Electromagnetismo Aplicado:

I. Principios de Teoría Electromagnética y Propiedades de Medios Materiales

F.P. Mena

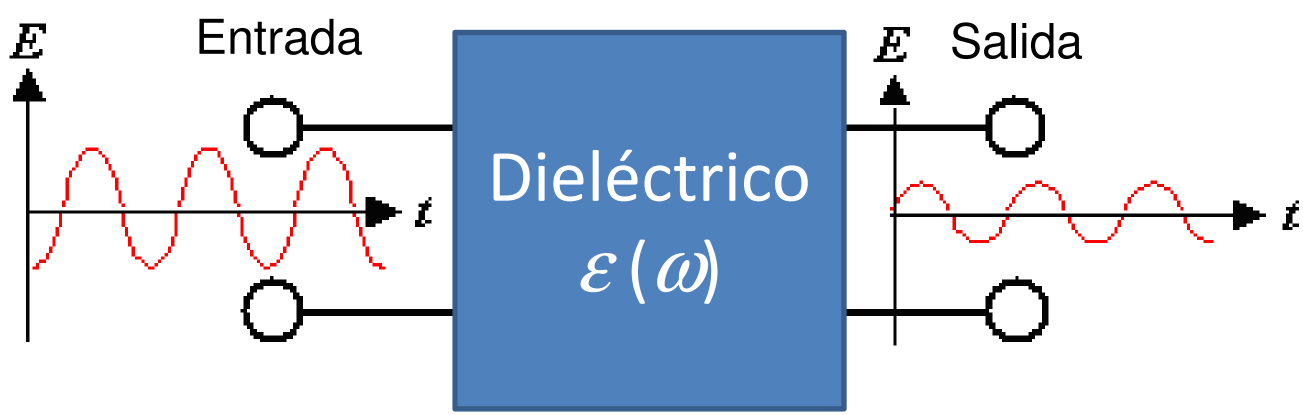
Primavera 2011

I. Teoría E.M. y Materiales

- Ecuaciones de Maxwell
- Materiales
  - Conductores
  - Dieléctricos
  - Materiales magnéticos.
- Condiciones de frontera
- Funciones de potenciales
- Ecuaciones diferenciales para potenciales.

Dieléctricos - AC

- ¿Es la permitividad dieléctrica una constante?:
  - Es una característica de cada dieléctricos.
  - Depende de varias parámetros externos: T, P, ω, ...

