

# Electromagnetismo Aplicado:

## II. Planteamiento y Solución de Campos Electromagnéticos Estáticos y de Baja Frecuencia

F.P. Mena

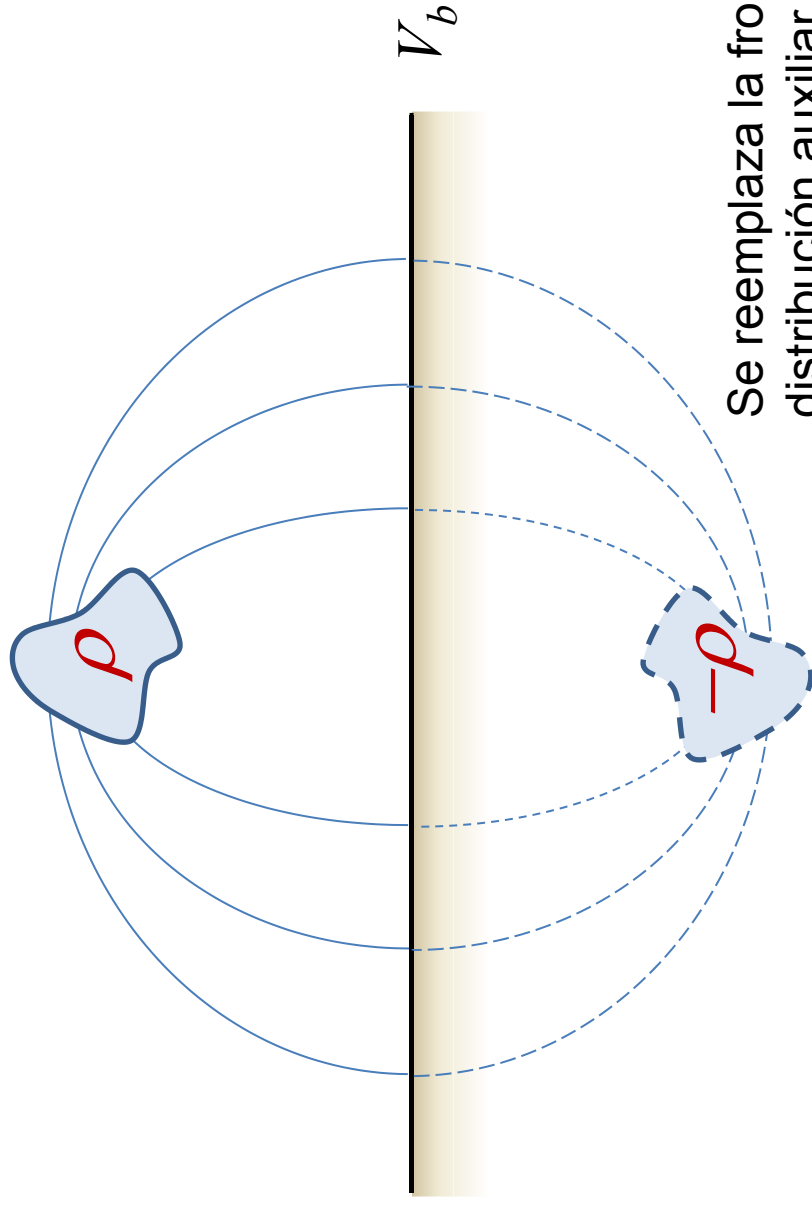
Primavera 2011

# II. Campos Electromagnéticos Estáticos y de Baja Frecuencia

- Vector de Poynting
- Solución a las ecuaciones de Maxwell
  - Campos armónicos
- Solución a las ecuaciones de potenciales
  - Bajas vs. altas frecuencias
  - Métodos analítico, numérico y mixto.

# 4. Ecuaciones Potenciales

- Método de imágenes

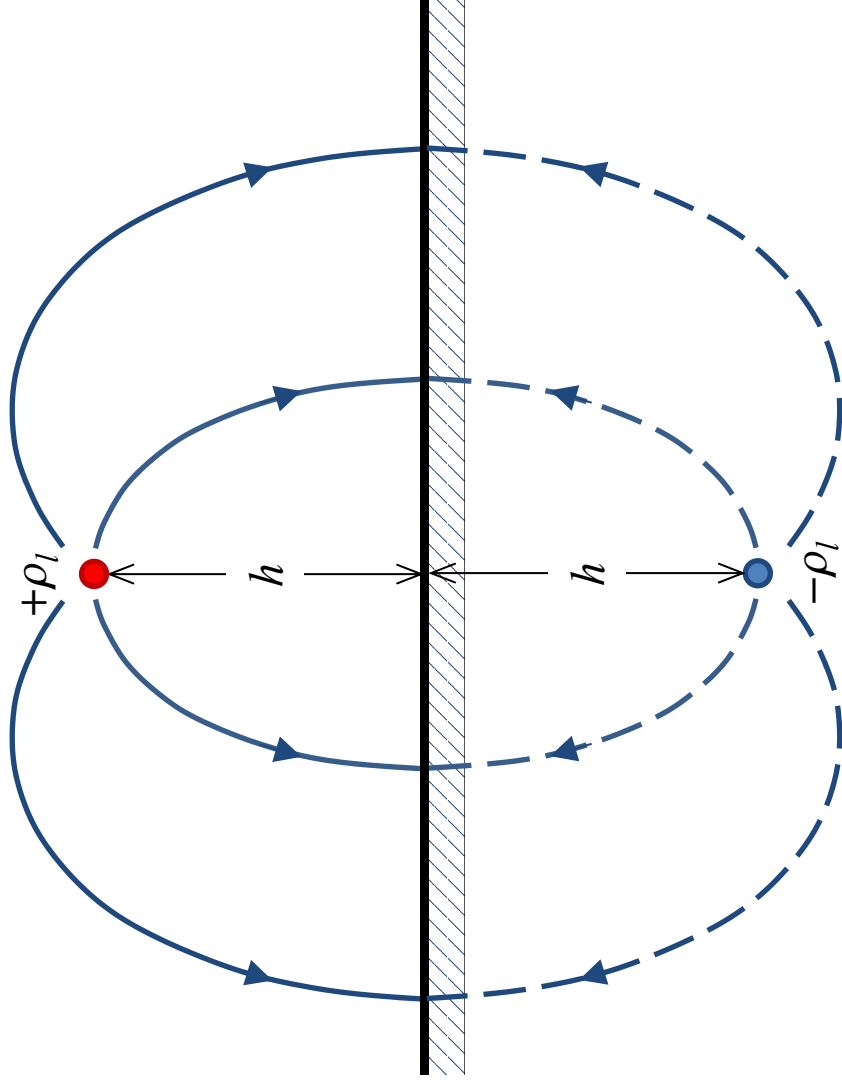


Se reemplaza la frontera con una  
distribución auxiliar que conserve  
las condiciones de borde

# 4. Ecuaciones Potenciales

- Método de imágenes

**EJEMPLO (línea de transmisión):** Calcular la capacitancia por unidad de longitud de una línea de radio  $r_c$  con densidad de carga  $\rho_l$  sobre un plano perfectamente conductor



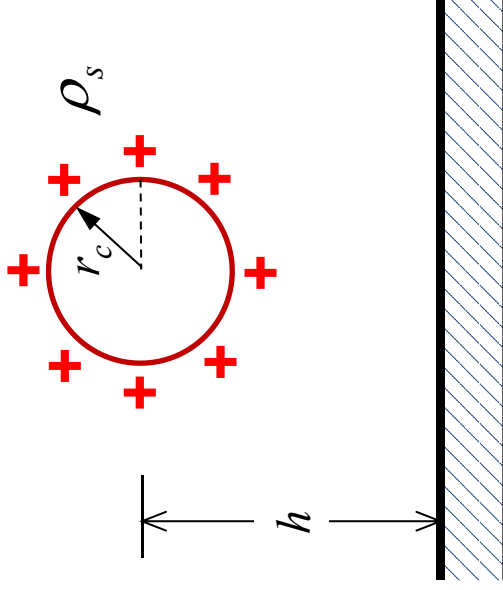
$$C_l = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(2h/r_c)}$$



