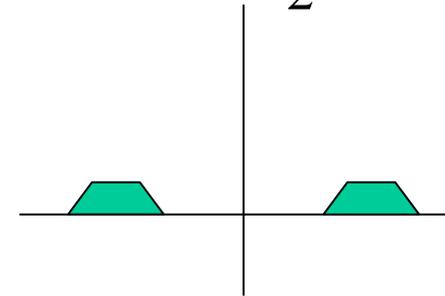
$F(\omega)$



$\pi\delta(\omega - \omega_c) + \pi\delta(\omega + \omega_c)$

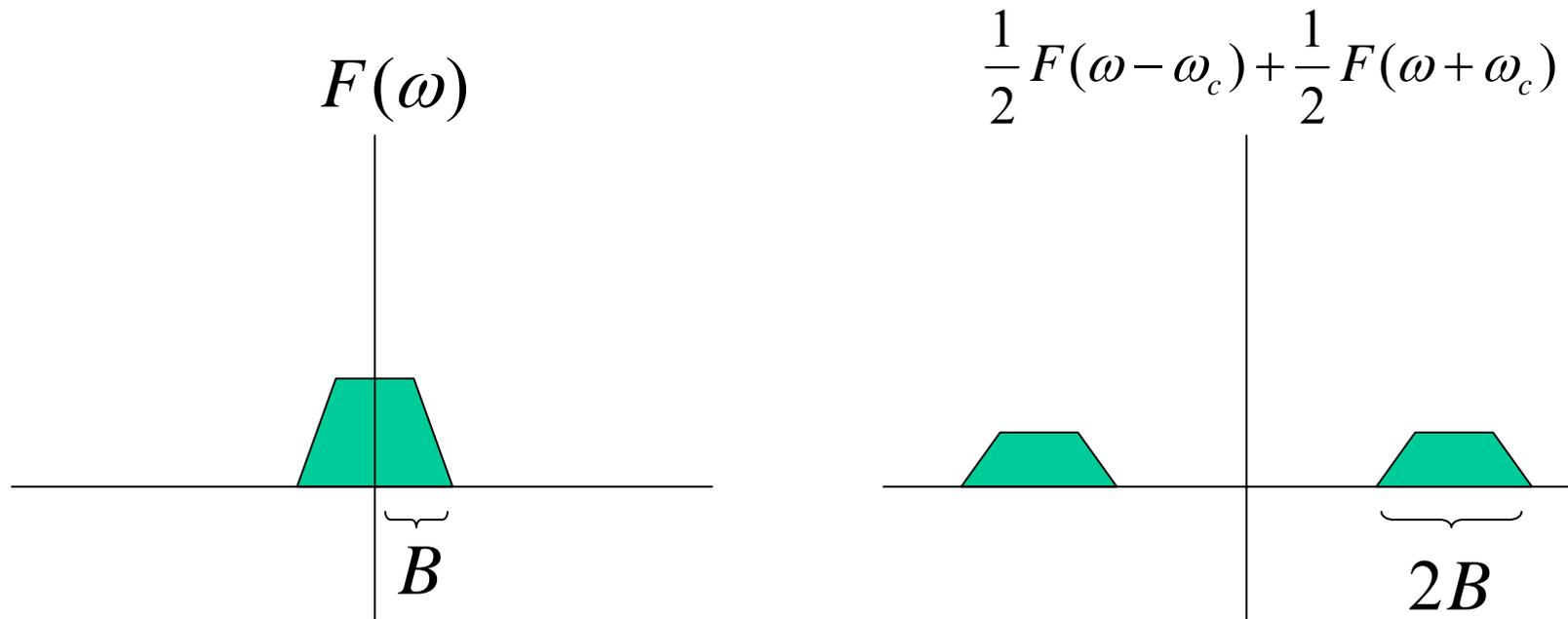


$\frac{1}{2}F(\omega - \omega_c) + \frac{1}{2}F(\omega + \omega_c)$



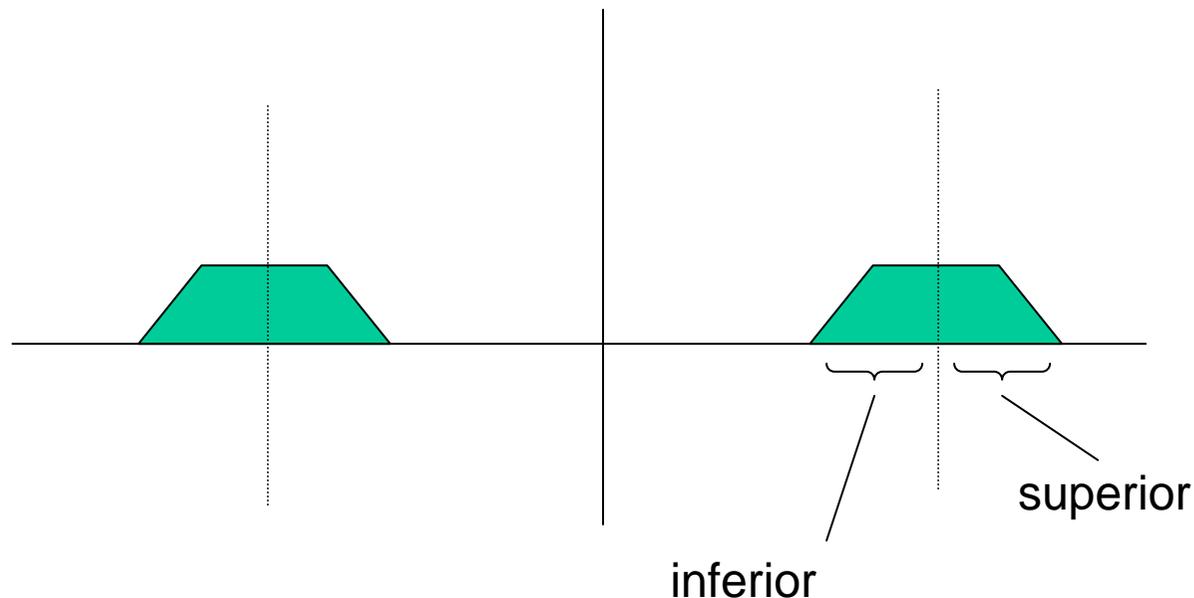
2.21 Modulación de amplitud: portadora suprimida

- El ancho de banda necesario para transmitir se duplica:



2.21 Modulación de amplitud: portadora suprimida

- Bandas laterales superior e inferior: corresponden a los lados derecho e izquierdo del espectro original, “simetría conjugada”



2.21 Modulación de amplitud: portadora suprimida

- DSB-SC (double sideband, suppressed carrier)
 - Tiene 2 bandas laterales (superior e inferior)
 - No tiene portadora explícita (impulso)
- Recuperación de la señal original volviendo a modular del mismo modo, más un filtro pasabajos.

