

Electromagnetismo Aplicado:

III. Planteamiento y Solución de Campos Electromagnéticos de Alta Frecuencia

F.P. Mena

Primavera 2011

III. Alta Frecuencia


- A. Ecuación de Onda (Revisión)
 - Campos armónicos y potenciales.
- B. Ondas Planas.
 - Propagación de ondas en el espacio
- C. Líneas de transmisión.
 - Propagación de ondas en medios guiados
- D. Guías de onda.
 - Propagación dentro cavidades metálicas
- E. Antenas

1. Campos Armónicos

- Variación sinusoidal en el tiempo
 - Representación fasorial

$$\mathcal{E}_x(x, y, z, t) = E_x(x, y, z) \cos(\omega t + \theta_x) = \operatorname{Re}(E_x e^{j(\omega t + \theta_x)}) = \operatorname{Re}(\hat{E}_x e^{j\omega t})$$

$$\hat{E}_x = E_x e^{j\theta_x}$$


$$\mathcal{E}(x, y, z, t) = \operatorname{Re} \left[\underbrace{(\hat{E}_x \mathbf{a}_x + \hat{E}_y \mathbf{a}_y + \hat{E}_z \mathbf{a}_z)}_{\hat{\mathbf{E}}(x, y, z)} e^{j\omega t} \right]$$


$$\mathcal{E}(x, y, z, t) = \operatorname{Re} [\hat{\mathbf{E}}(x, y, z) e^{j\omega t}]$$

1. Campos Armónicos

- Variación sinusoidal en el tiempo
 - Representación fasorial

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(x, y, z, t) &\Rightarrow \hat{\mathbf{E}}(x, y, z)e^{j\omega t} \\ \mathcal{D}(x, y, z, t) &\Rightarrow \hat{\mathbf{D}}(x, y, z)e^{j\omega t} \\ \mathcal{B}(x, y, z, t) &\Rightarrow \hat{\mathbf{B}}(x, y, z)e^{j\omega t} \\ \mathcal{H}(x, y, z, t) &\Rightarrow \hat{\mathbf{H}}(x, y, z)e^{j\omega t}\end{aligned}$$

- Vector de Poynting

$$\mathbf{S} \equiv \mathcal{E} \times \mathcal{H} \quad \begin{array}{c} \text{blue arrow} \end{array} \quad \hat{\mathbf{S}} = \hat{\mathbf{E}} \times \hat{\mathbf{H}}^* \quad \begin{array}{c} \text{blue arrow} \end{array} \quad \mathbf{S}_{\text{av}} = \frac{1}{2} \text{Re} \hat{\mathbf{S}}$$

1. Campos Armónicos

- Ecuaciones de Maxwell (se reduce la variable t)
 - Derivada temporal $\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow j\omega$

Ley	Forma General	Campos Armónicos
Faraday:	$\nabla \times \mathcal{E} = -\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t}$	$\nabla \times \hat{\mathbf{E}} = -j\omega \hat{\mathbf{B}}$
Ampère:	$\nabla \times \mathcal{H} = \mathcal{J}_f + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t}$	$\nabla \times \hat{\mathbf{H}} = \hat{\mathbf{J}}_f + j\omega \hat{\mathbf{D}}$
Gauss:	$\nabla \cdot \mathcal{D} = \rho_f$	$\nabla \cdot \hat{\mathbf{D}} = \hat{\rho}_f$
Gauss – mag.:	$\nabla \cdot \mathcal{B} = 0$	$\nabla \cdot \hat{\mathbf{B}} = 0$

2. Ecuación de Onda

- Potenciales y ecuaciones de onda

Vectorial: $\nabla \cdot \mathcal{B} = 0$ \longrightarrow $\mathcal{B} = \nabla \times \mathcal{A}$ \longrightarrow $\nabla^2 \mathcal{A} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{j}$

Escalar: $\nabla \times \mathcal{E} = -\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t}$ \longrightarrow $\mathcal{E} + \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} = -\nabla \varphi$ \longrightarrow $\nabla^2 \varphi - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$

- Ecuación de onda en campos armónicos

$$\nabla^2 \mathcal{A} - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{j} \qquad \frac{\partial}{\partial t} \rightarrow j\omega \qquad \nabla^2 \hat{\mathbf{A}} + \omega^2 \mu \varepsilon \hat{\mathbf{A}} = -\mu \mathbf{j}$$

$$\nabla^2 \varphi - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon} \qquad \longrightarrow \qquad \nabla^2 \hat{\phi} + \omega^2 \mu \varepsilon \hat{\phi} = -\frac{\hat{\rho}}{\varepsilon}$$

IIIB: Ondas Planas

- Ecuación de onda para \mathcal{E} y \mathcal{H} .
- Onda plana uniforme.
- Conductores y dieléctricos.
- Profundidad pelicular.
- Polarización.
- Velocidad de grupo.
- Incidencia normal & oblicua.

