

Electromagnetismo Aplicado:

II. Planteamiento y Solución de Campos Electromagnéticos Estáticos y de Baja Frecuencia

F.P. Mena

Primavera 2011

II. Campos Electromagnéticos Estáticos y de Baja Frecuencia

- Vector de Poyntig
- Solución a las ecuaciones de Maxwell
 - Campos armónicos
- Solución a las ecuaciones de potenciales
 - Bajas vs. altas frecuencias
 - Métodos analítico, numérico y mixto.

Ecuaciones de Maxwell

- Ecuaciones de Maxwell en campos variables

Ley	Integral	Diferencial
Faraday:	$\oint_C \mathcal{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathcal{B} \cdot d\mathbf{a}$	$\nabla \times \mathcal{E} = -\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t}$
Ampère:	$\oint_C \mathcal{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathcal{J}_f \cdot d\mathbf{a} + \frac{d}{dt} \int_S \mathcal{D} \cdot d\mathbf{a}$	$\nabla \times \mathcal{H} = \mathcal{J}_f + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t}$
Gauss:	$\oint_S \mathcal{D} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \rho_f dv$	$\nabla \cdot \mathcal{D} = \rho_f$
Gauss – mag.:	$\oint_S \mathcal{B} \cdot d\mathbf{a} = 0$	$\nabla \cdot \mathcal{B} = 0$

Ecuaciones de Maxwell

- Propiedades de medios

$$\mathcal{D} = f_D(\mathcal{E})$$

$$\mathcal{B} = f_B(\mathcal{H})$$

$$\mathcal{J} = f_J(\mathcal{E})$$

Aproximación
más usual



$$\mathcal{D} = \epsilon \mathcal{E}$$

$$\mathcal{B} = \mu \mathcal{H}$$

$$\mathcal{J} = \sigma \mathcal{E}$$

LINEALES:

$$\epsilon \neq \epsilon(\mathcal{E}) \dots$$

ISOTROPICOS:

