

Electromagnetismo Aplicado:

II. Planteamiento y Solución de Campos Electromagnéticos Estáticos y de Baja Frecuencia

F.P. Mena

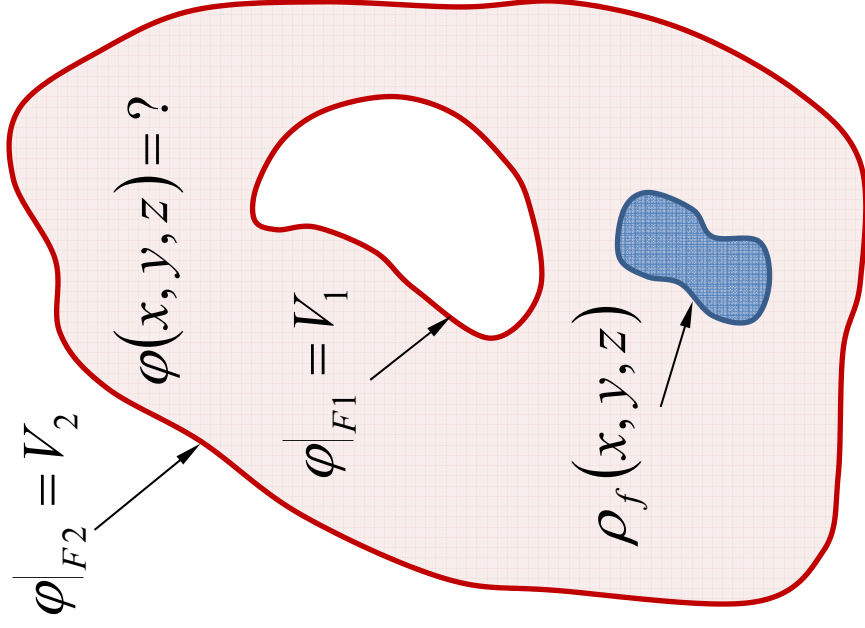
Primavera 2011

II. Campos Electromagnéticos Estáticos y de Baja Frecuencia

- Vector de Poynting
- Solución a las ecuaciones de Maxwell
 - Campos armónicos
- Solución a las ecuaciones de potenciales
 - Bajas vs. altas frecuencias
 - Métodos analítico, numérico y mixto.

3. Ecuaciones Potenciales

- Caso estático:



$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho_f}{\varepsilon}$$

- Su solución es única si se conocen una de las dos condiciones:

Condiciones de Dirichlet: Se conoce la función en la frontera.

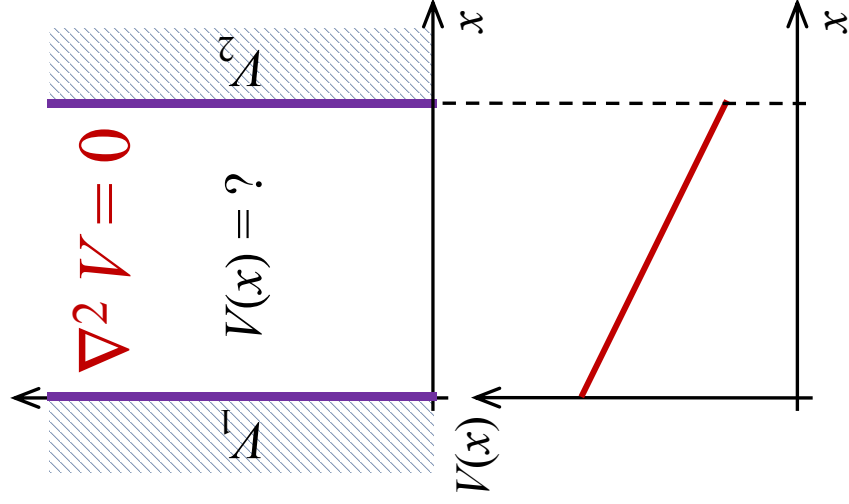
Condiciones de Neumann: Se conoce el valor de la derivada normal de la función en la frontera.

- Si f_n son soluciones independientes, entonces combinaciones lineales también son solución.