1. Ecuación de Onda

- EM en una región:
 - Isotrópica, homogénea, lineal: $\mathcal{J} = \sigma \mathcal{E}$; $\mathcal{B} = \mu \mathcal{H}$; $\mathcal{D} = \varepsilon \mathcal{E}$;
 - Sin cargas libres: $\rho = 0$

$$\nabla \times \mathcal{E} = -\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathcal{E} = -\mu \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathcal{H} = \mathcal{J}_f + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathcal{H} = \sigma \mathcal{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}$$



$$\nabla \cdot \mathcal{D} = \rho_f$$

$$\nabla \cdot \mathcal{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathcal{B} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathcal{H} = 0$$

1. Ecuación de Onda

- Combinando estas ecuaciones:

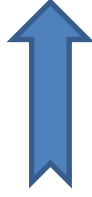
$$\nabla \times \mathcal{E} = -\mu \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \mathcal{H} = \sigma \mathcal{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}$$

$$\nabla \cdot \mathcal{E} = 0$$

$$\nabla \cdot \mathcal{H} = 0$$

Ejercicio:



ECUACION DE ONDA

$$\nabla^2 \mathcal{E} = \mu \sigma \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2}$$

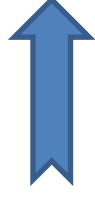
$$\nabla^2 \mathcal{H} = \mu \sigma \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial t^2}$$

1. Ecuación de Onda

- Ecuación de onda para campos armónicos:

$$\mathcal{E} = \hat{\mathbf{E}} e^{i\omega t}; \quad \mathcal{H} = \hat{\mathbf{H}} e^{i\omega t}$$

$$\nabla^2 \mathcal{E} = \mu\sigma \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2}$$



$$\nabla^2 \mathcal{H} = \mu\sigma \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \hat{\mathbf{E}} = \mu\sigma(j\omega \hat{\mathbf{E}}) + \mu\varepsilon(j\omega)^2 \hat{\mathbf{E}}$$

$$= j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon) \hat{\mathbf{E}}$$

$$\nabla^2 \hat{\mathbf{H}} = j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon) \hat{\mathbf{H}}$$

$$\underbrace{j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)}_{\gamma^2}$$

constante de propagación

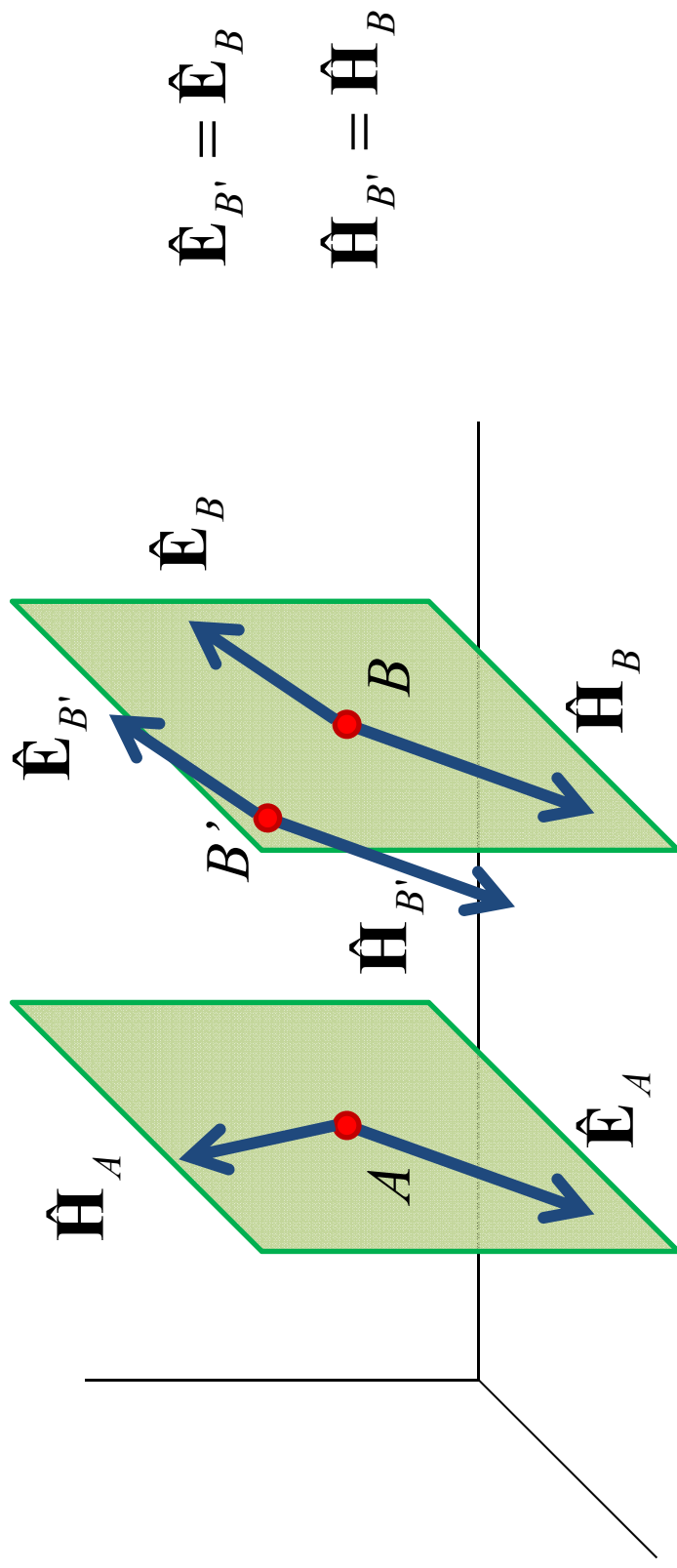
— $\hat{\mathbf{E}}$ y $\hat{\mathbf{H}}$