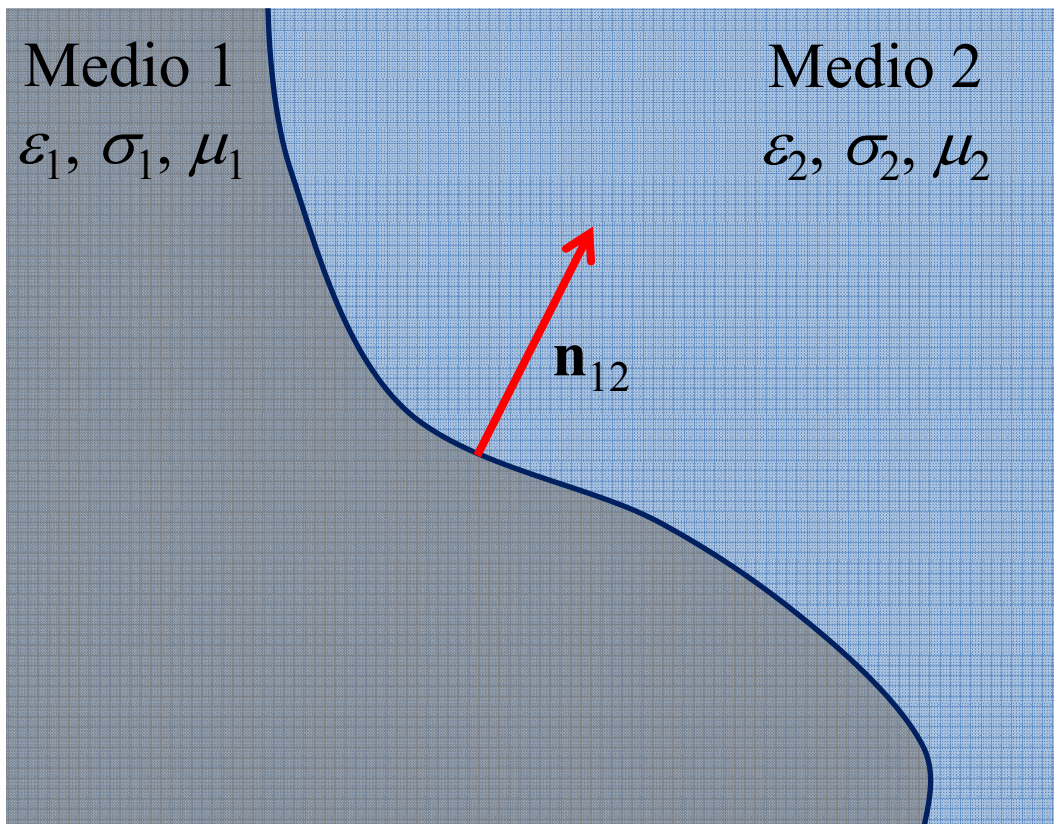
ϵ es escalar

HOMOGENEOS:

$$\epsilon \neq \epsilon(x, y, z) \dots$$

Ecuaciones de Maxwell

- Condiciones de frontera



$$\mathbf{n}_{12} \times (\boldsymbol{\mathcal{E}}_2 - \boldsymbol{\mathcal{E}}_1) = 0$$

$$\mathbf{n}_{12} \cdot (\boldsymbol{\mathcal{D}}_2 - \boldsymbol{\mathcal{D}}_1) = \sigma_f$$

$$\mathbf{n}_{12} \cdot (\boldsymbol{\mathcal{B}}_2 - \boldsymbol{\mathcal{B}}_1) = 0$$

$$\mathbf{n}_{12} \times (\boldsymbol{\mathcal{H}}_2 - \boldsymbol{\mathcal{H}}_1) = \mathbf{K}_f$$

EJERCICIO 1. Aplicar al caso en que $\sigma_2 = \infty$

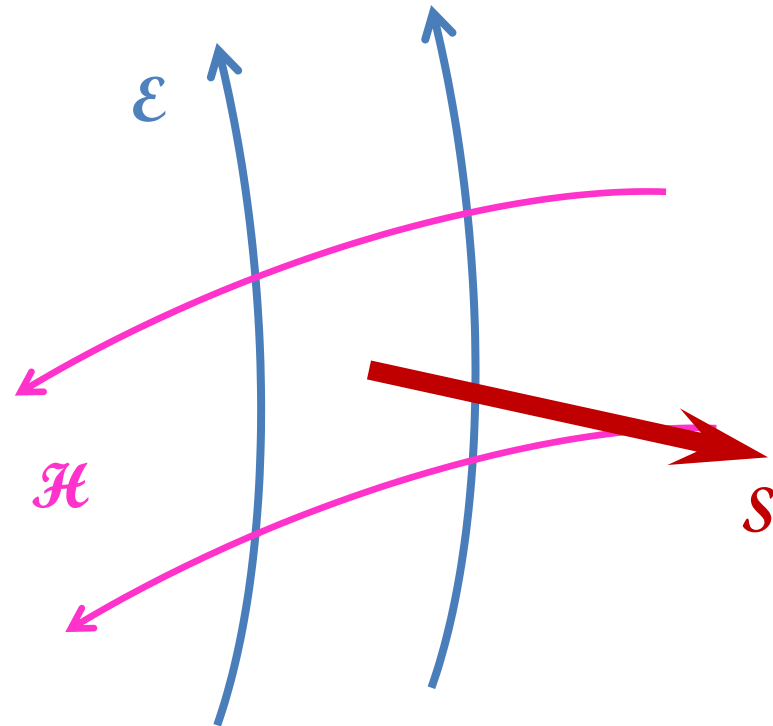
EJERCICIO 2. Aplicar al caso en que σ_1 y σ_2 son finitas

EJERCICIO 3. Aplicar al caso en que $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$

