

# Electromagnetismo Aplicado:

## I. Principios de Teoría Electromagnética y Propiedades de Medios Materiales

F.P. Mena

Primavera 2011

# I. Teoría E.M. y Materiales

- Ecuaciones de Maxwell
- Materiales
  - Conductores
  - Dieléctricos
  - Materiales magnéticos.
- Condiciones de frontera
- Funciones de potenciales
- Ecuaciones diferenciales para potenciales.

# Ecuaciones de Maxwell

- Ecuaciones de Maxwell en campos variables

Ley	Integral	Diferencial
Faraday:	$\oint_C \mathcal{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathcal{B} \cdot d\mathbf{a}$	$\nabla \times \mathcal{E} = -\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t}$
Ampère:	$\oint_C \mathcal{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathcal{J}_f \cdot d\mathbf{a} + \frac{d}{dt} \int_S \mathcal{D} \cdot d\mathbf{a}$	$\nabla \times \mathcal{H} = \mathcal{J}_f + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t}$
Gauss:	$\oint_S \mathcal{D} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \rho_f dv$	$\nabla \cdot \mathcal{D} = \rho_f$
Gauss – mag.:	$\oint_S \mathcal{B} \cdot d\mathbf{a} = 0$	$\nabla \cdot \mathcal{B} = 0$

# Ecuaciones de Maxwell

- Propiedades de medios

$$\mathcal{D} = f_D(\mathcal{E})$$

$$\mathcal{B} = f_B(\mathcal{H})$$

$$\mathcal{J} = f_J(\mathcal{E})$$

Aproximación  
más usual



$$\mathcal{D} = \epsilon \mathcal{E}$$

$$\mathcal{B} = \mu \mathcal{H}$$

$$\mathcal{J} = \sigma \mathcal{E}$$

**LINEALES:**

$$\epsilon \neq \epsilon(\mathcal{E}) \dots$$

**ISOTROPICOS:**

$\epsilon$  es escalar ....

**HOMOGENEOS:**

$$\epsilon \neq \epsilon(x, y, z) \dots$$

### 3. Condiciones de Frontera

- Condiciones que deben cumplir los campos al pasar de un medio a otro.
- Para obtenerlas, usaremos las EM en forma integral

$$\oint_S \mathcal{D} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \rho_f dv$$

$$\oint_S \mathcal{B} \cdot d\mathbf{a} = 0$$

Sobre cualquier superficie  $S$   
encerrando un volumen  $V$

$$\oint_C \mathcal{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathcal{B} \cdot d\mathbf{a}$$

$$\oint_C \mathcal{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathcal{J}_f \cdot d\mathbf{a} + \frac{d}{dt} \int_S \mathcal{D} \cdot d\mathbf{a}$$

Sobre cualquier superficie  $S$   
limitada por un camino  $C$

# 3. Condiciones de Frontera

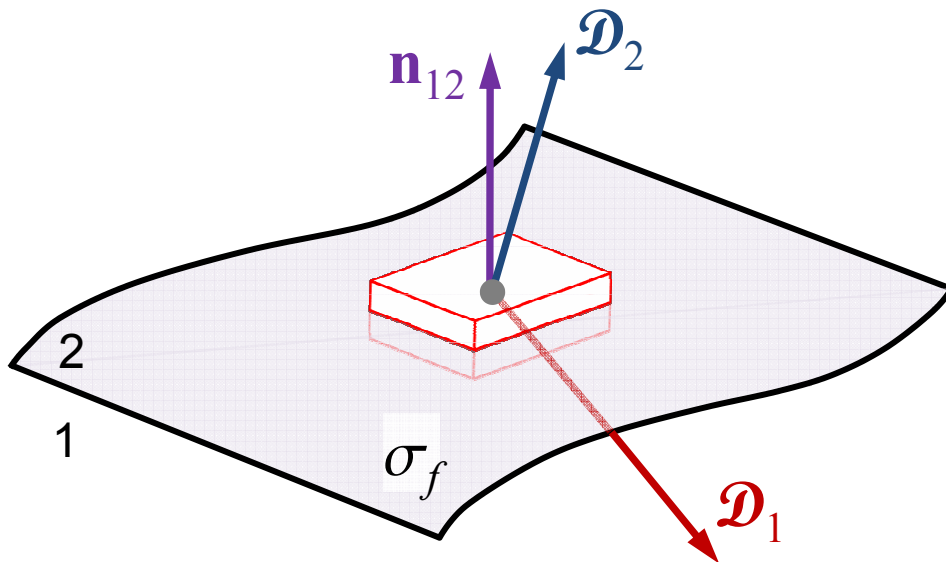
- Para componentes normales

## Desplazamiento eléctrico

$$\oint_S \mathcal{D} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \rho_f dv$$

