

# Electromagnetismo Aplicado:

## II. Planteamiento y Solución de Campos Electromagnéticos Estáticos y de Baja Frecuencia

F.P. Mena

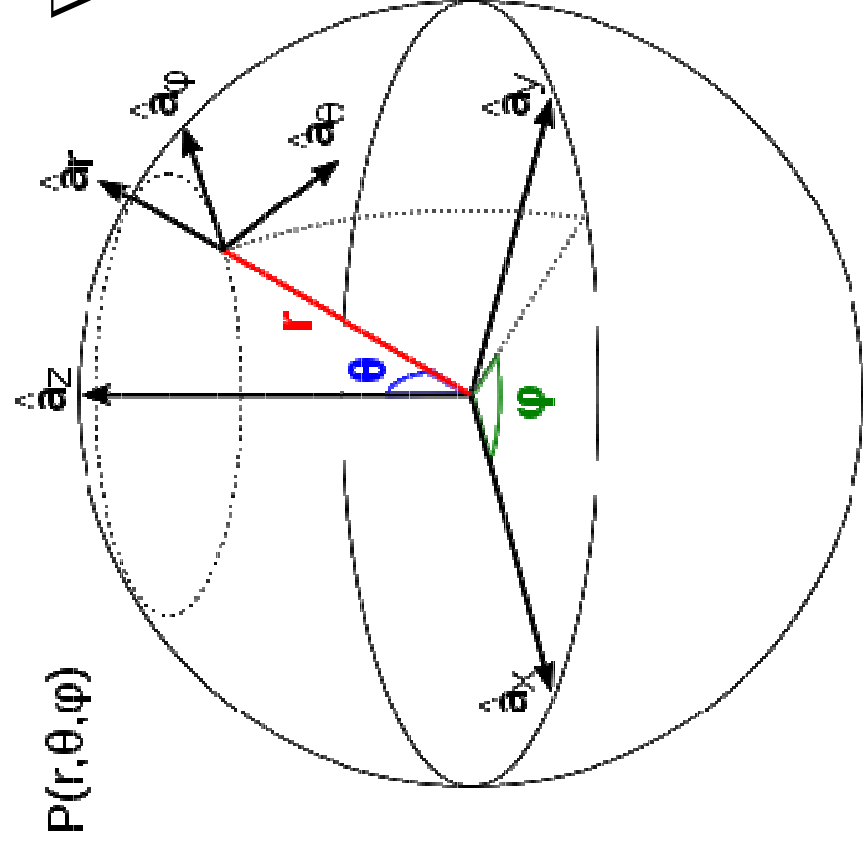
Primavera 2011

# II. Campos Electromagnéticos Estáticos y de Baja Frecuencia

- Vector de Poynting
- Solución a las ecuaciones de Maxwell
  - Campos armónicos
- Solución a las ecuaciones de potenciales
  - Bajas vs. altas frecuencias
  - Métodos analítico, numérico y mixto.

# 4. Ecuaciones Potenciales

- Soluciones en 2D & 3D – Separación de variables
  - Coordenadas esféricas (con simetría azimutal)



$P(r, \theta, \phi)$

$$\nabla^2 V = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2} = 0$$



$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) = 0$$

# 4. Ecuaciones Potenciales

- Soluciones en 2D & 3D – Separación de variables
  - Coordenadas esféricas (con simetría azimutal)

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial V}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) = 0$$

Asumimos la siguiente forma de la solución:  $V(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$




$$r\ddot{R}\Theta + 2\dot{R}\dot{\Theta} + \frac{1}{r}R\ddot{\Theta} + \frac{1}{r \tan \theta}R\dot{\Theta} = 0$$




$$r^2 \frac{\ddot{R}}{R} + 2r \frac{\dot{R}}{R} = - \frac{\ddot{\Theta}}{\Theta} - \frac{\dot{\Theta}}{\Theta \tan \theta} = m(m+1)$$

# 4. Ecuaciones Potenciales

- Soluciones en 2D & 3D – Separación de variables
  - Coordenadas esféricas (con simetría azimutal)


$$\left. \begin{aligned} r^2 \ddot{R} + 2r \dot{R} - m(m+1)R &= 0 \\ \ddot{\Theta} + \frac{1}{\tan \theta} \dot{\Theta} + m(m+1)\Theta &= 0 \end{aligned} \right\}$$