1. Vector de Poynting

- Definición

$$\boxed{S = \mathcal{E} \times \mathcal{H}} \quad [\text{W/m}^2]$$



1. Vector de Poynting

- Definición

$$\boxed{S = \mathcal{E} \times \mathcal{H}} \quad [\text{W/m}^2]$$

- Representa densidad de FLUJO de energía.
- Compare con la energía CONTENIDA en campos eléctrico y magnético:

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \mathcal{D} \cdot \mathcal{E} \, dv$$

$$W_m = \frac{1}{2} \int_V \mathcal{B} \cdot \mathcal{H} \, dv$$

1. Vector de Poynting

- Significado
 - Empecemos calculando su divergencia

$$\nabla \cdot \mathcal{S} = \nabla \cdot (\mathcal{E} \times \mathcal{H})$$

NOTA: $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$





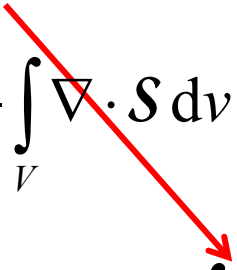
$$\nabla \cdot \mathcal{S} = \mathcal{H} \cdot (\nabla \times \mathcal{E}) - \mathcal{E} \cdot (\nabla \times \mathcal{H})$$

$-\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} \qquad \mathcal{J}_f + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t}$

1. Vector de Poynting

- Significado
 - Empecemos calculando su divergencia


$$-\nabla \cdot \mathbf{S} = \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{J}_f + \left(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} + \boldsymbol{\mathcal{H}} \cdot \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} \right) \quad [\text{W/m}^3]$$

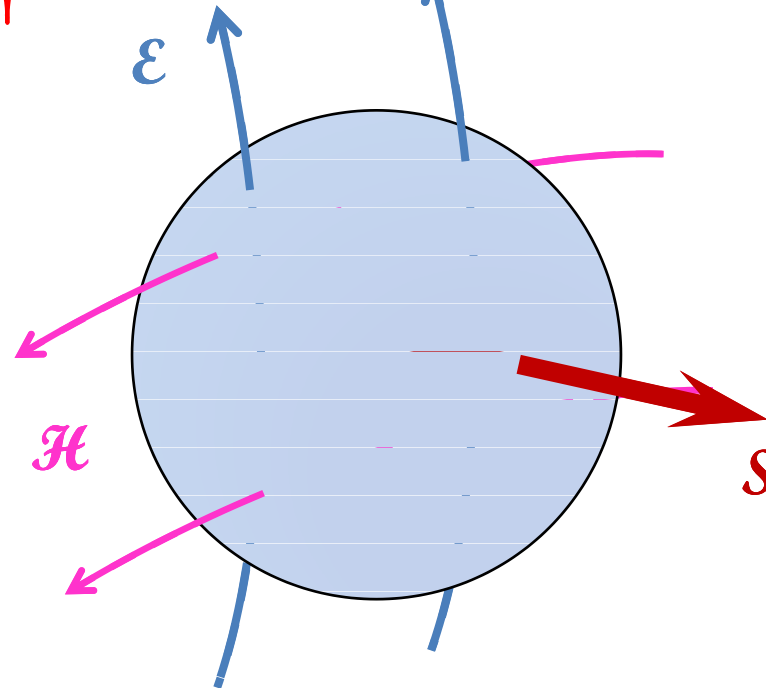

$$-\int_V \nabla \cdot \mathbf{S} \, dv = \int_V \boldsymbol{\varepsilon} \cdot \mathbf{J}_f \, dv + \int_V \left(\boldsymbol{\varepsilon} \cdot \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} + \boldsymbol{\mathcal{H}} \cdot \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} \right) dv \quad [\text{W}]$$

$$\oint_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{s}$$

1. Vector de Poynting

- Significado
 - Analicemos cada uno de los términos


➔
$$-\oint_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{s} = \int_V \mathbf{\mathcal{E}} \cdot \mathbf{\mathcal{J}}_f dv + \int_V \left(\mathbf{\mathcal{E}} \cdot \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} + \mathbf{\mathcal{H}} \cdot \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} \right) dv \quad [\text{W}]$$