# 4. Ecuaciones Potenciales

- Método de imágenes

**EJEMPLO (proximidad):** El mismo ejemplo anterior pero con  $r_c$  comparable con  $h$ .

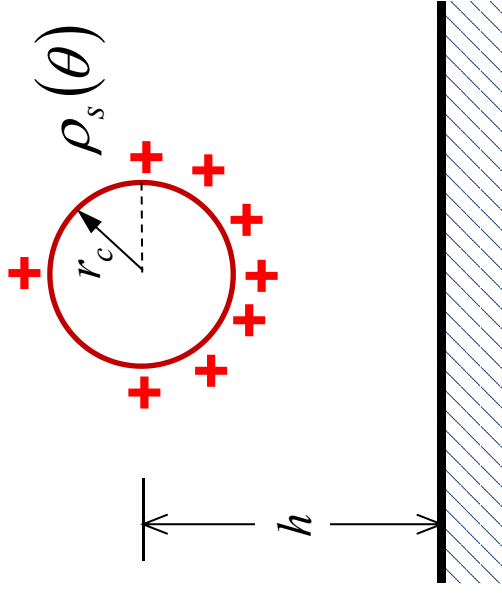


Cuando la línea está aislada:  
Distribución uniforme

# 4. Ecuaciones Potenciales

- Método de imágenes

**EJEMPLO (proximidad):** El mismo ejemplo anterior pero con  $r_c$  comparable con  $h$ .

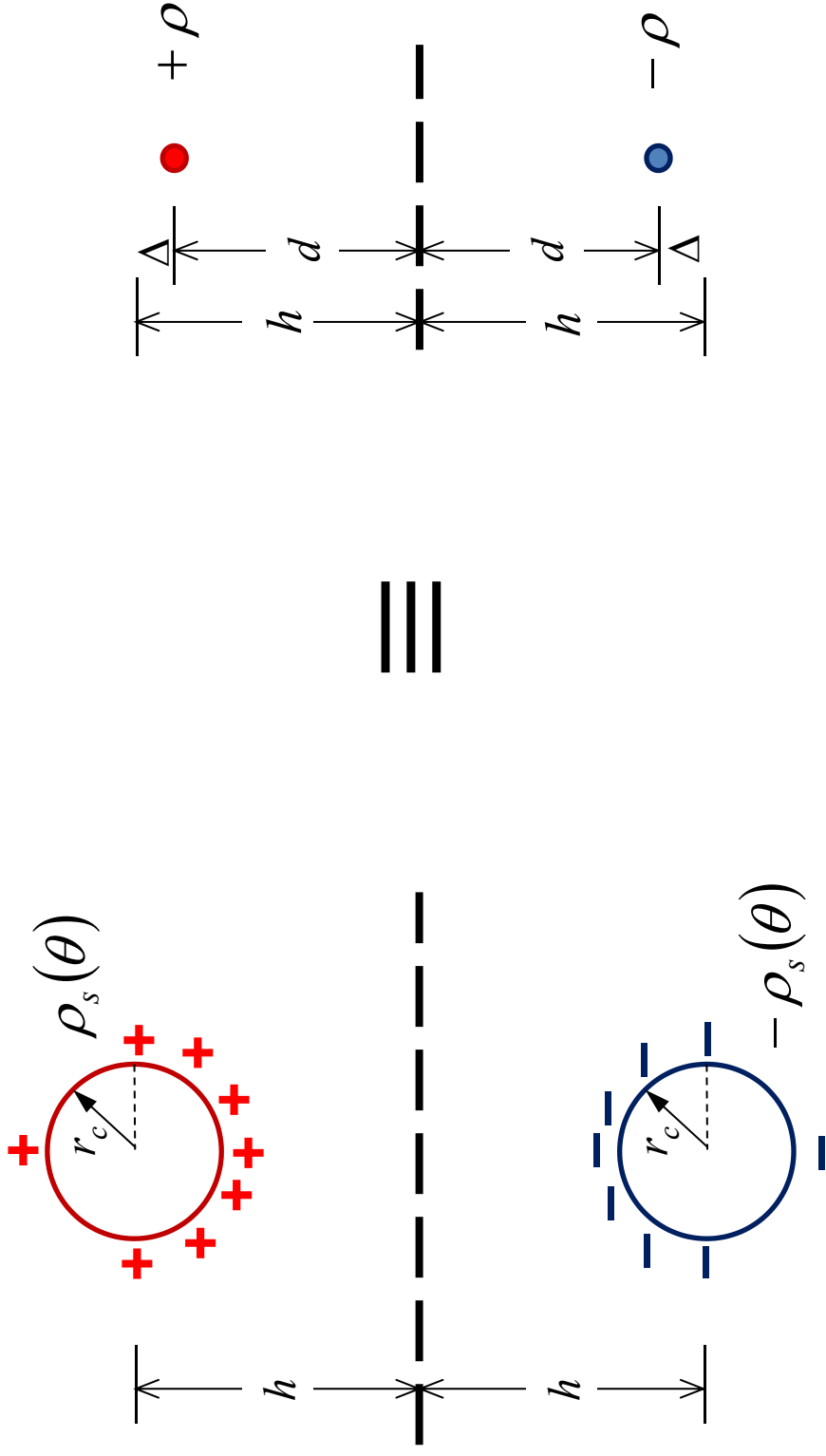


Acumulación de cargas cerca del conductor cercano

# 4. Ecuaciones Potenciales

- Método de imágenes

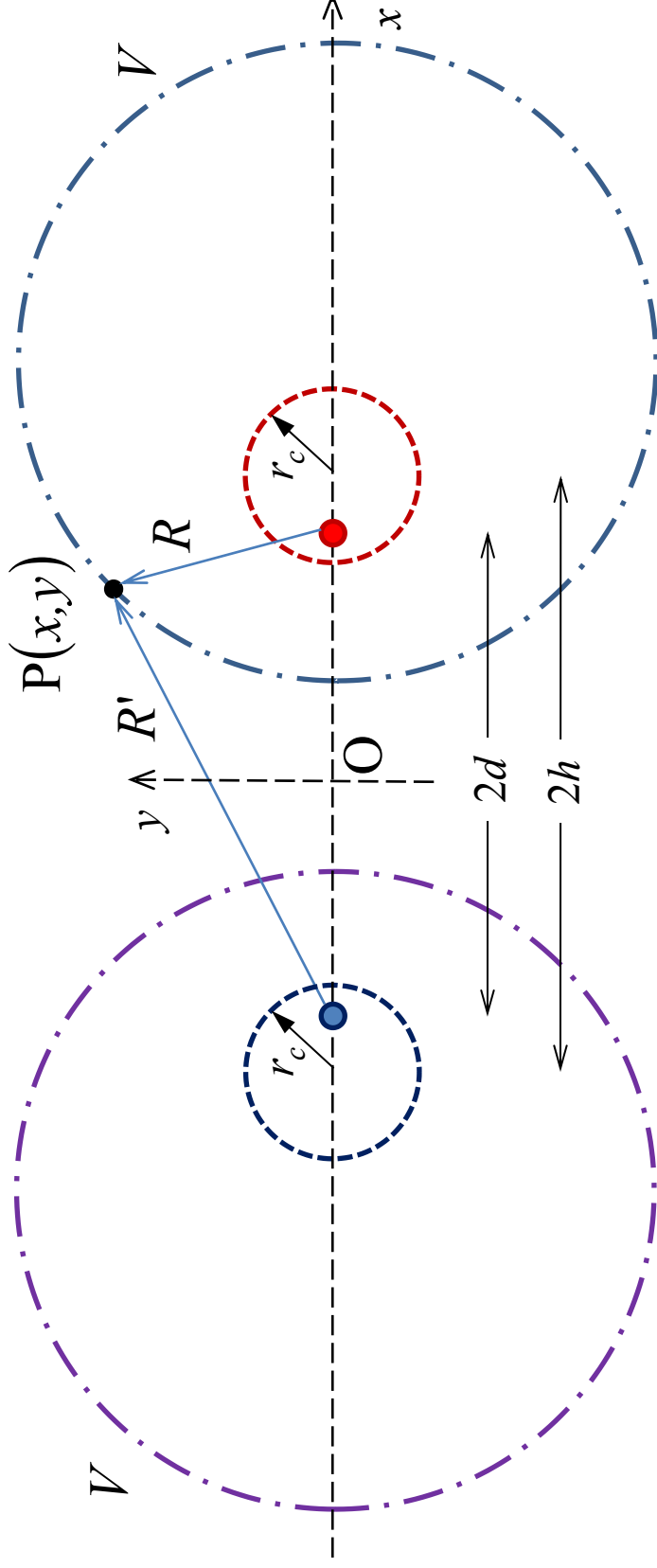
**EJEMPLO (proximidad):** El mismo ejemplo anterior pero con  $r_c$  comparable con  $h$ .



# 4. Ecuaciones Potenciales

- Método de imágenes

**EJEMPLO (proximidad):** El mismo ejemplo anterior pero con  $r_c$  comparable con  $h$ .



$$V(x, y) = \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_O R_P'}{R_P R_O'} = \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R'}{R} \quad \text{donde:}$$

$$R' = \sqrt{(x+d)^2 + y^2};$$

$$R = \sqrt{(x-d)^2 + y^2}$$

# 4. Ecuaciones Potenciales

- Método de imágenes

**EJEMPLO (proximidad):** El mismo ejemplo anterior pero con  $r_c$  comparable con  $h$ .

$$V = \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R'}{R} \quad \xrightarrow{\quad} \quad \frac{R'}{R} = \exp\left(\frac{2\pi\epsilon_0 V}{\rho}\right) = \text{constante} = K$$

$$K^2 = \frac{(x+d)^2 + y^2}{(x-d)^2 + y^2}$$

con:

$$K^2 = \frac{(x+d)^2 + y^2}{(x-d)^2 + y^2}$$

$\equiv$

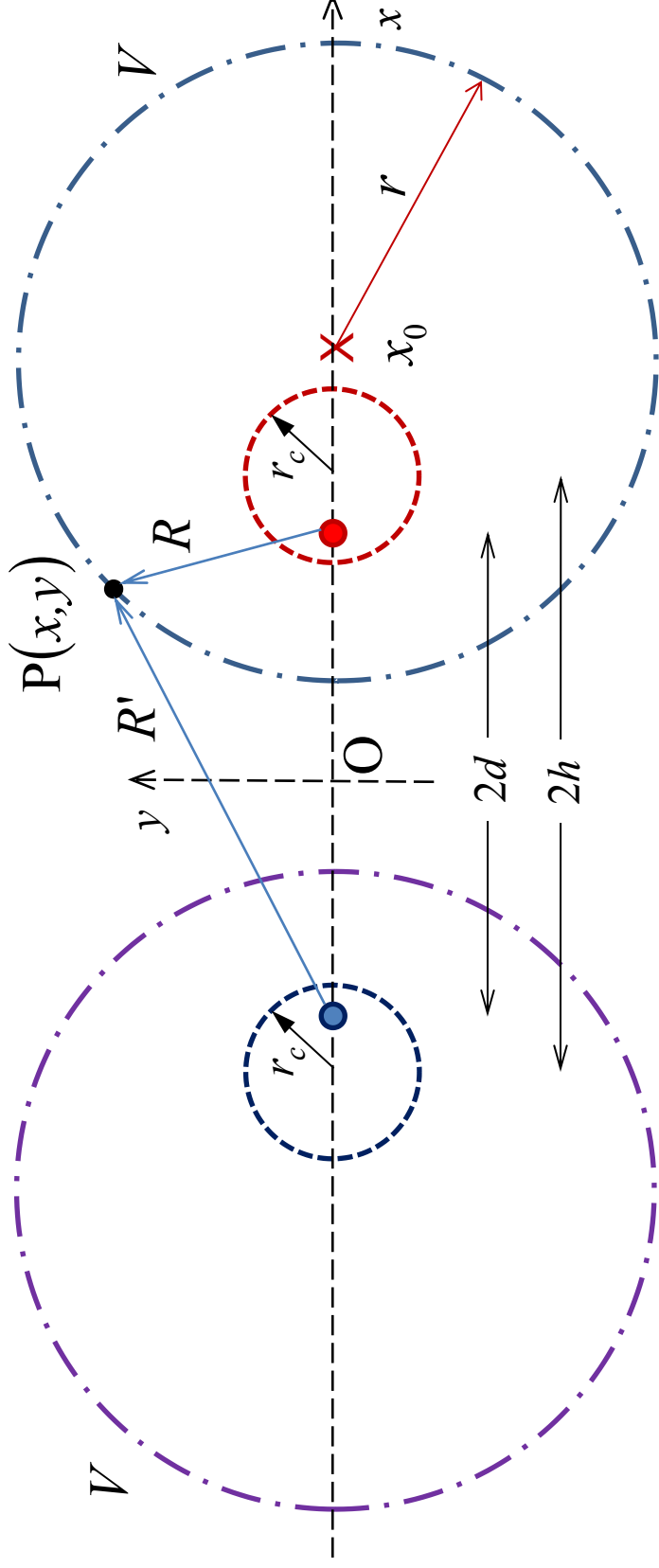
$$(x-x_0)^2 + y^2 = r^2$$

$$\text{con: } x_0 = d \frac{K^2 + 1}{K^2 - 1}; \quad r = \frac{2dK}{|K^2 - 1|}$$

## 4. Ecuaciones Potenciales

- Método de imágenes

**EJEMPLO (proximidad):** El mismo ejemplo anterior pero con  $r_c$  comparable con  $h$ .



Equipotencial en la superficie del conductor:

$$x_0 = d \frac{K^2 + 1}{K^2 - 1}; \quad r = \frac{2dK}{K^2 - 1}$$

$$x_0 = h; \quad r = r_c$$

# 4. Ecuaciones Potenciales

- Método de imágenes

**EJEMPLO (proximidad):** El mismo ejemplo anterior pero con  $r_c$  comparable con  $h$ .

$$\left. \begin{array}{l} x_0 = h; \quad r = r_c \\ x_0 = d \frac{K^2 + 1}{K^2 - 1}; \quad r = \frac{2dK}{|K^2 - 1|} \end{array} \right\} \quad \longrightarrow \quad K_s = \frac{h}{r_c} + \sqrt{\left(\frac{h}{r_c}\right)^2 - 1}$$