3. Ecuaciones Potenciales

- Soluciones en 1D – Integración directa

EJEMPLO 1: Encontrar el potencial, como función de la posición, dentro un capacitor de placas paralelas



$$\frac{d^2 V}{dx^2} = 0$$

$$V = C_1 x + C_2$$

$$V(x=0) = V_1 = C_1 \cdot 0 + C_2$$

$$C_2 = V_1$$

$$V(x=b) = V_2 = C_1 b + C_2$$

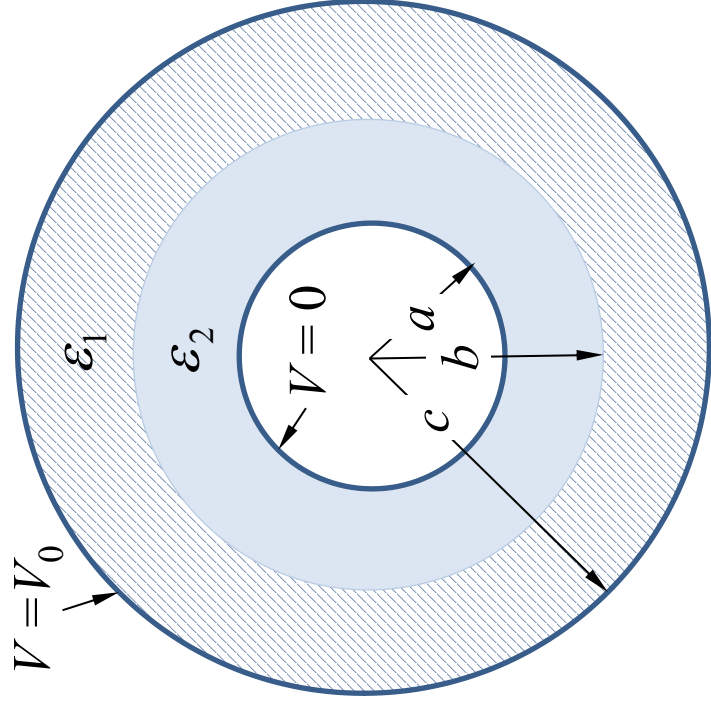
$$C_1 = (V_2 - V_1)/b$$

$$V = \frac{1}{b}(V_2 - V_1)x + V_1$$

3. Ecuaciones Potenciales

- Soluciones en 1D – Integración directa

EJEMPLO 2: Encontrar el potencial dentro del capacitor esférico



$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

3. Ecuaciones Potenciales

- Soluciones en 2D & 3D – Separación de variables
 - Coordenadas rectangulares

$$\nabla^2 V = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

Asumimos la siguiente solución: $V(x, y, z) = X(x)Y(y)Z(z)$

$$\begin{array}{c} \longrightarrow \ddot{X} Y Z + X \ddot{Y} Z + X Y \ddot{Z} = 0 \longrightarrow \end{array}$$

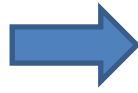
$\left[\ddot{X} \frac{X}{X} + \frac{Y}{Y} + \frac{\ddot{Z}}{Z} \right] = 0$
 $\left[\ddot{X} \frac{X}{X} \right] \quad \left[\frac{Y}{Y} \right] \quad \left[\frac{\ddot{Z}}{Z} \right]$
 $k_x^2 \quad k_y^2 \quad k_z^2$

