Señales y sistemas I

Capítulo I: Representación de señales y sistemas

Profesor de catedra: Néstor Becerra Yoma
Agradecimientos:
Profesor Marcos Orchard Concha (espacios de Hilbert)
Enrique Guerrero Merino

1.1 Definición de señal y sistema

- Señal: Función de una o más variables que entrega información sobre algún fenómeno.
- Sistema: regla (mapeo) que relaciona dos funciones: entrada y salida

$$y(t) = \Re\{f(t)\}$$

1.1 Definición de señal y sistema

- Existen sistemas que transmiten señales y otros que las procesan. Al transmitir, se desea hacerlo preservando la información original. Al procesar, se desea alterar la forma de la señal o modificar el dominio de su representación.

1.1 Definición de señal y sistema

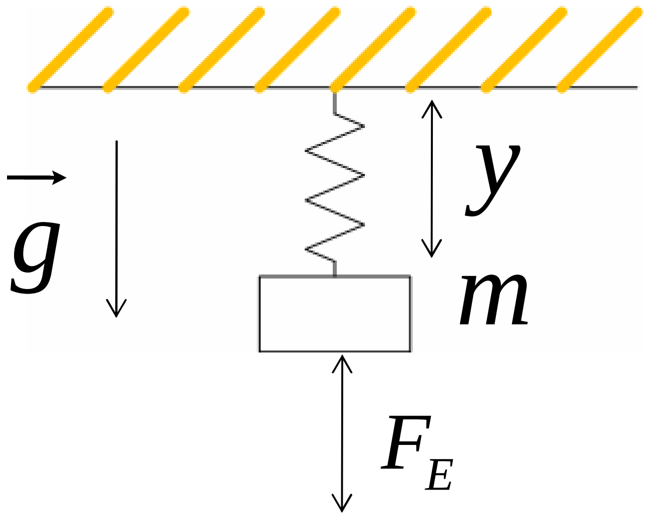
- Ejemplos de sistemas de procesamiento de señales:
  - En control, un estímulo de entrada indica al actuador que debe realizar una acción determinada: el actuador procesa la señal
  - Un ecualizador de audio enfatiza ciertas componentes de frecuencia y atenúa otras

1.1 Definición de señal y sistema

- Ejemplos de sistemas de procesamiento de señales:
  - Sistemas de inglés con reconocimiento de voz y de biometría por voz del LPTV (5° piso).
  - Los sistemas de identificación por tarjeta (tarjeta BIP, bancarias, etc.) reciben la información contenida en la tarjeta.

1.1 Definición de señal y sistema

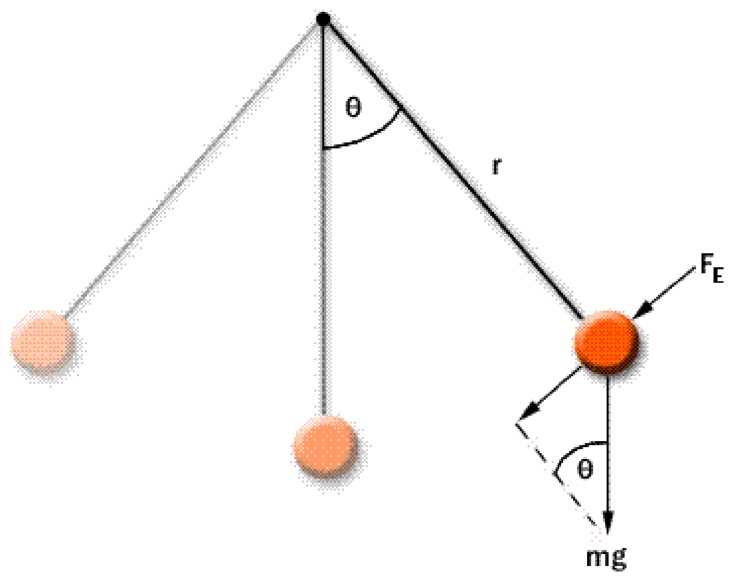
- Ejemplos de sistemas.
  - Un resorte:



$$m\ddot{y} = mg - Ky + F_E(t)$$

1.1 Definición de señal y sistema

- Ejemplos de sistemas.
  - Un péndulo:

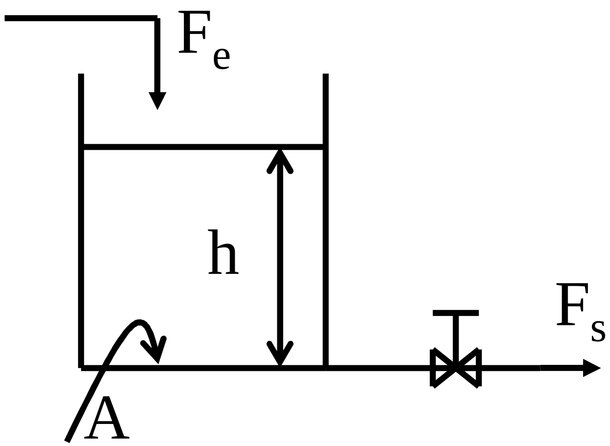


$$\ddot{\theta} - \frac{g}{r} sen(\theta) = F_E(t)$$

$$\dot{\theta}^2 + \frac{g}{r}\cos\theta = 0$$

1.1 Definición de señal y sistema

- Ejemplos de sistemas:
  - Un estanque:



$$\frac{dm}{dt} = \rho(F_e - F_s); \quad m = Ah\rho$$

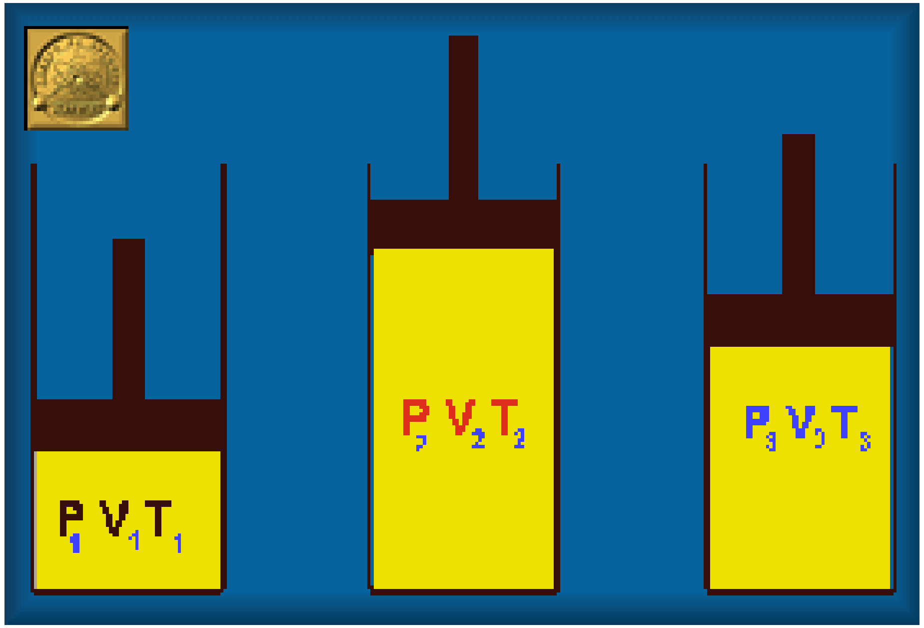
$$F_s = k'\Delta P = k'(\rho g h + P_0 - P_0) = kh$$

$$\therefore \frac{dh}{dt} + \frac{k}{A}h = \frac{F_e(t)}{A}$$

1.1 Definición de señal y sistema

- Ejemplos de sistemas.
  - Un gas ideal:

$$PV = NKT$$



1.1 Definición de señal y sistema

- Ejemplos de sistemas de procesamiento de señales.
  - Un filtro electrónico:

$x(t)$, $X(s)$, $X(j\omega)$ $\longrightarrow$ $\boxed{h(t) \quad H(s) \quad H(j\omega)}$ $\longrightarrow$