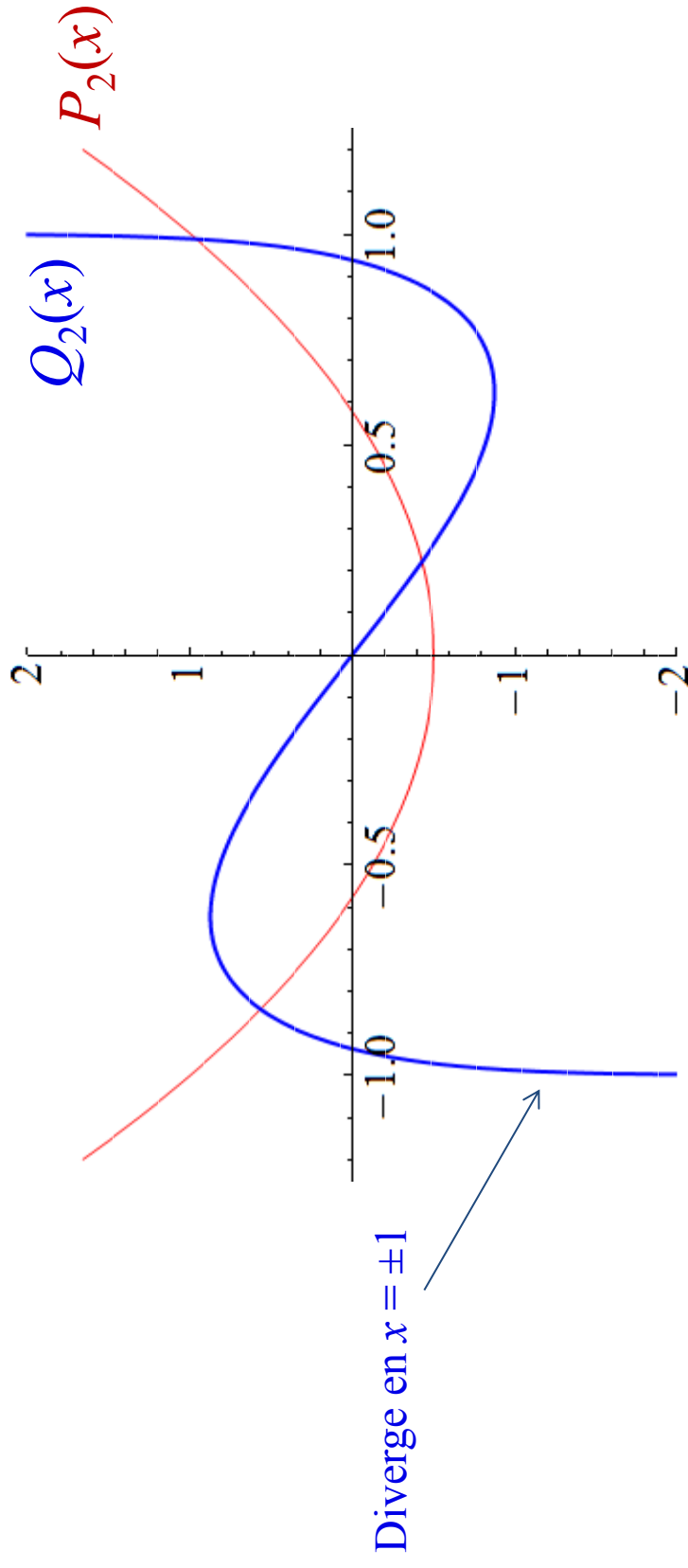

$$\left. \begin{aligned} R(r) &= C_1 r^m + C_2 r^{-(m+1)} \\ \Theta(\theta) &= C_3 P_m(\cos \theta) + C_4 Q_m(\cos \theta) \end{aligned} \right\}$$

$P_m$ : polinomios de Legendre  
 $Q_m$ : función de Legendre del segundo tipo

# 4. Ecuaciones Potenciales

- Soluciones en 2D & 3D – Separación de variables
  - Coordenadas esféricas (con simetría azimutal)

➔ 
$$V(r, \theta) = [C_1 r^m + C_2 r^{-(m+1)}] [C_3 P_m(\cos \theta) + C_4 Q_m(\cos \theta)]$$