3. Ecuaciones Potenciales

- Soluciones en 2D & 3D – Separación de variables
 - Coordenadas rectangulares



$$\ddot{X} = k_x^2 X$$



$$\ddot{Y} = k_y^2 Y$$



$$\ddot{Z} = k_z^2 Z$$



$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = 0$$

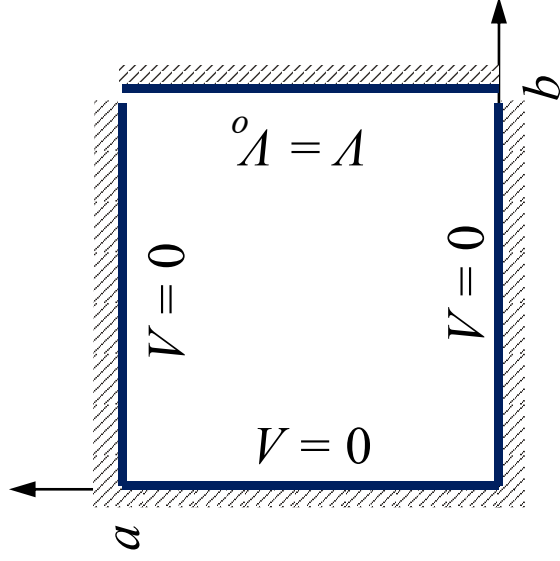
$$\begin{array}{lll} X = a_x \cosh k_x x & Y = a_y \cosh k_y y & Z = a_z \cosh k_z z \\ + b_x \sinh k_x x & + b_y \sinh k_y y & + b_z \sinh k_z z \end{array}$$

NOTA: Las constantes a , b y k se obtienen de las condiciones de frontera

3. Ecuaciones Potenciales

- Soluciones en 2D & 3D – Separación de variables
 - Coordenadas rectangulares

EJERCICIO: Encontrar V en la siguiente configuración



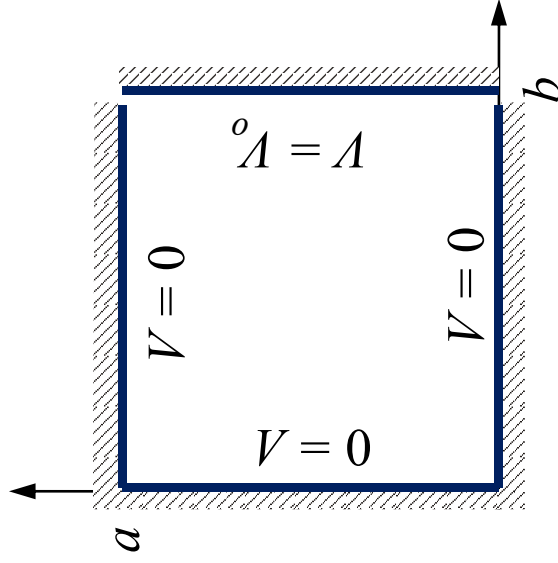
AYUDA:

1. Escribir la forma general de V de acuerdo a lo anterior.
2. Utilizar las condiciones de frontera. Empezar por las más fáciles.
3. Utilizar la relación para k .

3. Ecuaciones Potenciales

- Soluciones en 2D & 3D – Separación de variables
 - Coordenadas rectangulares

EJERCICIO: Encontrar V en la siguiente configuración



1. Escribir la forma general de V

$$V(x, y) = (a_x \cosh k_x x + b_x \sinh k_x x) \times (a_y \cosh k_y y + b_y \sinh k_y y)$$

2. Condiciones de frontera

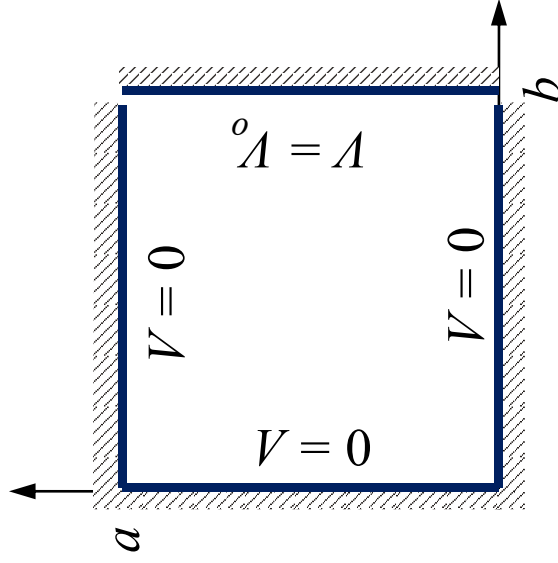
$$V(0, y) = (a_x) \times (a_y \cosh k_y y + b_y \sinh k_y y) = 0$$