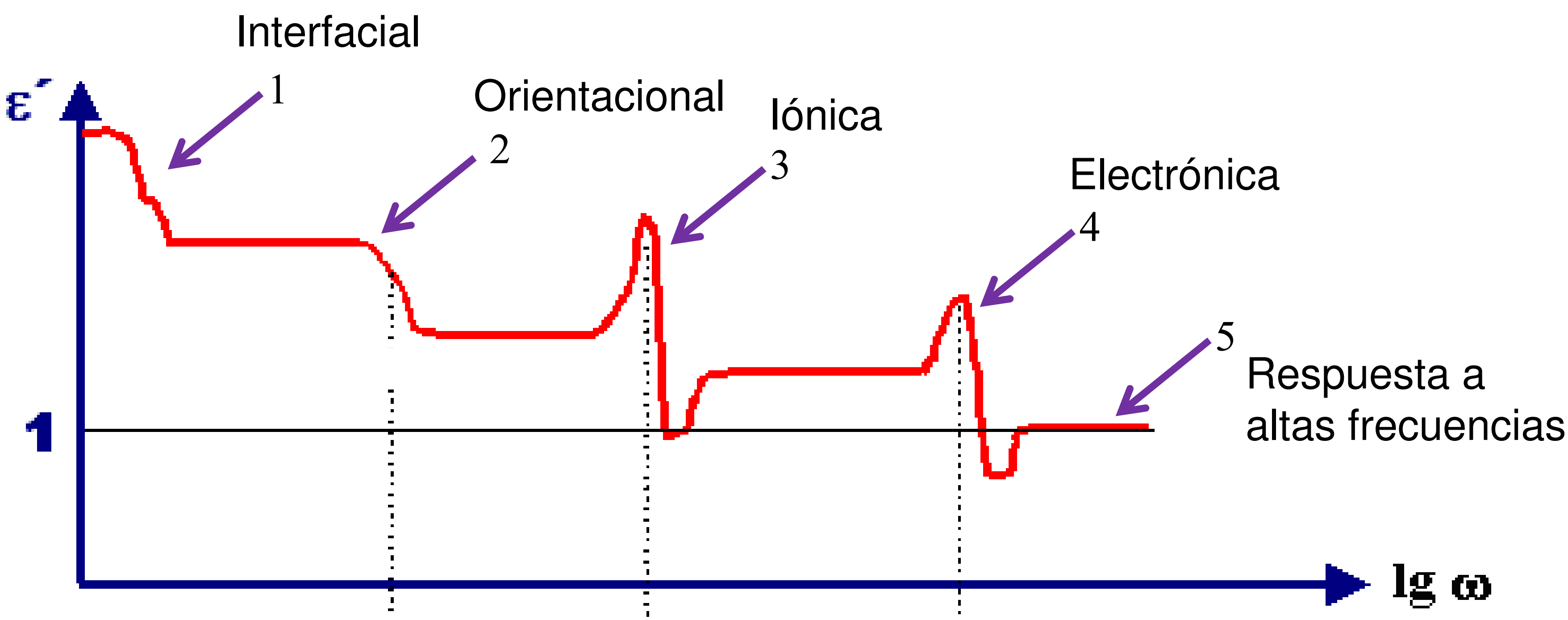


$E_{in}\sin(\omega t)$ $\quad$ $E_{out}\sin(\omega t)$

$E_{in}e^{j\omega t}$ $\quad$ $E_{out}e^{j\omega t}$

Dieléctricos - AC

- ¿Es la permitividad dieléctrica una constante?:
  - **PREGUNTA:** ¿Por qué se espera una dependencia de la permitividad con la frecuencia?



Dieléctricos - AC

- Resonancia

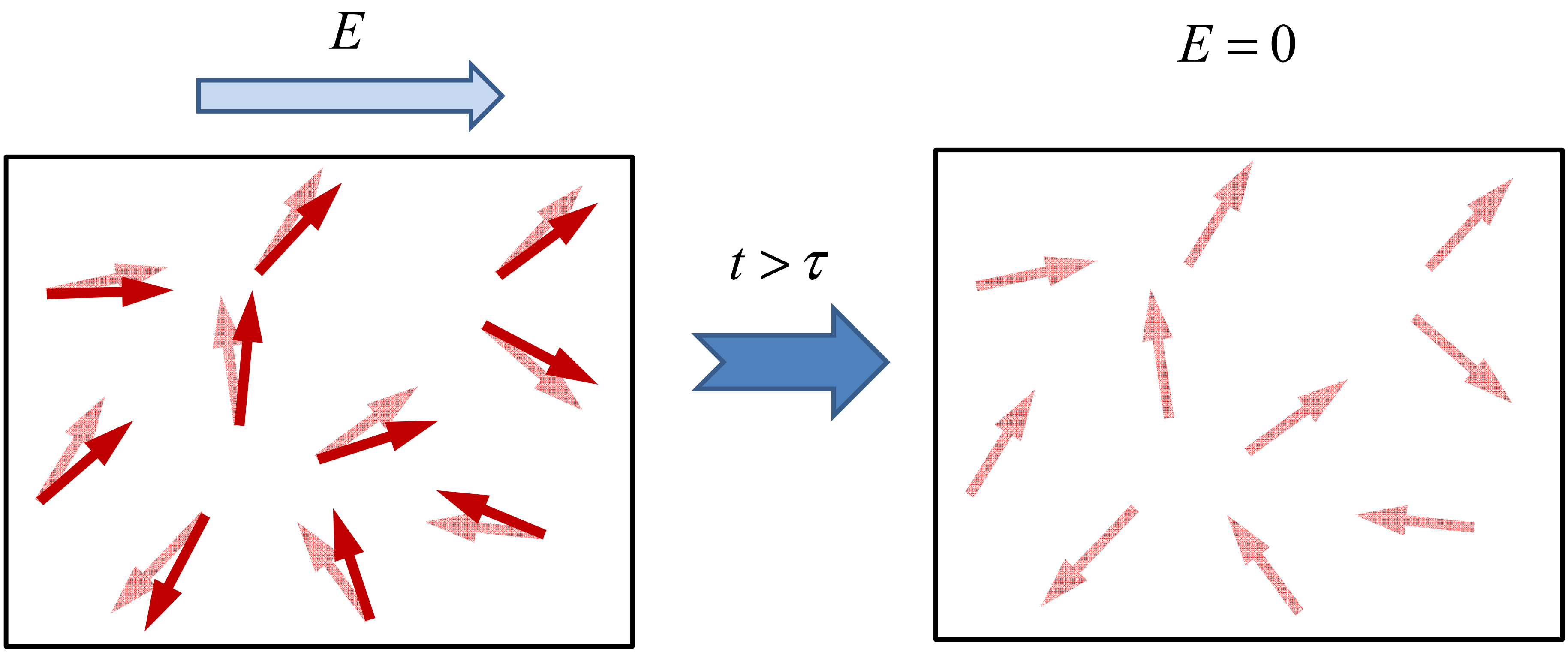
Polarizaciones electrónica e iónica ⟺ Movimiento de masas ⟺ Oscilador resuena a frecuencias características

