

Electromagnetismo Aplicado:

II. Planteamiento y Solución de Campos Electromagnéticos Estáticos y de Baja Frecuencia

F.P. Mena

Primavera 2011

II. Campos Electromagnéticos Estáticos y de Baja Frecuencia


- Vector de Poyntig
- Solución a las ecuaciones de Maxwell
 - Campos armónicos
- Solución a las ecuaciones de potenciales
 - Bajas vs. altas frecuencias
 - Métodos analítico, numérico y mixto.

2. Solución de las EM

- Campos armónicos
 - Variación sinusoidal en el tiempo

$$\mathcal{E}_x(x, y, z, t) = E_x(x, y, z) \cos(\omega t + \theta_x) = \operatorname{Re}(E_x e^{j(\omega t + \theta_x)}) = \operatorname{Re}(\hat{E}_x e^{j\omega t})$$

$$\hat{E}_x = E_x e^{j\theta_x}$$


$$\mathcal{E}(x, y, z, t) = \operatorname{Re}[\underbrace{(\hat{E}_x \mathbf{a}_x + \hat{E}_y \mathbf{a}_y + \hat{E}_z \mathbf{a}_z)}_{\hat{\mathbf{E}}(x, y, z)} e^{j\omega t}]$$


$$\mathcal{E}(x, y, z, t) = \operatorname{Re}[\hat{\mathbf{E}}(x, y, z) e^{j\omega t}]$$

2. Solución de las EM

- Campos armónicos
 - Variación sinusoidal en el tiempo

$$\mathcal{E}(x, y, z, t) \Rightarrow \hat{\mathbf{E}}(x, y, z)e^{j\omega t}$$

$$\mathcal{D}(x, y, z, t) \Rightarrow \hat{\mathbf{D}}(x, y, z)e^{j\omega t}$$

$$\mathcal{B}(x, y, z, t) \Rightarrow \hat{\mathbf{B}}(x, y, z)e^{j\omega t}$$

$$\mathcal{H}(x, y, z, t) \Rightarrow \hat{\mathbf{H}}(x, y, z)e^{j\omega t}$$

EJERCICIO: Aplicar a la ley de Ampère $\nabla \times \mathcal{H} = \mathcal{J}_f + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t}$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow j\omega$$

2. Solución de las EM

- Campos armónicos
 - Ecuaciones de Maxwell (se reduce la variable t)

Ley	Forma General	Campos Armónicos
Faraday:	$\nabla \times \mathcal{E} = -\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t}$	$\nabla \times \hat{\mathbf{E}} = -j\omega \hat{\mathbf{B}}$
Ampère:	$\nabla \times \mathcal{H} = \mathcal{J}_f + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t}$	$\nabla \times \hat{\mathbf{H}} = \hat{\mathbf{J}}_f + j\omega \hat{\mathbf{D}}$
Gauss:	$\nabla \cdot \mathcal{D} = \rho_f$	$\nabla \cdot \hat{\mathbf{D}} = \hat{\rho}_f$
Gauss – mag.:	$\nabla \cdot \mathcal{B} = 0$	$\nabla \cdot \hat{\mathbf{B}} = 0$

2. Solución de las EM

- Campos armónicos
 - Vector de Poynting

$$\hat{\mathbf{S}} = \hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{H}}^*$$

— TEOREMA: $\mathbf{S}_{av} = \frac{1}{2} \text{Re} \hat{\mathbf{S}}$ [W/m²]

2. Solución de las EM

- Campos armónicos


— TEOREMA:

$$\mathbf{S}_{\text{av}} = \frac{1}{2} \text{Re} \hat{\mathbf{S}}$$

Demostración:

$$\mathcal{E} = \text{Re}[\hat{\mathbf{E}} e^{j\omega t}] = \frac{1}{2} [\hat{\mathbf{E}} e^{j\omega t} + \hat{\mathbf{E}}^* e^{-j\omega t}]$$

$$\mathcal{H} = \text{Re}[\hat{\mathbf{H}} e^{j\omega t}] = \frac{1}{2} [\hat{\mathbf{H}} e^{j\omega t} + \hat{\mathbf{H}}^* e^{-j\omega t}]$$


$$\begin{aligned} \mathbf{S} = \mathcal{E} \times \mathcal{H} = & \underbrace{\frac{1}{4} [\hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{H}}^* + \hat{\mathbf{E}}^* \times \hat{\mathbf{H}}]}_{2 \text{Re}[\hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{H}}^*]} + \underbrace{\frac{1}{4} [\hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{H}} e^{j2\omega t} + \hat{\mathbf{E}}^* \times \hat{\mathbf{H}}^* e^{-j2\omega t}]}_{2 \text{Re}[\hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{H}} e^{j2\omega t}]} \end{aligned}$$


