

Electromagnetismo Aplicado:

I. Principios de Teoría Electromagnética y Propiedades de Medios Materiales

F.P. Mena

Primavera 2011

I. Teoría E.M. y Materiales

- Ecuaciones de Maxwell
- Materiales
 - Conductores
 - Dieléctricos
 - Materiales magnéticos.
- Condiciones de frontera
- Funciones de potenciales
- Ecuaciones diferenciales para potenciales.

1. Ecuaciones de Maxwell

- Ley de Gauss: **Existencia de cargas eléctricas**

$$\oint_S \mathcal{D} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \rho \, dv \qquad \nabla \cdot \mathcal{D} = \rho$$

- Ley de Gauss magnética: **Ausencia de cargas magnéticas**

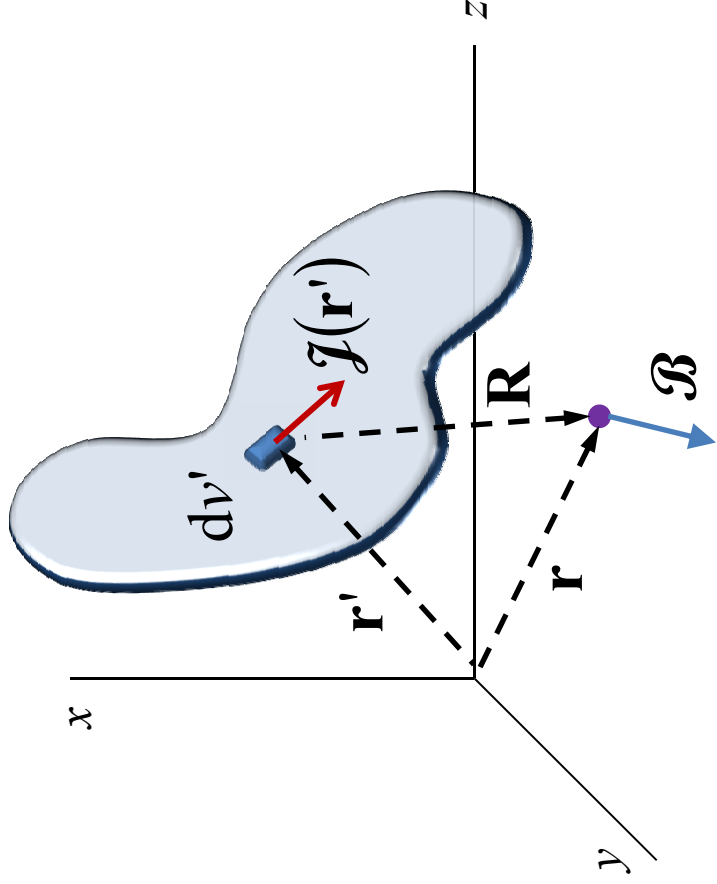
$$\oint_S \mathcal{B} \cdot d\mathbf{a} = 0 \qquad \nabla \cdot \mathcal{B} = 0$$

- Ley de Faraday: **Un campo magnético variable induce un campo eléctrico**

$$\oint_C \mathcal{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a} \qquad \nabla \times \mathcal{E} = - \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t}$$

1. Ecuaciones de Maxwell

- Ley de Ampère – Forma Diferencial
 - Ley de Biot-Savart



$$\mathcal{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathcal{J}(\mathbf{r}') \times \mathbf{R}}{R^2} \cdot d\mathbf{v}'$$



Para campo estático

$$\nabla \times \mathcal{B} = \mu_0 \mathcal{J}$$


1. Ecuaciones de Maxwell

- Ley de Ampère – Forma Diferencial
 - En presencia de un material magnetizable pueden haber **corrientes libres** y **corrientes ligadas**.