- Relajación

Polarización orientacional ⟺ Movimientos promedio en campo externo ⟺ Se necesita de cierto tiempo para regresar al estado inicial

Dieléctricos - AC

- Relajación

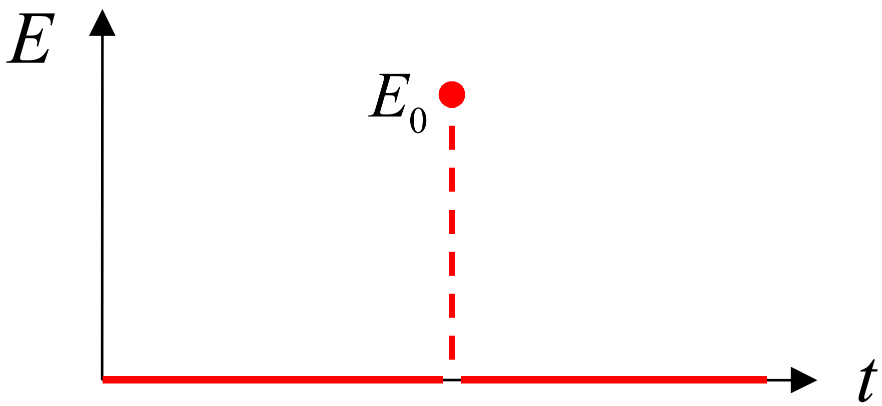


τ = tiempo de relajación

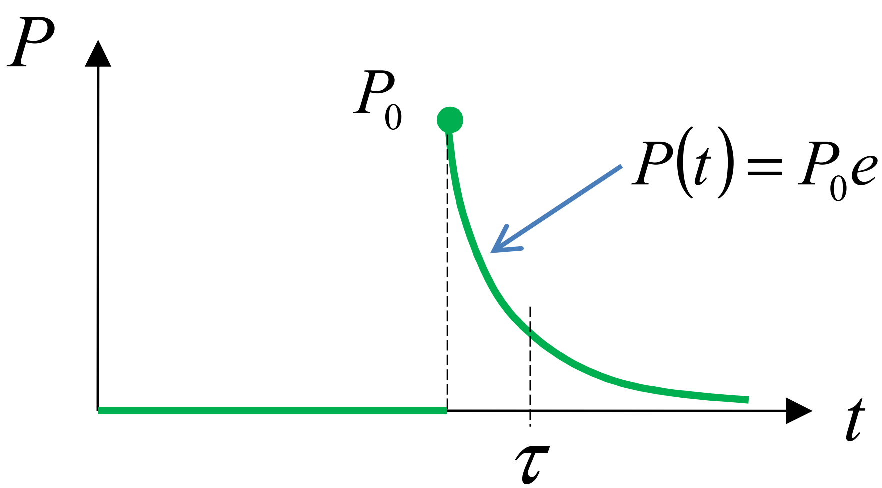
Dieléctricos - AC

- Relajación

Transformada de Fourier



$$E(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} E(t)\, e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t$$



$$P(t)=P_0 e^{-t/\tau}$$

$$P(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} P(t)\, e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t$$

Dieléctricos - AC

- Relajación

$$E(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} E(t)\, e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad E(\omega) = E_0$$

$$P(\omega) = \int_{0}^{\infty} P(t)\, e^{-j\omega t}\,\mathrm{d}t \quad \Rightarrow \quad P(\omega) = \frac{P_0}{\omega_0 + j\omega} \quad \text{con} \quad \omega_0 = 1/\tau$$