2. Solución de las EM


- Campos armónicos

— TEOREMA:

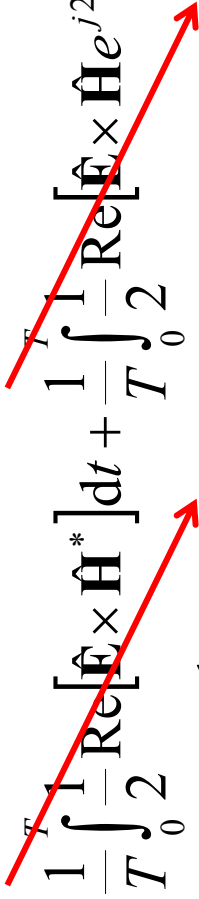
$$\mathbf{S}_{\text{av}} = \frac{1}{2} \text{Re} \hat{\mathbf{S}}$$

Demostración:


$$s = \frac{1}{2} \text{Re}[\hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{H}}^*] + \frac{1}{2} \text{Re}[\hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{H}} e^{j2\omega t}]$$


$$\mathbf{S}_{\text{av}} = \frac{1}{T} \int_0^T s \, dt$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} \text{Re}[\hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{H}}^*] \, dt + \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1}{2} \text{Re}[\hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{H}} e^{j2\omega t}] \, dt$$

 $\frac{1}{2} \text{Re}[\hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{H}}^*]$ 0

2. Solución de las EM

- Campos armónicos

EJERCICIO: Una antena produce el campo electromagnético dado por:

$$\mathcal{E} = \frac{E_0}{r} \sin \theta \sin \left[\omega \left(t - \frac{r}{u_0} \right) \right] \mathbf{a}_\theta$$

$$\mathcal{H} = \frac{E_0}{r \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0}} \sin \theta \sin \left[\omega \left(t - \frac{r}{u_0} \right) \right] \mathbf{a}_\phi$$

Calcule la potencia promedio irradiada por la antena.

3. Ecuaciones Potenciales

- Potenciales (ver clase # 9).

Vectorial:

$$\nabla \cdot \mathcal{B} = 0$$



$$\mathcal{B} = \nabla \times \mathcal{A}$$

Escalar:

$$\nabla \times \mathcal{E} = -\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t}$$



$$\mathcal{E} + \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} = -\nabla \varphi$$

3. Ecuaciones Potenciales

- Combinación de las E.M. con potenciales conducen a ecuaciones de onda para potenciales (ver clase # 9).

Vectorial:

$$\nabla^2 \mathcal{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial t^2} = -\mu\mathcal{J}$$

Escalar:

$$\nabla^2 \varphi - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

3. Ecuaciones Potenciales

- Que se simplifican en casos especiales:

$$\nabla^2 \mathcal{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial t^2} = -\mu\mathcal{J}$$