➡ $a_x = 0$

3. Ecuaciones Potenciales

- Soluciones en 2D & 3D – Separación de variables
 - Coordenadas rectangulares

EJERCICIO: Encontrar V en la siguiente configuración



1. Escribir la forma general de V

$$V(x, y) = b_x \sinh k_x x \times (a_y \cosh k_y y + b_y \sinh k_y y)$$

2. Condiciones de frontera

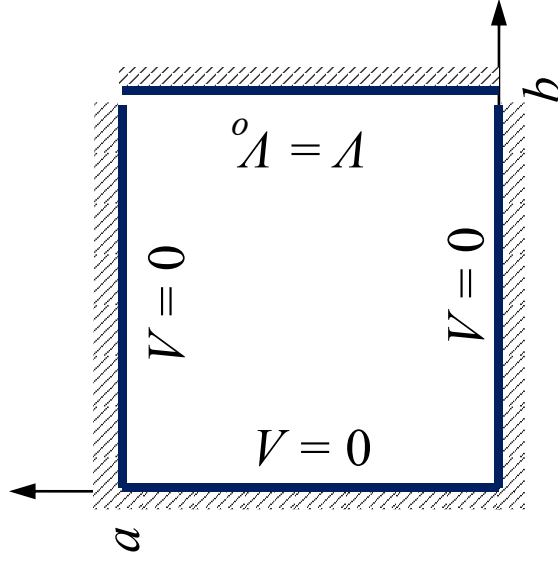
$$V(x, 0) = b_x \sinh k_x x \times (a_y) = 0$$

➡ $a_y = 0$

3. Ecuaciones Potenciales

- Soluciones en 2D & 3D – Separación de variables
 - Coordenadas rectangulares

EJERCICIO: Encontrar V en la siguiente configuración



1. Escribir la forma general de V

$$V(x, y) = b_x \sinh k_x x \times b_y \sinh k_y y \\ = C' \sinh k_x x \sinh k_y y$$

2. Condiciones de frontera

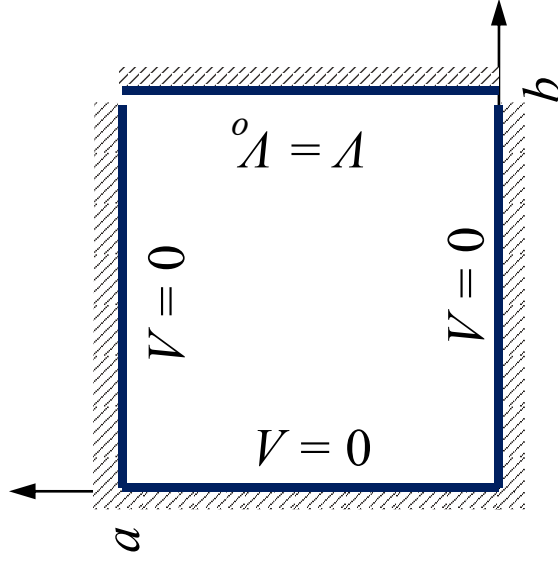
$$V(x, a) = C' \sinh k_x x \sinh k_y a = 0$$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\hspace{1cm}} \sinh k_y a = 0 \end{array} \quad \xrightarrow{\hspace{1cm}} k_y a = 0 \quad \vee \quad k_y a = jn\pi$$