Flujo total sobre la
superficie S



1. Vector de Poynting

- Significado
 - Analicemos cada uno de los términos



$$-\oint_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{s} = \underbrace{\int_V \mathcal{E} \cdot \mathcal{J}_f \, dv}_{\text{Ley de Joule}} + \int_V \left(\mathcal{E} \cdot \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} + \mathcal{H} \cdot \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} \right) dv \quad [\text{W}]$$

- Ley de Joule – potencia disipada

$$P_{\text{diss}} = \int_V \mathcal{E} \cdot \mathcal{J}_f \, dv$$

1. Vector de Poynting

- Significado
 - Analicemos cada uno de los términos


$$-\oint_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{s} = \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_f \, dv + \underbrace{\int_V \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} \right) dv}_{\text{[W]}}$$


- $\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} = \epsilon \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{2} \epsilon \frac{\partial |\mathbf{E}|^2}{\partial t}$

- $\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} = \frac{1}{2} \mu \frac{\partial |\mathbf{H}|^2}{\partial t}$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} &= A_x \frac{\partial A_x}{\partial t} + A_y \frac{\partial A_y}{\partial t} + A_z \frac{\partial A_z}{\partial t} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial A_x^2}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial A_y^2}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial A_z^2}{\partial t} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial |\mathbf{A}|^2}{\partial t} \end{aligned}$$

1. Vector de Poynting

- Significado
 - Analicemos cada uno de los términos


$$-\oint_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{s} = \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}_f d\nu + \underbrace{\int_V \left(\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \right) d\nu}_{\text{[W]}}$$


- $$\int_V \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} d\nu = \int_V \frac{1}{2} \epsilon \frac{\partial |\mathbf{E}|^2}{\partial t} d\nu = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \int_V \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} d\nu \right) = \frac{\partial W_e}{\partial t}$$

- $$\int_V \mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} d\nu = \frac{\partial W_m}{\partial t}$$

Variación temporal de la
energía contenida
electromagnética contenida
en el volumen V

1. Vector de Poynting

- Significado
 - Analicemos cada uno de los términos


$$-\oint_S \mathbf{S} \cdot d\mathbf{s} = \underbrace{\int_V \mathcal{E} \cdot \mathcal{J}_f \, dv}_B + \underbrace{\int_V \left(\mathcal{E} \cdot \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} + \mathcal{H} \cdot \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} \right) dv}_C \quad [\text{W}]$$

A. B. C.

A. Flujo hacia adentro

B. Energía disipada

C. Variación energía almacenada

\mathbf{S} indica flujo de potencia

1. Vector de Poynting

- Significado

EJERCICIO: Una antena produce el campo electromagnético dado por:

$$\mathcal{E} = \frac{E_0}{r} \sin \theta \sin \left[\omega \left(t - \frac{r}{u_0} \right) \right] \mathbf{a}_\theta$$

$$\mathcal{H} = \frac{E_0}{r \sqrt{\mu_0 / \epsilon_0}} \sin \theta \sin \left[\omega \left(t - \frac{r}{u_0} \right) \right] \mathbf{a}_\phi$$

Calcule la potencia promedio irradiada por la antena.



$$P = \int_s \mathbf{S} \cdot d\mathbf{s};$$

$$\mathbf{S}_{\text{av}} = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbf{S} dt;$$

$$P_{\text{av}} = \frac{1}{T} \int_0^T P dt$$

$$P_{\text{av}} = \int_s \mathbf{S}_{\text{av}} \cdot d\mathbf{s}$$

Colorín Colorado

- Ecuaciones de Maxwell:
 - Campo eléctrico variable  campo magnético
 - Campo magnético variable  campo eléctrico
- Vector de Poynting = densidad flujo de potencia

$$\mathcal{S} = \mathcal{E} \times \mathcal{H}$$