$$\nabla^2 \mathcal{A} = -\mu\mathcal{J}$$



$$\nabla^2 \mathcal{A} = 0$$

Campos
estáticos

Sin cargas ni
corrientes

$$\nabla^2 \varphi - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}$$



$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon}$$



$$\nabla^2 \varphi = 0$$

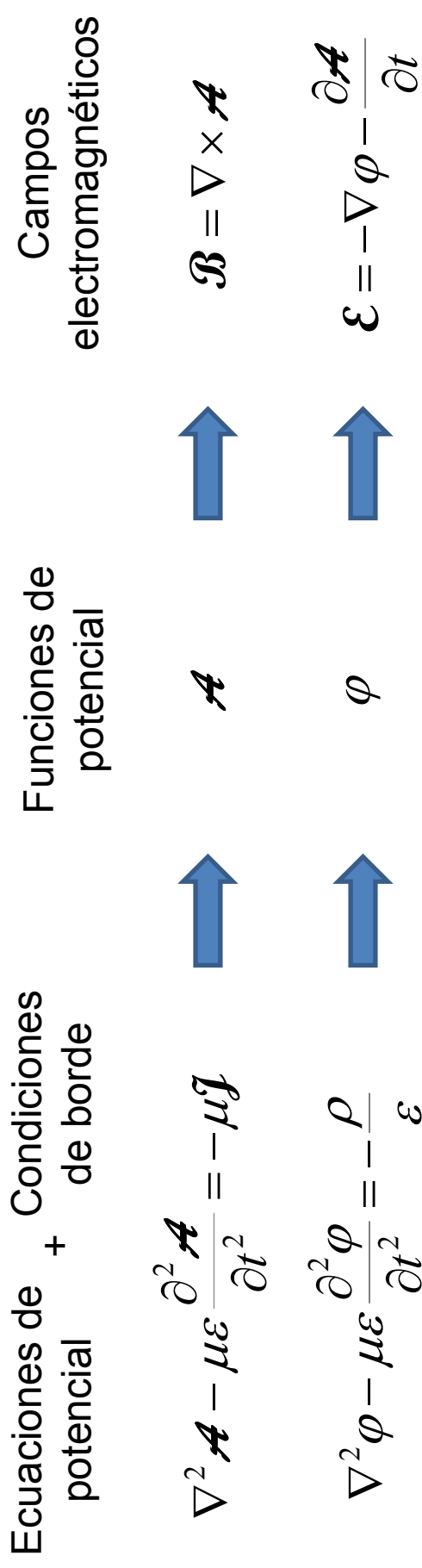
Ecuación de
onda

Ecuación de
Poisson

Ecuación de
Laplace

3. Ecuaciones Potenciales

- En ciertos casos, es más fácil resolver las ecuaciones de potencial para obtener \mathcal{A} y φ
- Con \mathcal{A} y φ se pueden obtener los campos electromagnéticos (sin pasar por las EM)



3. Ecuaciones Potenciales

- Las ecuaciones de P/L también pueden aplicarse para bajas frecuencias.
- Ecuaciones potenciales para campos armónicos:

$$\nabla^2 \mathcal{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial t^2} = -\mu\mathcal{J}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow j\omega$$



$$\nabla^2 \hat{\mathbf{A}} + \omega^2 \mu\epsilon \hat{\mathbf{A}} = -\mu \hat{\mathbf{J}}$$

$$\nabla^2 \phi - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

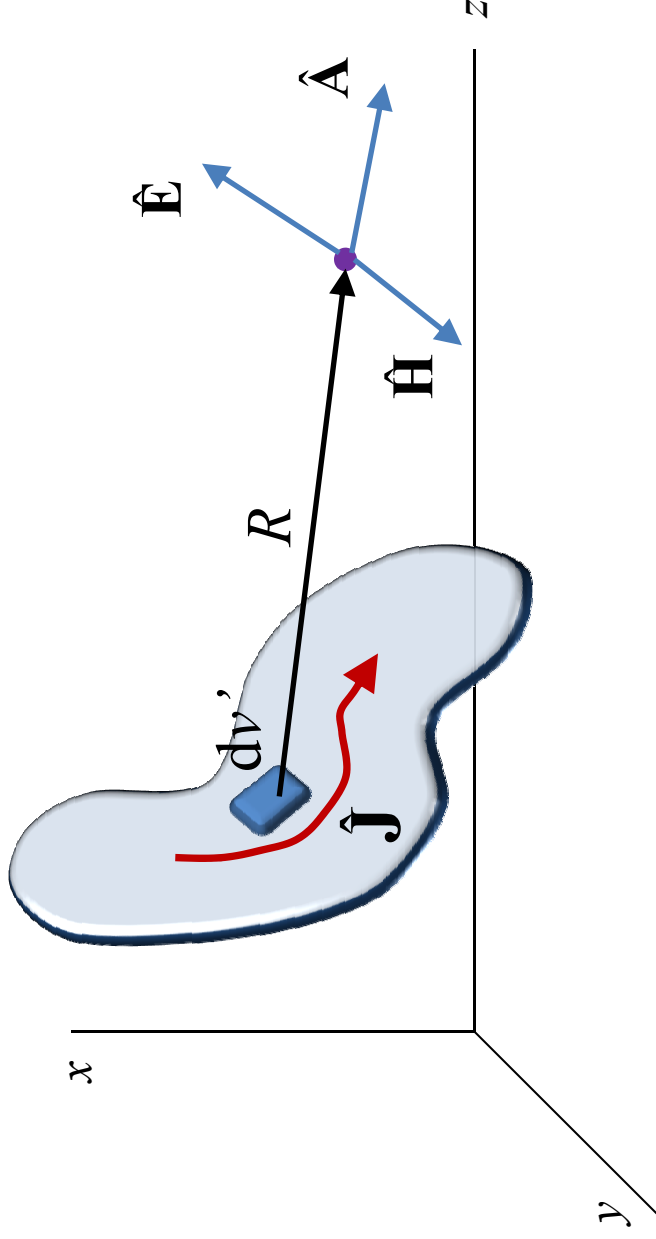
$$\nabla^2 \hat{\phi} + \omega^2 \mu\epsilon \hat{\phi} = -\frac{\hat{\rho}}{\epsilon}$$