3. Ecuaciones Potenciales

- Soluciones en 2D & 3D – Separación de variables
 - Coordenadas rectangulares

EJERCICIO: Encontrar V en la siguiente configuración



1. Escribir la forma general de V

$$V(x, y) = C \sinh k_x x \sin \frac{n\pi}{a} y$$

3. Relación para k :

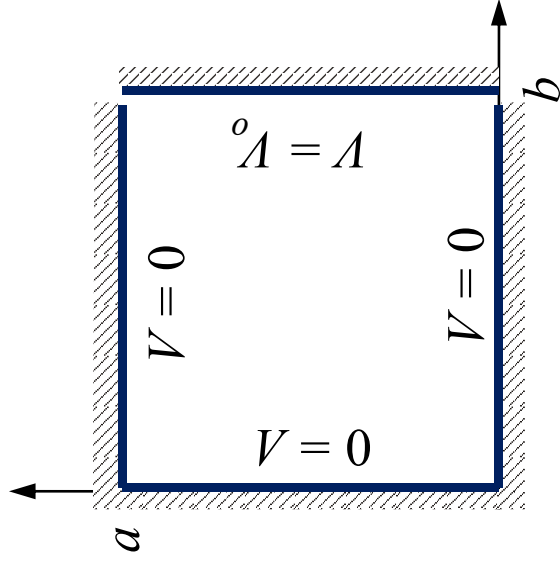
$$k_x^2 + k_y^2 = 0$$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{\quad} k_x^2 = -k_y^2 &= -\left(\frac{jn\pi}{a}\right)^2 \xrightarrow{\quad} k_x = \frac{n\pi}{a} \end{aligned}$$

3. Ecuaciones Potenciales

- Soluciones en 2D & 3D – Separación de variables
 - Coordenadas rectangulares

EJERCICIO: Encontrar V en la siguiente configuración



1. Escribir la forma general de V

$$V(x, y) = C \sinh \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{a} y$$

2. Condiciones de frontera

$$V(b, y) = C \sinh \frac{n\pi}{a} b \sin \frac{n\pi}{a} y = V_0$$

No se puede
cumplir

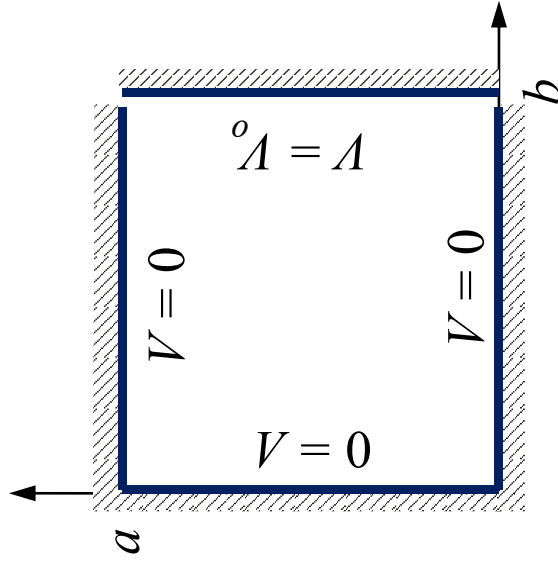
$$V(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sinh \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{a} y$$



3. Ecuaciones Potenciales

- Soluciones en 2D & 3D – Separación de variables
 - Coordenadas rectangulares

EJERCICIO: Encontrar V en la siguiente configuración



1. Escribir la forma general de V

$$V(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sinh \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{a} y$$

2. Condiciones de frontera

$$f(y) = V(b, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sinh \frac{n\pi}{a} b \sin \frac{n\pi}{a} y = V_0$$

Serie de
Fourier

3. Ecuaciones Potenciales

- Soluciones en 2D & 3D – Separación de variables
 - Coordenadas rectangulares

INTERMEZZO MATEMÁTICO: Cualquier función periódica en $[-l, +l]$ puede escribirse como

$$f(y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

donde

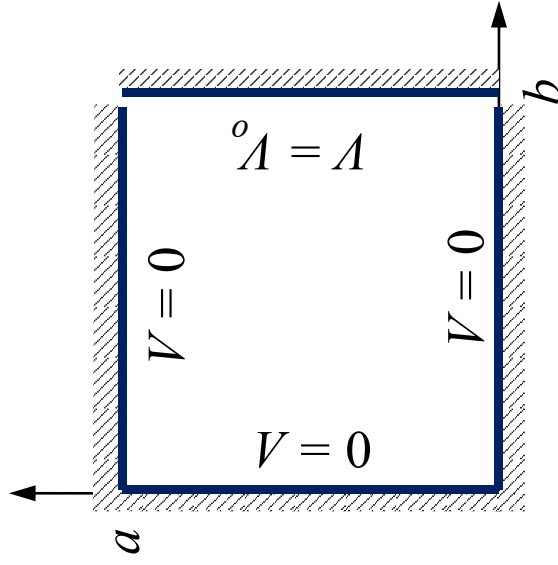
$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{+l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{+l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