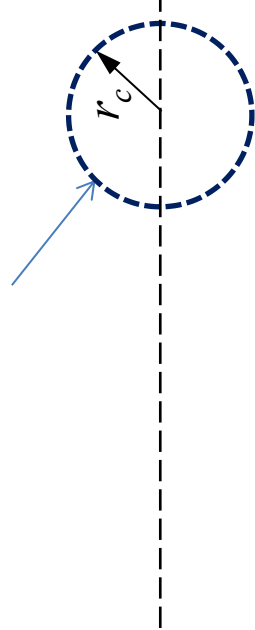
$$\frac{R'}{R} = \exp\left(\frac{2\pi\epsilon_0 V}{\rho}\right) = K \quad \longrightarrow \quad V_s = \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0} \ln \left[ \frac{h}{r_c} + \sqrt{\left(\frac{h}{r_c}\right)^2 - 1} \right]$$

$$= \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0} \operatorname{acosh}\left(\frac{h}{r_c}\right)$$

# 4. Ecuaciones Potenciales


- Método de imágenes

**EJEMPLO (proximidad):** El mismo ejemplo anterior pero con  $r_c$  comparable con  $h$ .

$$V_S = -\frac{\rho}{2\pi\epsilon_0} \operatorname{acosh}\left(\frac{h}{r_c}\right)$$


The diagram shows a horizontal dashed line representing a grounded plane. Above it, a blue dashed circle of radius  $r_c$  is centered on the plane. A blue arrow points from the equation  $V_S = -\frac{\rho}{2\pi\epsilon_0} \operatorname{acosh}\left(\frac{h}{r_c}\right)$  to this circle. A vertical dashed line labeled  $y$  passes through the center of the circle. To the right, another red dashed circle of radius  $r_c$  is shown, also centered on the plane. A blue arrow points from the equation  $V_S = \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0} \operatorname{acosh}\left(\frac{h}{r_c}\right)$  to this circle. A horizontal dashed line labeled  $x$  passes through the centers of both circles.

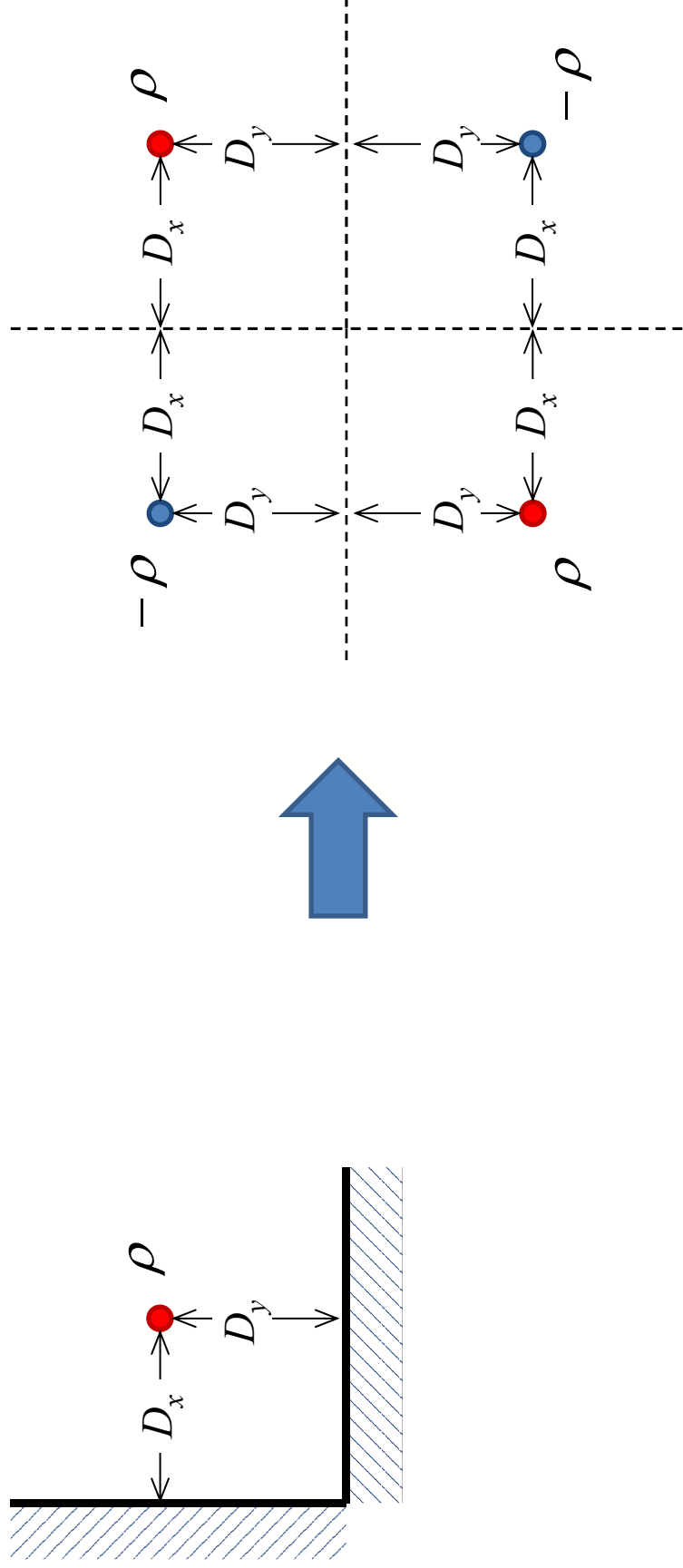
$$V_S = \frac{\rho}{2\pi\epsilon_0} \operatorname{acosh}\left(\frac{h}{r_c}\right)$$


$$\Delta V = \frac{\rho}{\pi\epsilon_0} \operatorname{acosh}\left(\frac{h}{r_c}\right)$$



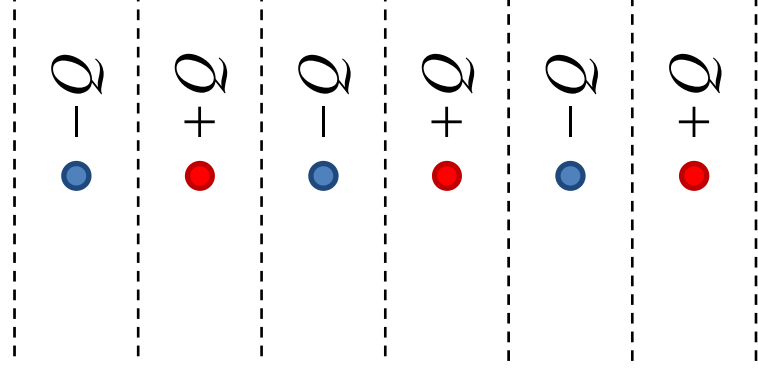
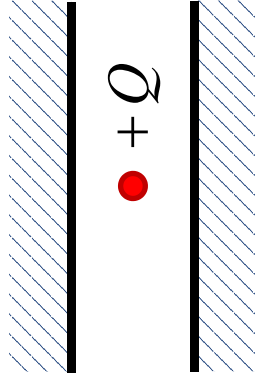
# 4. Ecuaciones Potenciales