3. Ecuaciones Potenciales

- Solución formal (ver cap. 9 Clayton)

$$\nabla^2 \hat{\mathbf{A}} + \omega^2 \mu \varepsilon \hat{\mathbf{A}} = -\mu \hat{\mathbf{J}} \quad \longrightarrow \quad \hat{\mathbf{A}}(x, y, z) = \frac{\mu}{4\pi} \int_v \frac{\hat{\mathbf{J}}(x', y', z')}{R} e^{-jR\omega\sqrt{\mu\varepsilon}} dv'$$

$$\nabla^2 \hat{\phi} + \omega^2 \mu \varepsilon \hat{\phi} = -\frac{\hat{\rho}}{\varepsilon} \quad \longrightarrow \quad \hat{\phi}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_v \frac{\hat{\rho}(x', y', z')}{R} e^{-jR\omega\sqrt{\mu\varepsilon}} dv'$$



3. Ecuaciones Potenciales

- Solución formal (ver cap. 9 Clayton)

$$\begin{aligned} \nabla^2 \hat{\mathbf{A}} + \omega^2 \mu \varepsilon \hat{\mathbf{A}} &= -\mu \hat{\mathbf{J}} & \longrightarrow & \hat{\mathbf{A}}(x, y, z) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\hat{\mathbf{J}}(x', y', z')}{R} e^{-jR\omega\sqrt{\mu\varepsilon}} dV' \\ \nabla^2 \hat{\phi} + \omega^2 \mu \varepsilon \hat{\phi} &= -\frac{\hat{\rho}}{\varepsilon} & \longrightarrow & \hat{\phi}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_V \frac{\hat{\rho}(x', y', z')}{R} e^{-jR\omega\sqrt{\mu\varepsilon}} dV' \end{aligned}$$

NOTA: Compare con el caso estático

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{A} &= -\mu \mathbf{J} & \longleftrightarrow & \mathbf{A}(x, y, z) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(x', y', z')}{R} dV' \\ \nabla^2 \phi &= -\rho/\varepsilon & \longleftrightarrow & \phi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi\varepsilon} \int_V \frac{\rho(x', y', z')}{R} dV' \end{aligned}$$

3. Ecuaciones Potenciales

- Altas y bajas frecuencias:

Alta frecuencia: $\hat{A}(x, y, z) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{\hat{J}(x', y', z')}{R} e^{-jR\omega\sqrt{\mu\epsilon}} dv'$

Estático: $A(x, y, z) = \frac{\mu}{4\pi} \int_V \frac{J(x', y', z')}{R} dv'$

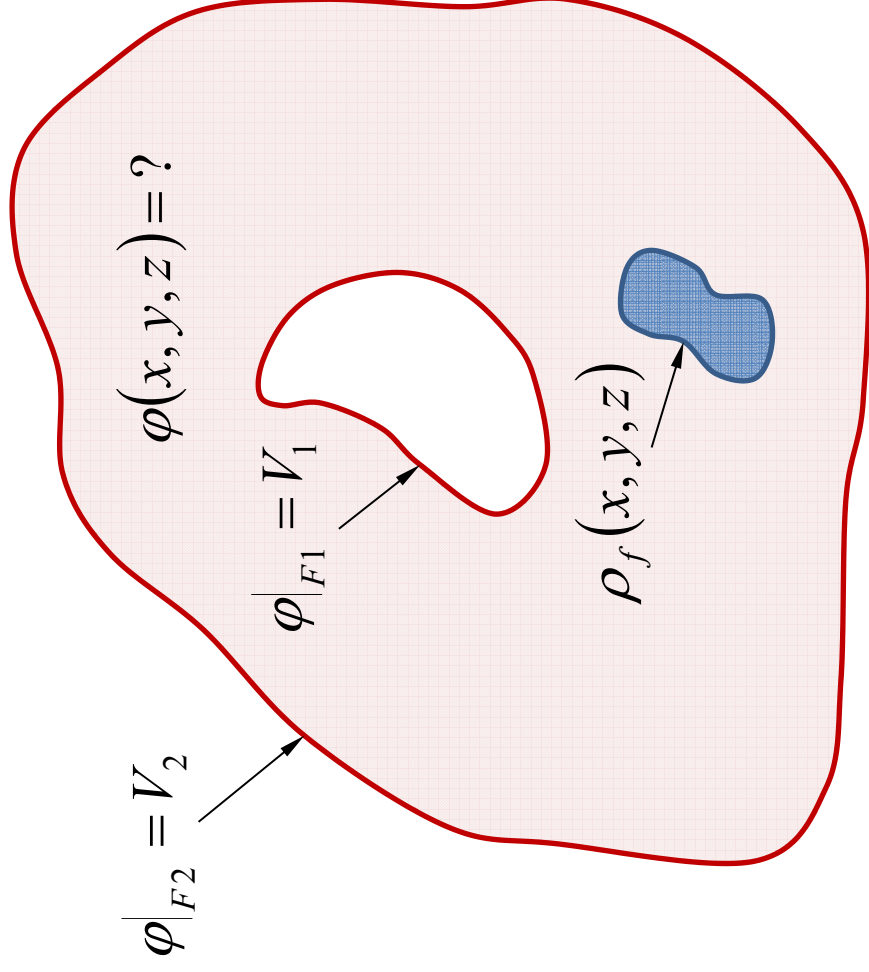
Baja frecuencia: $e^{-jR_{\max}\omega\sqrt{\mu\epsilon}} \approx 1 \quad \longleftrightarrow \quad R_{\max}\omega\sqrt{\mu\epsilon} \ll 1$