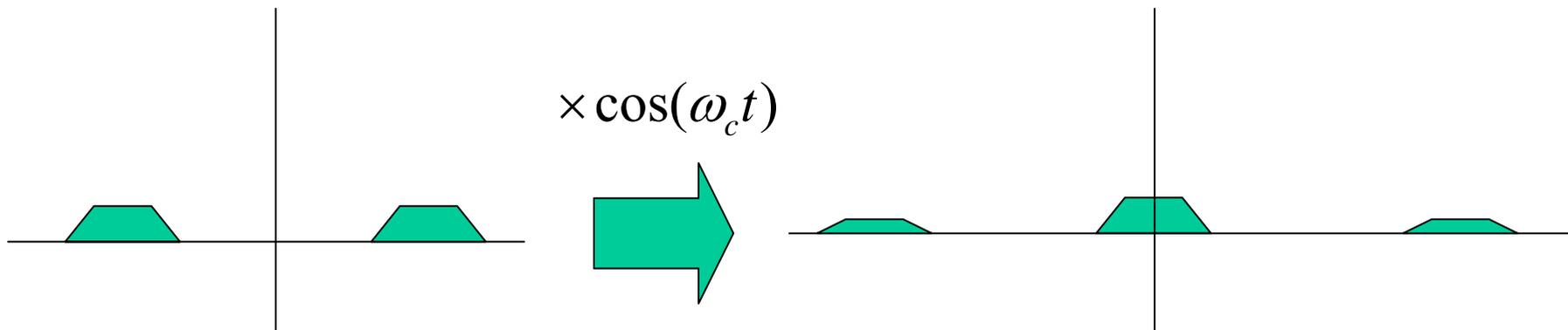
$$\phi(t) \cos(\omega_c t) = f(t) \cos^2(\omega_c t)$$

$$\phi(t) \cos(\omega_c t) = \frac{1}{2} f(t) + \frac{1}{2} f(t) \cos(2\omega_c t)$$

$$\mathcal{F}\{\phi(t) \cos(\omega_c t)\} = \frac{1}{2} F(\omega) + \frac{1}{4} F(\omega + 2\omega_c) + \frac{1}{4} F(\omega - 2\omega_c)$$

2.21 Modulación de amplitud: portadora suprimida

$$\mathfrak{F}\{\phi(t) \cos(\omega_c t)\} = \frac{1}{2} F(\omega) + \frac{1}{4} F(\omega + 2\omega_c) + \frac{1}{4} F(\omega - 2\omega_c)$$



- Con un pasabajos se deja sólo $F(\omega)$

2.21 Modulación de amplitud: portadora suprimida

- Para demodular se debe conocer tanto la frecuencia correcta como la fase correcta.
 - Error en la fase => señal atenuada
 - Error en la frecuencia => distorsión de la señal

$$\phi(t) \cos((\omega_c + \Delta\omega)t + \Delta\theta) = f(t) \cos(\omega_c t) \cos((\omega_c + \Delta\omega)t + \Delta\theta)$$

$$\phi(t) \cos((\omega_c + \Delta\omega)t + \Delta\theta) = \frac{1}{2} f(t) \cos(\Delta\omega t + \Delta\theta) + \frac{1}{2} f(t) \cos((2\omega_c + \Delta\omega)t + \Delta\theta)$$

- Tras el pasabajos:

$$\phi(t) \cos((\omega_c + \Delta\omega)t + \Delta\theta) = \frac{1}{2} f(t) \cos(\Delta\omega t + \Delta\theta)$$

2.21 Modulación de amplitud: portadora suprimida

- Requiere sincronización muy precisa
- Poco robusto ante errores $\Delta\omega$, $\Delta\theta$.
- Multiplexión en cuadratura: Como $\cos(\cdot)$ y $\sin(\cdot)$ son ortogonales, se pueden transmitir 2 señales a la vez

$$\phi(t) = f(t) \cos(\omega_c t) + g(t) \sin(\omega_c t)$$

2.21 Modulación de amplitud: portadora suprimida

$$\phi(t) = f(t) \cos(\omega_c t) + g(t) \text{sen}(\omega_c t)$$

$$\phi(t) \cos(\omega_c t) = f_1(t) \cos^2(\omega_c t) + f_2 \text{sen}(\omega_c t) \cos(\omega_c t)$$

$$\phi(t) \cos(\omega_c t) = \frac{1}{2} f_1(t) + \frac{1}{2} f_1(t) \cos(2\omega_c t) + \frac{1}{2} f_2(t) \text{sen}(2\omega_c t)$$

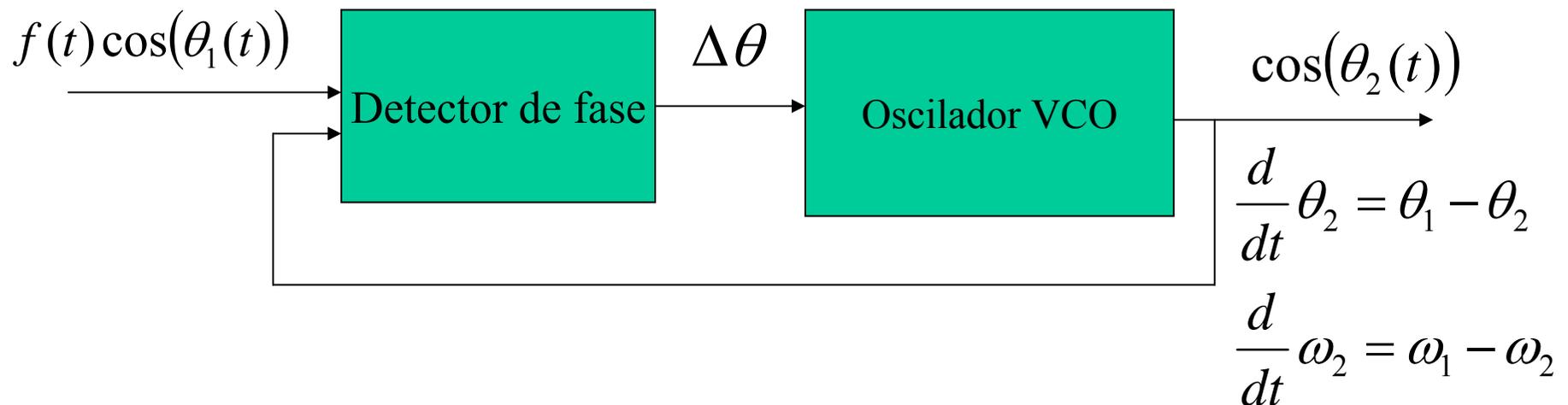
$$\phi(t) \text{sen}(\omega_c t) = f_1(t) \cos(\omega_c t) \text{sen}(\omega_c t) + f_2(t) \text{sen}^2(\omega_c t)$$