- Método de imágenes
  - Se puede aplicar con más planos



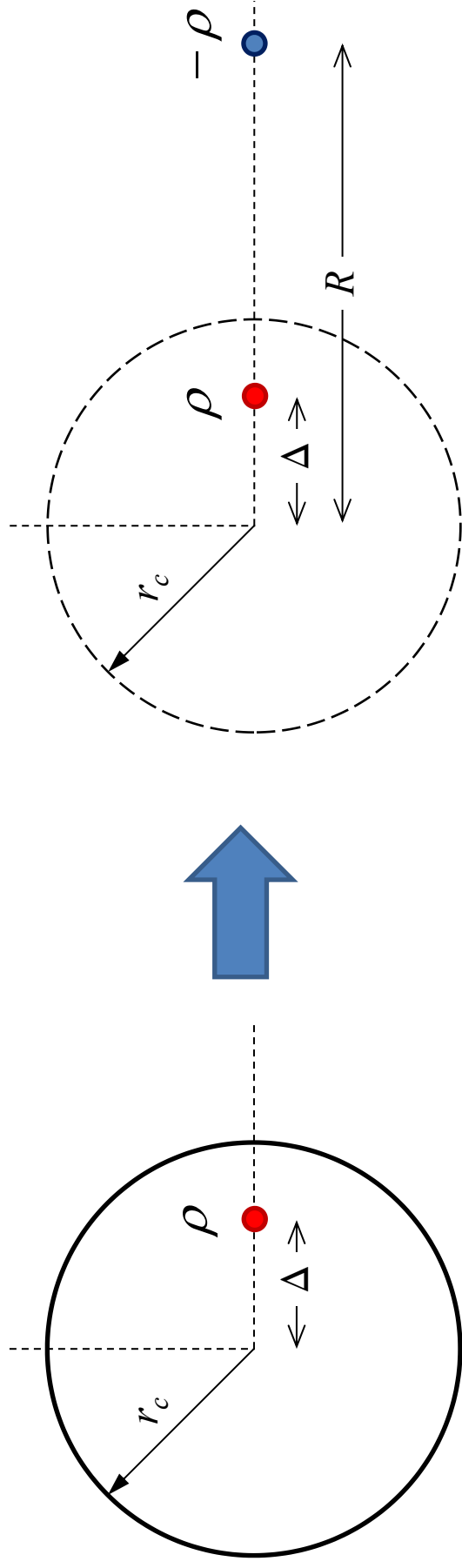
## 4. Ecuaciones Potenciales

- Método de imágenes
  - Se puede aplicar con más planos



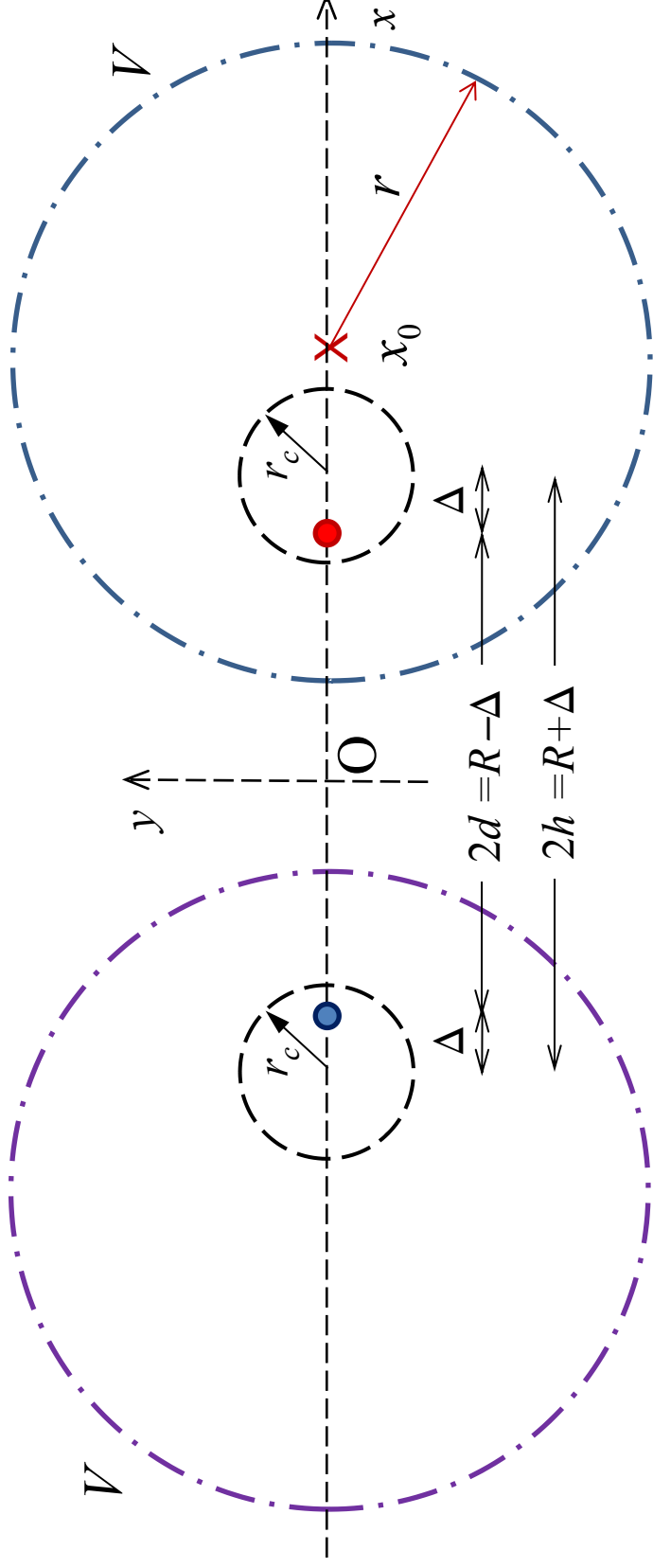
# 4. Ecuaciones Potenciales

- Método de imágenes
  - Se puede aplicar a líneas de carga dentro de cilindros



# 4. Ecuaciones Potenciales

- Método de imágenes
  - Se puede aplicar a líneas de carga dentro de cilindros



Equipotencial en la superficie del conductor:

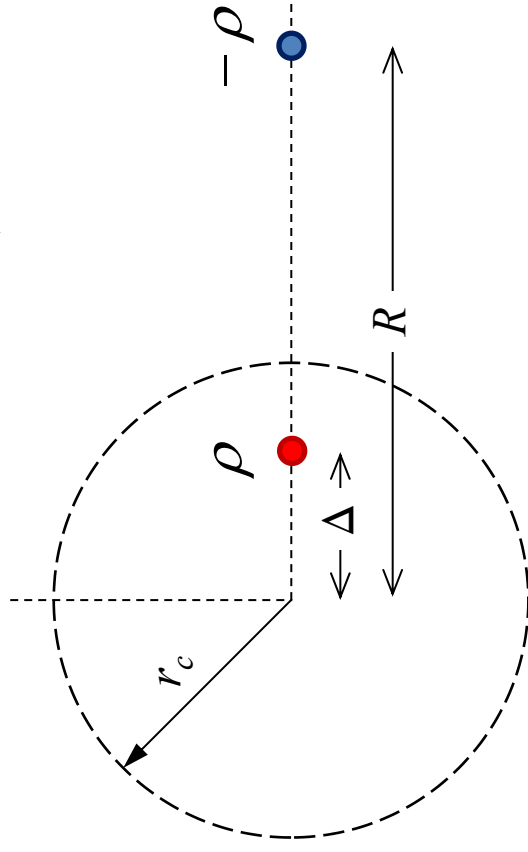
$$x_0 = d \frac{K^2 + 1}{K^2 - 1}; \quad r = \frac{2dK}{K^2 - 1}$$

$$x_0 = h; \quad r = r_c$$

# 4. Ecuaciones Potenciales

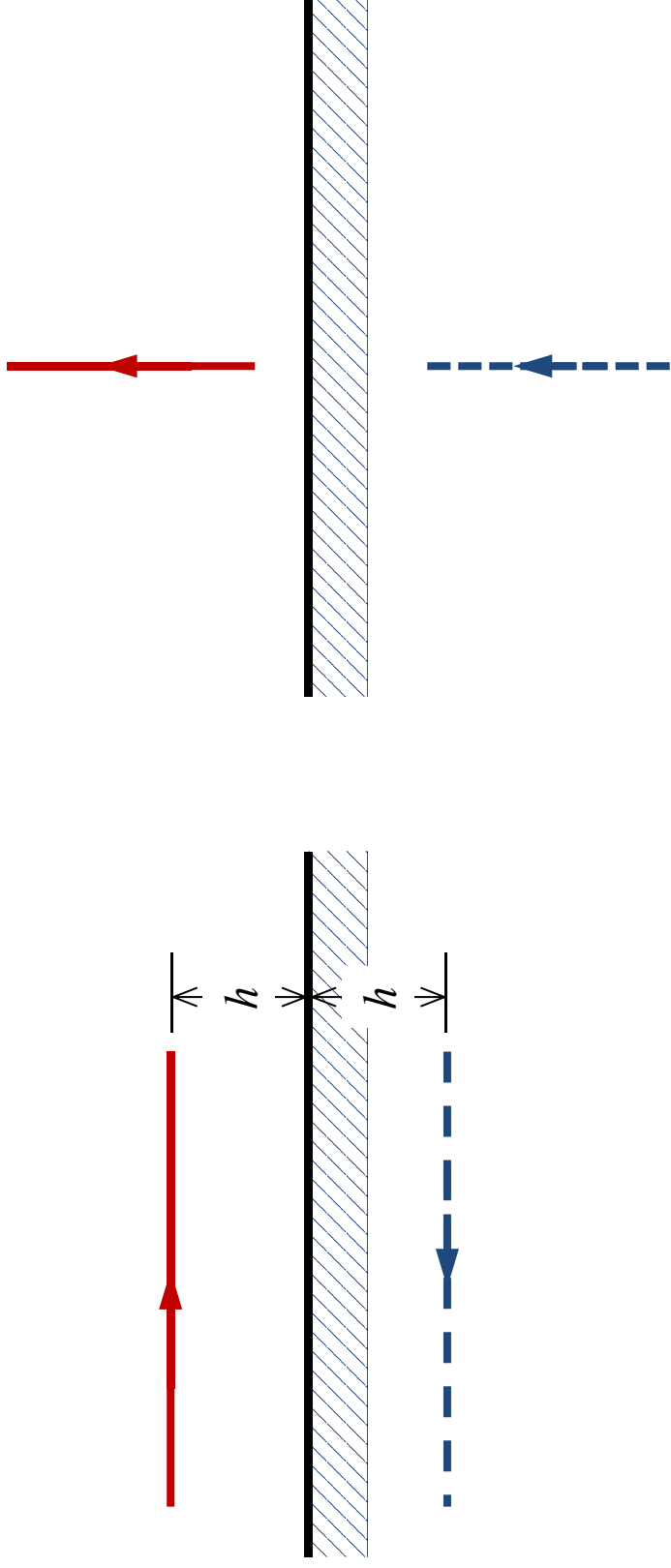
- Método de imágenes
  - Se puede aplicar a líneas de carga dentro de cilindros

$$\begin{array}{ccc}
 R = d + h; & \Delta = h - d & \\
 h = d \frac{K^2 + 1}{K^2 - 1}; & r_c = \frac{2dK}{|K^2 - 1|} & \\
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} & \begin{array}{c} \text{Blue Arrow} \\ \text{Blue Arrow} \end{array} & \begin{array}{l} R = K r_c; \quad \Delta = \frac{r_c}{K} \\ R = \frac{r_c^2}{\Delta} \end{array}
 \end{array}$$



# 4. Ecuaciones Potenciales

- Método de imágenes
  - Se puede aplicar a corrientes



# 4. Ecuaciones Potenciales

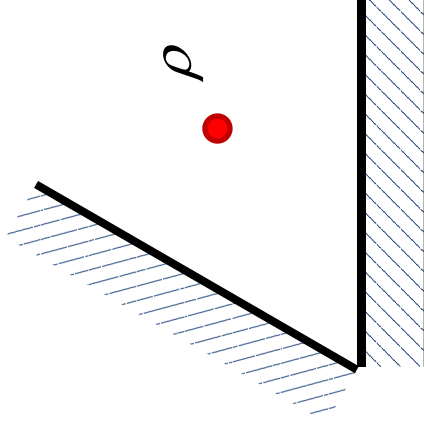
- Método de imágenes
- Se puede aplicar a corrientes

**PREGUNTA:** ¿Cuál es la imagen en este caso?



## 4. Ecuaciones Potenciales

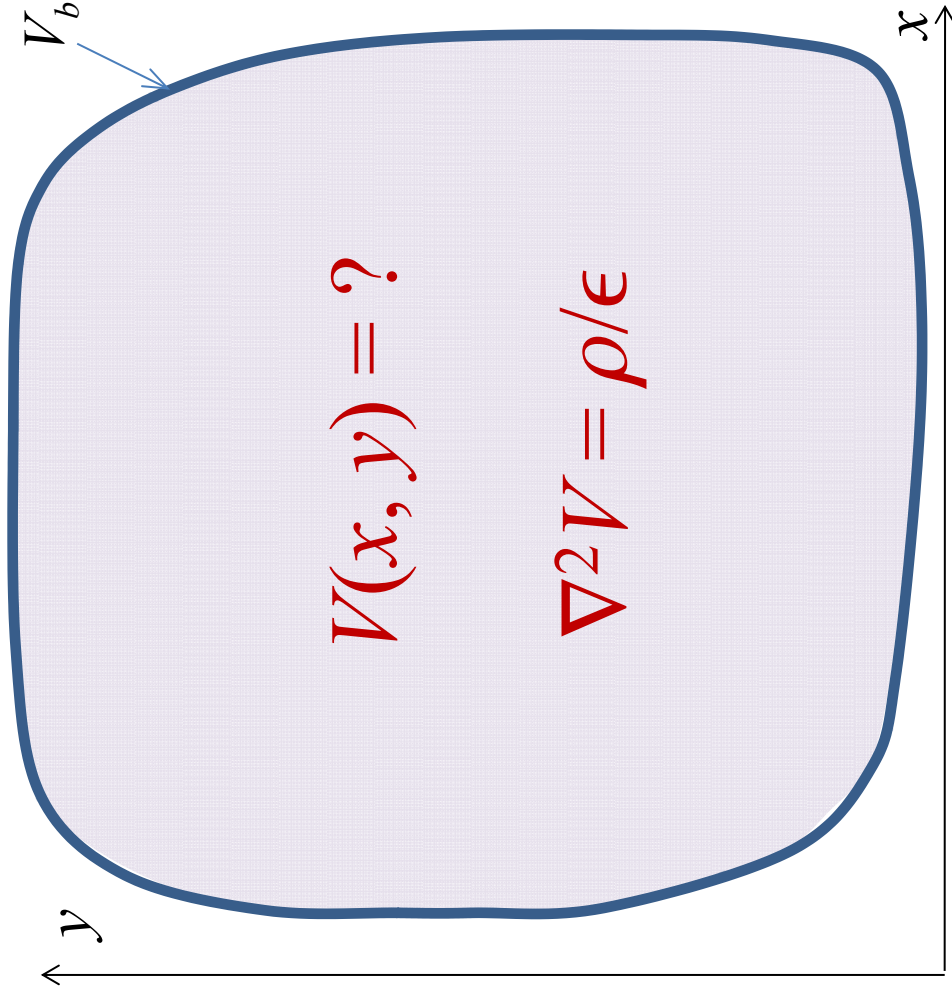
- Método de imágenes
  - **Ejercicio:** Calcular el potencial producido por una línea de carga  $\rho_l$  colocada equidistantemente de una cuña formada por dos conductores perfectos