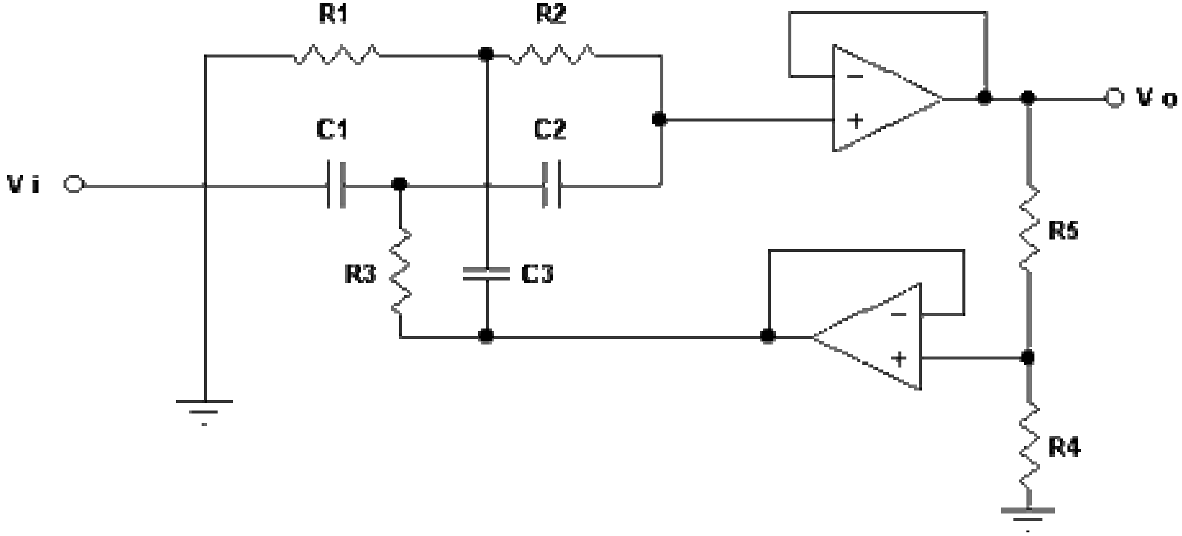
$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

$$Y(s) = X(s)H(s)$$

$$Y(j\omega) = X(j\omega)H(j\omega)$$

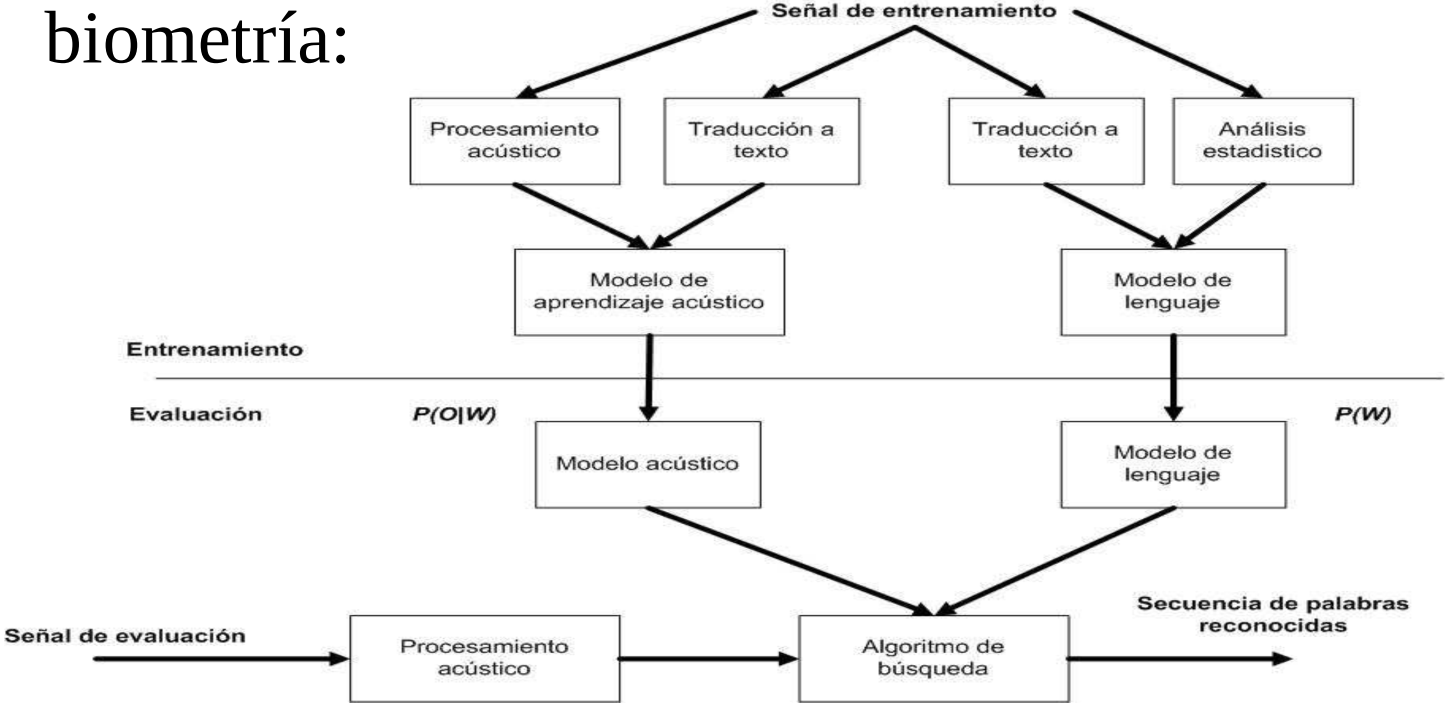
1.1 Definición de señal y sistema

- Ejemplos de sistemas de procesamiento de señales.
  - Un filtro electrónico (T-Gemela segundo orden pasa altos no inversor):



1.1 Definición de señal y sistema

- Ejemplos de sistemas de procesamiento de señales:
  - Un sistema de reconocimiento de voz y biometría:



1.1 Definición de señal y sistema

- Ejemplos de sistemas de procesamiento de señales:
  - Un motor de corriente continua:

$$T = \frac{G V_a^2}{(R_a + G\omega)^2}$$

V_a Voltaje de armadura

R_a Resistencia de armadura

G Inductancia rotacional

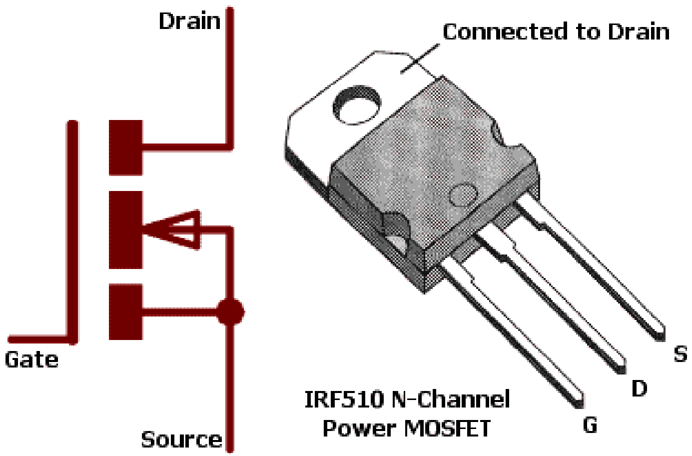
ω Velocidad angular

T Torque

1.1 Definición de señal y sistema

- Ejemplos de sistemas de procesamiento de señales:
  - Un transistor tipo MOSFET:

$$I_d = \frac{\mu_e C_g}{l^2}(V_g + V_T - \frac{1}{2}V_d)V_d$$



I_d Corriente de drenaje

$\frac{\mu_e C_g}{l^2}$ Parámetros físicos del dispositivo

V_g Voltaje de puerta

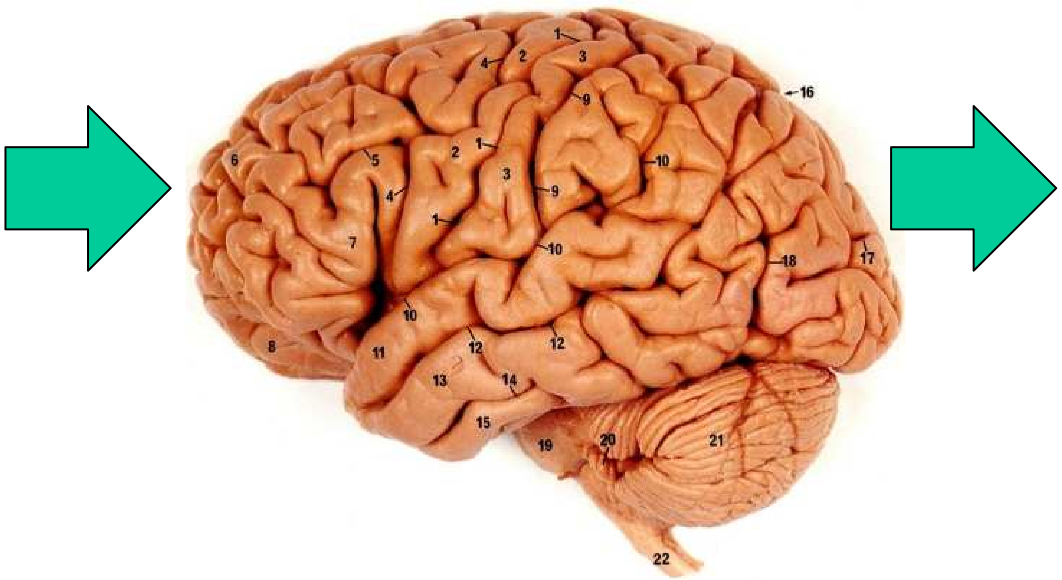
V_T Voltaje umbral

V_d Voltaje de drenaje

1.1 Definición de señal y sistema

- Ejemplos de sistemas de procesamiento de señales:
  - El sistema nervioso y órganos del cuerpo:

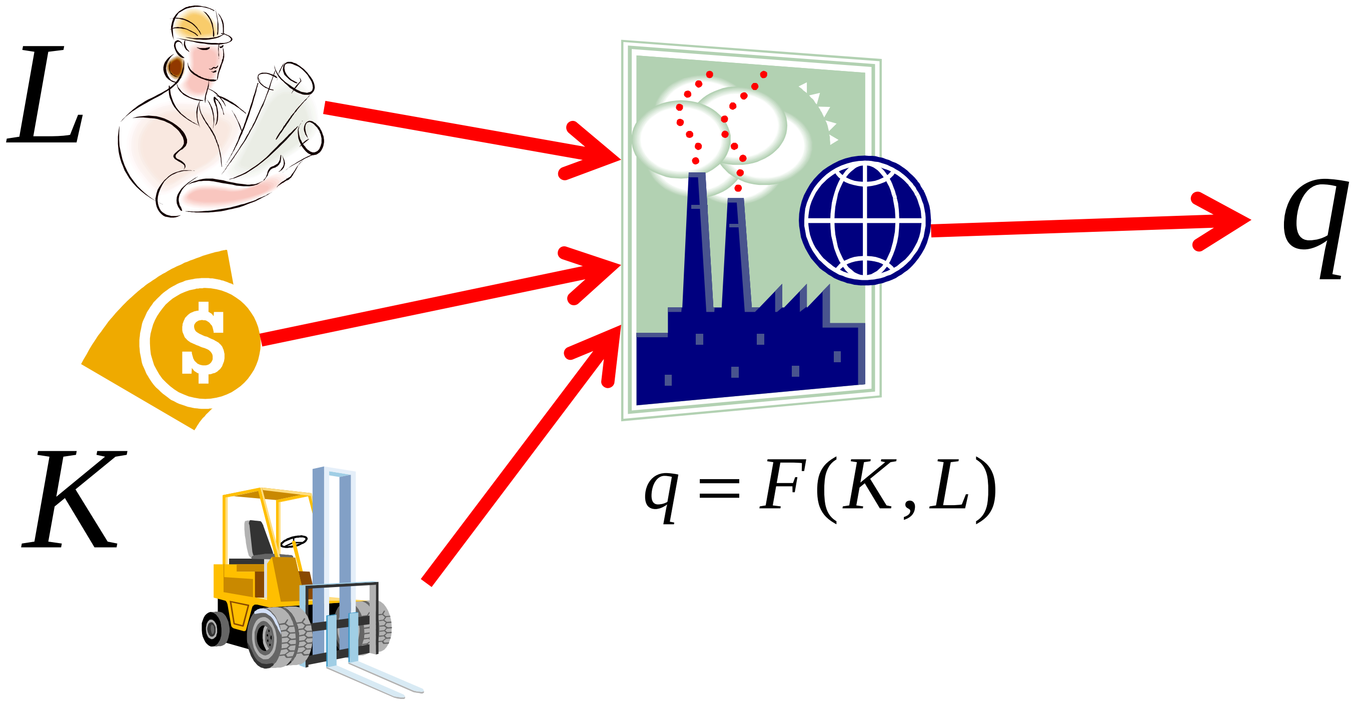
Estímulos nerviosos



Respuestas

1.1 Definición de señal y sistema

- Ejemplos de sistemas de procesamiento de señales:
  - Una empresa:



$$q = F(K, L)$$

1.2 Clasificación de las señales

- Potencia disipada por señal eléctrica:
  - Para voltaje: $$p = \frac{|e(t)|^2}{R}$$
  - Para corriente: $$p = R|i(t)|^2$$

- Potencia de una señal:

$$p(t) = |f(t)|^2$$

1.2 Clasificación de las señales

- Energía disipada en un intervalo

$$E = \int_{t_1}^{t_2} |f(t)|^2 dt$$

- Potencia media disipada en un intervalo

$$P = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} |f(t)|^2 dt$$

1.2 Clasificación de las señales

- Señales de energía o de potencia
  - De energía:

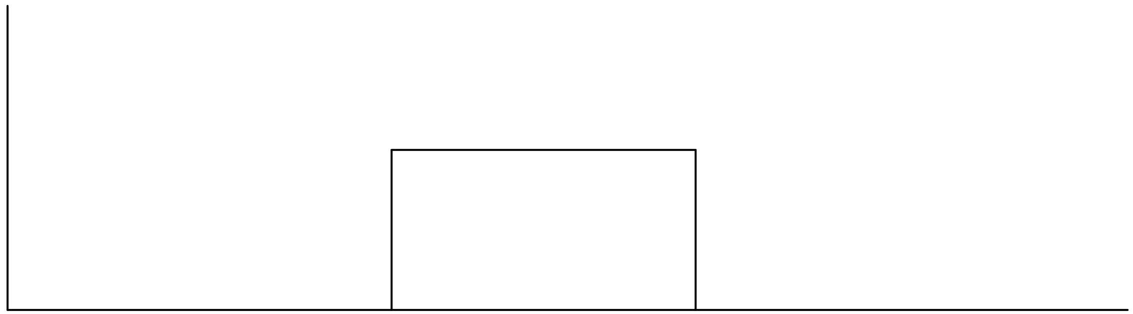
$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt < \infty$$

  - De potencia

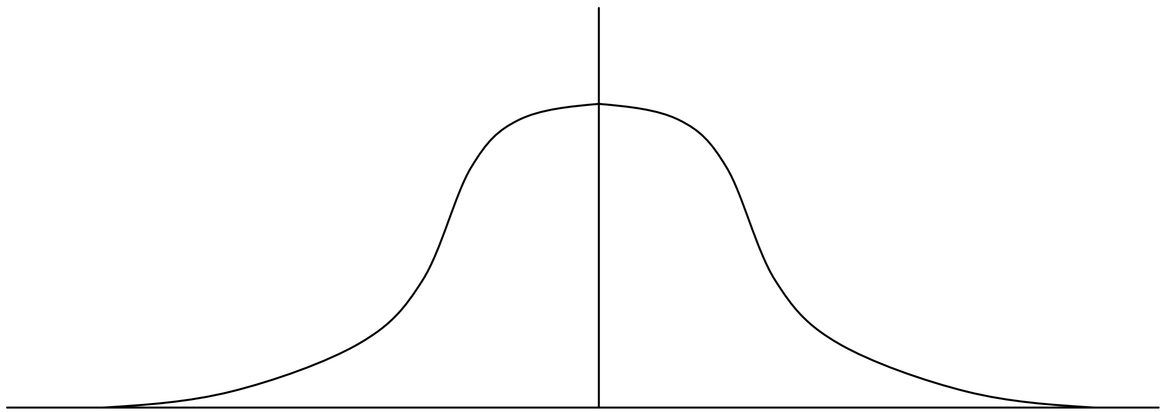
$$0 < \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |f(t)|^2 dt < \infty$$

1.2 Clasificación de las señales

- Ejemplo: señales de energía



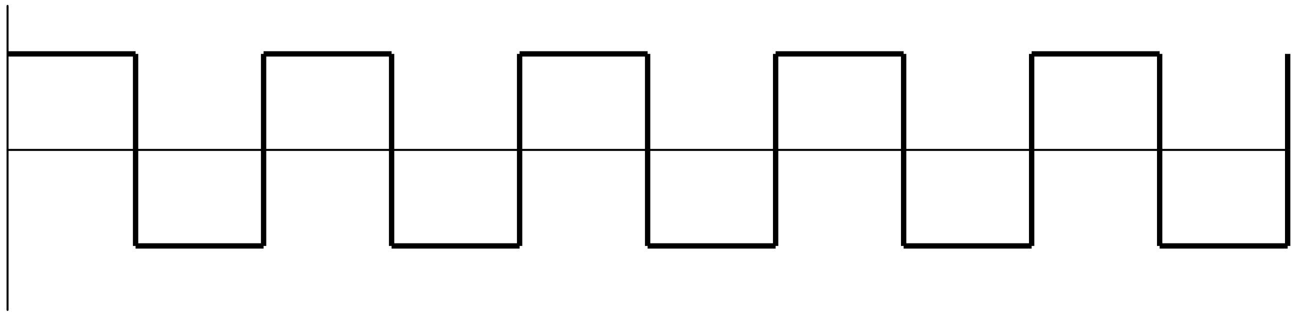
Pulso rectangular (duración temporal finita)



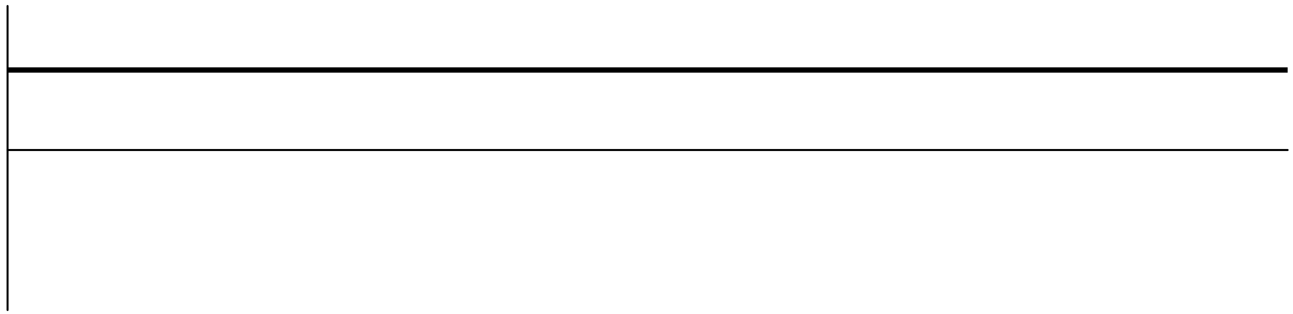
Gaussiana (duración temporal no finita, debe atenuarse)