$$\phi(t) \text{sen}(\omega_c t) = \frac{1}{2} f_2(t) + \frac{1}{2} f_1(t) \text{sen}(2\omega_c t) - \frac{1}{2} f_2(t) \cos(2\omega_c t)$$

- Al filtrar pasabajos, se recuperan las señales originales separadas.

2.21 Modulación de amplitud: portadora suprimida

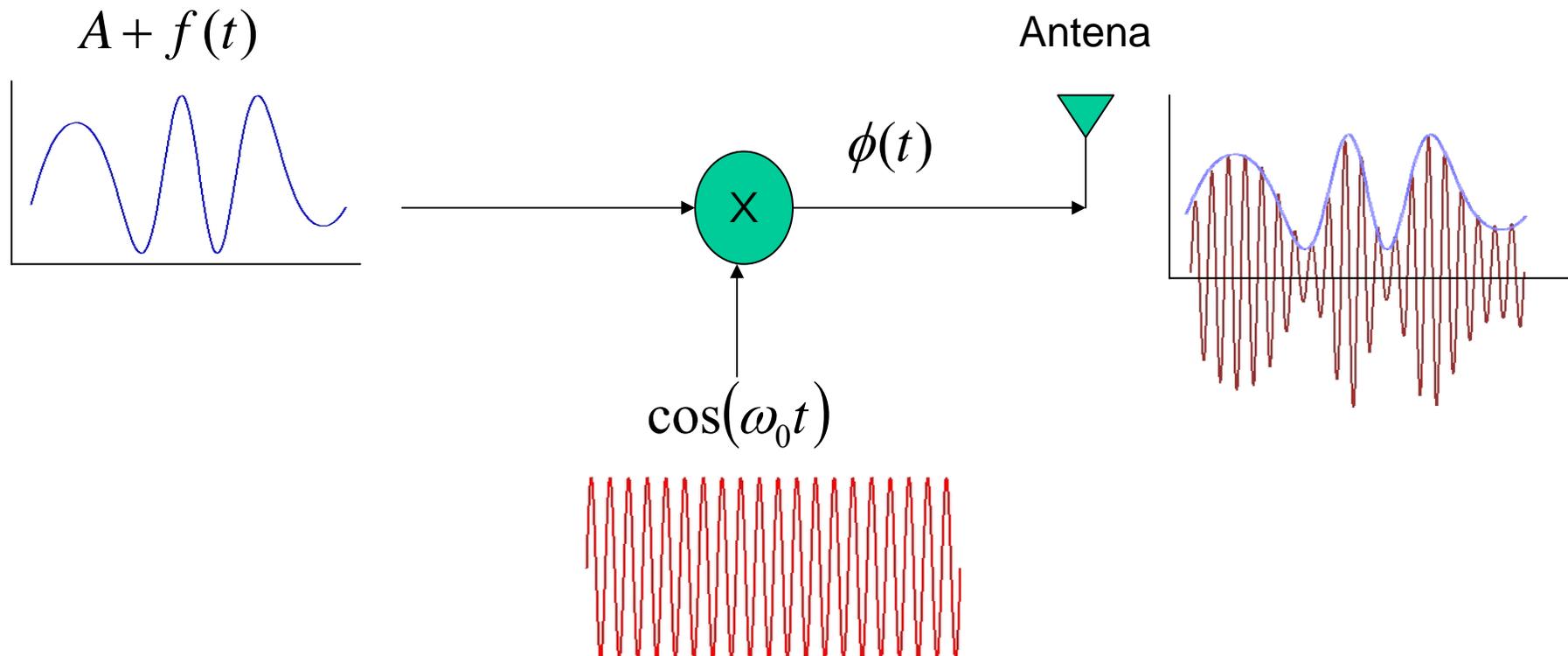
- Para asegurar sincronismo se usa un circuito llamado PLL (phase locked loop, lazo cerrado de fase), que genera una senoide cuya frecuencia va siguiendo a la de la entrada. Se compone de un detector de desfase y un oscilador cuya frecuencia es proporcional al voltaje que entra.



2.22 Modulación de amplitud: gran portadora

- Transmisión AM comercial: problema de sincronización exacta poco deseable \Rightarrow sistema de modulación alternativo, no requiere sincronización
- Se agrega una componente continua a la señal antes de multiplicarla por $\cos(\cdot)$ para que sea siempre positiva
- La forma de la señal original es evidente en la señal final \Rightarrow demodulación simple

2.22 Modulación de amplitud: gran portadora



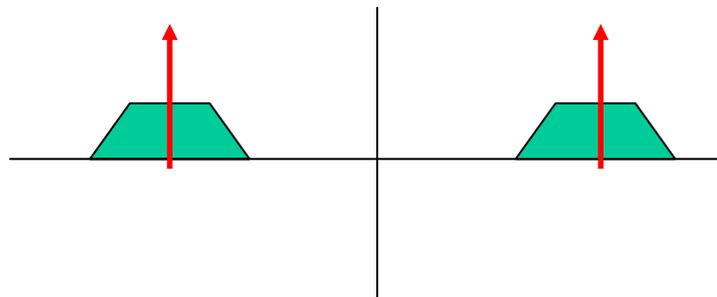
2.22 Modulación de amplitud: gran portadora