Próximo paso: Encontrar $\hat{\mathbf{E}}$ y $\hat{\mathbf{H}}$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \gamma^2 E_x$$

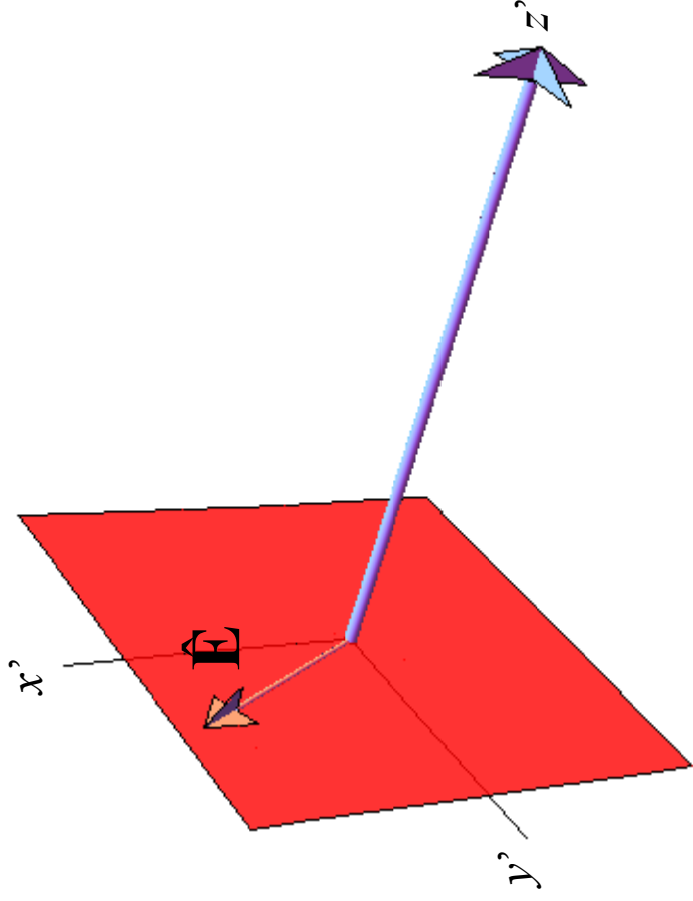
2. Onda Plana Uniforme

- **Plana:** Plano formado por $\hat{\mathbf{E}}\text{-}\hat{\mathbf{H}}$ en un punto es paralelo al plano formado por $\hat{\mathbf{E}}\text{-}\hat{\mathbf{H}}$ en otro punto.
- **Uniforme:** $\hat{\mathbf{E}}$ y $\hat{\mathbf{H}}$ constante en cada plano.