3. Ecuaciones Potenciales

- Soluciones en 2D & 3D – Separación de variables
 - Coordenadas rectangulares

EJERCICIO: Encontrar V en la siguiente configuración



1. Escribir la forma general de V

$$V(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sinh \frac{n\pi}{a} x \sin \frac{n\pi}{a} y$$

2. Condiciones de frontera

$$f(y) = V(b, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sinh \frac{n\pi}{a} b \sin \frac{n\pi}{a} y = V_0$$

Serie de
Fourier

$$\uparrow C_n \sinh \frac{n\pi b}{a} = \frac{2}{a} \int_0^a f(y) \sin \left(\frac{n\pi}{a} y \right) dy = \frac{2}{a} \int_0^a V_0 \sin \left(\frac{n\pi}{a} y \right) dy$$

3. Ecuaciones Potenciales

- Soluciones en 2D & 3D – Separación de variables
 - Coordenadas cilíndricas (con simetría axial)

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

Asumimos la siguiente solución: $V(r, z) = R(r)Z(z)$

$$\begin{array}{ccc} \longrightarrow & -\frac{\ddot{Z}}{Z} = \frac{\ddot{R}}{R} + \frac{1}{R} \frac{\dot{R}}{r} \frac{\dot{R}}{R} & \longrightarrow \\ & \left\{ \begin{array}{l} \frac{\ddot{Z}}{Z} = T^2 \\ \frac{\ddot{R}}{R} + \frac{1}{R} \frac{\dot{R}}{r} \frac{\dot{R}}{R} = -T^2 \end{array} \right. & \end{array}$$

3. Ecuaciones Potenciales

- Soluciones en 2D & 3D – Separación de variables
 - Coordenadas cilíndricas (con simetría axial)

$$\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{1}{r} \frac{\dot{R}}{R} = -T^2$$

Para $T^2 > 0$: $R(r) = C_1 J_0(T r) + C_2 N_0(T r)$

$J_0(r)$: Función de Bessel del primer tipo y orden 0

$N_0(r)$: Función de Bessel del segundo tipo y orden 0

3. Ecuaciones Potenciales

- Soluciones en 2D & 3D – Separación de variables
 - Coordenadas cilíndricas (con simetría axial)

$$\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{1}{r} \frac{\dot{R}}{R} = -T^2$$

Para $T^2 > 0$: $R(r) = C_1 J_0(T r) + C_2 N_0(T r)$

$$J_0(T r) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{(T r/2)^{2m}}{(m!)^2}$$

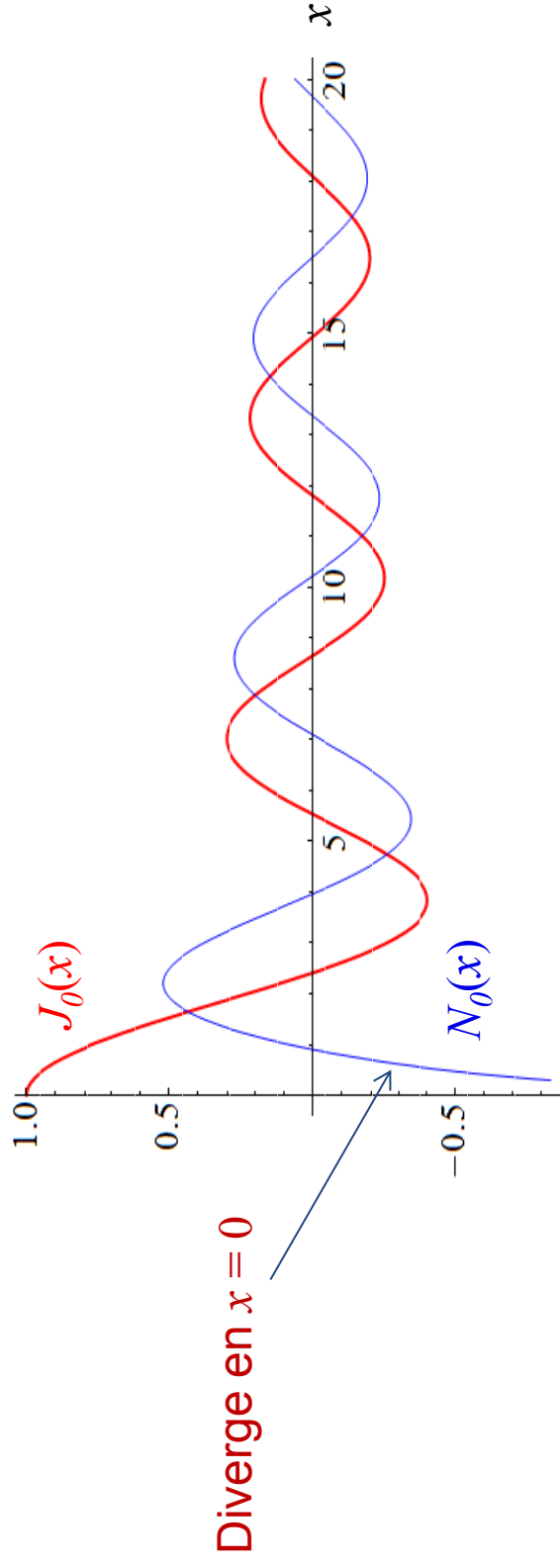
$$N_0(T r) = \frac{2}{\pi} [\ln(T r) + \gamma] J_0(T r) - \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{(T r/2)^{2m}}{(m!)^2} \sum_{k=1}^m \frac{1}{k}$$