$$\phi_{AM}(t) = (A + f(t))\cos(\omega_c t)$$

$$\phi_{AM}(t) = A\cos(\omega_c t) + f(t)\cos(\omega_c t)$$

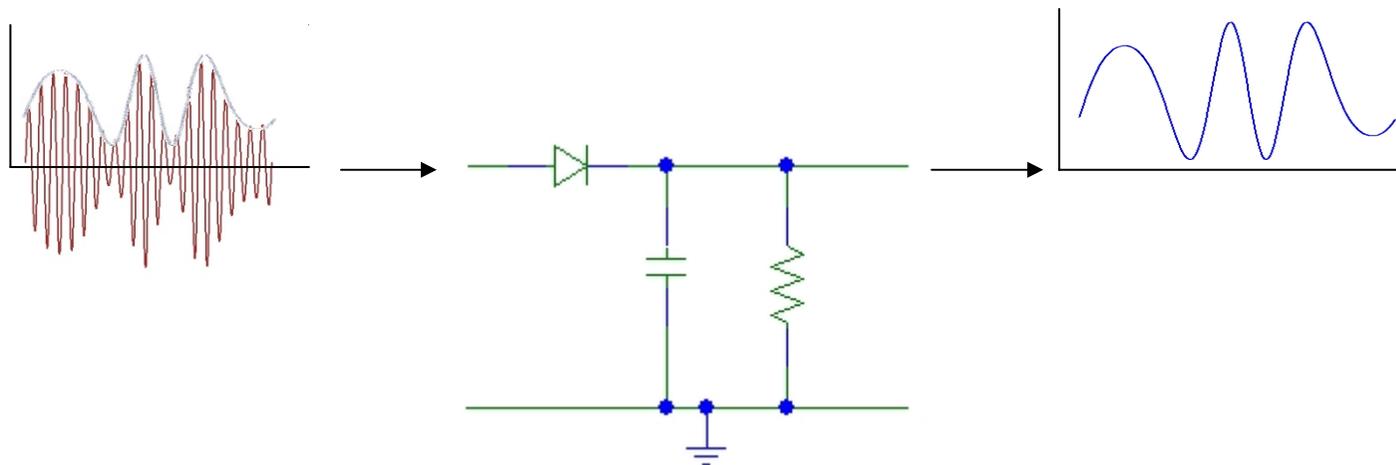
$$\Phi_{AM}(\omega) = \frac{1}{2}F(\omega + \omega_c) + \frac{1}{2}F(\omega - \omega_c) + \pi A\delta(\omega + \omega_c) + \pi A\delta(\omega - \omega_c)$$

DSB-LC: doble banda lateral, con portadora explícita (impulsos)



2.22 Modulación de amplitud: gran portadora

- La demodulación se puede realizar simplemente con un detector de envolvente (un diodo con un circuito RC)



2.22 Modulación de amplitud: gran portadora

- El transmitir el carrier significa gasto extra de potencia para transmitir la señal.
- Se requiere que la componente continua sea mayor que la amplitud de la señal
- Razón de eficiencia entre la potencia de la señal y la potencia total transmitida.

$$\phi_{AM}(t) = (A + f(t)) \cos(\omega_c t)$$

$$\overline{\phi_{AM}^2(t)} = A^2 \overline{\cos^2(\omega_c t)} + \overline{f^2(t) \cos^2(\omega_c t)} = \frac{1}{2} A^2 + \frac{1}{2} \overline{f^2(t)}$$

2.22 Modulación de amplitud: gran portadora

$$\overline{\phi_{AM}^2(t)} = \frac{1}{2} A^2 + \frac{1}{2} \overline{f^2(t)}$$

$$\mu = \frac{P_{señal}}{P_{total}} = \frac{\overline{f^2(t)}}{A^2 + \overline{f^2(t)}}, \quad |f(t)|_{MAX} < A$$

- Si $f(t) = mA \cos(\omega_0 t)$, $m < 1$ (índice de modulación)

$$\overline{f^2(t)} = \frac{m^2 A^2}{2} \Rightarrow \mu = \frac{m^2}{1 + m^2} < 33\%$$

2.22 Modulación de amplitud: gran portadora

- Ej: Una estación de radio AM transmite una potencia portadora de 40kW y usa un índice de modulación de 0.707. Calcular la potencia de salida

$$\text{portadora} \Rightarrow \text{potencia } \frac{1}{2} A^2 = 40kW$$

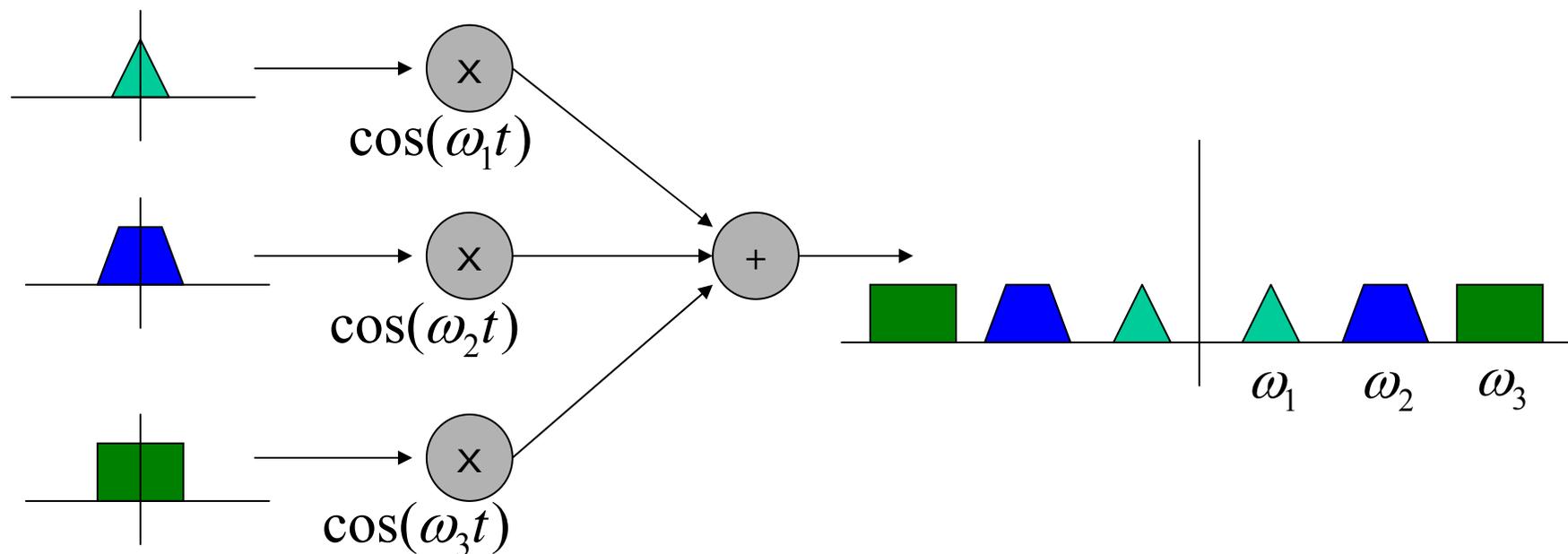
$$f(t) \Rightarrow \text{potencia } \frac{1}{2} m^2 (A^2) = \frac{1}{2} \times 0.707^2 \times 80kW$$