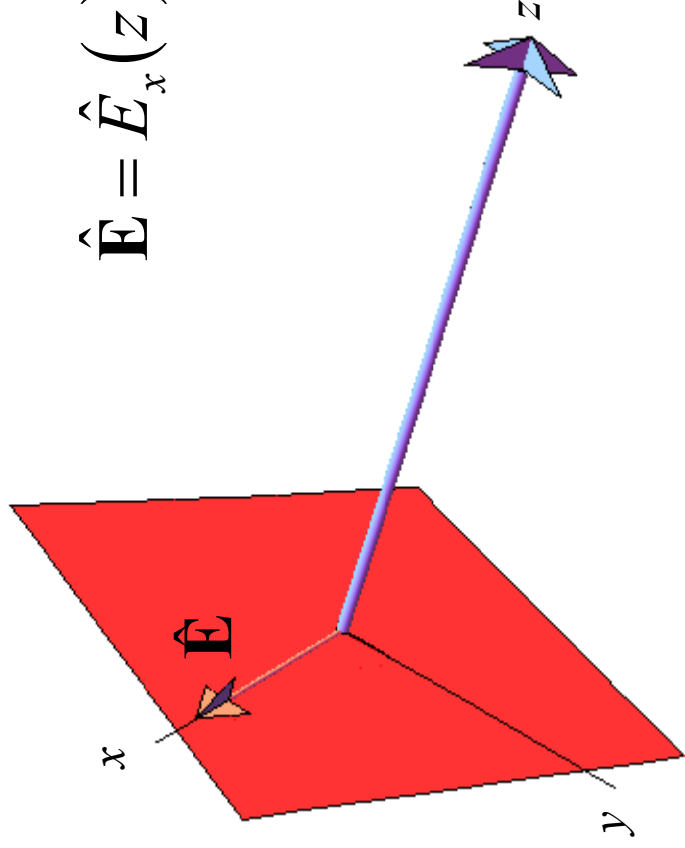
2. Onda Plana Uniforme

- Asumamos $\hat{\mathbf{E}}$ descansando en el plano xy .



2. Onda Plana Uniforme

- Asumamos $\hat{\mathbf{E}}$ descansando en el plano xy .
- Hacemos un cambio de coordenadas:



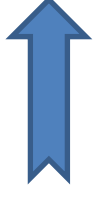
$$\hat{\mathbf{E}} = \hat{E}_x(z) \mathbf{a}_x \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial \hat{E}_x}{\partial x} + \frac{\partial \hat{E}_x}{\partial y} = 0$$

$$\quad \longrightarrow \quad \nabla \times \hat{\mathbf{E}} = \frac{\partial \hat{E}_x}{\partial z} \mathbf{a}_y$$

2. Onda Plana Uniforme

- Ahora consideramos la ley de Faraday:

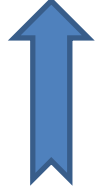
$$\nabla \times \mathcal{E} = -\mu \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}$$



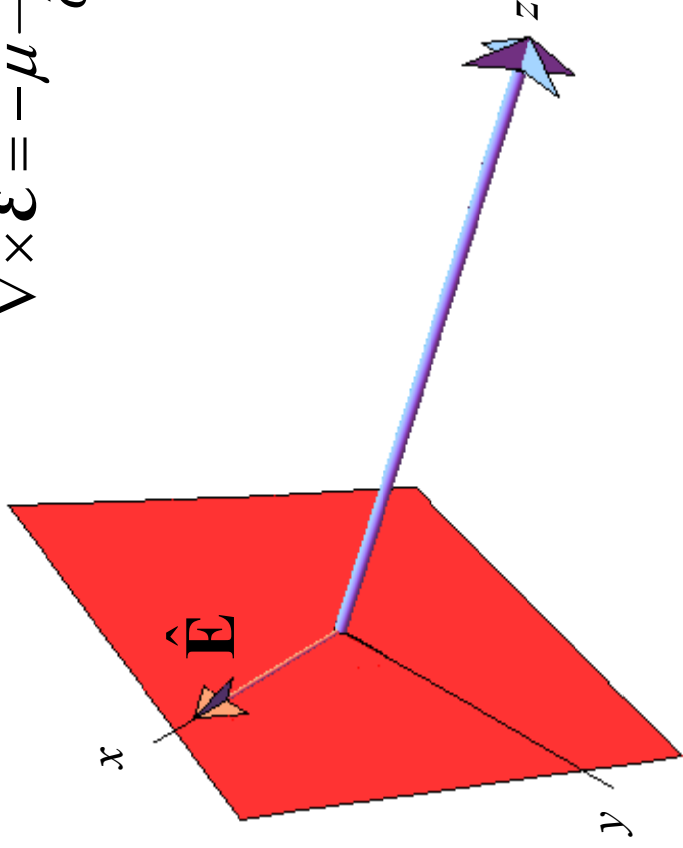
$$\nabla \times \hat{\mathbf{E}} = -j\omega\mu\hat{\mathbf{H}}$$

Pero:

$$\nabla \times \hat{\mathbf{E}} = \frac{\partial \hat{E}_x}{\partial z} \mathbf{a}_y$$



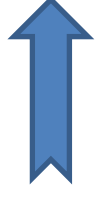
$$\hat{\mathbf{H}} = -\frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial \hat{E}_x}{\partial z} \mathbf{a}_y$$