# 3. Solución Ecuaciones

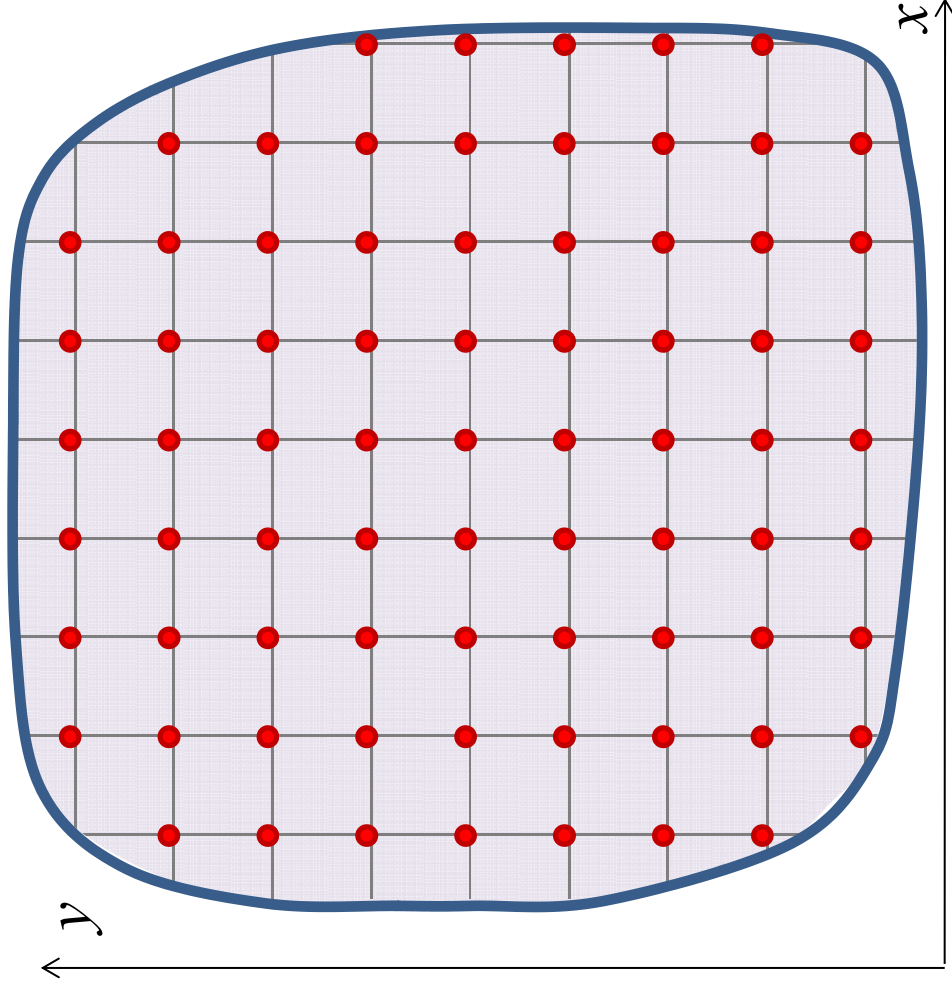
- Método Numérico: Diferencias finitas



**PROBLEMA:** Conocida la distribución  $\rho$  en una región, determinar el potencial  $V$

# 3. Solución Ecuaciones

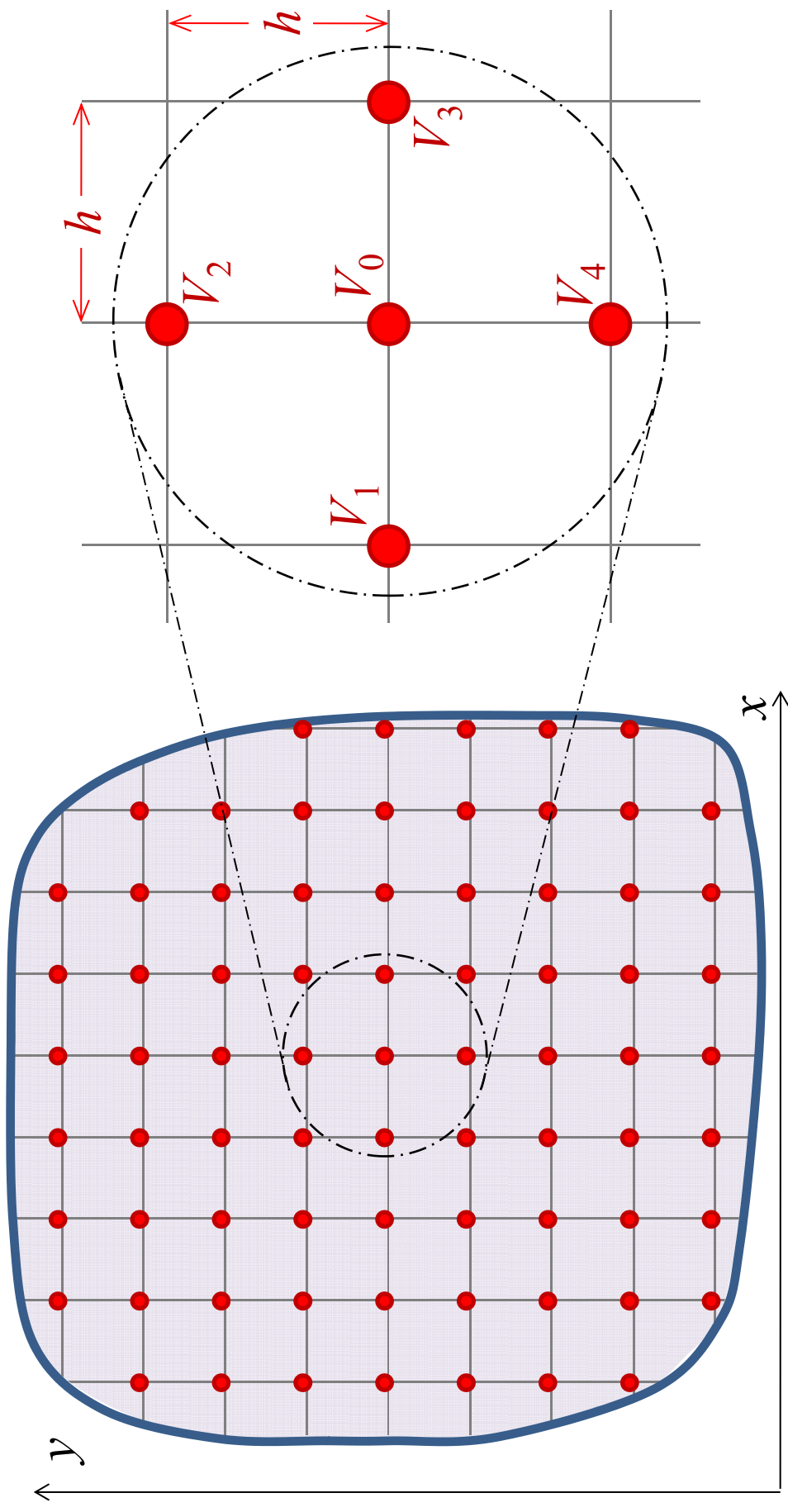
- Método Numérico: Diferencias finitas



1. Dividir la región en una malla discreta.
2. Calcular la ecuación requerida en cada punto de la malla usando el valor del potencial en los puntos cercanos.

# 3. Solución Ecuaciones

- Método Numérico: Diferencias finitas

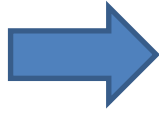


### 3. Solución Ecuaciones

- Método Numérico: Diferencias finitas

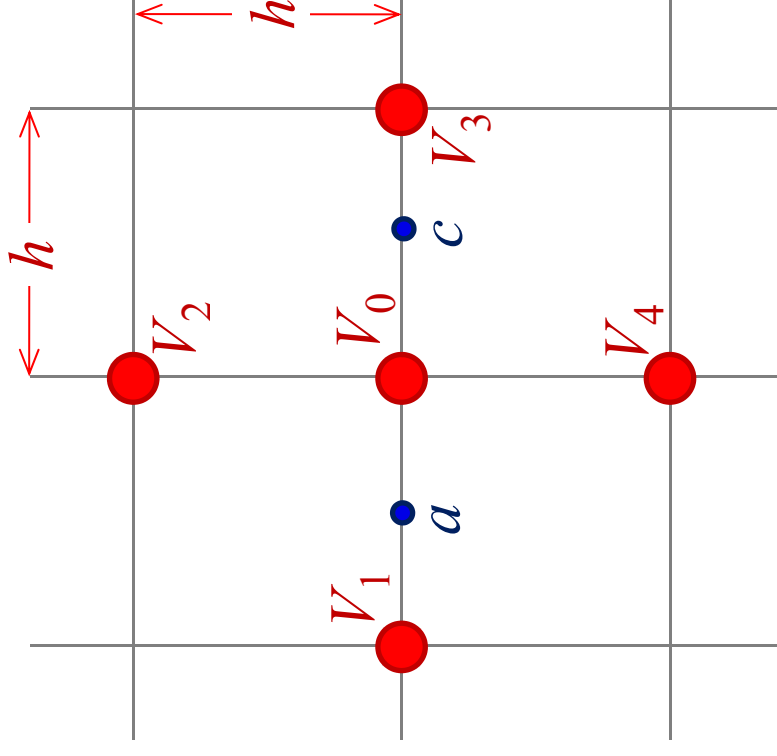
$$\left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_a \approx \frac{\Delta V}{\Delta x} \Big|_a = \frac{V_0 - V_1}{x_0 - x_1} = \frac{1}{h} (V_0 - V_1)$$

$$\left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_c \approx \frac{1}{h} (V_3 - V_0)$$