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}_b + \mathcal{I}_f$$

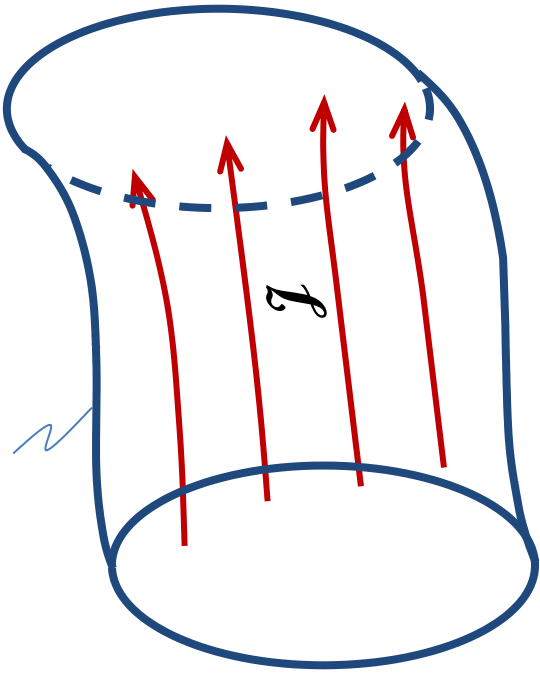
- El campo magnético total es producido por ambas

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \mathcal{B} = \mathcal{I} = \mathcal{I}_f + \cancel{\mathcal{I}_b}^{\nabla \times \mathcal{M}}$$


$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu_0} \mathcal{B} - \mathcal{M} \right) = \mathcal{I}_f \quad \nabla \times \mathcal{H} = \mathcal{I}_f$$

1. Ecuaciones de Maxwell

- Ley de Ampère – Forma Diferencial
 - Ecuación de continuidad



The diagram shows a blue-outlined volume V with a dashed blue surface S on its top. Red arrows representing current density \mathcal{J} are shown passing through the volume. A blue squiggly line is next to the label S, V .

$$I = \oint_S \mathcal{J} \cdot d\mathbf{a} = \int_V (\nabla \cdot \mathcal{J}) dV$$
$$I = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dV = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

↑

$$\nabla \cdot \mathcal{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

1. Ecuaciones de Maxwell

- Ley de Ampère – Forma Diferencial
 - Ley de Faraday vs. ley de Ampère

$$\nabla \times \mathcal{E} = -\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t}$$



$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathcal{E}) = 0$$

Divergencia de un
rotacional es cero



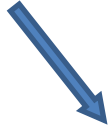
$$\nabla \cdot \left(-\frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathcal{B}) = 0$$

Ley de Gauss
magnética

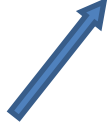
1. Ecuaciones de Maxwell

- Ley de Ampère – Forma Diferencial
 - Ley de Faraday vs. ley de Ampère

$$\nabla \times \mathcal{B} = \mu_0 \mathcal{J}$$



$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathcal{B}) = 0$$



$$\mu_0 \nabla \cdot \mathcal{J} = -\mu_0 \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Solo para
campos
estáticos

- Corrección de Maxwell
 - Añadir un término a $\mu_0 \mathcal{J}$ tal que su divergencia siempre se anule.

1. Ecuaciones de Maxwell

- Ley de Ampère – Forma Diferencial
 - Corrección de Maxwell

$$\nabla \times \mathcal{B} = \mu_0 \mathcal{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t}$$



Un campo eléctrico variable induce un campo magnético

$$\nabla \cdot \left(\mu_0 \mathcal{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 \nabla \cdot \mathcal{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathcal{E})$$

$$= \mu_0 \nabla \cdot \mathcal{J} + \mu_0 \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

Ley de Gauss

$$= 0$$

Ec. continuidad

Independientemente de si los campos son variables o no

1. Ecuaciones de Maxwell

- Ley de Ampère – Forma Diferencial
 - **Ejercicio:** Demostrar que en medios materiales la ley de Ampère se puede escribir:

$$\nabla \times \mathcal{H} = \mathcal{J}_f + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t}$$