Diferencia de las componentes normales del desplazamiento igual a densidad de carga libre superficial en la frontera.

$$\mathbf{n}_{12} \cdot (\mathcal{D}_2 - \mathcal{D}_1) = \sigma_f$$



# 3. Condiciones de Frontera

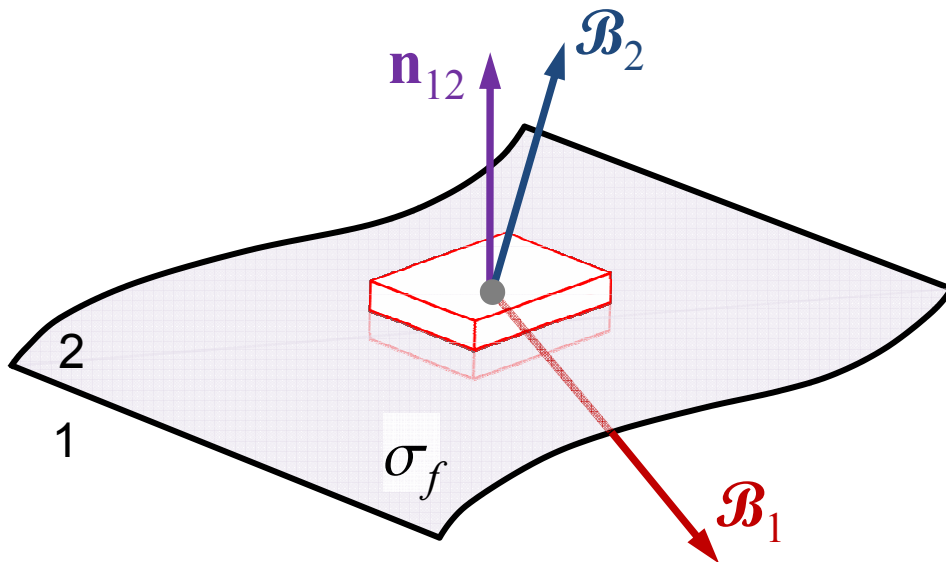
- Para componentes normales

**Campo magnético**

$$\oint_S \mathcal{B} \cdot d\mathbf{a} = 0$$

Las componentes normales del campo magnético son iguales.

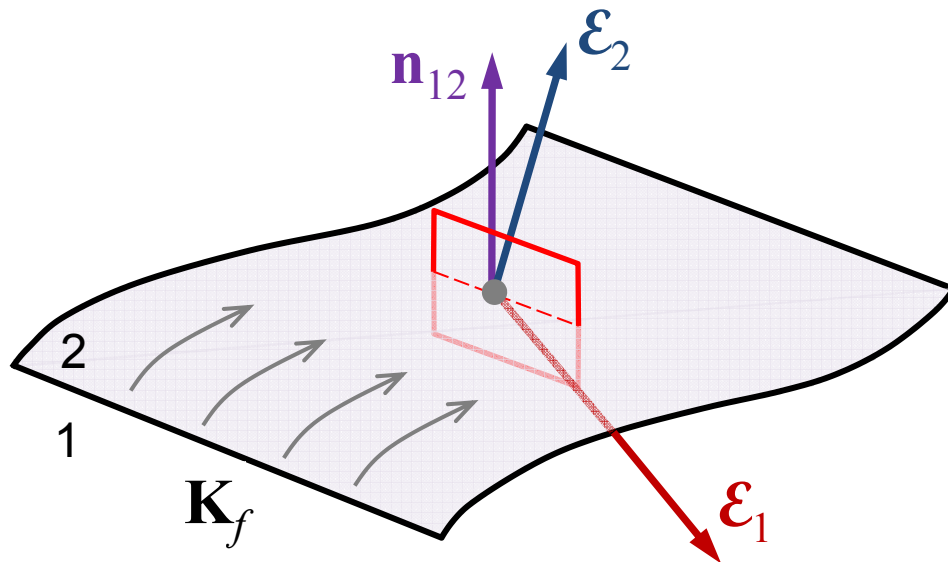
$$\mathbf{n}_{12} \cdot (\mathcal{B}_2 - \mathcal{B}_1) = 0$$