$$f(t) \Rightarrow \text{potencia } 20kW$$

$$A + f(t) \Rightarrow \text{potencia } 60kW$$

2.23 Multiplexión en frecuencia

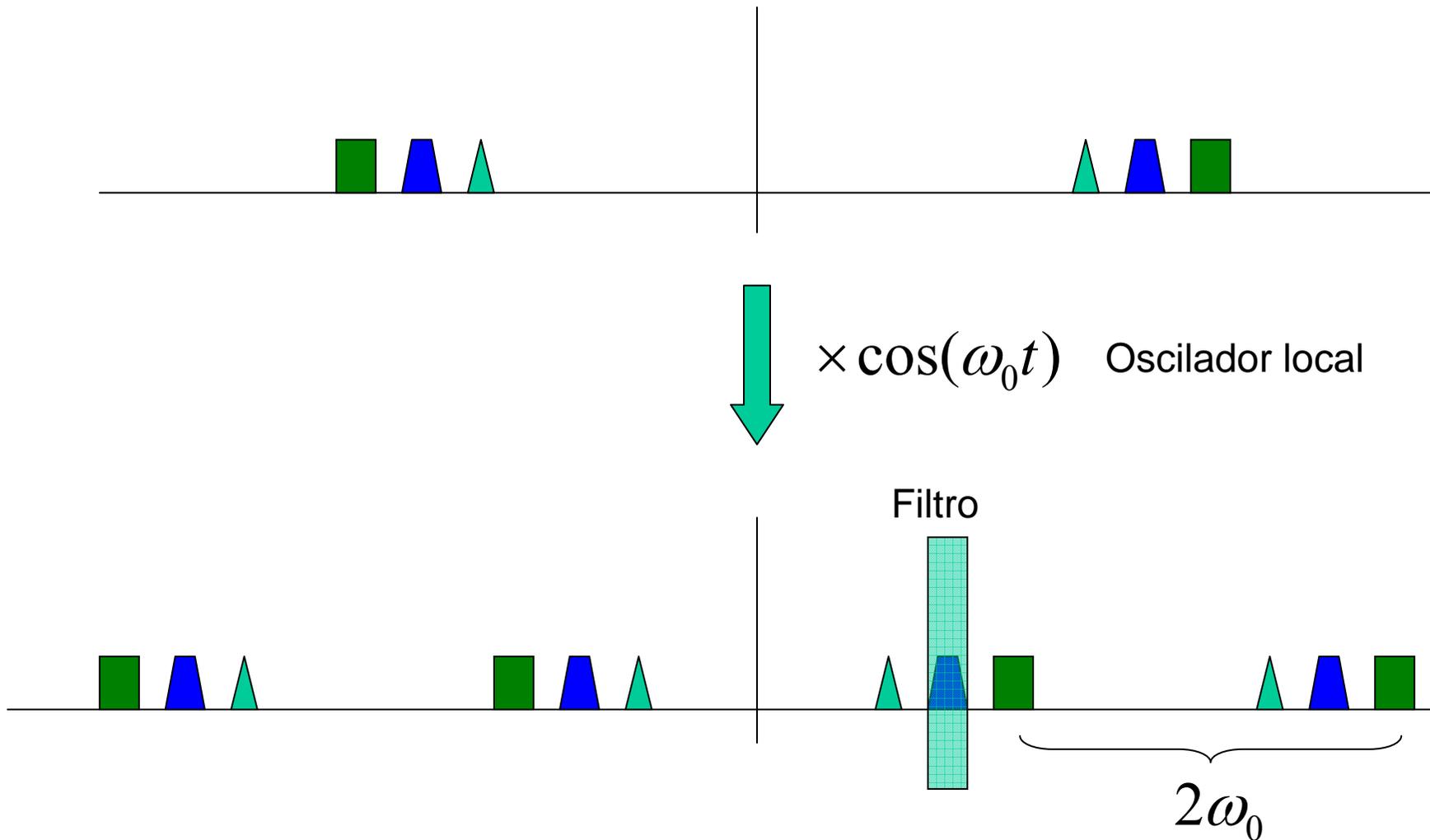
- Es posible transmitir varias señales si se elige una frecuencia portadora distinta para cada una => FDM (multiplexión por división en frecuencia)