1.2 Clasificación de las señales

- Ejemplo: señales de potencia



Onda cuadrada



Constante

1.2 Clasificación de las señales

- Señales periódicas o no periódicas
  - Periódicas: $f(t+T) = f(t)$ para todo t
  - Aperiódicas: ningún T satisface lo anterior
  - Casi periódica: Suma de señales periódicas de períodos inconmensurables

    Ej: $$f(t) = sen(t) + sen(\sqrt{2}t)$$

1.2 Clasificación de las señales

- Aleatoria:
  - Perteneciente a un conjunto de señales
  - Incerteza en cual saldrá elegida
  - Incerteza en los valores futuros
- Determinista
  - Perfectamente determinada
  - En general tienen forma analítica

1.2 Clasificación de las señales

- Estacionaria:
  - Sus parámetros no dependen del tiempo
  - Ejemplo: $x(t) = A\cos(\omega t)$
- No estacionaria
  - Sus parámetros varían en el tiempo
  - Ejemplo: $x(t) = A(t)\cos(\omega(t)t)$

1.3 Clasificación de los sistemas

- Recordar:
  - Sistema: regla (mapeo) que relaciona dos <u>funciones</u>: entrada y salida

$$y(t) = \Re\{f(t)\}$$

- Los sistemas se pueden componer

$$y(t) = \Re_2\{\Re_1\{f(t)\}\} = \Re\{f(t)\}$$

1.3 Clasificación de los sistemas

- Lineal: $\Re\{\ \}$ es lineal si cumple:

$$y_1(t) = \Re\{f_1(t)\},\ \ y_2(t) = \Re\{f_2(t)\}$$
$$\Rightarrow \Re\{a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)\} = a_1 y_1(t) + a_2 y_2(t)$$

- No lineal: No cumple esa propiedad

1.3 Clasificación de los sistemas

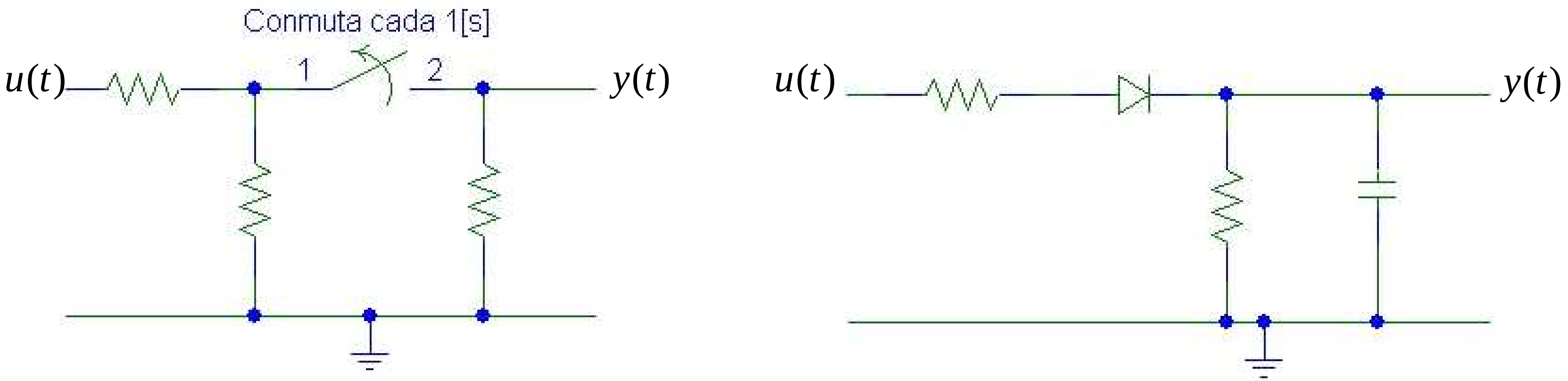
- Invariable en el tiempo si

$$y(t-t_0)=\Re\{f(t-t_0)\}$$

- Variable en el tiempo: una entrada retrasada no produce la misma salida retrasada

1.3 Clasificación de los sistemas

- Ejemplo



  - a) Sistema lineal variable en el tiempo
  - b) Sistema no lineal invariable

1.3 Clasificación de los sistemas

- Realizable o causal:

  $y(t_0)$ depende sólo de f(t) para $t < t_0$

  – Responde después de aplicar la entrada

- No realizable o no causal:

  – La salida actual depende de entradas futuras

1.4 Señales importantes (1-D)

- Sinusoide: $x(t) = A\cos(2\pi f_0 t + \theta)$
  - Ampliamente utilizada en los métodos de modulación y transformada de Fourier.
  - Está representada en la red eléctrica (50[Hz])
  - Permite llevar a cabo la multiplexión por división en frecuencia.

1.4 Señales importantes (1-D)

- Exponencial compleja:

$$x(t) = e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + jsen(\omega t)$$

  – Utilizada ampliamente en desarrollos teóricos

- Escalón unitario:

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & otro \end{cases}$$

  – Representa cambios abruptos en una señal

1.4 Señales importantes (1-D)

- Pulso rectangular:

$$rect(t) = \begin{cases} 1 & -1/2 \leq t \leq 1/2 \\ 0 & otro \end{cases}$$

  - Representa inicio y fin: recortes

- Señal triangular:

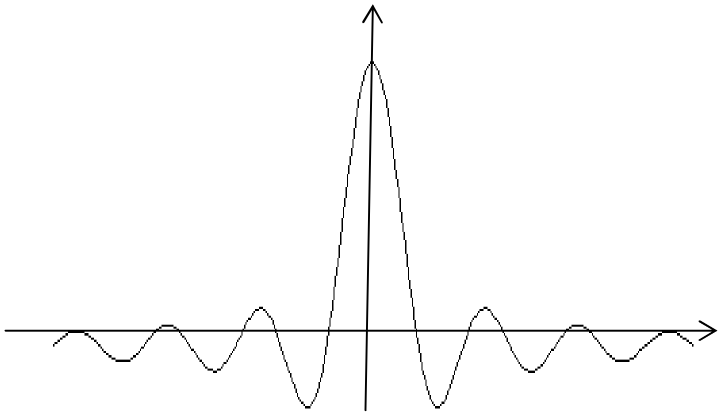
$$T(t) = \begin{cases} t+1 & -1 \leq t \leq 0 \\ 1-t & 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$$

1.4 Señales importantes (1-D)

- Señal sampling o sinc:

$$Sa(t) = sinc(t) = \frac{sen(t)}{t}$$

 – Aparece en los espectros de Fourier de funciones finitas



1.4 Señales importantes (1-D)

- Señal signo:

$$Sign(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$$

- Señal gaussiana:

$$G(t) = e^{-\pi t^2}$$

  - A pesar de ser infinita, también puede utilizarse para realizar recortes. En 2D, la señal gaussiana posee simetría circular=> no tiene énfasis direccional

1.4 Señales importantes (1-D)

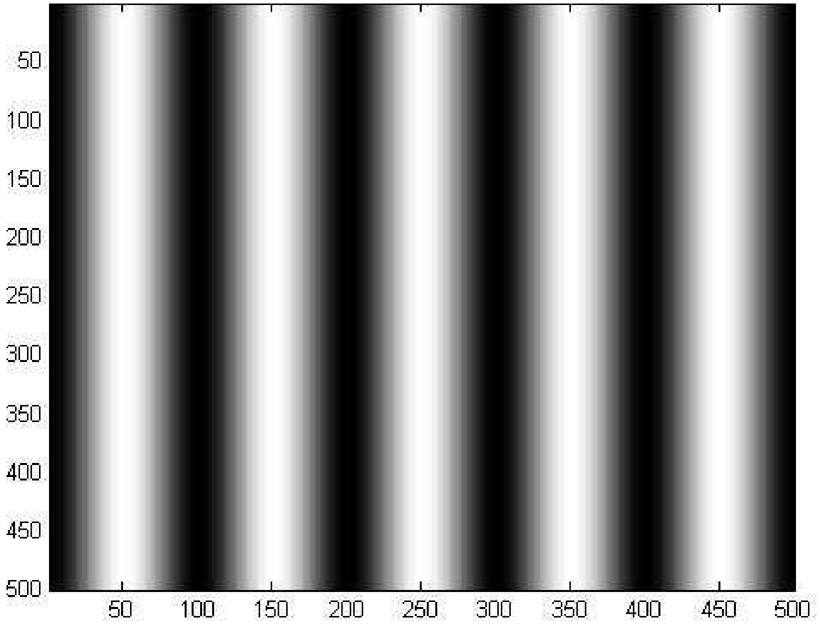
- Impulso ideal:

$$\int_a^b f(t)\delta(t-t_0)dt = \begin{cases} f(t_0) & a \le t_0 \le b \\ 0 & otro \end{cases}$$

  – El impulso ideal es un filtro pasa-todo.