- Donde:

$$\mathcal{D} = \varepsilon_0 \mathcal{E} + \mathcal{P}$$

$$\mathcal{H} = \frac{1}{\mu_0} \mathcal{B} - \mathcal{M}$$

1. Ecuaciones de Maxwell

- Ley de Ampère – Forma Integral

$$\begin{array}{ccc} \nabla \times \mathcal{H} = \mathcal{J}_f + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} & & \\ \swarrow \quad \searrow & & \swarrow \quad \searrow \\ \int_s \nabla \times \mathcal{H} \cdot d\mathbf{a} & & \int_s \left(\mathcal{J}_f + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} \right) \cdot d\mathbf{a} \\ = \oint_C \mathcal{H} \cdot d\mathbf{l} & & \\ \swarrow \quad \searrow & & \swarrow \quad \searrow \\ \oint_C \mathcal{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_s \mathcal{J}_f \cdot d\mathbf{a} + \frac{d}{dt} \int_s \mathcal{D} \cdot d\mathbf{a} & & \end{array}$$

1. Ecuaciones de Maxwell

- Ecuaciones de Maxwell en campos variables

Ley	Integral	Diferencial
Faraday:	$\oint_C \mathcal{E} \cdot d\mathbf{l} = - \int_S \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{a}$	$\nabla \times \mathcal{E} = - \frac{\partial \mathcal{B}}{\partial t}$
Ampère:	$\oint_C \mathcal{H} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \mathcal{I}_f \cdot d\mathbf{a} + \frac{d}{dt} \int_S \mathcal{D} \cdot d\mathbf{a}$	$\nabla \times \mathcal{H} = \mathcal{I}_f + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t}$
Gauss:	$\oint_S \mathcal{D} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \rho \, dv$	$\nabla \cdot \mathcal{D} = \rho$
Gauss – mag.:	$\oint_S \mathcal{B} \cdot d\mathbf{a} = 0$	$\nabla \cdot \mathcal{B} = 0$

NOTA 1: Solo 3 de estas ecuaciones son independientes.

NOTA 2: Tenemos 15 incógnitas.

1. Ecuaciones de Maxwell

- Propiedades de medios

$\mathcal{D} = f_D(\mathcal{E})$	Aproximación más usual	$\mathcal{D} = \varepsilon \mathcal{E}$
$\mathcal{B} = f_B(\mathcal{H})$		$\mathcal{B} = \mu \mathcal{H}$
$\mathcal{J} = f_J(\mathcal{E})$		$\mathcal{J} = \sigma \mathcal{E}$

LINEALES:

$$\epsilon \neq \epsilon(\mathcal{E}) \dots$$

ISOTROPICOS:

ϵ es escalar

HOMOGENEOS:

$$\epsilon \neq \epsilon(x, y, z) \dots$$

2. Materiales

- ¿Por qué materiales?
- Conceptos Generales
- Conductores
- Dieléctricos
- Materiales magnéticos.

2.1 ¿Por qué materiales?

Avances en **electrónica y tecnología de la comunicación** son impulsados casi exclusivamente por avances en **Ciencia de Materiales**.

2.1 ¿Por qué materiales?

- Pantalla plana:
 - Empaquetado: mezcla de **polímeros** o **cerámicas**.
 - “Chips” consistentes mayoritariamente de **Si** pero entrelazado con otros materiales como **P, B, As, SiO₂, Si₃N₄, MoSi₂, W, TiN, Al, Cu**.
 - **Cristal líquido** (una solución de material polar).
 - **Si amorfo**.
 - Óxido de estaño e indio **ITO** (electrodo transparente).
 - Láminas de **plástico** utilizadas como polarizadores.
 - Placas delantera y trasera de **plástico** o **vidrio**.

2.2 Conceptos Generales

- Ley de Ohm

$$I = G \cdot V \quad \longleftrightarrow \quad \mathcal{I} = \sigma \cdot \mathcal{E}$$
$$\sigma = \frac{1}{\rho} = \frac{l}{R \cdot A}$$

- Materiales de acuerdo a su resistividad

ρ (metal)	$\approx 2 \mu\Omega \cdot \text{cm}$
ρ (semiconductor)	$\approx 1 \Omega \cdot \text{cm}$
ρ (insulator)	$\approx 1 \text{ G}\Omega \cdot \text{cm}$