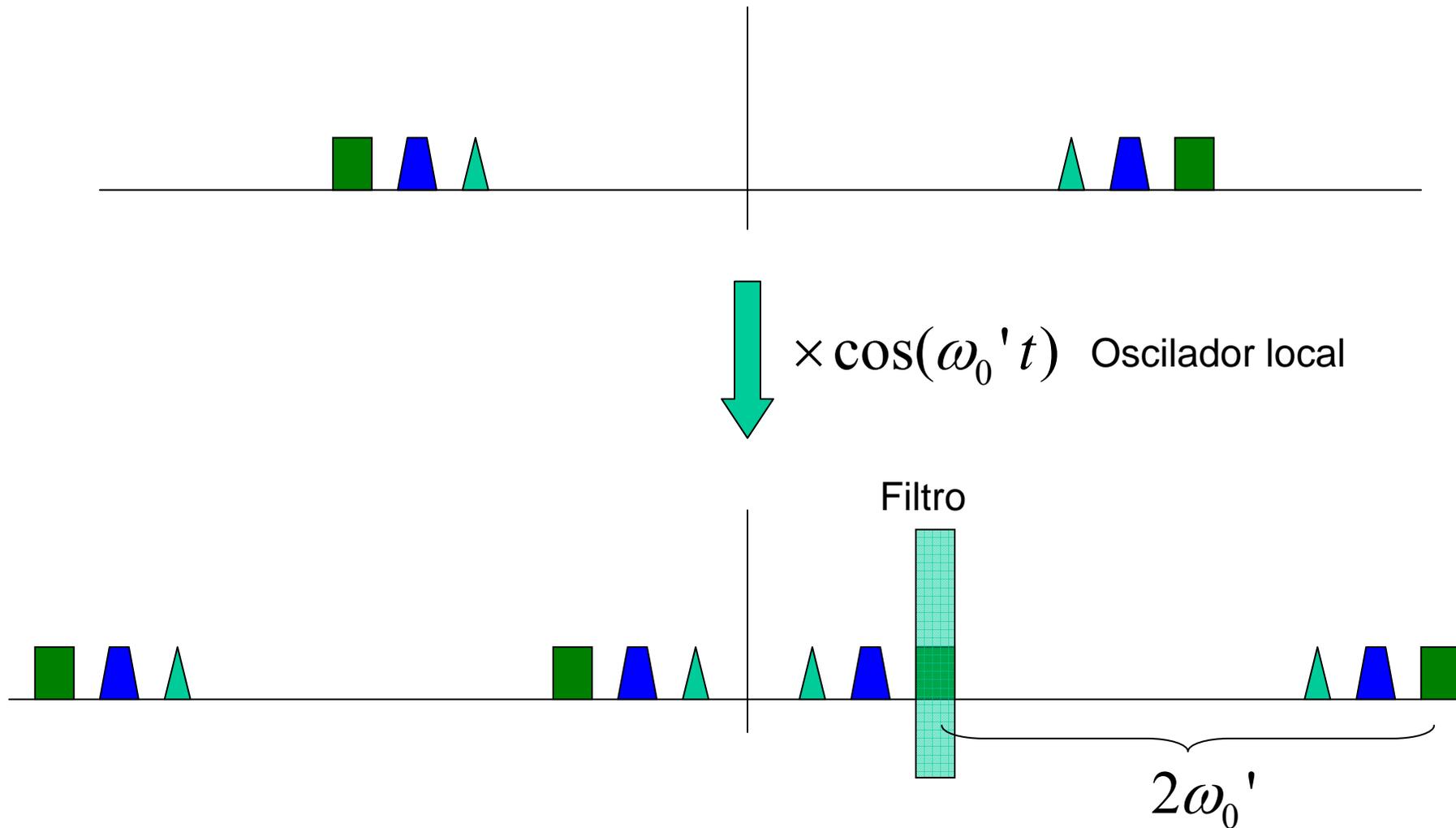
2.23 Multiplexión en frecuencia

- Para poder recuperar alguna de las señales, es necesario ocupar primero un filtro pasabandas, Idea: que se pueda mover para sintonizar distintas señales
- Fabricar un “pasabandas móvil” no es simple: problema.
- Solución: filtro pasabandas fijo, se desplaza la señal de entrada para que la señal de interés quede en la banda de paso => receptor superheterodino.