# 3. Condiciones de Frontera

- Para componentes tangenciales

## Campo eléctrico



$$\oint_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a}$$

Las componentes tangenciales del campo eléctrico son iguales.

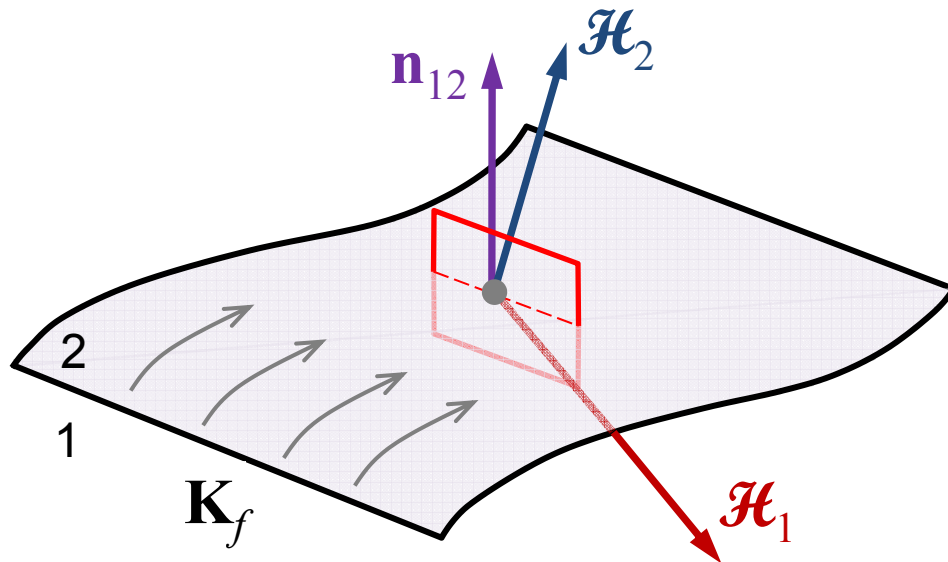
$$\mathbf{n}_{12} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0$$



# 3. Condiciones de Frontera

- Para componentes tangenciales

## Campo magnético



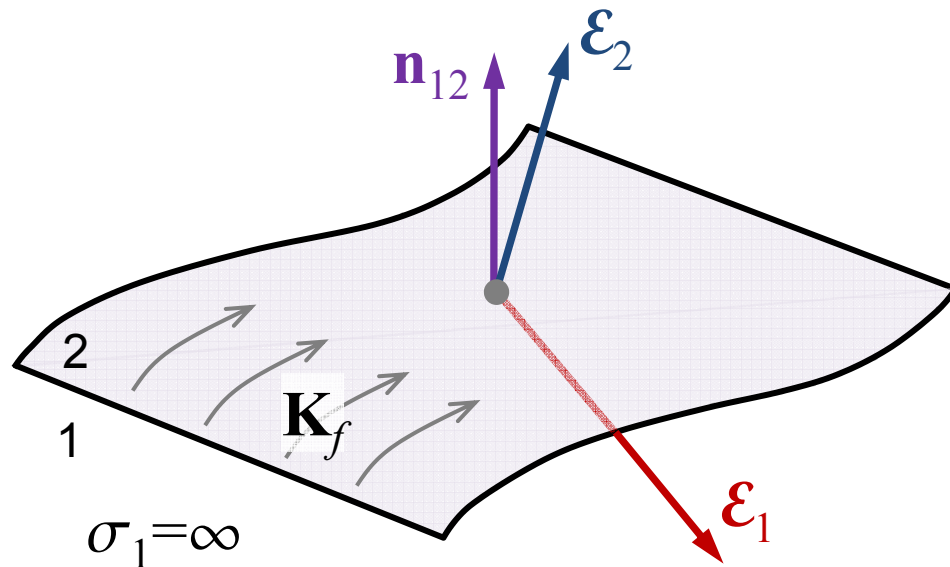
$$\oint_C \mathcal{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathcal{J}_f \cdot d\mathbf{a} + \frac{d}{dt} \int_S \mathcal{D} \cdot d\mathbf{a}$$