2.2 Conceptos Generales

- Ley de Ohm

$$I = G \cdot V \quad \longleftrightarrow \quad \mathcal{I} = \sigma \cdot \mathcal{E}$$

$$\sigma = \frac{1}{\rho} = \frac{l}{R \cdot A}$$

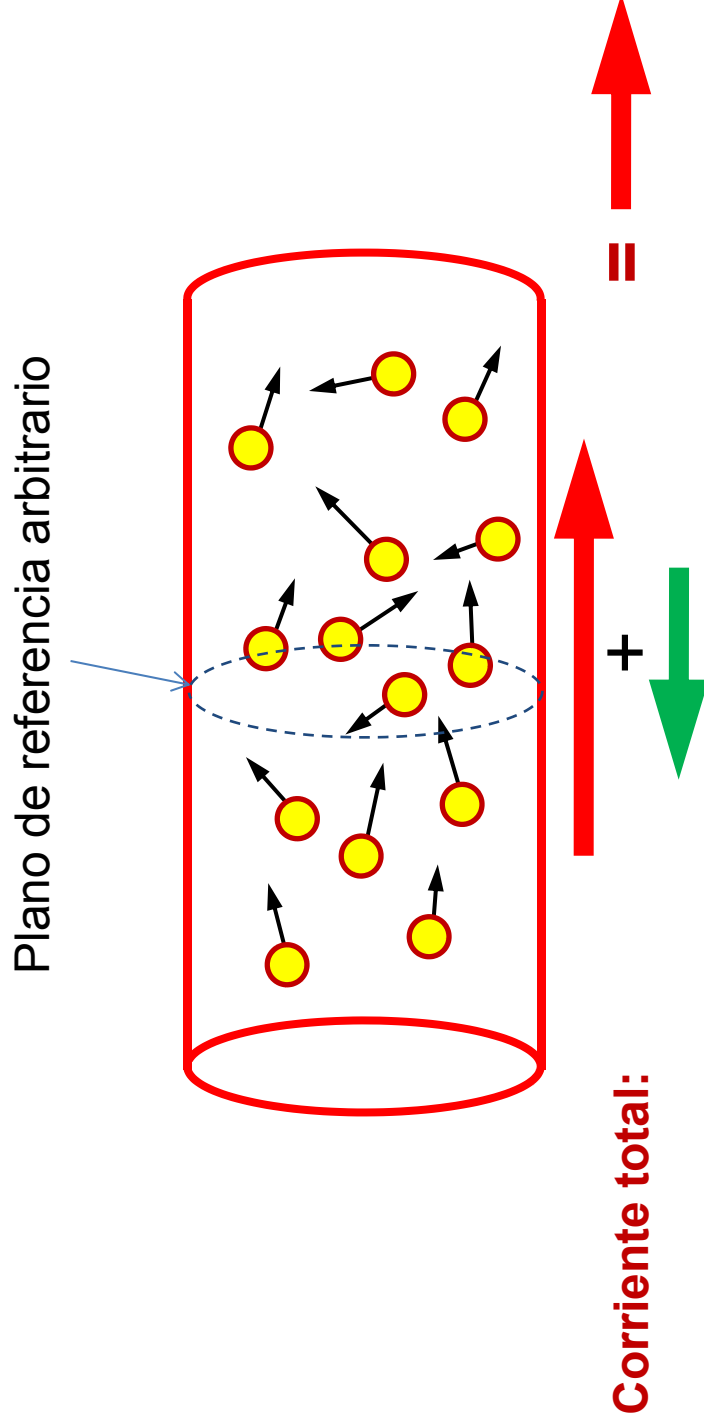
- En general

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\text{material, temperatura, presión, defectos, frecuencia...})$