  – Susceptibilidad y permitividad dieléctricas complejas

$$\begin{aligned} P &= \chi_e \varepsilon_0 E \\ &= (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 E \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} P(\omega) &= \varepsilon_0 \chi_e(\omega) E(\omega) \\ &= \varepsilon_0 [\varepsilon_r(\omega) - 1] E(\omega) \end{aligned}$$

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r \qquad \varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 \varepsilon_r(\omega)$$

Dieléctricos - AC

- Relajación
  - Susceptibilidad dieléctrica compleja

$$P(\omega)=\varepsilon_0\chi_e(\omega)E(\omega) \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_0\chi_e(\omega)=\frac{P(\omega)}{E(\omega)}=\frac{P_0}{E_0}\frac{1}{\omega_0+j\omega}$$

$$=\varepsilon_0\chi_S\frac{1}{1+j\,\omega/\omega_0}$$

$$\chi_s=\chi_e(0)=\frac{P_0}{E_0}$$

Susceptibilidad DC o estática

Dieléctricos - AC

- Relajación
  - Permitividad dieléctrica compleja

$$\varepsilon_r(\omega) = \chi_e(\omega) + 1 = \frac{\chi_s}{1 + j\,\omega/\omega_0} + 1 = \frac{\varepsilon_{rs} - 1}{1 + j\,\omega/\omega_0} + 1$$

$$\lim_{\omega \to \infty} \varepsilon_r(\omega) = 1 = \varepsilon_{r\infty}$$

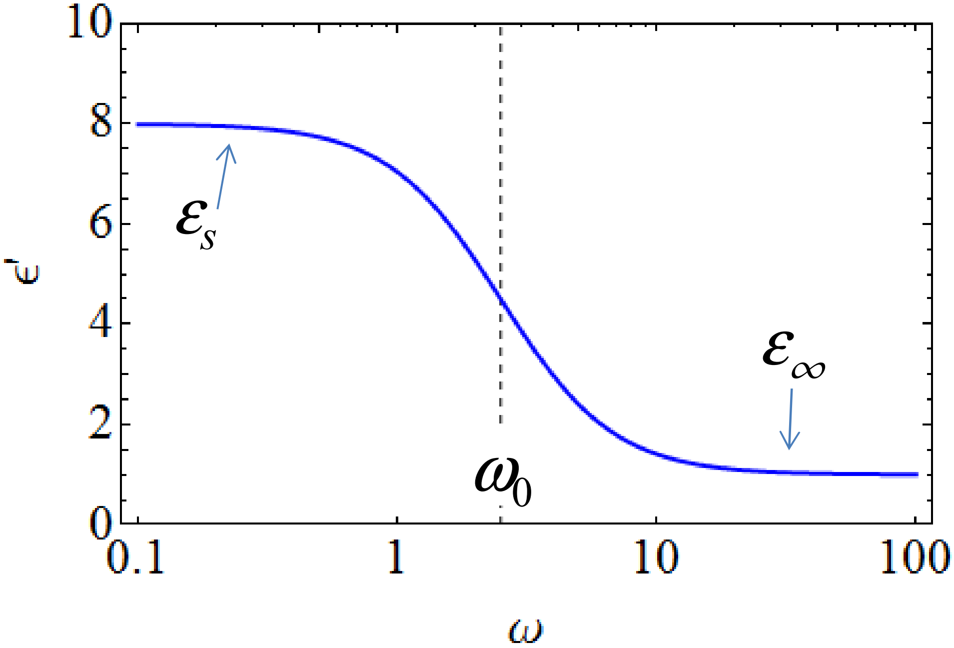
$$\boxed{\varepsilon(\omega) = \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{1 + j\,\omega/\omega_0} + \varepsilon_\infty}$$