3. Ecuaciones Potenciales

- Soluciones en 2D & 3D – Separación de variables
 - Coordenadas cilíndricas (con simetría axial)

$$\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{1}{r} \frac{\dot{R}}{R} = -T^2$$

Para $T^2 > 0$: $R(r) = C_1 J_0(T r) + C_2 N_0(T r)$



3. Ecuaciones Potenciales

- Soluciones en 2D & 3D – Separación de variables
 - Coordenadas cilíndricas (con simetría axial)

$$\ddot{R} + \frac{1}{r} \dot{R} = -T^2 \quad \longrightarrow \quad \ddot{R} + \frac{1}{r} \dot{R} + T^2 R = 0$$

Método de Frobenius: $R(r) = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i r^i$

$$\left\{ \begin{aligned} T^2 R &= T^2 \sum_{i=0} a_i r^i \\ \frac{1}{r} \dot{R} &= \frac{1}{r} \sum_{i=1} i a_i r^{i-1} = \sum_{i=1} i a_i r^{i-2} = a_1 r^{-1} + \sum_{i=2} i a_i r^{i-2} = a_1 r^{-1} + \sum_{i=0} (i+2) a_{i+2} r^i \\ \ddot{R} &= \sum_{i=2} i(i-1) a_i r^{i-2} = \sum_{i=0} (i+2)(i+1) a_{i+2} r^i \end{aligned} \right.$$

3. Ecuaciones Potenciales

- Soluciones en 2D & 3D – Separación de variables
 - Coordenadas cilíndricas (con simetría axial)

$$\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{1}{r} \frac{\dot{R}}{R} = -T^2 \quad \longrightarrow \quad \ddot{R} + \frac{1}{r} \dot{R} + T^2 R = 0$$

Método de Frobenius: $R(r) = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i r^i$

$$\uparrow \quad T^2 \sum_{i=0} a_i r^i + a_1 r^{-1} + \sum_{i=0} (i+2) a_{i+2} r^i + \sum_{i=0} (i+2)(i+1) a_{i+2} r^i = 0$$

$$\uparrow \quad a_1 r^{-1} + \sum_{i=0} [T^2 a_i + (i+2) a_{i+2} + (i+2)(i+1) a_{i+2}] r^i = 0$$

$$\uparrow \quad a_1 = 0; \quad T^2 a_i + (i+2) a_{i+2} + (i+2)(i+1) a_{i+2} = 0$$


3. Ecuaciones Potenciales


- Soluciones en 2D & 3D – Separación de variables
 - Coordenadas cilíndricas (con simetría axial)

$$\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{1}{r} \frac{\dot{R}}{R} = -T^2 \quad \longrightarrow \quad \ddot{R} + \frac{1}{r} \dot{R} + T^2 R = 0$$