Diferencia de las componentes tangenciales del campo magnético (auxiliar) igual a densidad de corriente libre superficial en la frontera.

$$\mathbf{n}_{12} \times (\mathcal{H}_2 - \mathcal{H}_1) = \mathbf{K}_f$$

### 3. Condiciones de Frontera

- Aplicar al caso en que uno de los materiales es un conductor perfecto.



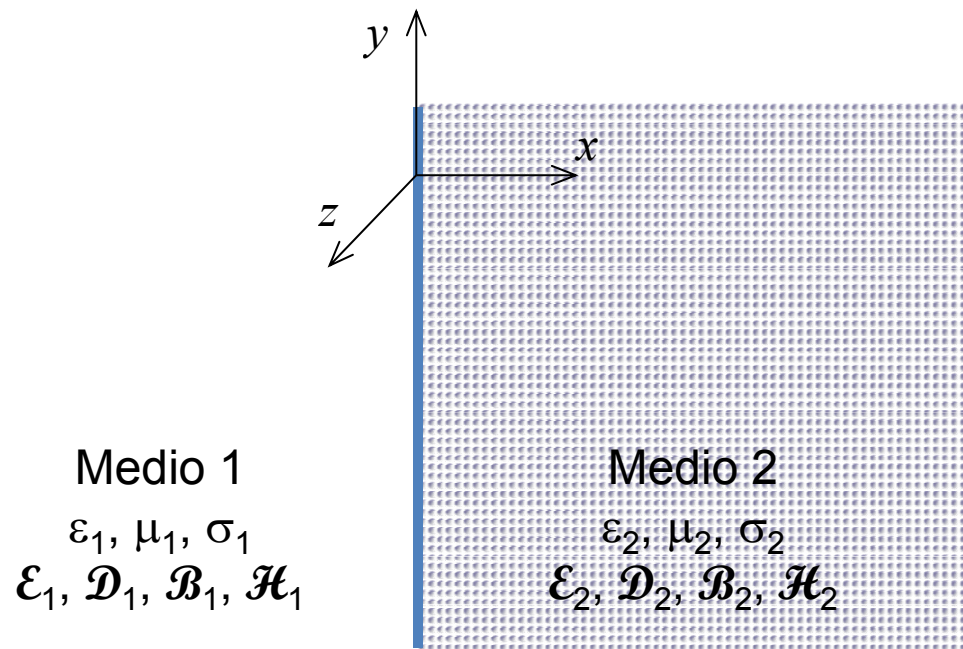
Interior conductor perfecto  $\Rightarrow \boldsymbol{\epsilon}_1 = 0$

$\mathbf{n}_{12} \times (\boldsymbol{\epsilon}_2 - \boldsymbol{\epsilon}_1) = 0 \Rightarrow \boldsymbol{\epsilon}_{t2} = 0$

**Ejercicio:** ¿Qué pasa con el campo magnético?

### 3. Condiciones de Frontera

- Ejercicio:** Considere la interfaz de la figura. Si el campo eléctrico en 1 en la interfaz ( $x=0$ ) es  $\mathbf{E} = \alpha \mathbf{a}_x + \beta \mathbf{a}_y + \gamma \mathbf{a}_z$ , determinar el campo eléctrico en el medio 2 en  $x=0$  si los dos medios son dieléctricos perfectos.