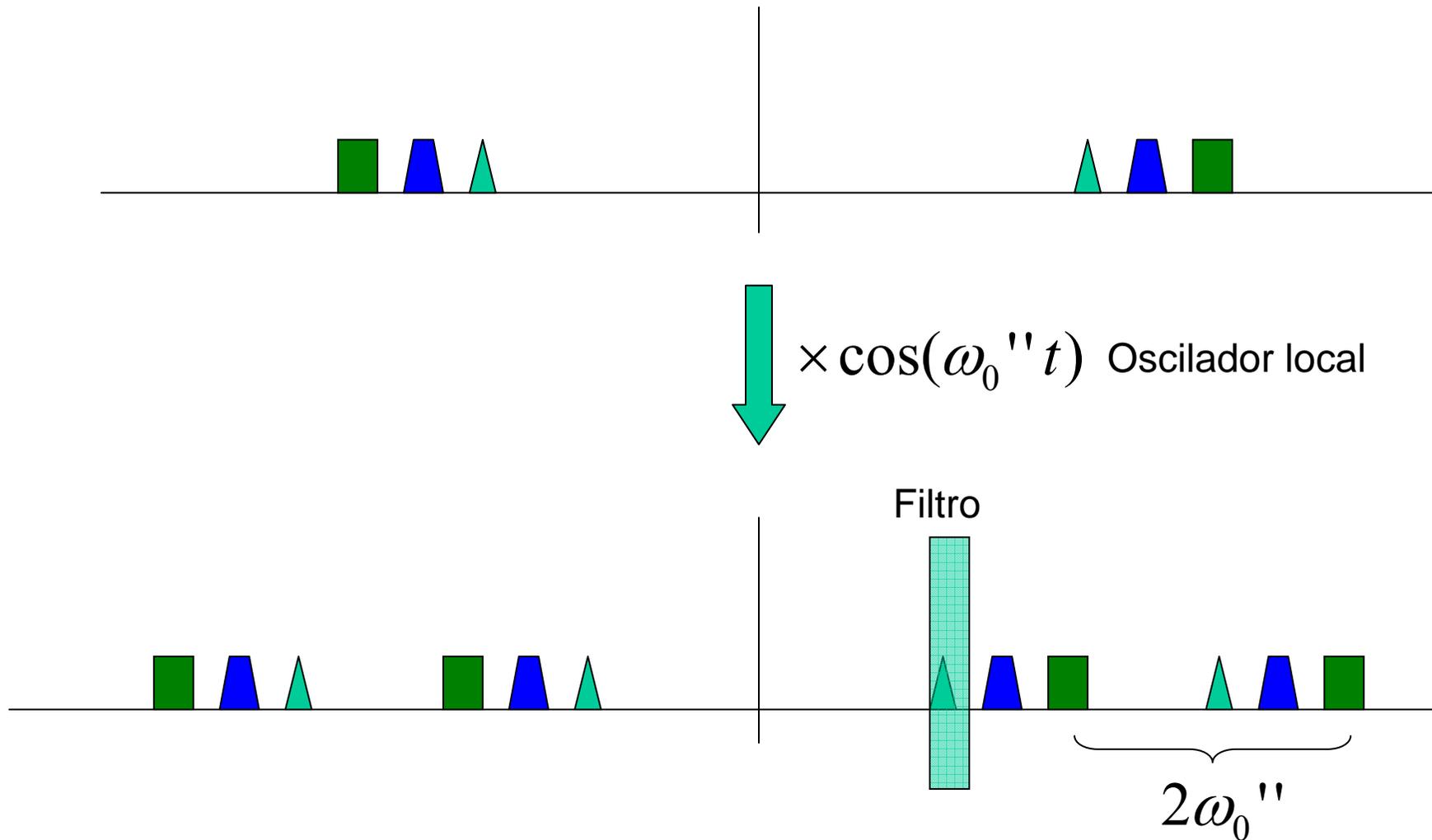
2.23 Multiplexión en frecuencia



2.23 Multiplexión en frecuencia

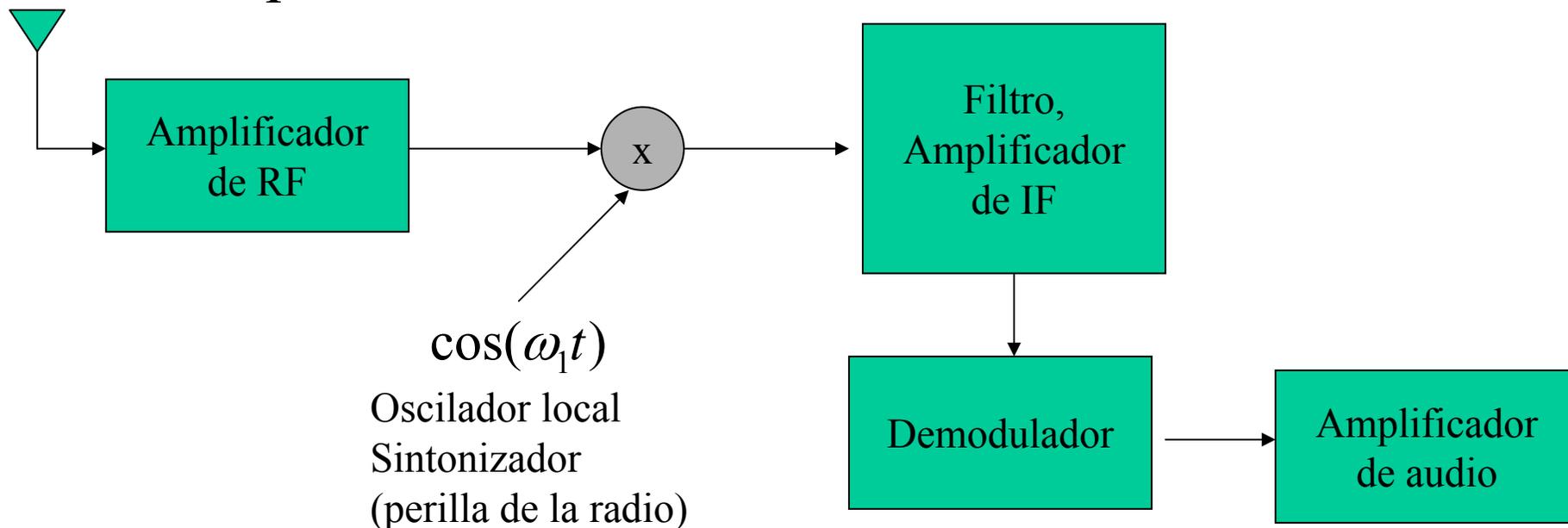


2.23 Multiplexión en frecuencia



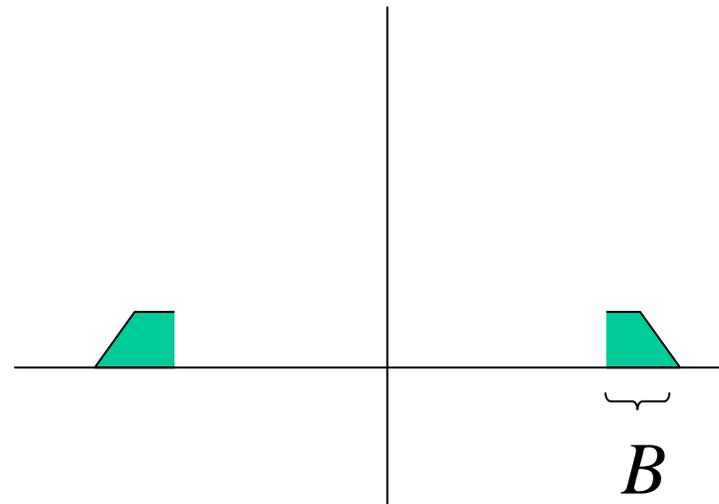
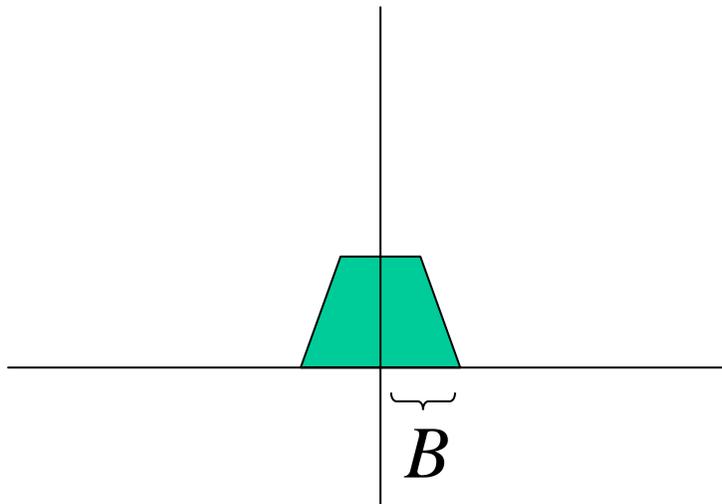
2.23 Multiplexión en frecuencia

- Una vez que la señal de interés ha sido separada, su demodulación es simple (métodos ya vistos)
- Esquema:



2.24 Banda lateral única (SSB)

- A veces es molesto que se duplique el ancho de banda al modular AM
- Solución: eliminar una de las bandas laterales



2.24 Banda lateral única (SSB)

- Implementar este tipo de modulación es muy difícil, de hecho no se usa.