Método de Frobenius: $R(r) = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i r^i$


$$a_1 = 0; \quad T^2 a_i + (i+2)a_{i+2} + (i+2)(i+1)a_{i+2} = 0$$


$$a_1 = 0; \quad a_{i+2} = -\frac{T^2}{(i+2)^2} a_i$$


$$a_{2m+1} = 0; \quad a_{2m} = a_0 (-1)^m \frac{(T/2)^{2m}}{(m!)^2}$$

3. Ecuaciones Potenciales

- Soluciones en 2D & 3D – Separación de variables
 - Coordenadas cilíndricas (con simetría axial)

$$\frac{\ddot{R}}{R} + \frac{1}{r} \frac{\dot{R}}{R} = -T^2 \quad \longrightarrow \quad \ddot{R} + \frac{1}{r} \dot{R} + T^2 R = 0$$

Método de Frobenius: $R(r) = \sum_{i=0}^{+\infty} a_i r^i$

$$a_{2m+1} = 0; \quad a_{2m} = a_0 (-1)^m \frac{(T/2)^{2m}}{(m!)^2}$$

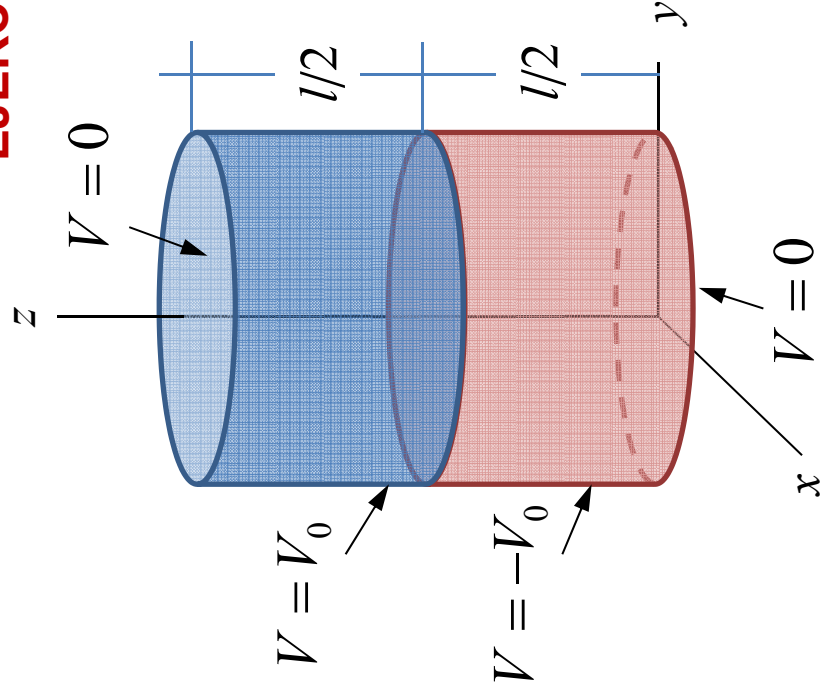
$$R(r) = \sum_{m=0}^{\infty} a_0 (-1)^m \frac{(T/2)^{2m}}{(m!)^2} r^{2m}$$

Función de Bessel del
primer tipo y orden 0

3. Ecuaciones Potenciales

- Soluciones en 2D & 3D – Separación de variables
 - Coordenadas cilíndricas (con simetría axial)

EJERCICIO: Encontrar V en la siguiente configuración



AYUDA:

1. Escribir la forma general de V de acuerdo a lo anterior.
2. Utilizar las condiciones de frontera. Empezar por las más fáciles.
3. Utilizar la relación para k .

Colorín Colorado

- Para problemas 1D integramos directamente.
- Para problemas 2D/3D separación de variables.
- Laplace en coordenadas rectangulares:

$$\ddot{X} = k_x^2 X \quad \longrightarrow \quad X = a_x \cosh k_x x + b_x \sinh k_x x$$

- Laplace en coordenadas cilíndricas simetría axial:

$$\ddot{R} + \frac{1}{R} \dot{R} = -T^2 \quad \longrightarrow \quad R(r) = C_1 J_0(T r) + C_2 N_0(T r)$$