## 4. Potenciales

- Dados los materiales y las condiciones de borde, en principio, uno puede determinar los campos electromagnéticos usando las ecuaciones de Maxwell.
- Otra alternativa es usar las llamadas funciones potenciales.
- En lo siguiente supondremos:

$$\mathcal{D} = \varepsilon \mathcal{E} \quad \mathcal{B} = \mu \mathcal{H}$$

# 4. Potenciales

- Potencial vectorial magnético:

Gauss magnético:  $\nabla \cdot \mathcal{B} = 0$    $\mathcal{B} = \nabla \times \mathcal{A}$

- $\mathcal{A}$  no está definido completamente:  $\mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A} + \nabla f$
- Hay que poner condiciones extra sobre  $\mathcal{A}$ :
  - Condición de Coulomb:  $\nabla \cdot \mathcal{A} = 0$
  - Condición de Lorentz:  $\nabla \cdot \mathcal{A} + \mu\epsilon (\partial\phi/\partial t) = 0$

# 4. Potenciales

- Potencial escalar eléctrico:

Faraday: 
$$\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{E}} = -\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{B}}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \boldsymbol{\mathcal{A}})$$

$$\Rightarrow \nabla \times \left( \boldsymbol{\mathcal{E}} + \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{A}}}{\partial t} \right) = 0 \quad \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{\mathcal{E}} + \frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{A}}}{\partial t} = -\nabla \varphi}$$

**NOTA:** Compare con el caso electrostático  $\boldsymbol{\mathcal{E}} = -\nabla \varphi$

# 4. Ecuaciones para potenciales

- Combinamos los potenciales:

Ampere:  $\nabla \times \mathcal{H} = \mathcal{J}_f + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t}$



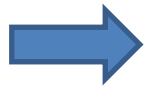
$$\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathcal{B} = \mathcal{J}_f + \varepsilon \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}$$



$$\nabla \times \nabla \times \mathcal{A} = \mu \mathcal{J}_f + \mu \varepsilon \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}$$



$$\nabla(\nabla \cdot \mathcal{A}) - \nabla^2 \mathcal{A} = \mu \mathcal{J}_f + \mu \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left( -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} \right)$$

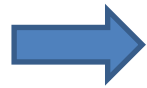


condición de  
Lorentz

$$\cancel{\nabla \left( -\mu \varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)} - \nabla^2 \mathcal{A} = \mu \mathcal{J}_f + \cancel{\mu \varepsilon \frac{\partial}{\partial t} \left( -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} \right)}$$

## 4. Ecuaciones para potenciales

- Combinamos los potenciales



$$\nabla^2 \mathcal{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathcal{J}_f$$