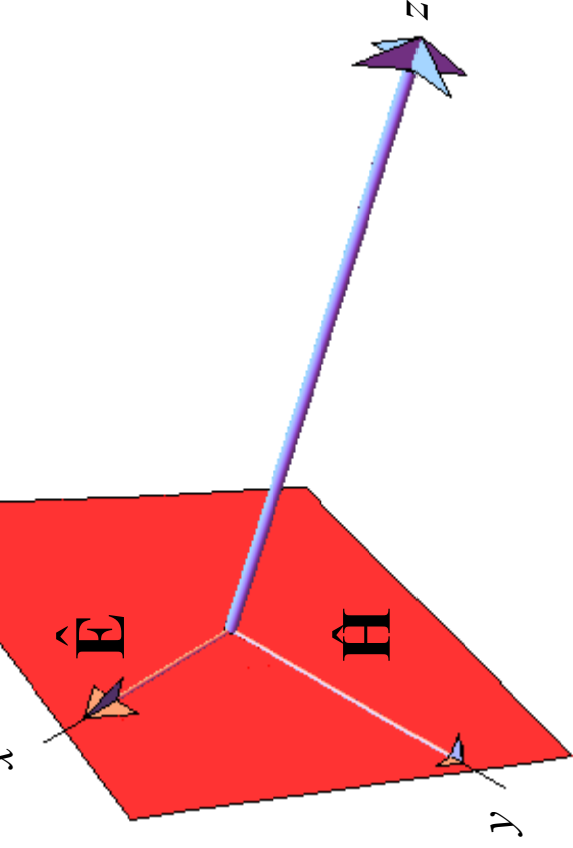
2. Onda Plana Uniforme

- Ahora consideramos la ley de Faraday:

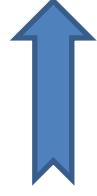
$$\nabla \times \mathcal{E} = -\mu \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}$$



$$\nabla \times \hat{\mathbf{E}} = -j\omega\mu\hat{\mathbf{H}}$$



Pero: $\nabla \times \hat{\mathbf{E}} = \frac{\partial \hat{E}_x}{\partial z} \mathbf{a}_y$

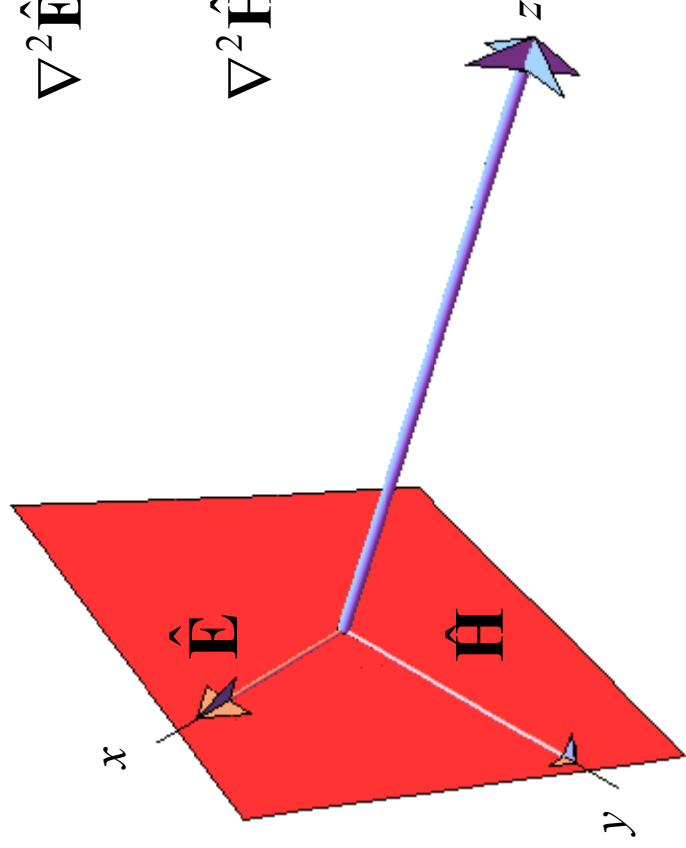


$$\hat{\mathbf{H}} = -\frac{1}{j\omega\mu} \frac{\partial \hat{E}_x}{\partial z} \mathbf{a}_y$$

$\hat{\mathbf{E}}$ y $\hat{\mathbf{H}}$ son perpendiculares.

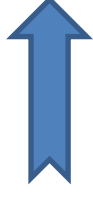
2. Onda Plana Uniforme

- La EO se reduce aún más:



$$\nabla^2 \hat{\mathbf{E}} = \gamma^2 \hat{\mathbf{E}}$$

$$\nabla^2 \hat{\mathbf{H}} = \gamma^2 \hat{\mathbf{H}}$$



$$\frac{\partial^2 \hat{E}_x}{\partial z^2} = \gamma^2 \hat{E}_x$$

$$\frac{\partial^2 \hat{H}_y}{\partial z^2} = \gamma^2 \hat{H}_y$$

2. Onda Plana Uniforme

- Soluciones de la EO son del tipo:

$$\frac{\partial^2 \hat{E}_x}{\partial z^2} = \gamma^2 \hat{E}_x$$

$$\frac{\partial^2 \hat{H}_y}{\partial z^2} = \gamma^2 \hat{H}_y$$



$$\hat{E}_x = \hat{E}_m^+ e^{-\gamma z} + \hat{E}_m^- e^{+\gamma z}$$

$$= \hat{E}_m^+ e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} + \hat{E}_m^- e^{+\alpha z} e^{+j\beta z}$$