1.4 Señales importantes (2-D)

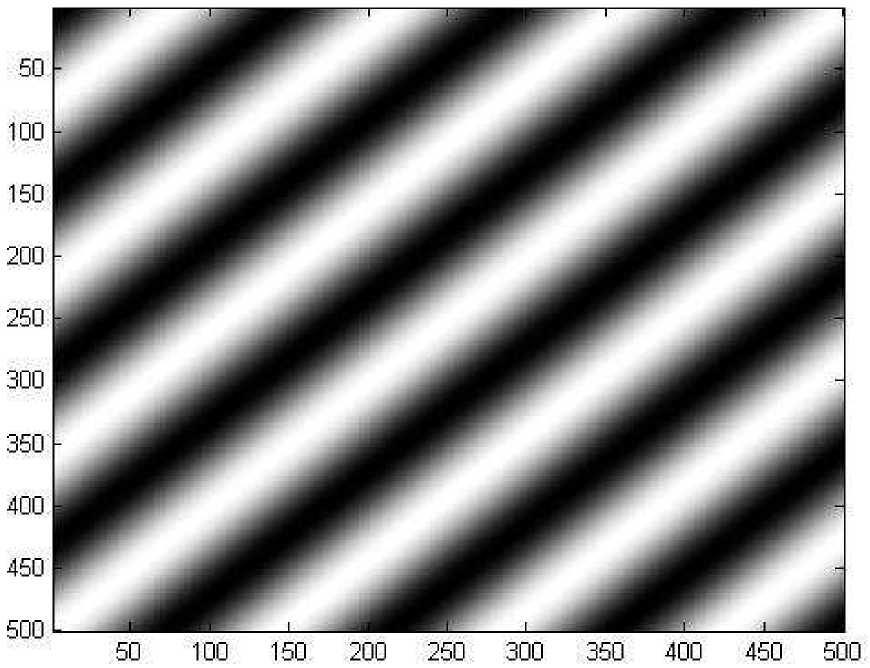
- Pueden expandirse a 2-D los ejemplos dados anteriormente sin mayor dificultad.



$$z = 60(1 + \cos(2\pi 0.01x))$$

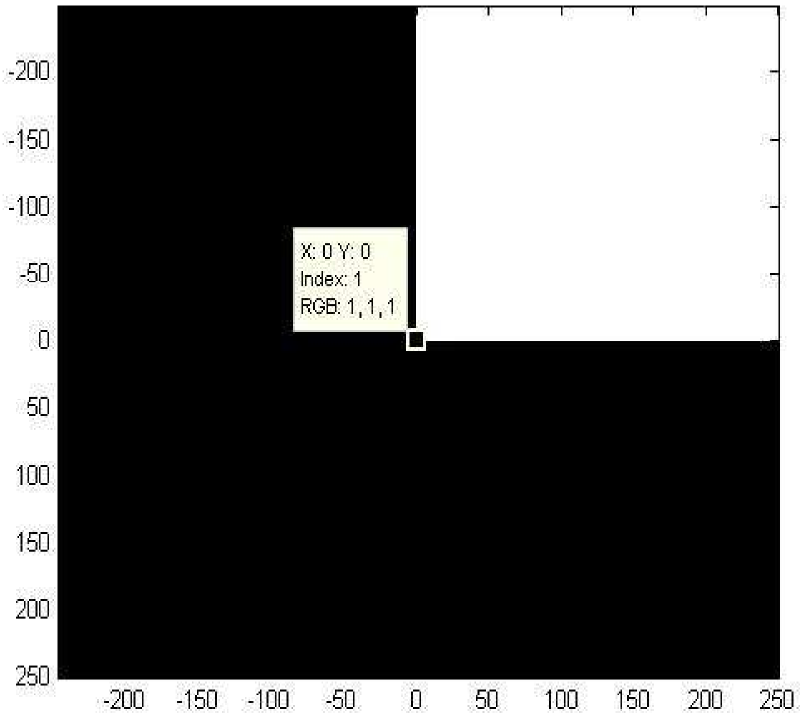
1.4 Señales importantes (2-D)

$$z = 60(1 + \cos(2\pi 0.01[x\cos(\frac{\pi}{4}) + y\,\mathrm{sen}(\frac{\pi}{4})]))$$



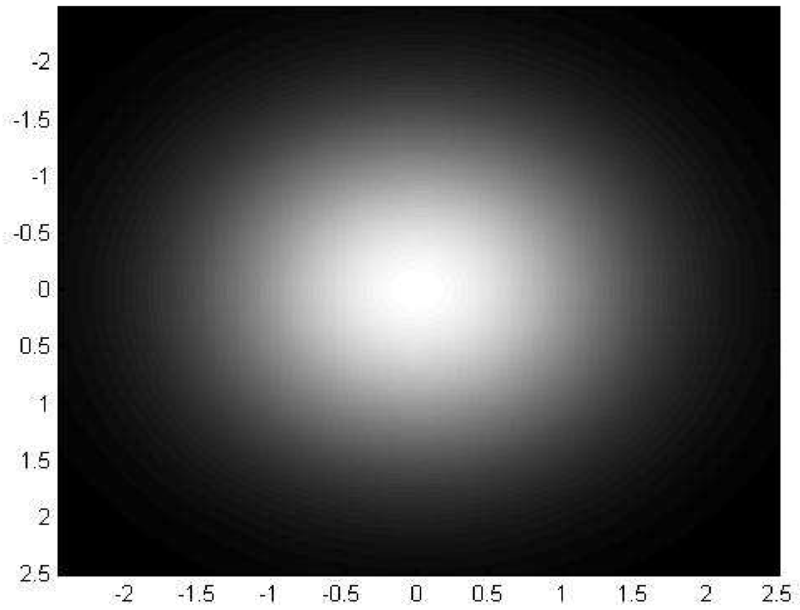
1.4 Señales importantes (2-D)

$$z = u(x,y) = \begin{cases} 1 & x,y \geq 0 \\ 0 & otro \end{cases}$$



1.4 Señales importantes (2-D)

$$z = 120e^{-\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right)}$$



1.5 Introducción a espacios de Hilbert

- Producto interno:
  - Sea X un espacio vectorial. Se define el producto interno como $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que cumple:
    - $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$ ($\overline{a}$ Indica el conjugado de a)
    - $\langle x, y+z\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, y+z\rangle$
    - $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle, \quad \alpha \in \mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$
    - $\langle x, x\rangle \geq 0, \langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

1.5 Introducción a espacios de Hilbert

- Ejemplos:

$$X = \mathbb{R}^n, \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = y^T x = x^T y$$

$$X = \mathbb{C}^n, \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i} = \overline{y}^T x = y^* x$$

(A*Indica la matriz transpuesta y conjugada (adjunta) de A)

1.5 Introducción a espacios de Hilbert

- Un espacio de Hilbert es un espacio vectorial con producto interno en que las sucesiones de Cauchy convergen.

- Sucesión de Cauchy: sucesión vectorial $\overrightarrow{x_n}$ que cumple que

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M \in \mathbb{N} / \left\| \overrightarrow{x_n} - \overrightarrow{x_m} \right\| < \varepsilon, \forall m,n > M$$

1.5 Introducción a espacios de Hilbert

- Ejemplo importante:

$$X = L_2(0,\infty) = \{ f : \int_0^\infty | f(t) |^2 \, dt < \infty \}$$

$$\langle f, g \rangle = \int_0^\infty \langle f(t), g(t) \rangle dt = \int_0^\infty \underbrace{f(t) \cdot g(t)}_{f(t), g(t) \in \mathbb{R}} dt$$

1.5 Introducción a espacios de Hilbert

- Teorema: desigualdad de Cauchy-Schwartz:

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$$

- Esto nos dice que $-1 \leq \dfrac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|} \leq 1$
- Se puede definir entonces $\cos\theta \triangleq \dfrac{\langle x, y\rangle}{\|x\|\|y\|}$

1.5 Introducción a espacios de Hilbert

- ¡Es como si hubiese un ángulo entre x e y! Los espacios de Hilbert pretenden, entonces, generalizar la intuición geométrica, para aplicarlo a cualquier conjunto que cumpla con ser espacio de Hilbert. En nuestro caso, interesan las señales
- Para $\theta = \pi / 2 \Rightarrow \cos\theta = 0 \Rightarrow \langle x, y \rangle = 0.$

  y diremos que los vectores son ortogonales

1.5 Introducción a espacios de Hilbert

- Dos señales son ortogonales en (t_1, t_2) si

$$\int_{t_1}^{t_2} f(t)g(t)dt = 0$$

- Def: Sea $M \subset X$ un subespacio de X

$$\Rightarrow M^{\perp} = \{x \in X : \langle x, y \rangle = 0, \forall y \in M\}$$

- Teo: $M^{\perp}$ es un subespacio cerrado de X

1.5 Introducción a espacios de Hilbert

- ¿Significado del teorema?
  - Al escoger una base ortogonal de funciones para representar una señal, existe un error que pertenece al espacio ortogonal al generado por esa base: hagamos lo que hagamos, nunca vamos a reducir el error a menos que $\bar{x}$ agreguemos elementos l.i a la base.