## 4. Ecuaciones Potenciales

- Soluciones en 2D & 3D – Separación de variables
  - Coordenadas esféricas (con simetría azimutal)



$$V(r, \theta) = [C_1 r^m + C_2 r^{-(m+1)}] C_3 P_m(\cos \theta)$$

- $P_m(x)$  puede encontrarse con el método de Frobenius:

$$y = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$$



$$a_{i+2} = a_i \frac{i(i+1) - m(m+1)}{(i+1)(i+2)}$$

## 4. Ecuaciones Potenciales

- Soluciones en 2D & 3D – Separación de variables
  - Coordenadas esféricas (con simetría azimutal)



$$V(r, \theta) = [C_1 r^m + C_2 r^{-(m+1)}] C_3 P_m(\cos \theta)$$

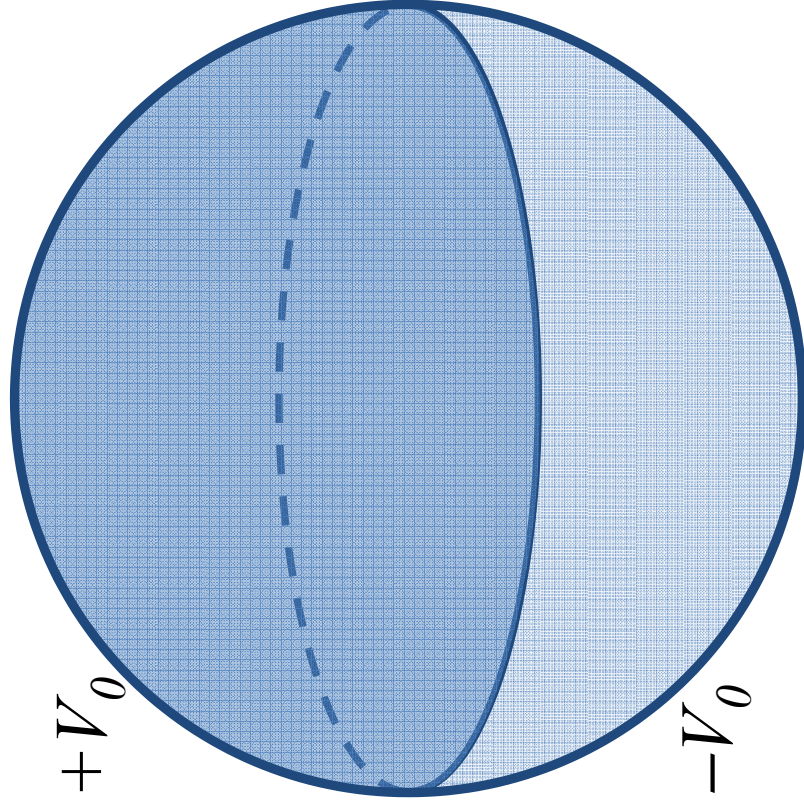
- Fórmula de Rodrigues

$$P_m(x) = \frac{1}{2^m m!} \frac{d}{dx} \left[ (x^2 - 1)^m \right]$$



# 4. Ecuaciones Potenciales

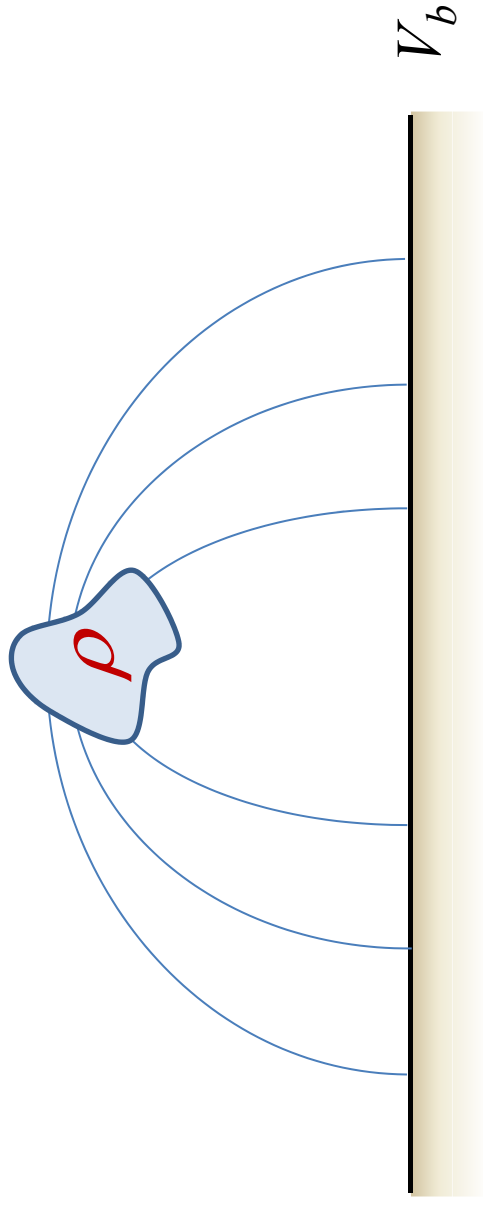
- Soluciones en 2D & 3D – Separación de variables
  - Coordenadas esféricas (con simetría azimutal)