Ecuación de Onda

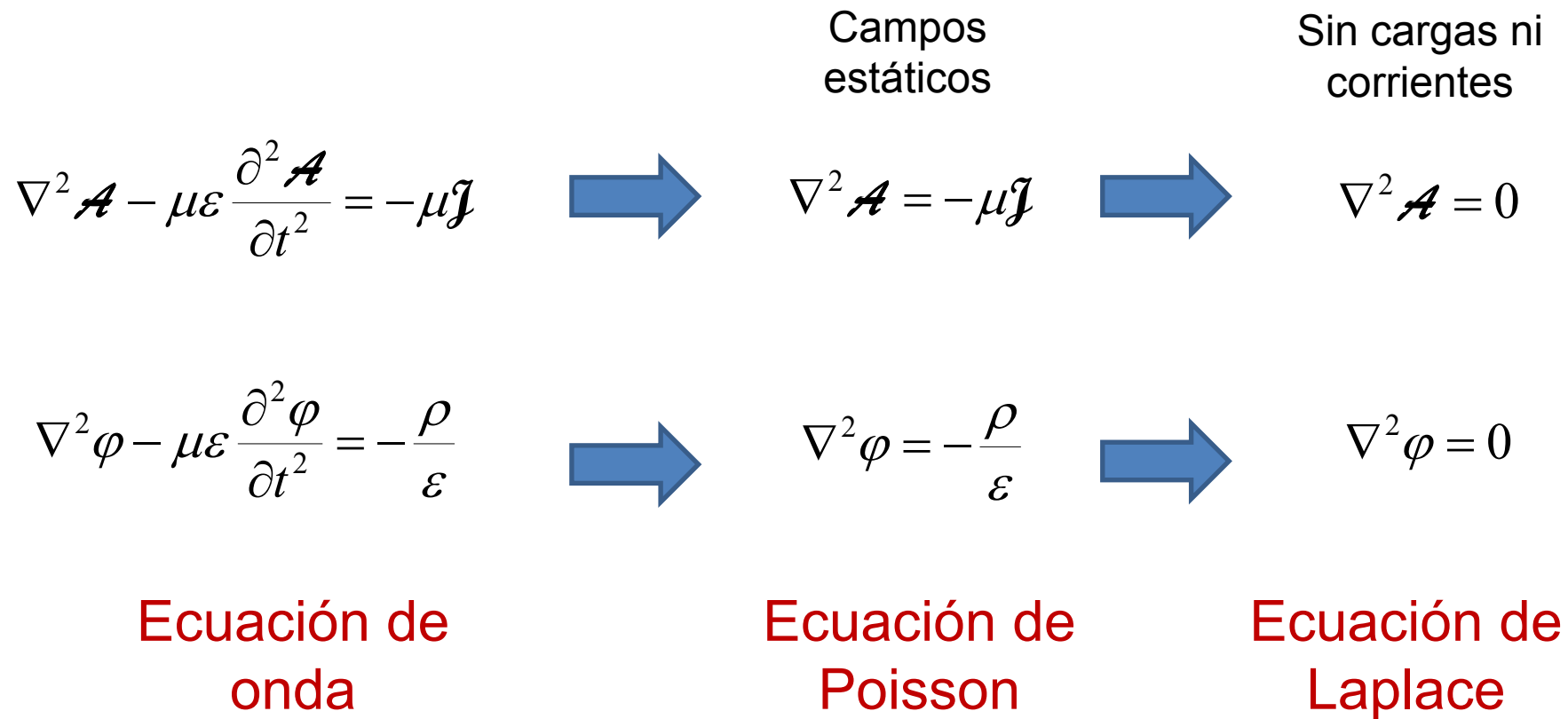
- **Ejercicio:** De manera similar se puede obtener

$$\nabla^2 \varphi - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho_f}{\epsilon}$$



# 4. Ecuaciones para potenciales

- Que se simplifican en casos especiales:



# 4. Ecuaciones para potenciales

- En ciertos casos, es más fácil resolver las ecuaciones de potencial para obtener  $\mathcal{A}$  y  $\varphi$
- Con  $\mathcal{A}$  y  $\varphi$  se pueden obtener los campos electromagnéticos (sin pasar por las EM)

Ecuaciones de potencial + Condiciones de borde

$$\nabla^2 \mathcal{A} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathcal{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathcal{J}$$

$$\nabla^2 \varphi - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}$$

Funciones de potencial

$\mathcal{A}$

$\varphi$

Campos electromagnéticos

$$\mathcal{B} = \nabla \times \mathcal{A}$$

$$\mathcal{E} = -\nabla \varphi - \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t}$$

# Moraleja del Día

- Condiciones de frontera:

$$\mathbf{n}_{12} \times (\boldsymbol{\mathcal{E}}_2 - \boldsymbol{\mathcal{E}}_1) = 0$$

$$\mathbf{n}_{12} \cdot (\boldsymbol{\mathcal{D}}_2 - \boldsymbol{\mathcal{D}}_1) = \sigma_f$$

$$\mathbf{n}_{12} \cdot (\boldsymbol{\mathcal{B}}_2 - \boldsymbol{\mathcal{B}}_1) = 0$$

$$\mathbf{n}_{12} \times (\boldsymbol{\mathcal{H}}_2 - \boldsymbol{\mathcal{H}}_1) = \mathbf{K}_f$$

# Moraleja del Día

- Funciones potenciales:

- Potencial vectorial

$$\mathcal{B} = \nabla \times \mathcal{A}$$

- Potencial escalar

$$\mathcal{E} + \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial t} = -\nabla \varphi$$

- Ecuaciones diferenciales para potenciales:

- Ecuación de onda

$$\nabla^2 \varphi - \mu \varepsilon \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

- Ecuación de Poisson

$$\nabla^2 \varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon}$$

- Ecuación de Laplace

$$\nabla^2 \varphi = 0$$