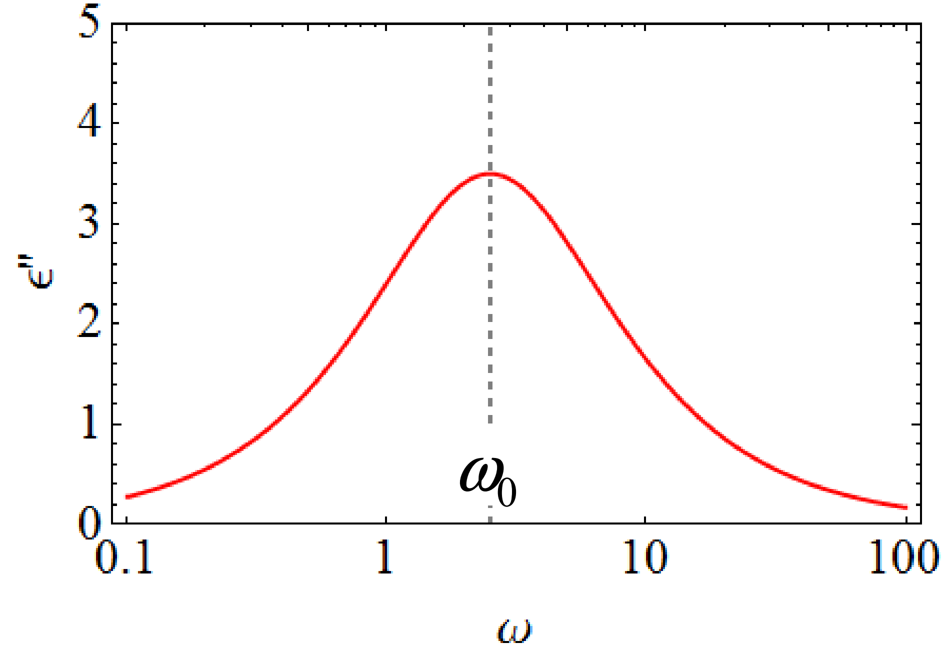
Dieléctricos - AC

- Relajación
  - Permitividad dieléctrica compleja

$$\varepsilon(\omega)=\frac{\varepsilon_s-\varepsilon_\infty}{1+j\,\omega/\omega_0}+\varepsilon_\infty$$

$$\varepsilon'(\omega)=\mathrm{Re}[\varepsilon(\omega)] \qquad \varepsilon''(\omega)=-\mathrm{Im}[\varepsilon(\omega)]$$





Dieléctricos - AC

- Resonancia
  - Para polarización iónica y atómica tenemos el mismo mecanismo
  - Un sistema sujeto a una fuerza eléctrica al que se opone un fuerza elástica y una fricción

$$\sum F = m\ddot{x}$$

$$F_{eléctrica} - F_{fricción} - F_{elástica} = m\ddot{x}$$

$$qE - k_F m\dot{x} - k_s x = m\ddot{x}$$

Dieléctricos - AC

- Resonancia
  - Si el campo es alterno:

$$qE_0e^{j\omega t} - k_F m\dot{x} - k_s x = m\ddot{x}$$

  - La solución es del tipo:

$$x(\omega,t) = x(\omega)e^{j\omega t}$$

Ejercicio:

$$x(\omega) = \frac{qE_0}{m}\left[\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + jk_F\omega}\right]$$

con

$$\omega_0 = \left(\frac{k_s}{m}\right)^{1/2}$$

Dieléctricos - AC

- Resonancia
  - Polarización

$$P(\omega,t) = N\,q\,x(\omega,t) \Rightarrow P(\omega) = N\,q\,x(\omega)$$

  - Desplazamiento

$$D = \varepsilon_0 + P \Rightarrow D(\omega) = \varepsilon_0 E(\omega) + P(\omega) \;= \varepsilon_0 E_0 + N\,q\,x(\omega)$$

$$\Rightarrow D(\omega) = \underbrace{\left[\varepsilon_0 + \frac{N\,q^2}{m}\left(\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + jk_F\omega}\right)\right]}_{\varepsilon(\omega)} E_0$$