$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right|_0 \approx \frac{1}{h} \left( \left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_c - \left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_a \right)$$

$$\approx \frac{1}{h^2} [(V_3 - V_0) - (V_0 - V_1)]$$

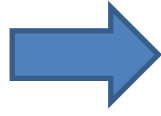


### 3. Solución Ecuaciones

- Método Numérico: Diferencias finitas

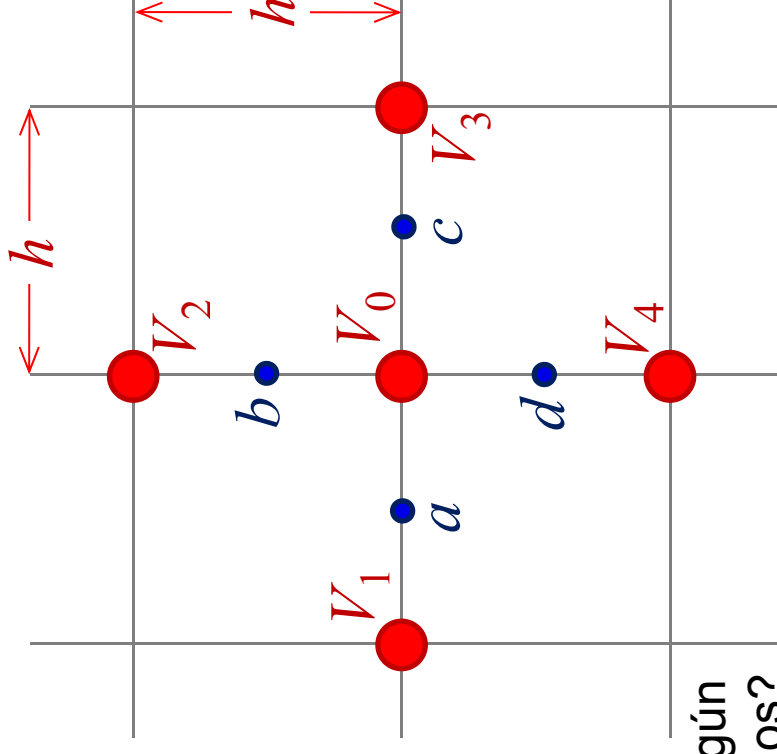
$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right|_0 \approx \frac{1}{h^2} [(V_3 - V_0) - (V_0 - V_1)]$$

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right|_0 \approx \frac{1}{h^2} [(V_4 - V_0) - (V_0 - V_2)]$$



$$\nabla^2 V = 0: \quad V_0 \approx \frac{1}{4} (V_1 + V_2 + V_3 + V_4)$$

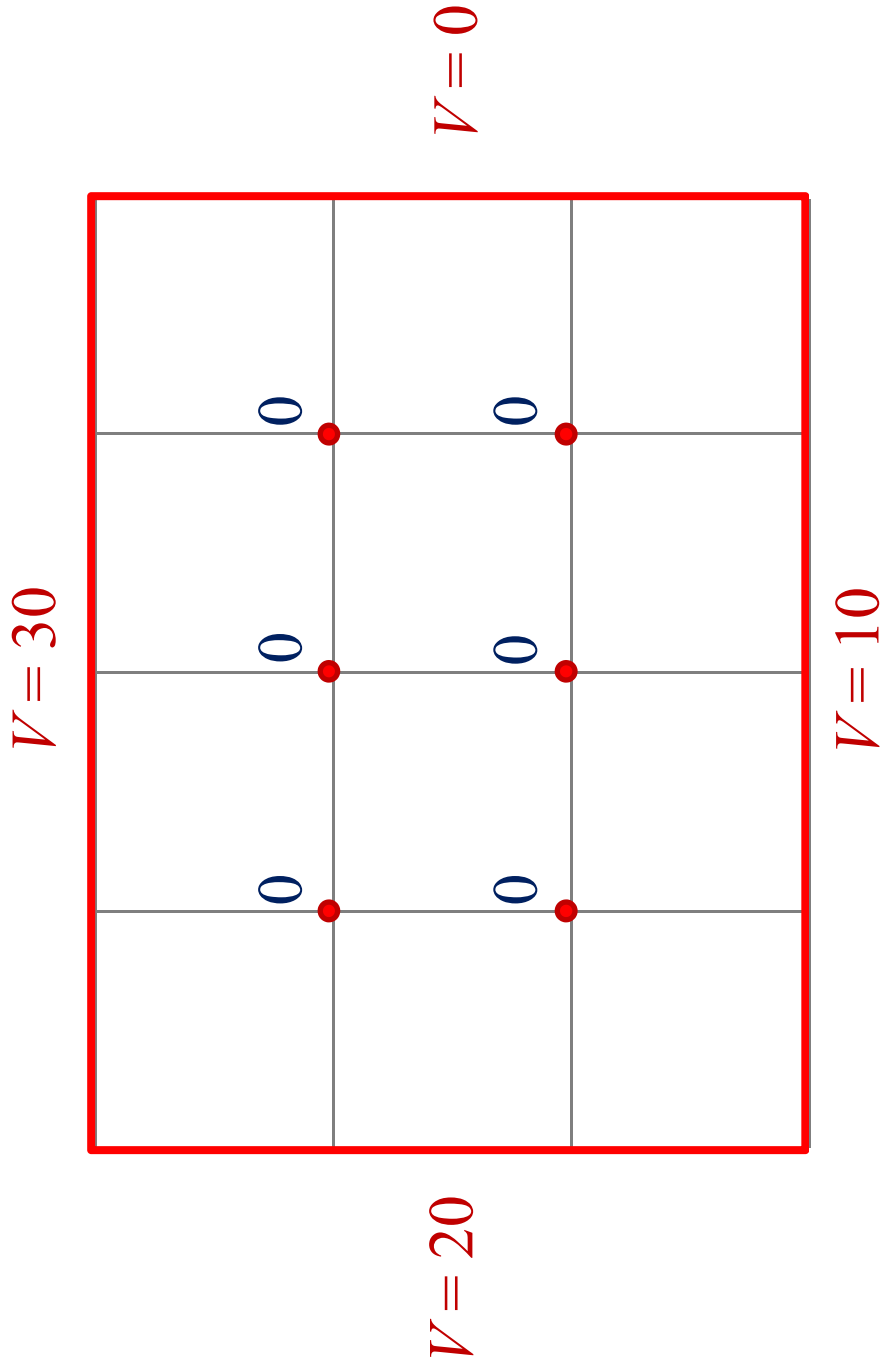
**PREGUNTA:** Pero si no conozco el potencial en ningún punto dentro de la región, ¿cómo empiezo los cálculos?



### 3. Solución Ecuaciones

- Método Numérico: Diferencias finitas

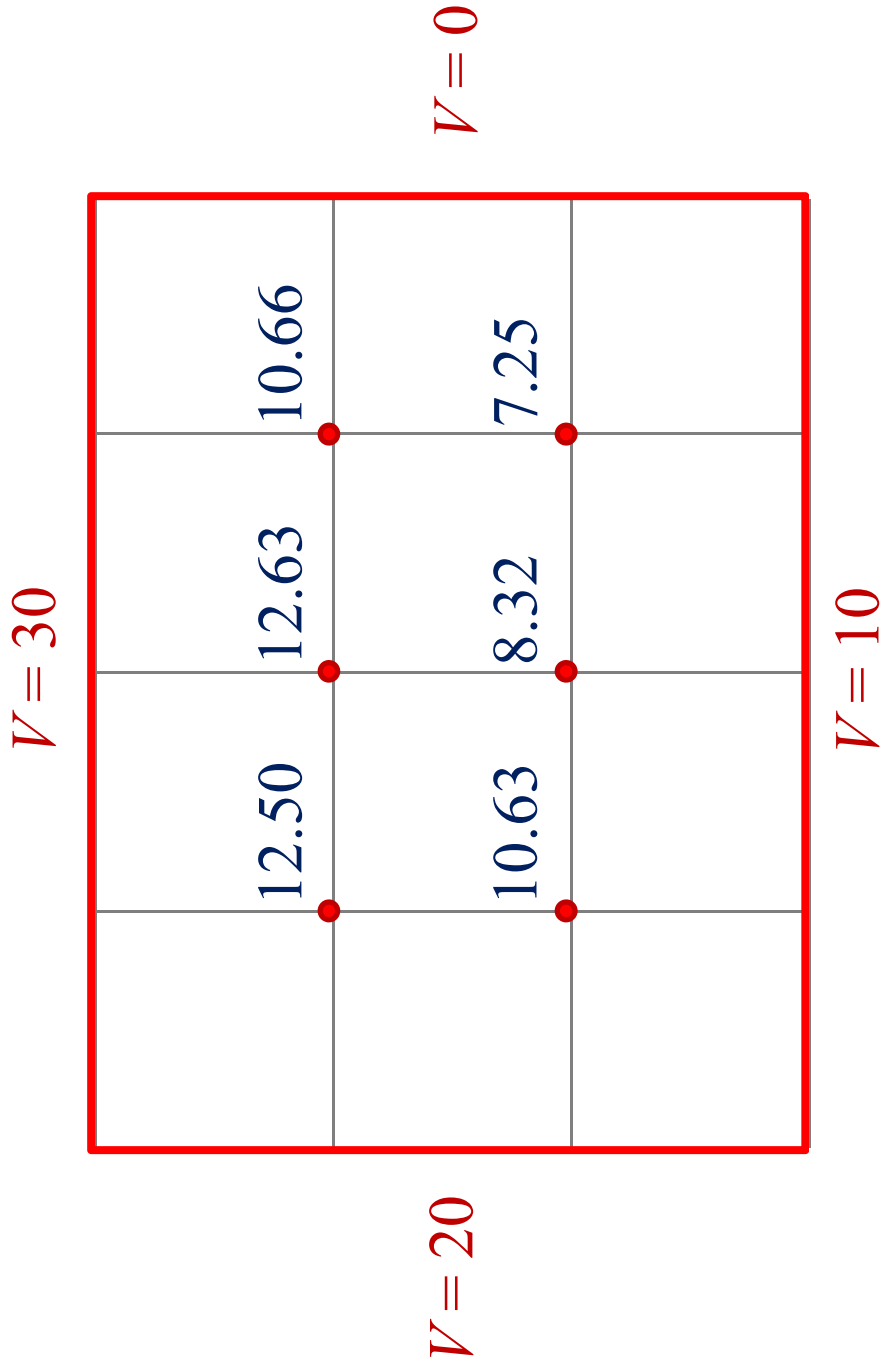
**EJEMPLO:** Calcular el potencial dentro de la región presentada:



### 3. Solución Ecuaciones

- Método Numérico: Diferencias finitas

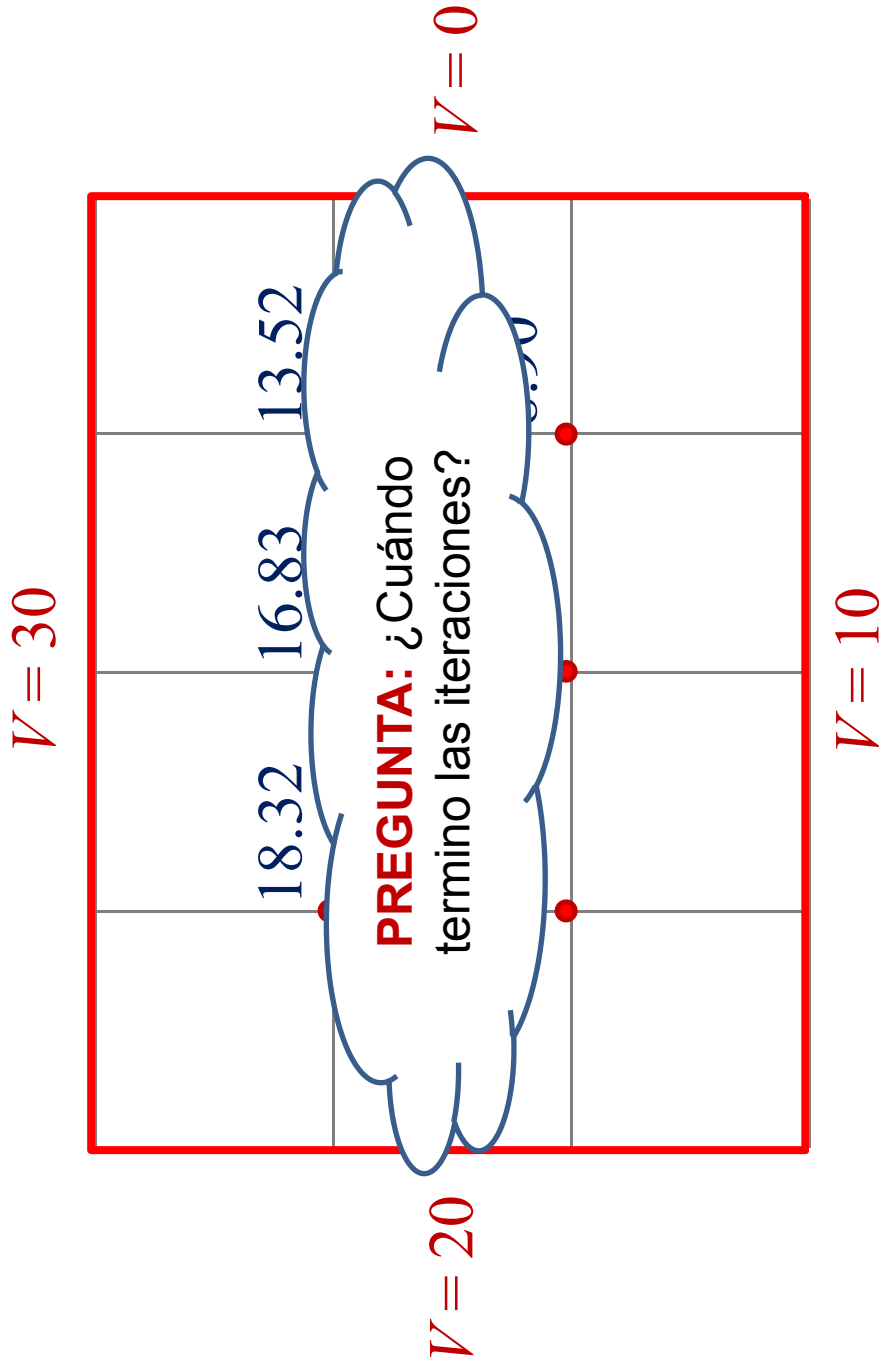
**EJEMPLO:** Calcular el potencial dentro de la región presentada:



### 3. Solución Ecuaciones

- Método Numérico: Diferencias finitas

**EJEMPLO:** Calcular el potencial dentro de la región presentada:

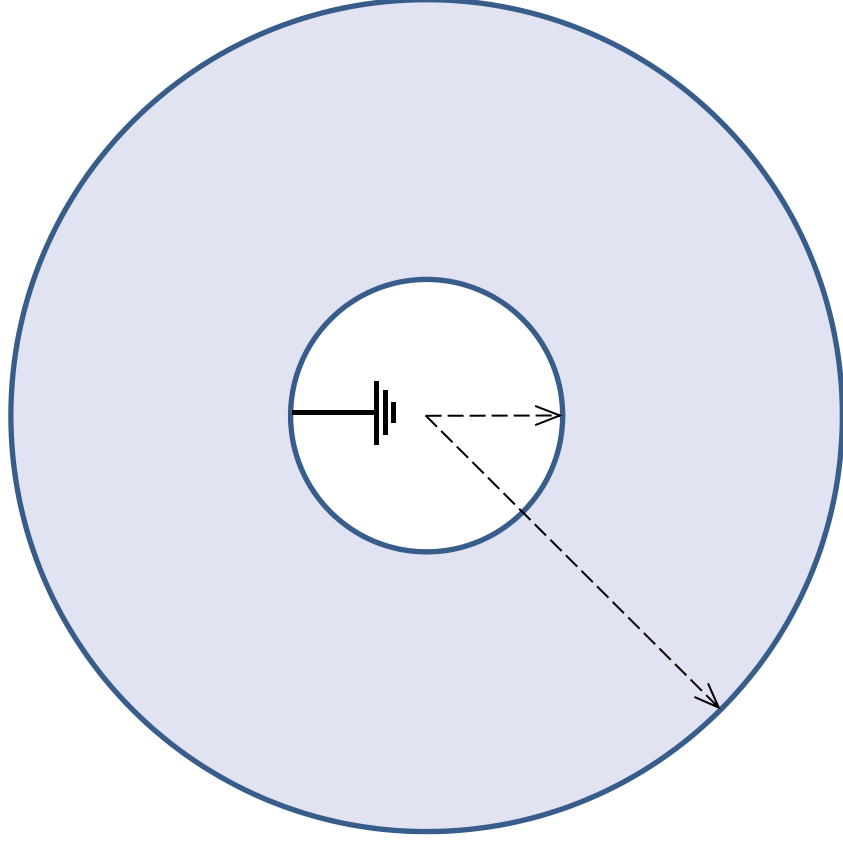




# 3. Solución Ecuaciones

- Método Numérico: Diferencias finitas

**EJERCICIO:** Calcular el potencial dentro de la región cilíndrica presentada:



$$V(r_0) = 0$$

$$V(r_1) = 5 \text{ V}$$

$$r_0 = 1 \text{ cm}$$

$$r_1 = 2 \text{ cm}$$

$$\epsilon_r = 5$$

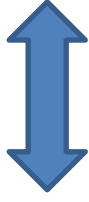
$$\nabla^2 V = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

# 3. Solución Ecuaciones

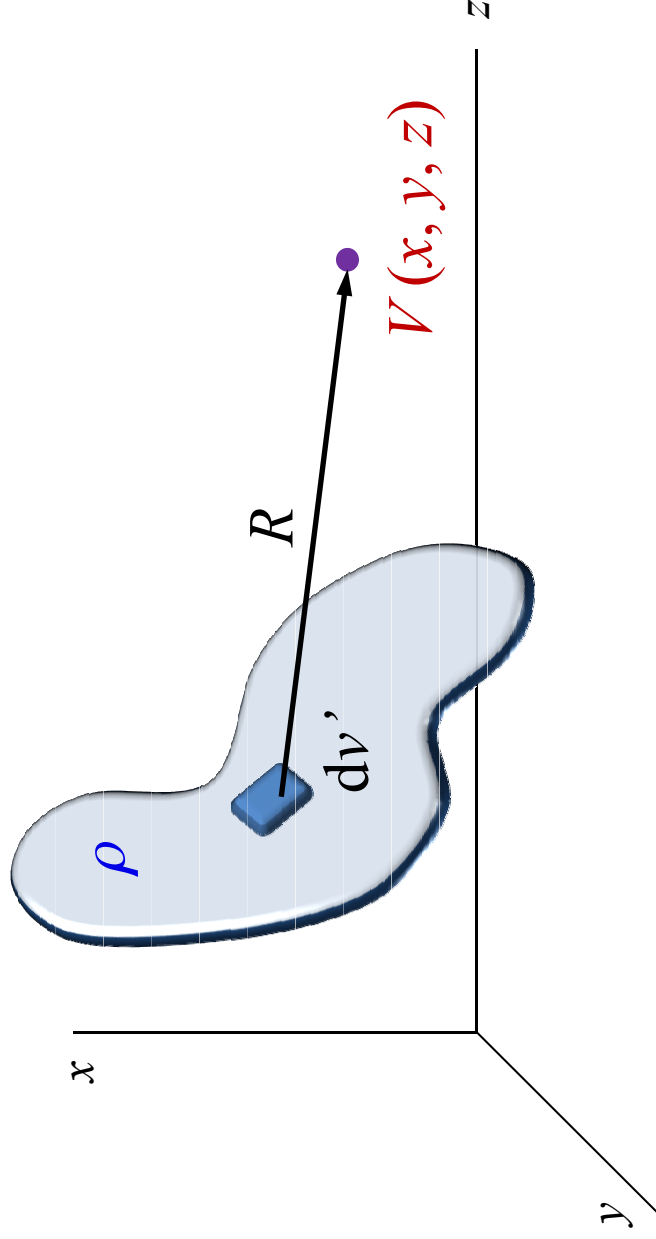
- Método Numérico: Método de momentos

**PROBLEMA:** Conocido el potencial  $V$  en una región, determinar la distribución  $\rho$

$$\nabla^2 V = \rho/\epsilon$$



$$V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_v \frac{\rho(x', y', z')}{R} dv'$$



# 3. Solución Ecuaciones

- Método Numérico: Método de momentos

**PROBLEMA:** Conocido el potencial  $V$  en una región, determinar la distribución  $\rho$

$$\nabla^2 V = \rho/\epsilon \quad \longleftrightarrow \quad V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\rho(x', y', z')}{R} dv'$$

- Asumimos una solución del tipo:

$$\rho(x, y, z) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \rho_i(x, y, z)$$

$\alpha_i$ : constantes a ser determinadas

$\rho_i$ : funciones preseleccionadas

# 3. Solución Ecuaciones

- Método Numérico: Método de momentos

**PROBLEMA:** Conocido el potencial  $V$  en una región, determinar la distribución  $\rho$

$$\nabla^2 V = \rho/\epsilon \quad \longleftrightarrow \quad V(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_v \frac{\rho(x', y', z')}{R} dv'$$

- Aplicamos esto a un punto  $(x_j, y_j, z_j)$  de la región donde conocemos  $V$  :