1.5 Introducción a espacios de Hilbert

- Def: Sea el conjunto $\{v_1, v_2 ..\}$. El conjunto se dice ortogonal si $\forall i \neq j,\ \langle v_i, v_j \rangle = 0$. Si adicionalmente los vectores tienen longitud unitaria $(\|v_i\| = 1)$, entonces se dicen ortonormales

- Cuando el conjunto $\{v_1, v_2 ..\}$ es ortogonal

$$\langle v_n, v_m \rangle = \begin{cases} K_n & n = m \\ 0 & \sim \end{cases} \qquad (*)$$

1.5 Introducción a espacios de Hilbert

- Ejemplo: Sea $X = C[-\pi,\pi]$. Verifique que el conjunto $\{1,\mathrm{sen}(nt),\cos(nt)\},\ n=1,2,\ldots$ es ortogonal en $[-\pi,\pi]$.

$$\int_{-\pi}^{\pi} sen(nt)\cos(mt)dt = \frac{1}{2}\left(\int_{-\pi}^{\pi} sen(n+m)tdt + \int_{-\pi}^{\pi} sen(n-m)tdt\right) = 0$$

$$(n \neq m) \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} sen(nt)sen(mt)dt = \frac{1}{2}\left(\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)tdt - \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+m)tdt\right) = 0$$

$$(n \neq m) \Rightarrow \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nt)\cos(mt)dt = \frac{1}{2}\left(\int_{-\pi}^{\pi} \cos(n-m)tdt + \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n+m)tdt\right) = 0$$

Introducción a espacios de Hilbert

- Método de Gram-Schmidt: En todo tipo de desarrollos es más conveniente contar con una base ortonormal de vectores para realizar descomposiciones. Dado un conjunto $\{y_1,.,y_n\}$ l.i de vectores, el método de Gram-Schmidt permite construir una base ortogonal $\{\hat{v}_i,...,\hat{v}_n\}$.

1.5 Introducción a espacios de Hilbert

- Método de Gram-Schmidt:

$$\hat{v}_1 = \hat{y}_1 = {y_1}\Big/{\|y_1\|}; \quad h_1 = \langle v_1, y_2 \rangle \frac{v_1}{\|v_1\|^2}$$

$$v_2 = y_2 - h_1 \Rightarrow \hat{v}_2 = {v_2}\Big/{\|v_2\|}$$

$$v_3 = y_3 - \langle v_1, y_3 \rangle \frac{v_1}{\|v_1\|^2} - \langle v_2, y_3 \rangle \frac{v_2}{\|v_2\|^2}$$

$$\hat{v}_3 = {v_3}\Big/{\|v_3\|}$$

1.5 Introducción a espacios de Hilbert

- Método de Gram-Schmidt: en general

$$v_i = y_i - \sum_{k=1}^{i-1} \langle v_k , y_i \rangle \frac{v_k}{\left\| v_k \right\|^2}$$

$$\hat{v}_i = {v_i}\big/{\left\| v_i \right\|}$$

1.5 Introducción a espacios de Hilbert

- Ejemplo: sabemos que el para el espacio $X = C[-\pi, \pi]$, el conjunto $\{1, \mathrm{sen}(nt), \cos(nt)\},\ n = 1, 2, \ldots$ es ortogonal.

Al normalizar tendremos el conjunto

$$\left\{ 1 \big/ \sqrt{2\pi}, \ \mathrm{sen}(nt) \big/ \sqrt{\pi}, \ \cos(nt) \big/ \sqrt{\pi} \right\},\ n = 1, 2, \ldots$$

1.5 Introducción a espacios de Hilbert

… el cual sabemos es base ortonormal de X.
Haciendo las proyecciones correspondientes,

$$\left\langle f(t), \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \hat{a}_0$$

$$\left\langle f(t), \frac{sen(nt)}{\sqrt{\pi}} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)sen(nt)dt = \hat{b}_n$$

$$\left\langle f(t), \frac{\cos(nt)}{\sqrt{\pi}} \right\rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt = \hat{a}_n$$

1.5 Introducción a espacios de Hilbert

$$\therefore \quad f(t) = \hat{a}_0 \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{a}_n \frac{cos(nt)}{\sqrt{\pi}} + \hat{b}_n \frac{sen(nt)}{\sqrt{\pi}}$$

Organizando los factores $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ y $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ se obtiene

$$\Rightarrow \quad f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n cos(nt) + b_n sen(nt)$$

1.5 Introducción a espacios de Hilbert

Con

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt, \quad n = 0,1,\ldots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)dt$$

… la serie de Fourier trigonométrica

1.6 Funciones ortogonales

Funciones:

- Se tiene un conjunto de funciones base

$$\{\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots\},\ t \in [t_1, t_2]$$

- Se desea encontrar una forma de expresar cualquier función *f(t)* como una combinación lineal de los $\phi_i(t)$

$$f(t) = \sum_{i=1}^{N} f_i \phi_i(t),\ t \in [t_1, t_2]$$

1.6 Funciones ortogonales

- Def: Dos funciones son ortogonales si:

$$\int_{t_1}^{t_2} \phi_1(t)\phi_2^{\,*}(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} \phi_1^{\,*}(t)\phi_2(t)dt = 0$$

- Espacio ortogonal (funciones base)

$$\{\phi_1, \phi_2, \ldots\}$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \phi_n(t)\phi_m^{\,*}(t)dt = \begin{cases} k_n & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

1.6 Funciones ortogonales

- Un conjunto de funciones base $\{\phi_1(t), \phi_2(t), \ldots\}$

está normalizado si

$$K_n = \int_{t_1}^{t_2} \left|\phi_n(t)\right|^2 dt = 1 \text{ para todo n}$$

❖ Conjunto ortogonal y normalizado = ortonormal

❖ Integral del producto de dos funciones en un intervalo fijo = producto interno

1.6 Funciones ortogonales.

- Aproximación al tomar N términos

$$f(t) \approx \sum_{i=1}^{N} f_n \phi_n(t)$$

- Error cuadrático residual

$$\int_{t_1}^{t_n} \left|\varepsilon_N(t)\right|^2 dt = \int_{t_1}^{t_n} \left| f(t) - \sum_{n=1}^{N} f_n \phi_n(t) \right|^2 dt$$

1.6 Funciones ortogonales.

- Usando (*):

$$\int_{t=t_1}^{t_2} |\varepsilon_N(t)|^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} |f(t)|^2 dt -$$

$$-\sum_{n=1}^{N}\left[f_n^{\,*}\int_{t_1}^{t_2} f(t)\phi_n^{\,*}(t)dt + f_n\int_{t_1}^{t_2} f^{\,*}(t)\phi_n(t)dt - |f_n|^2 K_n \right]$$

- Completando la sumatoria:

$$\int_{t=t_1}^{t_2} |\varepsilon_N(t)|^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} |f(t)|^2 dt -$$

$$-\sum_{n=1}^{N}\left[\left| K_n^{\,1/2} f_n - \frac{1}{K_n^{\,1/2}}\int_{t_1}^{t_2} f(t)\phi_n^{\,*}(t)dt \right|^2 - \left| \frac{1}{K_n^{\,1/2}}\int_{t_1}^{t_2} f(t)\phi_n^{\,*}(t)dt \right|^2 \right]$$

1.6 Funciones ortogonales.

$$\int_{t=t_1}^{t_2} \left|\varepsilon_N(t)\right|^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} \left| f(t)\right|^2 dt -$$

$$-\sum_{n=1}^{N} \left[\left| K_n^{1/2} f_n - \frac{1}{K_n^{1/2}} \int_{t_1}^{t_2} f(t)\phi_n^*(t)dt \right|^2 - \left| \frac{1}{K_n^{1/2}} \int_{t_1}^{t_2} f(t)\phi_n^*(t)dt \right|^2 \right]$$

- Se debe elegir los f_n de modo de minimizar el error cuadrático, sólo el segundo término depende de f_n

$$f_n = \frac{1}{K_n} \int_{t_1}^{t_2} f(t)\phi_n^*(t)dt = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f(t)\phi_n^*(t)dt}{\int_{t_1}^{t_2} \left|\phi_n(t)\right|^2 dt}$$

1.6 Funciones ortogonales.

- De las dos ecuaciones anteriores se obtiene:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left|\varepsilon_N(t)\right|^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} \left| f(t)\right|^2 dt - \sum_{n=1}^{N} \left| f_n\right|^2 K_n$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left| f(t)\right|^2 dt = \int_{t_1}^{t_2} \left|\varepsilon_N(t)\right|^2 dt + \sum_{n=1}^{N} \left| f_n\right|^2 K_n$$

- La energía de la función se reparte en la energía de la aproximación más la del error.