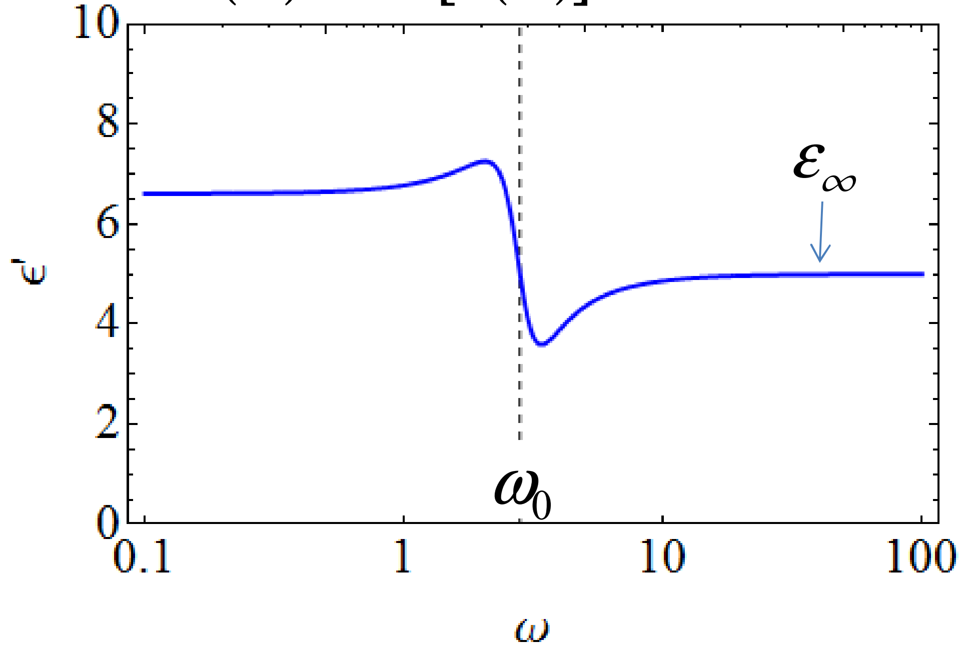
Dieléctricos - AC

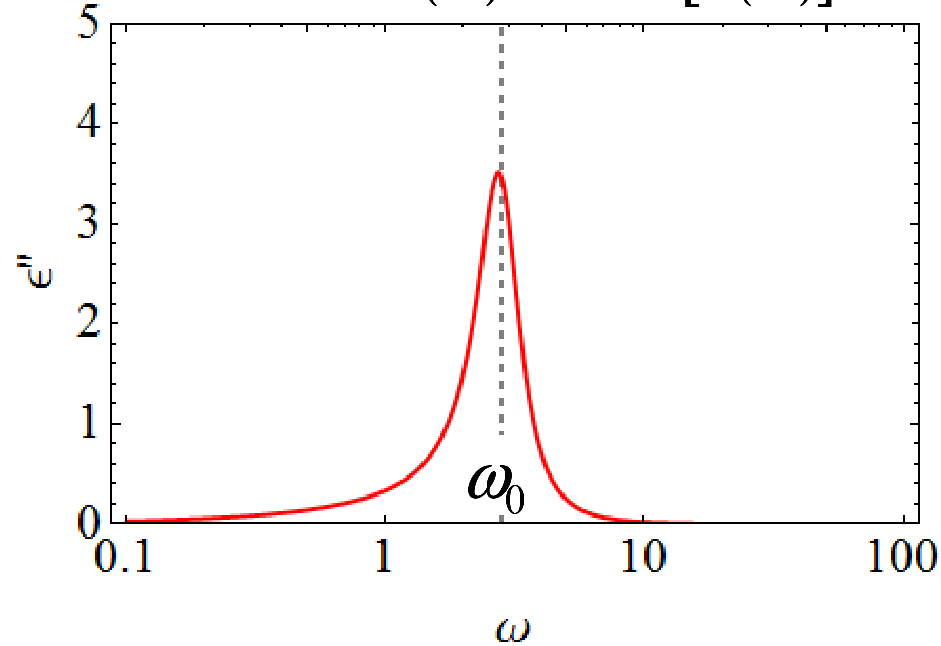
- Resonancia
  - Permitividad

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_\infty + \frac{N q^2}{m}\left(\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + jk_F\omega}\right)$$