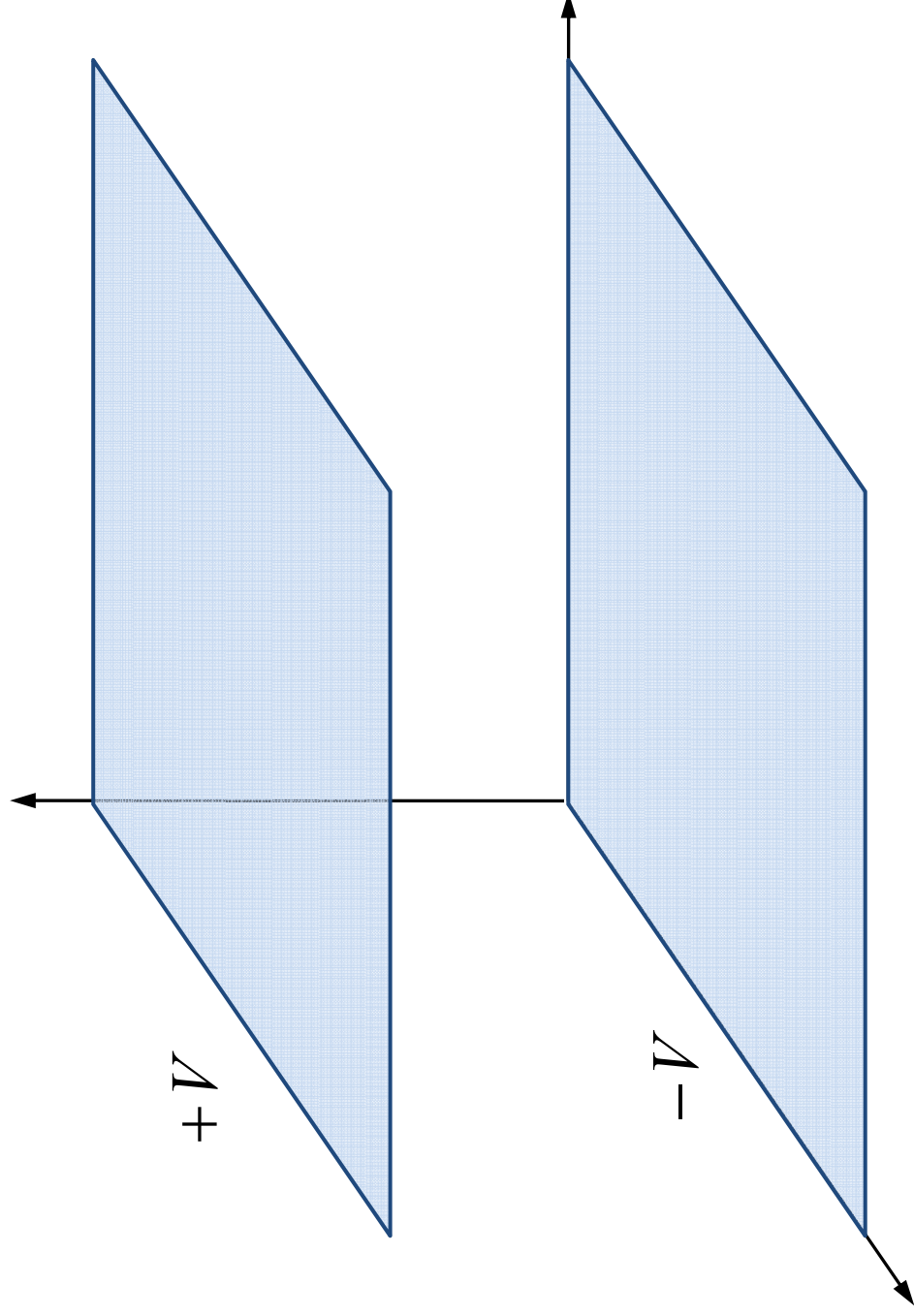
$$V_j = V(x_j, y_j, z_j) = \sum_{i=1}^N \frac{\alpha_i}{4\pi\epsilon_0} \int_v \frac{\rho_i(x', y', z')}{R_{ij}} dv' = \sum_{i=1}^N \alpha_i K_{ij}$$

- Aplicando a  $N$  puntos tenemos  $N$  ecuaciones con  $N$  incógnitas ( $\alpha_i$ )

# 3. Solución Ecuaciones

- Método Numérico: Método de momentos

**EJEMPLO:** Determinar capacitancia sin despreciar efectos de borde

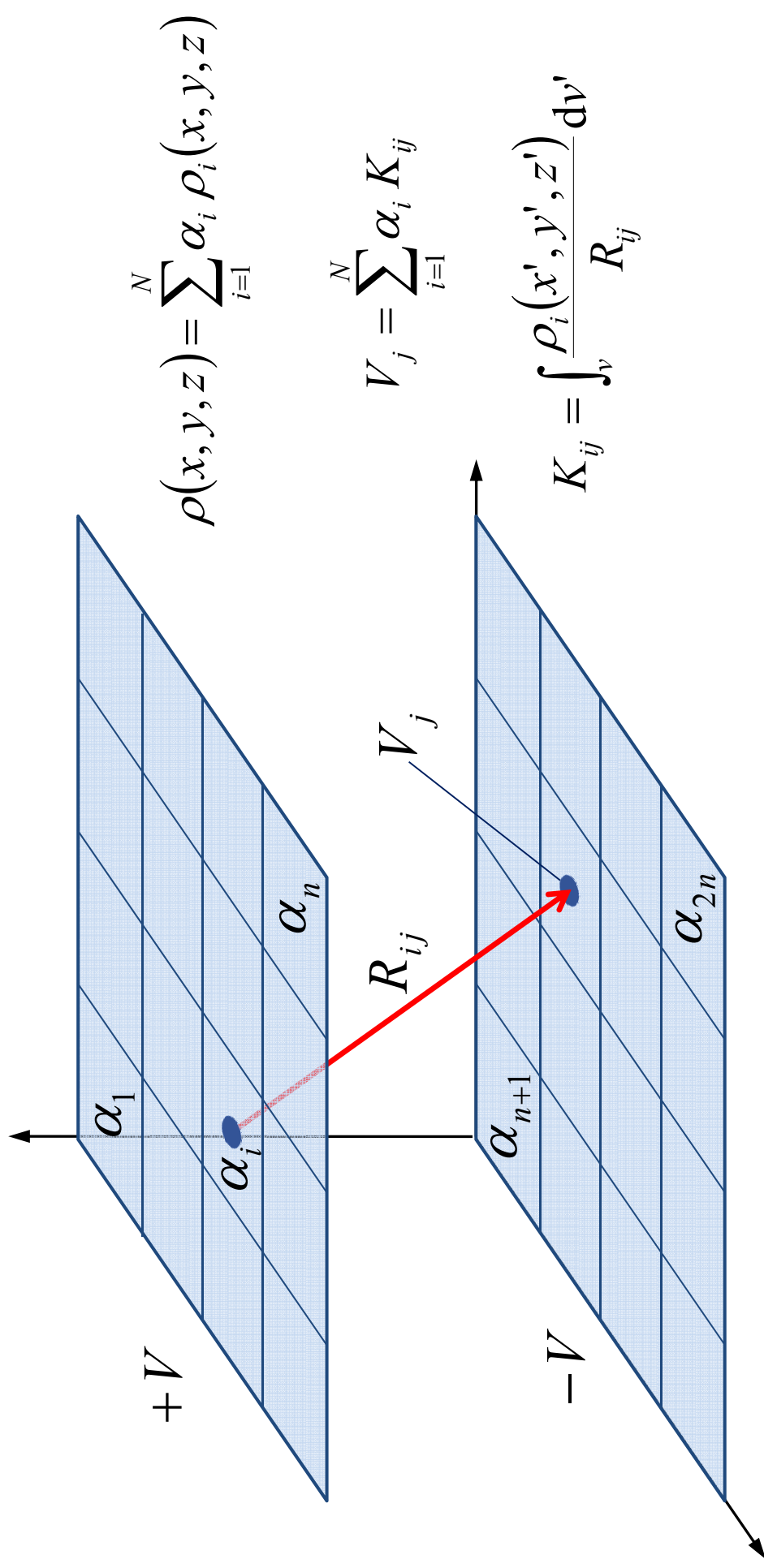


$$C = \frac{Q}{2V} = \frac{\int_s \rho_s ds}{2V}$$

# 3. Solución Ecuaciones

- Método Numérico: Método de momentos

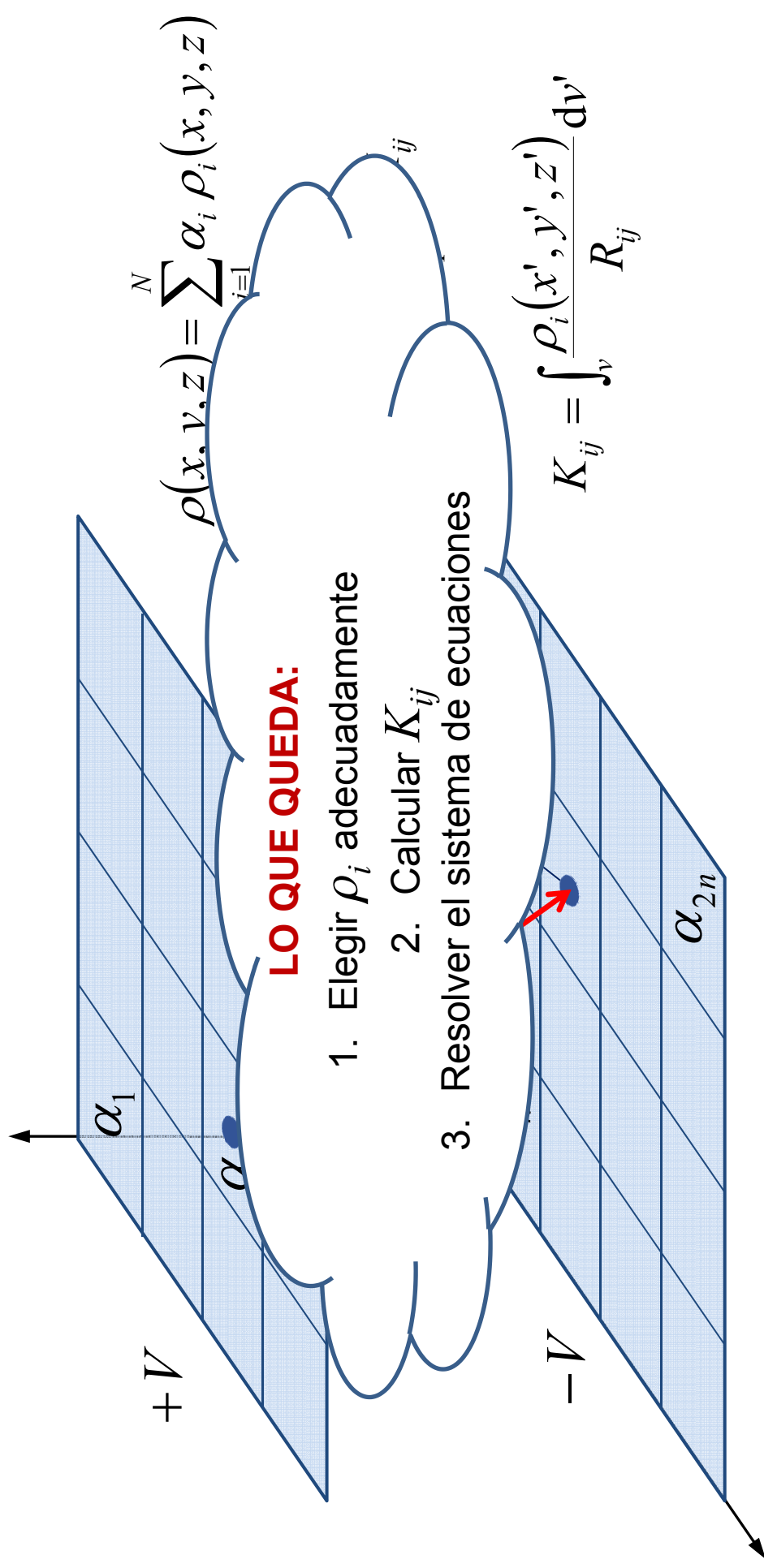
**EJEMPLO:** Determinar capacitancia sin despreciar efectos de borde



# 3. Solución Ecuaciones

- Método Numérico: Método de momentos

**EJEMPLO:** Determinar capacitancia sin despreciar efectos de borde



# Colorín Colorado

- El método de imágenes se puede aplicar a distribuciones de carga o corriente cerca de planos perfectamente conductores



# Colorín Colorado

- Hemos revisado 2 métodos numéricos:
  - Diferencias finitas:
    - Conocemos distribución de carga, calculamos potencial.
  - Método de momentos:
    - Conocemos potencial en una región, calculamos distribución de carga
- Estos métodos se pueden extender para variaciones en el tiempo. Ver Laboratorio 1.