$$\hat{H}_y = \hat{H}_m^+ e^{-\gamma z} + \hat{H}_m^- e^{+\gamma z}$$

$$= \hat{H}_m^+ e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} + \hat{H}_m^- e^{+\alpha z} e^{+j\beta z}$$

con: $\gamma = \sqrt{j\omega\mu(\sigma + j\omega\epsilon)}$
 $= \alpha + j\beta$

2. Onda Plana Uniforme

- Soluciones de la EO son del tipo:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 \hat{E}_x}{\partial z^2} &= \gamma^2 \hat{E}_x \\
 \frac{\partial^2 \hat{H}_y}{\partial z^2} &= \gamma^2 \hat{H}_y
 \end{aligned}
 \quad \uparrow \quad
 \begin{aligned}
 \hat{E}_x &= \hat{E}_m^+ e^{-\gamma z} + \hat{E}_m^- e^{+\gamma z} \\
 &= \hat{E}_m^+ e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} + \hat{E}_m^- e^{+\alpha z} e^{+j\beta z} \\
 \hat{H}_y &= \hat{H}_m^+ e^{-\gamma z} + \hat{H}_m^- e^{+\gamma z} \\
 &= \hat{H}_m^+ e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} + \hat{H}_m^- e^{+\alpha z} e^{+j\beta z}
 \end{aligned}$$

Ejercicio: Obtener las siguientes relaciones (use leyes de Faraday y Ampere)

$$\frac{\hat{E}_m^+}{\hat{H}_m^+} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} \equiv \hat{\eta}; \quad \frac{\hat{E}_m^-}{\hat{H}_m^-} = -\frac{j\omega\mu}{\gamma} \equiv -\hat{\eta}$$

Impedancia intrínseca
[Ω]

2. Onda Plana Uniforme

- Reducimos las soluciones de la EO:

$$\hat{E}_x = \hat{E}_m^+ e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} + \hat{E}_m^- e^{\alpha z} e^{j\beta z} \quad \xrightarrow{\text{blue arrow}} \quad \hat{E}_x = E_m^+ e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} e^{j\theta_+} + E_m^- e^{\alpha z} e^{j\beta z} e^{j\theta_-}$$

- La variación en el tiempo del campo eléctrico es:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_x &= \text{Re}(\hat{E}_x e^{j\omega t}) \\ &= E_m^+ e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \theta_+) + E_m^- e^{\alpha z} \cos(\omega t + \beta z + \theta_-) \end{aligned}$$

(idem para el campo magnético)

2. Onda Plana Uniforme

- Reducimos las soluciones de la EO:

$$\hat{E}_x = \hat{E}_m^+ e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} + \hat{E}_m^- e^{\alpha z} e^{j\beta z} \quad \xrightarrow{\text{blue arrow}} \quad \hat{E}_x = E_m^+ e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} e^{j\theta_+} + E_m^- e^{\alpha z} e^{j\beta z} e^{j\theta_-}$$

- La variación en el tiempo del campo eléctrico es:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_x &= \text{Re}(\hat{E}_x e^{j\omega t}) \\ &= \underbrace{E_m^+ e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \theta_+)}_{\text{Onda viajera en } +z \text{ con atenuación}} + \underbrace{E_m^- e^{\alpha z} \cos(\omega t + \beta z + \theta_-)}_{\text{Onda viajera en } -z \text{ con atenuación}} \end{aligned}$$

2. Onda Plana Uniforme

- Solución a la EO: Ondas viajeras

$$\mathcal{E}_x = E_m^+ e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z + \theta_+) + E_m^- e^{\alpha z} \cos(\omega t + \beta z + \theta_-)$$

Ejercicio: Aplicar a un medio sin pérdidas ($\sigma = 0$). Además hallar la impedancia intrínseca

$$\mathcal{E}_x = E_m^+ \cos(\omega t - \beta z + \theta_+) + E_m^- \cos(\omega t + \beta z + \theta_-)$$