$$\varepsilon'(\omega) = \mathrm{Re}[\varepsilon(\omega)]$$

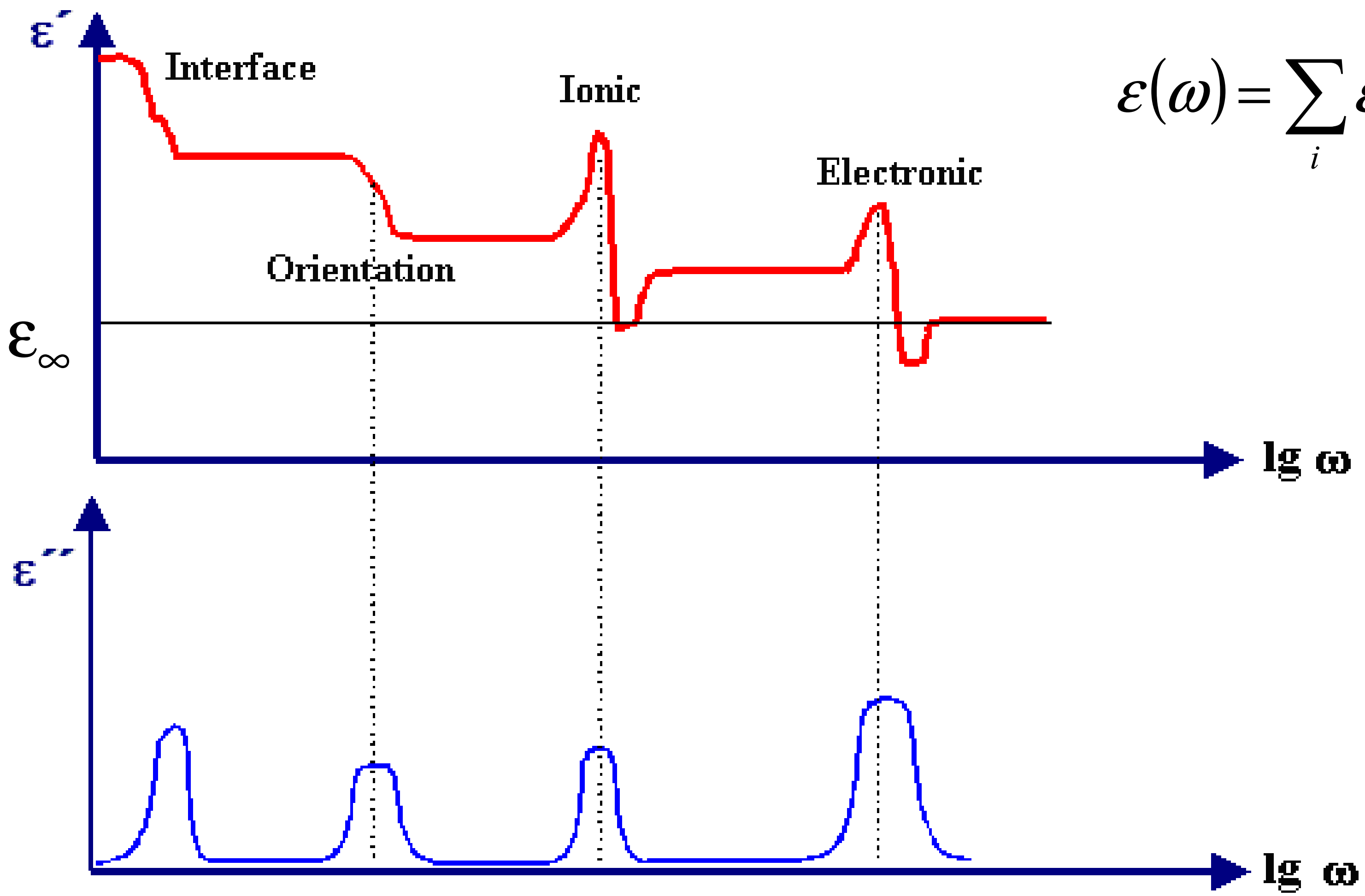
$$\varepsilon''(\omega) = -\mathrm{Im}[\varepsilon(\omega)]$$





Dieléctricos -AC

- En un material pueden haber varias contribuciones



$$\varepsilon(\omega)=\sum_i \varepsilon_i(\omega)+\varepsilon_\infty$$

Moraleja del Día

- La permitividad dieléctrica tiene una fuerte dependencia con la frecuencia
  - Relajación (polarización orientacional)

$$\varepsilon(\omega) = \frac{\varepsilon_s - \varepsilon_\infty}{1 + j\,\omega/\omega_0}$$

  - Resonancia (polarización iónica/electrónica)

$$\varepsilon(\omega) = \frac{N q^2}{m}\left(\frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + jk_F\omega}\right)$$

  - Contribución a altas frecuencias

$$\varepsilon_\infty$$