**EJERCICIO:** Encontrar  $V$  en la siguiente configuración. La esfera está llena de aire.

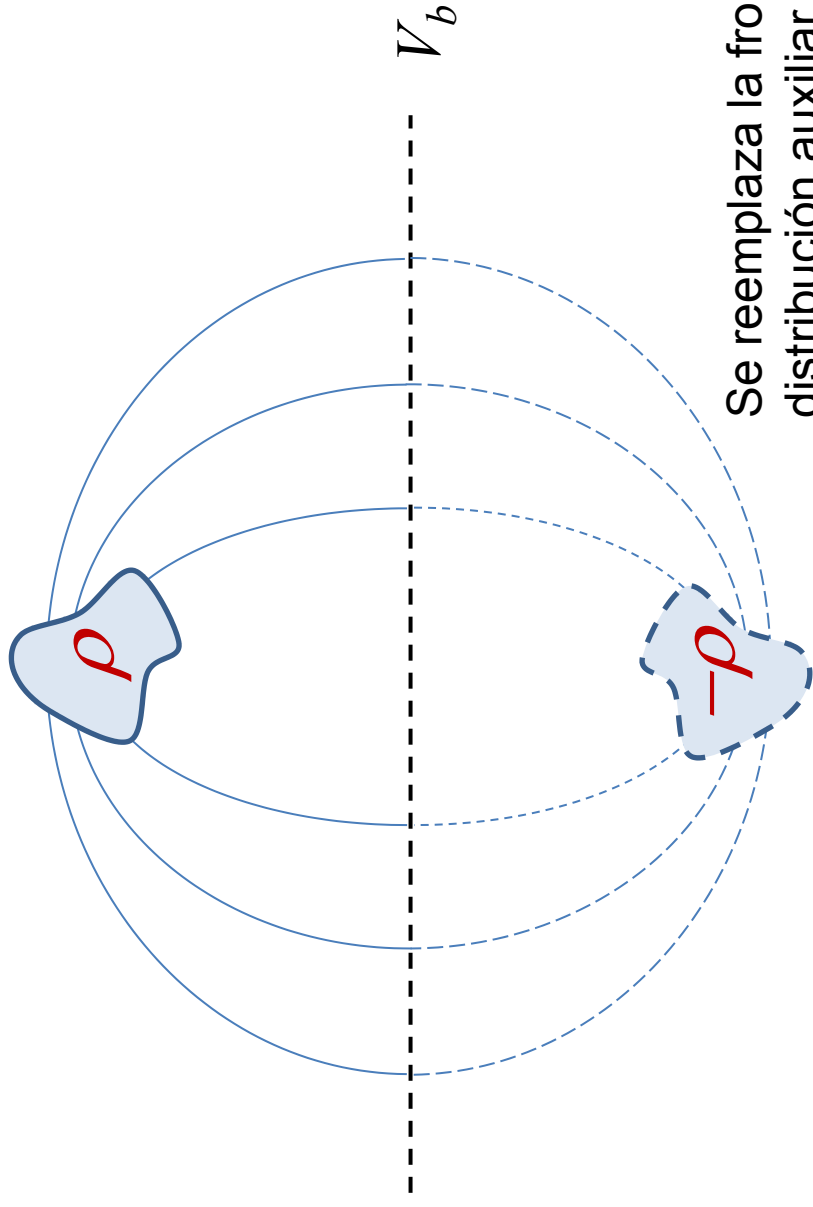
## 4. Ecuaciones Potenciales

- Método de imágenes



# 4. Ecuaciones Potenciales

- Método de imágenes

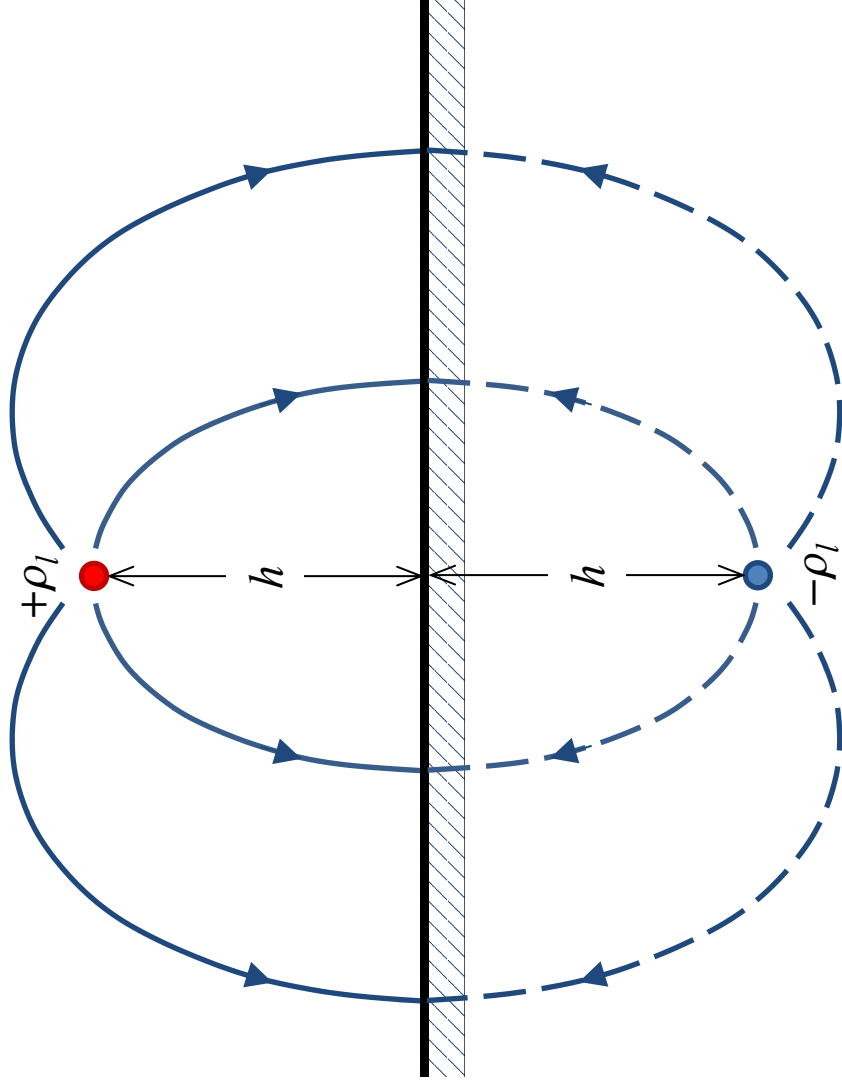


Se reemplaza la frontera con una  
distribución auxiliar que conserve  
las condiciones de borde

# 4. Ecuaciones Potenciales

- Método de imágenes