1.6 Funciones ortogonales.

- Se dice que un conjunto de funciones base es completo si, al considerar más términos en la aproximación, el error tiende a cero, es decir, si se cumple esto:

$$\varepsilon_N(t) = f(t) - \sum_{n=1}^{N} f_n \phi_n(t)$$

$$\forall f(\cdot), \int_{t_1}^{t_2} |f(t)|^2 dt < \infty \Rightarrow \lim_{N \to \infty} \int_{t_1}^{t_2} |\varepsilon_N(t)|^2 dt = 0$$

1.6 Funciones ortogonales.

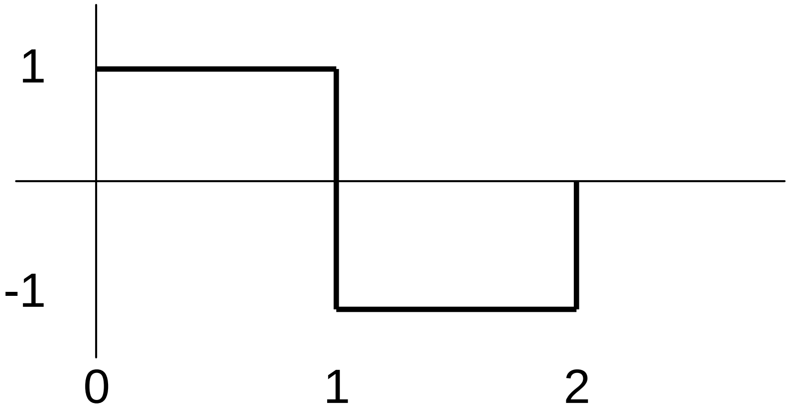
- Para un conjunto de funciones base se cumple lo siguiente:

$$\int_{t_1}^{t_2} |f(t)|^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^2 K_n$$

- Esta relación se conoce como teorema de Parseval.
- Una representación de una función mediante un conjunto de funciones base se llama “serie de Fourier generalizada”

1.6 Funciones ortogonales.

- Ejemplo: Representar la siguiente función como combinación lineal de funciones seno:



$$f(t)=\begin{cases}1 & 0<t<1\\ -1 & 1<t<2\end{cases}$$

$$\phi(t)=\{sen(\pi t), sen(2\pi t),\ldots\}=\{sen(n\pi t)\}_{n\in\mathbb{N}}$$

1.6 Funciones ortogonales.

- Las funciones *sen(nπt)* son ortonormales en [0,2].

$$\int_0^2 sen(n\pi t)sen(m\pi t)dt = \begin{cases} 1 & n = m \\ 0 & n \neq m \end{cases}$$

- Luego, la función se puede expresar como:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n sen(n\pi t) \qquad f_n = \frac{\int_0^2 f(t) sen(n\pi t)dt}{\int_0^2 sen^2(n\pi t)dt}$$

1.6 Funciones ortogonales.

- En particular, para el f(t) indicado:

$$f_n = \frac{\int_0^1 sen(n\pi t)dt - \int_1^2 sen(n\pi t)dt}{1} = \begin{cases} \dfrac{4}{\pi n} & \text{para } n \text{ impar} \\ 0 & \text{para } n \text{ par} \end{cases}$$

- Luego, f(t) queda expresado por la serie:

$$f(t) = \frac{4}{\pi} sen(\pi t) + \frac{4}{3\pi} sen(2\pi t) + \frac{4}{5\pi} sen(5\pi t) + \ldots$$

1.6 Funciones ortogonales.

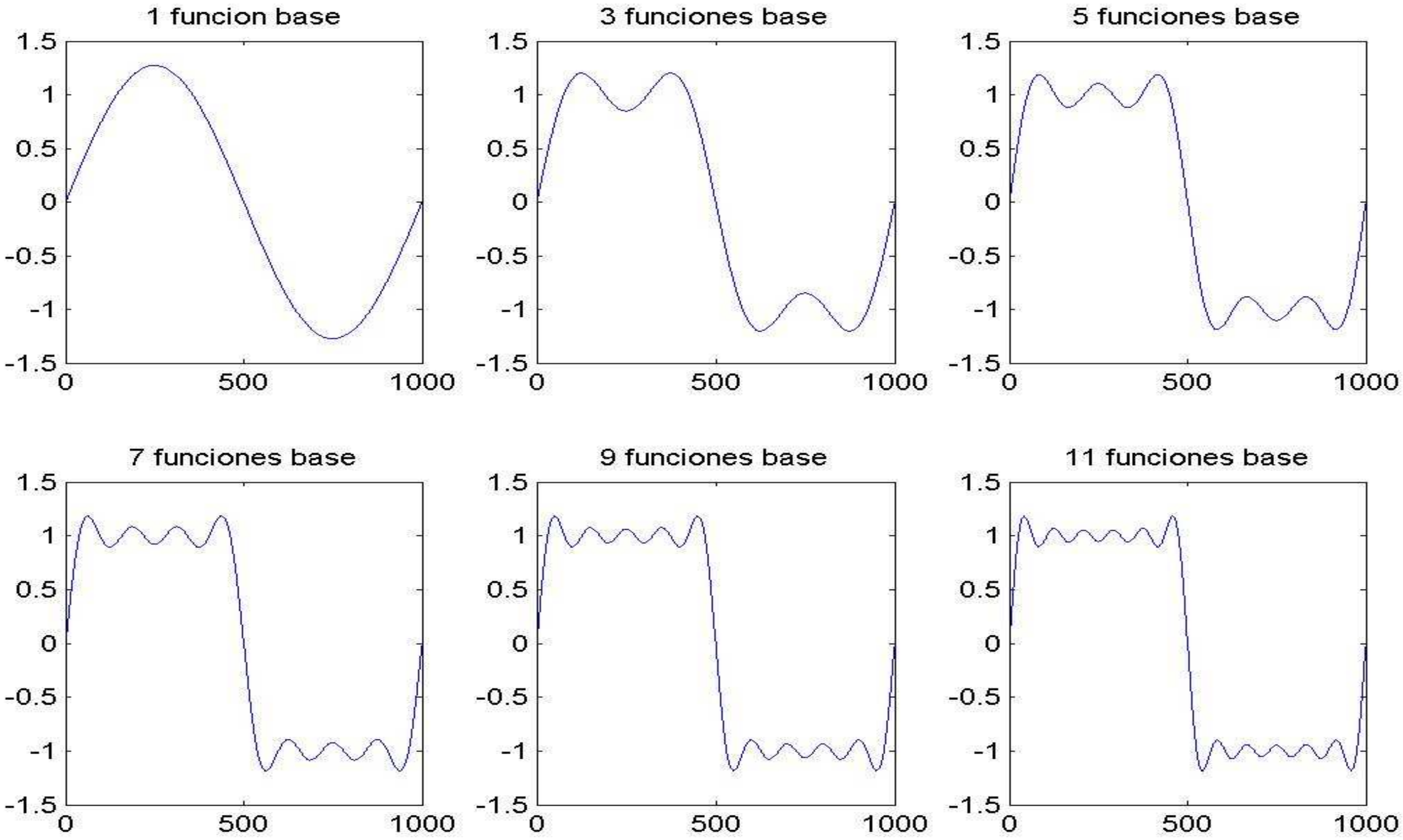
- Al hacer una aproximación usando sólo N funciones base, se comete un error:

$$\int_0^2 \left|\varepsilon_N(t)\right|^2 dt = 2 - \sum_{\substack{n=1 \\ n\ \text{impar}}}^{N} \left(\frac{4}{\pi n}\right)^2$$

N	Energía del error	% de energía
1	0.379	18.94%
3	0.199	9.94%
5	0.134	6.69%
7	0.101	5.04%
9	0.081	4.04%

1.6 Funciones ortogonales.

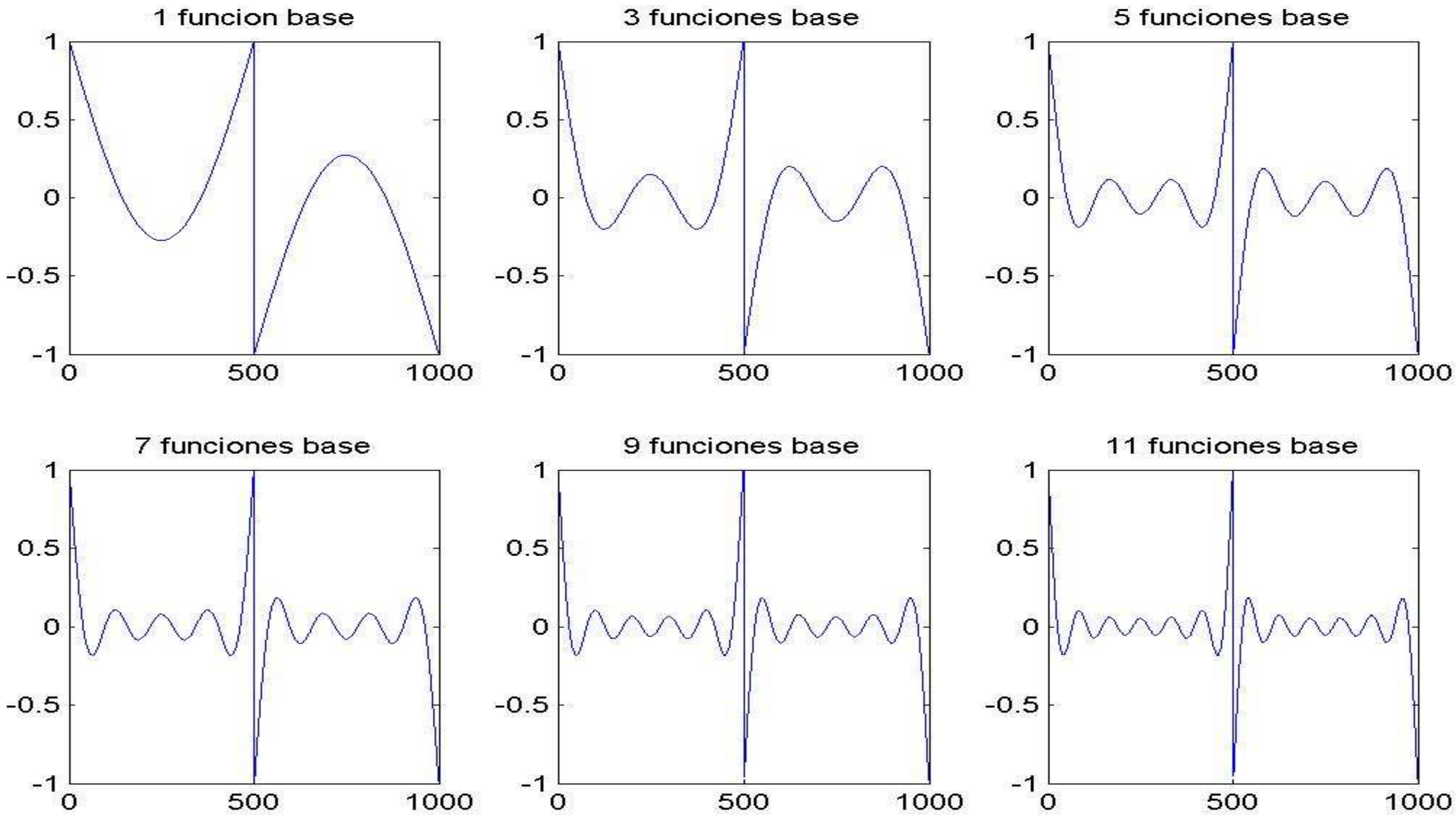
- Aproximaciones de la función:



Err_fourier.txt

1.6 Funciones ortogonales.

- Errores de aproximación:



1.6 Funciones ortogonales.

- Otros ejemplos de funciones ortogonales:
  - En realidad la ortogonalidad depende de qué producto interno se esté utilizando. Se pueden introducir modificaciones a ciertos productos internos de manera que

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)w(t)dt$$

  - Aparece el peso w(t), cuya única condición es ser estrictamente positivo.

1.6 Funciones ortogonales.

- Otros ejemplos de funciones ortogonales:
  - Dependiendo del peso y del intervalo, pueden hallarse varias funciones ortogonales para realizar descomposiciones de señales:

1.6 Funciones ortogonales.

- Otros ejemplos de funciones ortogonales:
  - Polinomios de Legendre: $w(x) = 1;\ [a,b] = [-1,1]$

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n}\left[(x^2 - 1)^n\right]$$

$$P_0(x) = 1$$

$$P_1(x) = x$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \ldots$$

1.6 Funciones ortogonales.

- Otros ejemplos de funciones ortogonales:
  - Polinomios de Jacobi:

$$w_{\alpha,\beta}(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta};$$

$$[a,b] = [-1,1]$$

$$P_n^{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{(-2)^n n!(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}} \frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}(1-x^2)^n\right]$$

1.6 Funciones ortogonales.

- Otros ejemplos de funciones ortogonales:
  - Polinomios de Laguerre asociados:

$$w_\alpha(x) = x^\alpha e^{-x};\ [a,b]=[0,\infty)$$

$$L_n(x) = \frac{1}{n!\,x^\alpha e^{-x}} \frac{d^n}{dx^n}\left[x^\alpha e^{-x} x^n\right]$$

$$L_0(x) = 1$$

$$L_1(x) = -x + 1$$

$$L_2(x) = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 2), \ldots$$

1.6 Funciones ortogonales.

- Otros ejemplos de funciones ortogonales:
  - Polinomios de Hermite: $w(x) = e^{-x^2};$

$$[a,b] = (-\infty, \infty)$$

$$H_n(x) = \frac{1}{(-1)^n e^{-x^2}} \frac{d^n}{dx^n}\left[e^{-x^2}\right]$$

$$H_0(x) = 1$$

$$H_1(x) = x$$

$$H_2(x) = x^2 - 1$$

1.6 Funciones ortogonales.

- Otros ejemplos de funciones ortogonales:
  - Polinomios de Chebyshev: $w(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$;

$$[a,b] = [-1,1]$$

$$T_n(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{(-2)^n \Gamma(n+1/2)(1-x^2)^{-1/2}} \frac{d^n}{dx^n}\left[(1-x^2)^{-1/2}(1-x^2)^n\right]$$

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1, \ldots$$

1.6 Funciones ortogonales.

- Otros ejemplos de funciones ortogonales:
  - Wavelets: Son un tipo de funciones con mejor localización espacial que la exponencial compleja, pero asimismo con una peor localización en frecuencia. Se utilizan también ampliamente en el análisis de señales. Básicamente una Wavelet en particular (denominada Wavelet madre) puede generar otras a través de traslaciones y ajustes de escala de sí misma (todo normalizado), generando una familia de funciones, que no necesariamente son ortogonales.

1.6 Funciones ortogonales.

- Otros ejemplos de funciones ortogonales:
  - <u>Wavelets:</u> Algunos wavelets madres

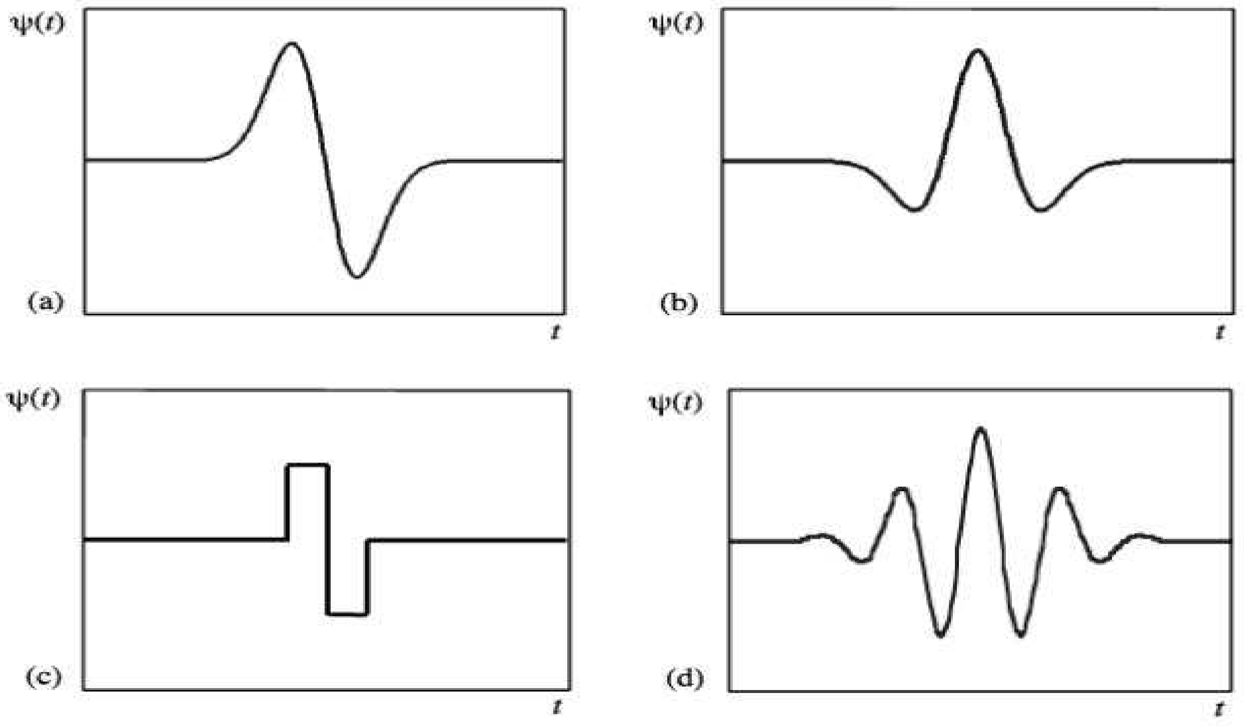


Figure 2.1. Four wavelets. (a) Gaussian wave (first derivative of a Gaussian). (b) Mexican hat (second derivative of a Gaussian). (c) Haar. (d) Morlet (real part).

1.6 Funciones ortogonales.

- Otros ejemplos de funciones ortogonales:
  - Wavelets: Si llamamos $\psi(t)$ a los wavelets madres, entonces un reescalamiento y una traslación se reflejan en
$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}}\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$
  - Cuando escogemos a y b de manera tal que
$$\psi_{n,m}(t) = \sqrt{2^m}\psi\left(\frac{t-n2^{-m}}{2^{-m}}\right) = 2^{m/2}\psi(2^m t - n)$$
  - Se obtiene un conjunto ortonormal de funciones que nos sirven para representar funciones igual que las anteriormente vistas

1.6 Funciones ortogonales.

- Otros ejemplos de funciones ortogonales:
  - La transformada coseno discreta: Al utilizar la serie de Fourier en general se utilizan tanto senos como cosenos para aproximar una función, tal como se ha visto. La transformada coseno utiliza solamente los primeros.

DCT II

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n \cos\left[\frac{\pi}{N}\left(n+\frac{1}{2}\right)k\right] \qquad k = 0,\dots,N-1.$$