Onda viajera sin atenuación

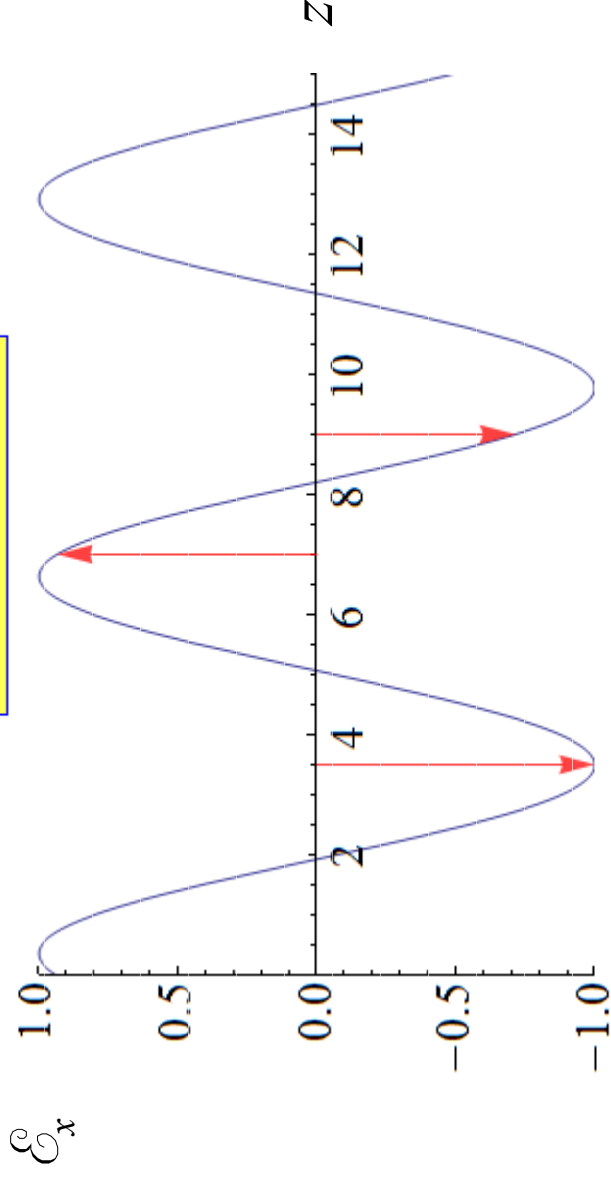
$$\alpha = 0; \quad \beta = \omega \sqrt{\mu \varepsilon}; \quad \hat{\eta} = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

2. Onda Plana Uniforme

- Onda viajera en un medio sin pérdidas:

$$\mathcal{E}_x = E_m^+ \cos(\omega t - \beta z + \theta_+)$$

$$t = 0. \times 10^{-2}$$

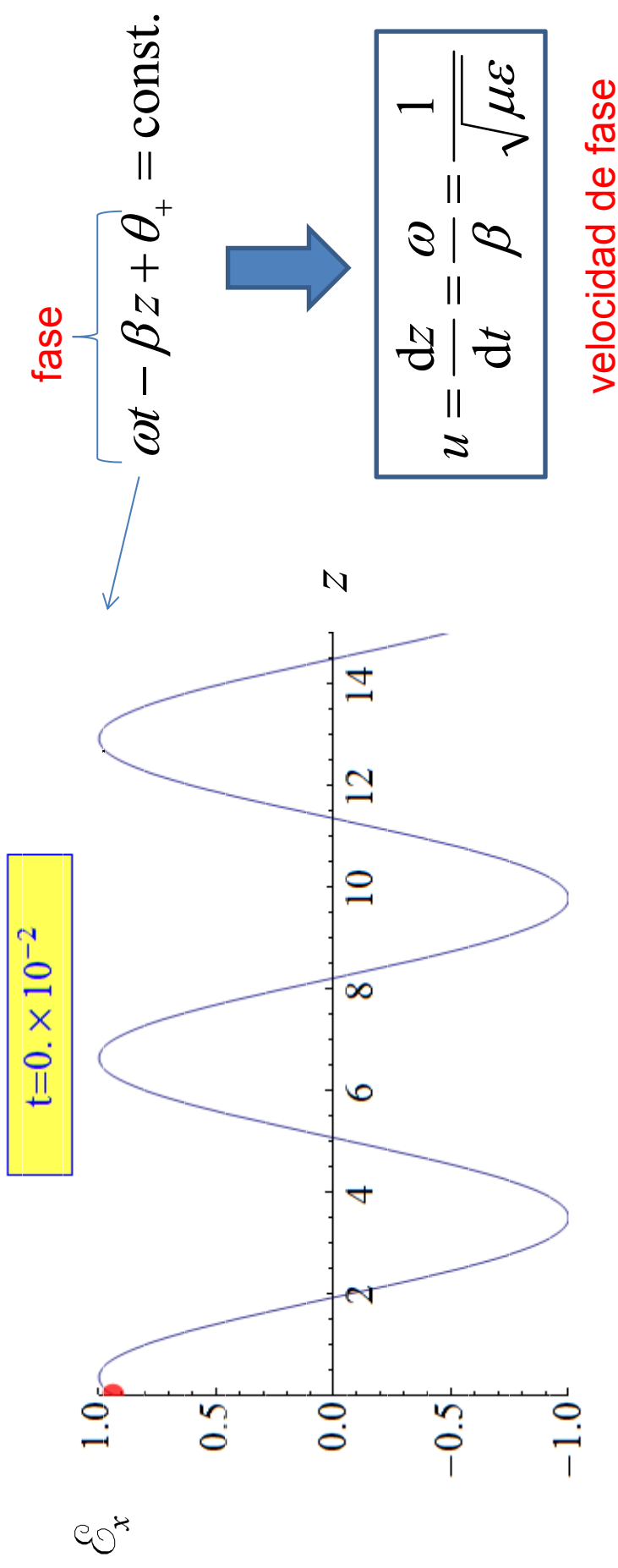


En una posición determinada, el campo varía en el tiempo.