**EJEMPLO (línea de transmisión):** Calcular la capacitancia por unidad de longitud de una línea de radio  $r_c$  con densidad de carga  $\rho_l$  sobre un plano perfectamente conductor



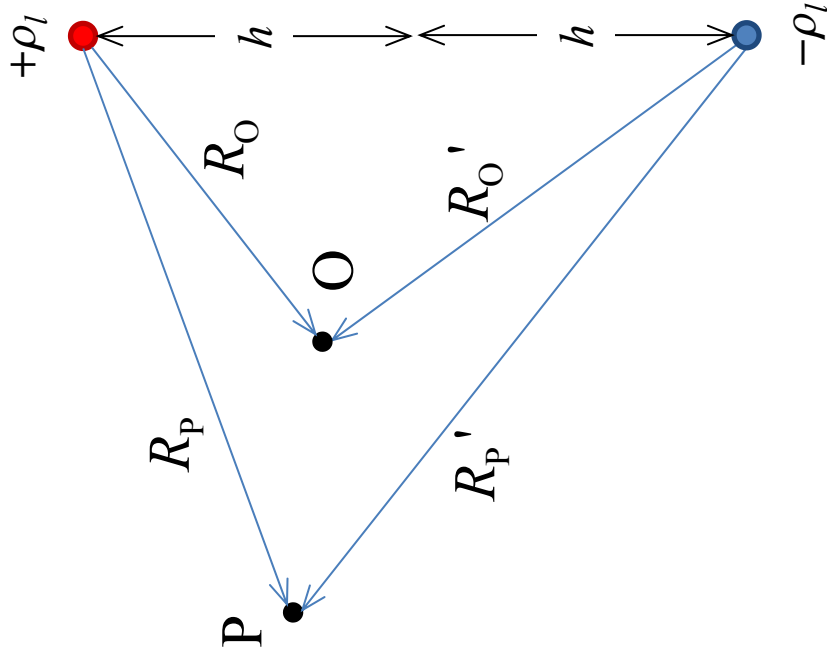
The circuit diagram shows two capacitors, each labeled  $c$ , connected in series between two terminals. The total capacitance is given by the equation:

$$\frac{1}{C_{tot}} = \frac{1}{c} + \frac{1}{c}$$

# 4. Ecuaciones Potenciales

- Método de imágenes

**EJEMPLO (línea de transmisión):** Calcular la capacitancia por unidad de longitud de una línea de radio  $r_c$  con densidad de carga  $\rho_l$  sobre un plano perfectamente conductor



$$V_P = V_{+\rho} + V_{-\rho}$$

$$\text{Ley de Gauss: } E_{+\rho} = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 R_p}$$

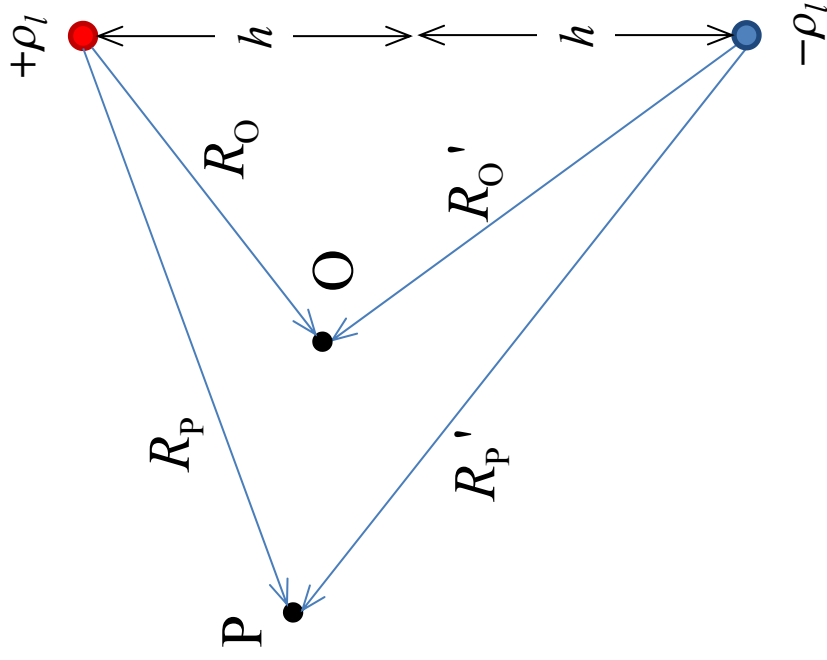
$$\text{Potencial: } V_{+\rho} = -\int_0^P \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0 r} dr = -\frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_o}{R_p}$$

$$V_P = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_o R_p'}{R_p R_o'}$$

# 4. Ecuaciones Potenciales

- Método de imágenes

**EJEMPLO (línea de transmisión):** Calcular la capacitancia por unidad de longitud de una línea de radio  $r_c$  con densidad de carga  $\rho_l$  sobre un plano perfectamente conductor



$$V_P = \frac{\rho_l}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{R_O R_P'}{R_P R_O'}$$

Si P y O están en la superficie de la línea:

$$\begin{aligned} R_P &= R_O' = r_c \\ R_O &= R_P' = 2h \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad V = \frac{\rho_l}{\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h}{r_c}$$

$$\uparrow \quad C_{l-2\text{lineas}} = \frac{Q_l}{V} = \frac{\pi\epsilon_0}{\ln(2h/r_c)}$$

$$\uparrow \quad C_l = \frac{2\pi\epsilon_0}{\ln(2h/r_c)}$$

# Colorín Colorado

- Laplace en coordenadas polares con simetría azimutal:

$$\begin{array}{ccc} r^2 \ddot{R} + 2r \dot{R} - m(m+1)R = 0 & \xrightarrow{\quad} & R(r) = C_1 r^m + C_2 r^{-(m+1)} \\ \ddot{\Theta} + \frac{1}{\tan \theta} \dot{\Theta} + m(m+1)\Theta = 0 & & \Theta(\theta) = C_3 P_m(\cos \theta) + C_4 Q_m(\cos \theta) \end{array}$$

- <http://functions.wolfram.com/>
- <http://mathworld.wolfram.com/>
- <http://dlmf.nist.gov/>

# Colorín Colorado

- El método de imágenes se puede aplicar a distribuciones de carga o corriente cerca de planos perfectamente conductores