$$\phi_{SSB}(t) = f(t) \cos(\omega_c t) + \hat{f}(t) \text{sen}(\omega_c t)$$

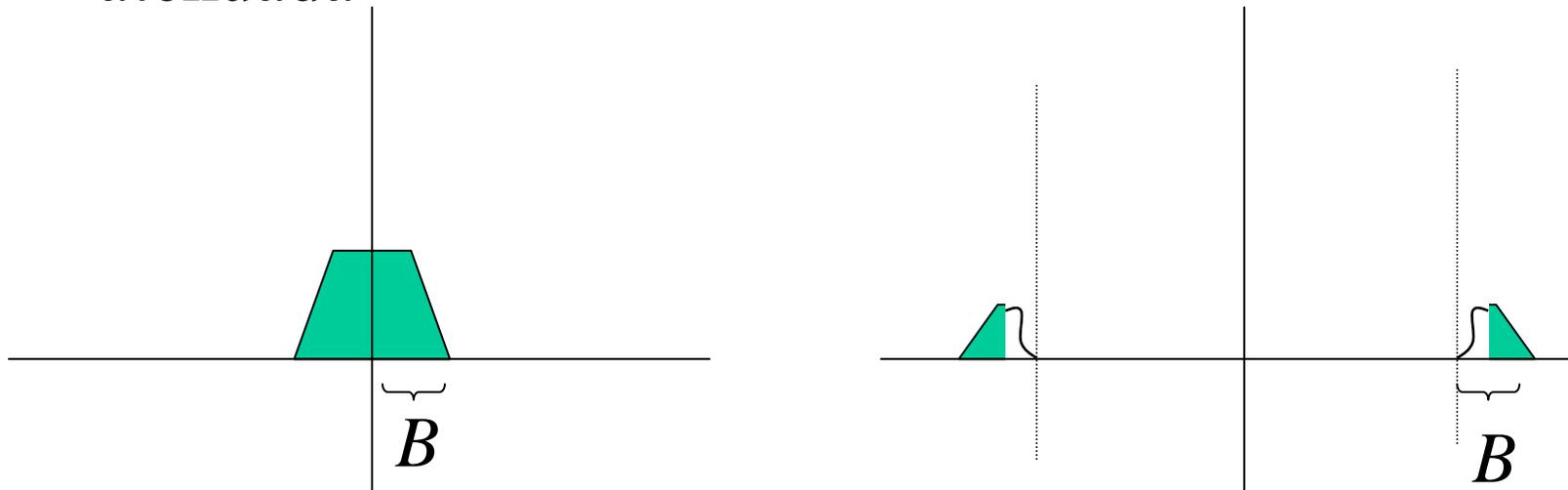
$\hat{f}(t) = f(t)$ más 90° en cada frecuencia que contenga

$$\hat{F}(\omega) = F(\omega) e^{j90^\circ} = jF(\omega)$$

- Sumarle 90° a cada frecuencia que contenga $f(t)$ es complicado.

2.24 Banda lateral única (SSB)

- También se puede implementar de un modo “aproximado”: filtrando de modo que se elimine una de las bandas => como los filtros no son perfectos, la banda que debía quedar entera queda atenuada

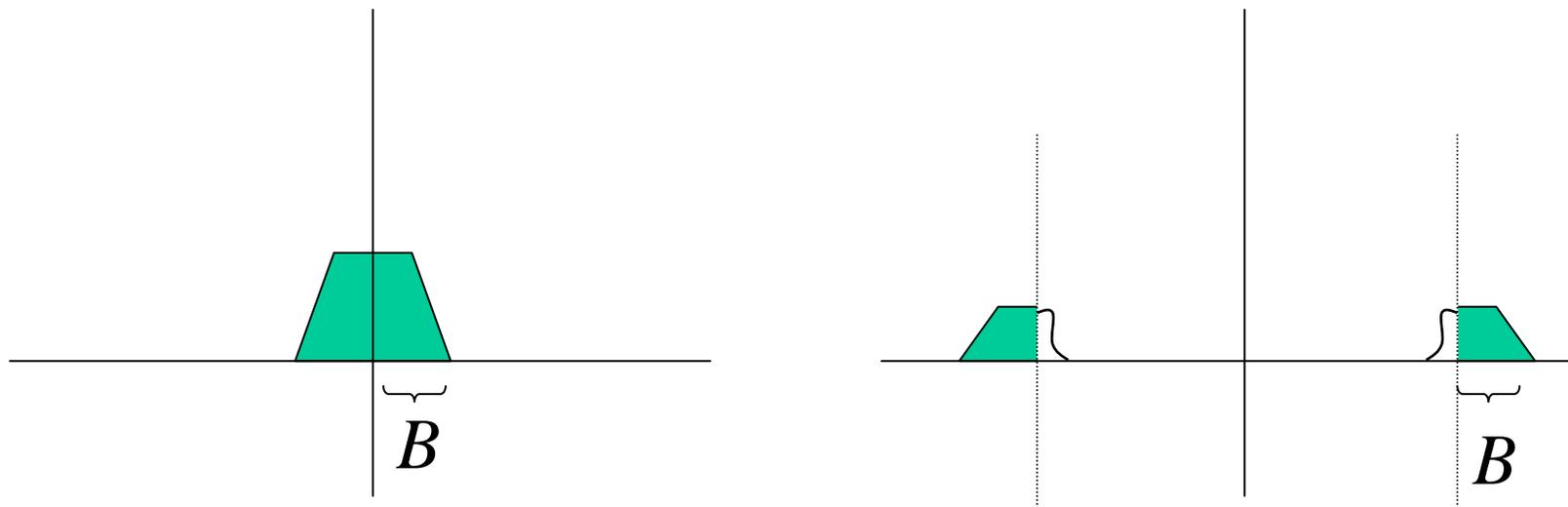


2.24 Banda lateral única (SSB)

- Se pueden demodular volviendo a multiplicar por $\cos(\omega_c t)$ y filtrando pasabajos (igual que en el primer caso)
- En el caso “aproximado”, las bajas frecuencias pueden quedar un poco atenuadas (mirar gráfico anterior)

2.25 Banda lateral residual (VSB)

- Aquí se elimina una de las bandas usando un filtro \Rightarrow una de las bandas queda entera, pero la otra no se elimina completamente \Rightarrow queda un residuo



2.25 Banda lateral residual (VSB)

- Se pueden demodular volviendo a multiplicar por $\cos(w_c t)$ y filtrando pasabajos (igual que en el primer caso)
- En este caso, las bajas frecuencias pueden quedar un poco amplificadas (mirar gráfico anterior)