2. Onda Plana Uniforme

- Onda viajera y velocidad de fase:

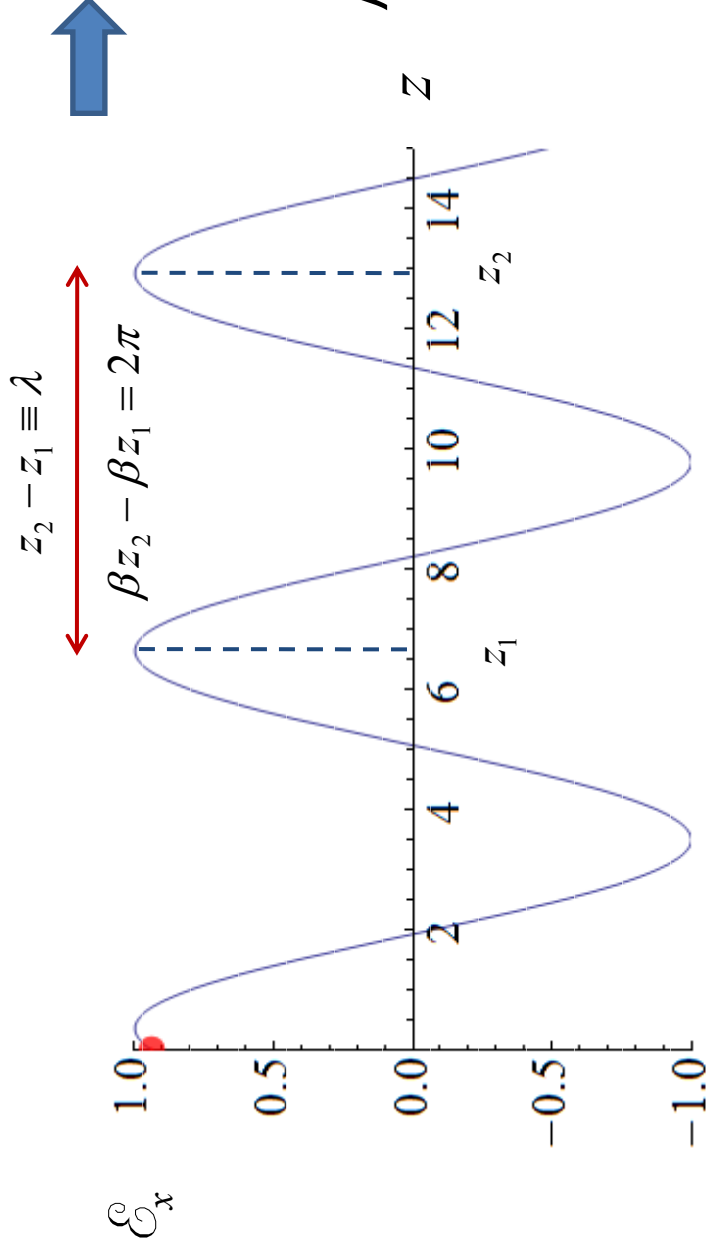
$$\mathcal{E}_x = E_m^+ \cos(\omega t - \beta z + \theta_+)$$



2. Onda Plana Uniforme

- Onda viajera y número de onda:

$$\mathcal{E}_x = E_m^+ \cos(\omega t - \beta z + \theta_+)$$



$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Pero recordemos que:

$$\beta = \omega\sqrt{\mu\epsilon}; \quad u = 1/\sqrt{\mu\epsilon}$$

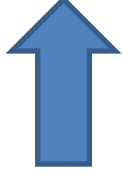
$$\lambda = \frac{u}{f}$$

donde $f = \frac{\omega}{2\pi}$

Colorín Colorado

- Ecuación de onda:

$$\nabla^2 \mathcal{E} = \mu\sigma \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2}$$



$$\nabla^2 \hat{\mathbf{E}} = j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)\hat{\mathbf{E}}$$

$$\nabla^2 \mathcal{H} = \mu\sigma \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \hat{\mathbf{H}} = j\omega\mu(\sigma + j\omega\varepsilon)\hat{\mathbf{H}}$$

- Un tipo de solución: Onda plana
 - También existen ondas cilíndricas y esféricas