EJEMPLO: $\epsilon = 80 \epsilon_0$; $\mu = 3000 \mu_0$; $R_{\max} = 100 \text{ m}$; $f = \omega/2\pi = 50 \text{ Hz}$

$\uparrow R_{\max}\omega\sqrt{\mu\epsilon} = 0,05 \quad \uparrow \quad e^{-jR_{\max}\omega\sqrt{\mu\epsilon}} = 0.999 + j0.052$

3. Ecuaciones Potenciales

- Caso estático:



$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho_f}{\varepsilon}$$

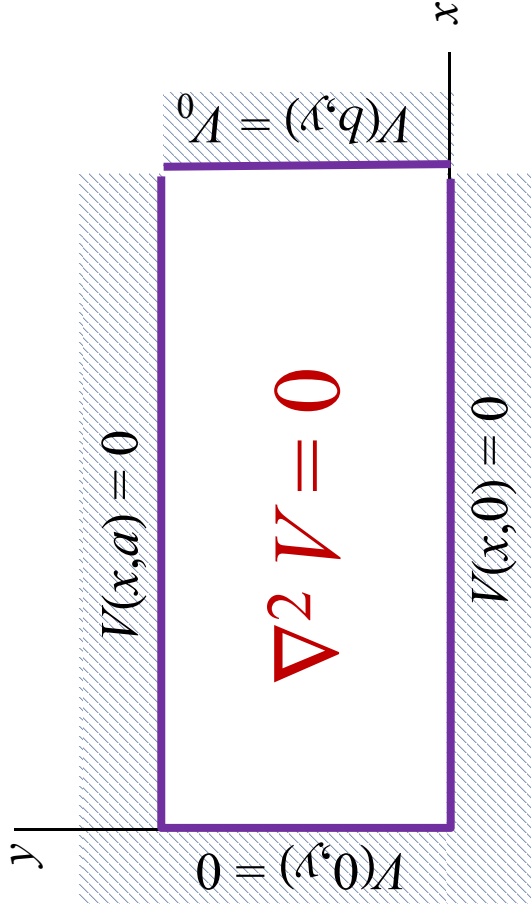
3. Ecuaciones Potenciales

- Propiedades de la solución de las ecuaciones P/L
 - Dadas las condiciones de frontera, la solución es única.
- *Condiciones de Dirichlet*: Se conoce la función en la frontera.
- *Condiciones de Neumann*: Se conoce el valor de la derivada normal de la función en la frontera.

3. Ecuaciones Potenciales

- Propiedades de la solución de las ecuaciones P/L
 - Si f_1 y f_2 satisfacen la ecuación de P/L por separado, entonces combinaciones lineales de ambas también satisfacen la ecuación de P/L.

EJEMPLO:



$$V_n(x, y) = C_n \sinh \frac{n\pi x}{b} \sinh \frac{n\pi y}{a}$$

satisface solamente 3 de las 4 condiciones de borde

$$V(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sinh \frac{n\pi x}{b} \sinh \frac{n\pi y}{a}$$

satisface todas las condiciones de borde

Colorín Colorado

- En campos armónicos, $\mathcal{E}(x,y,z,t) \Rightarrow \hat{\mathbf{E}}(x,y,z)e^{j\omega t}$, se simplifican las EM.
- Combinando las EM obtenemos la ecuación de onda.
- Para el caso estático esta ecuación se reduce a las ecuaciones de Poisson/Laplace.