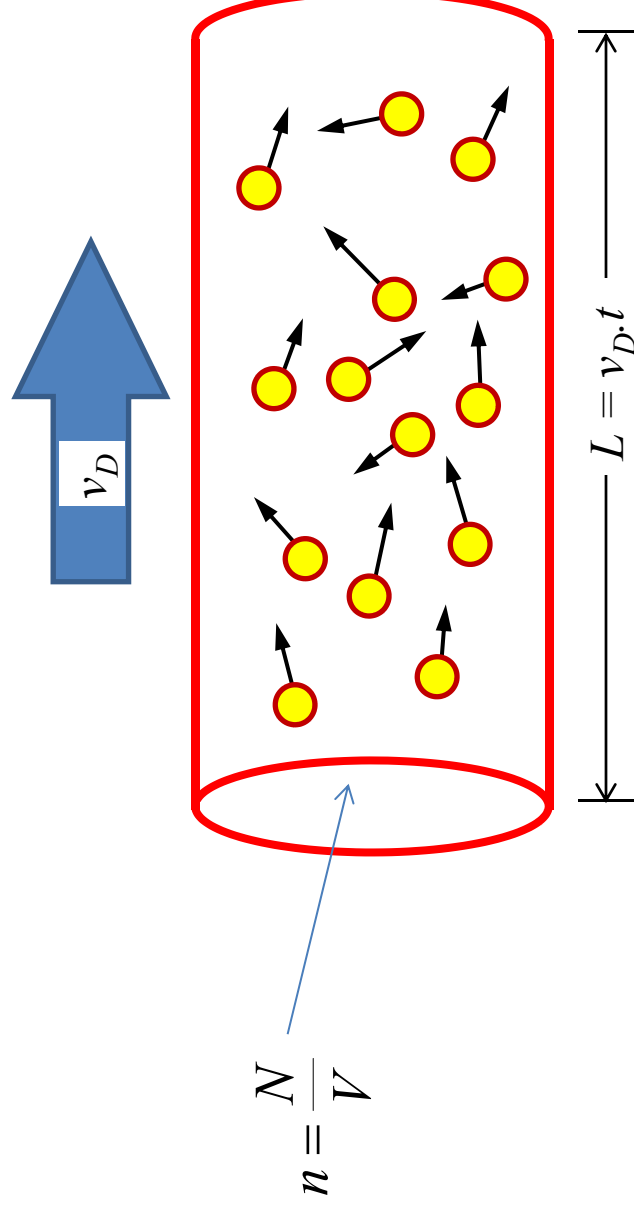
2.2 Conceptos Generales

- Ley de Ohm y portadores
 - Portador es cualquier “objeto” transportando carga
 - Corriente total



2.2 Conceptos Generales

- Ley de Ohm y portadores
 - Asumamos un solo tipo de portadores.
 - Tienen una velocidad promedio v_D .

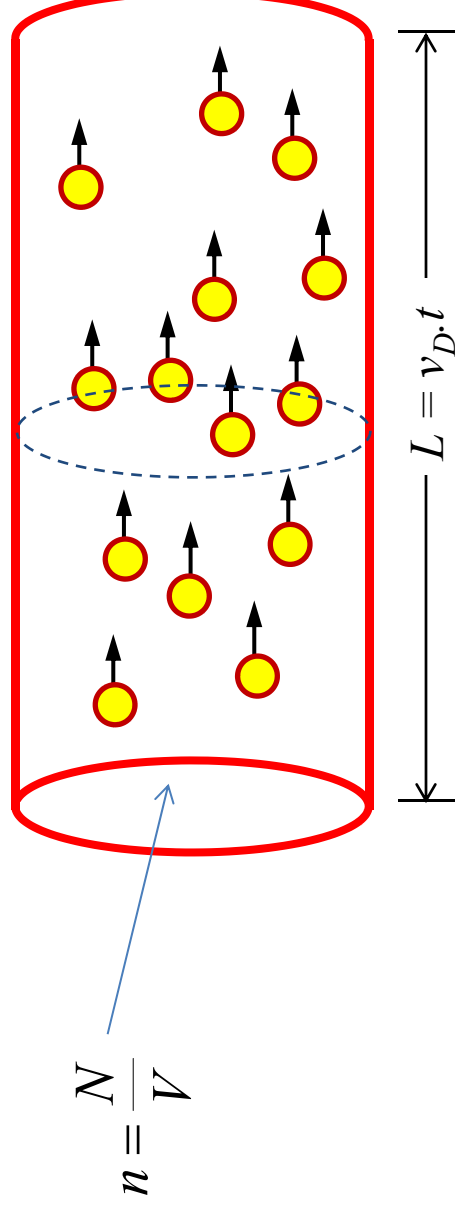


2.2 Conceptos Generales

- Ley de Ohm y portadores
 - Calculemos la densidad de corriente.

$$j = \frac{q \cdot N}{A \cdot t} = \frac{q \cdot n \cdot V \cdot v_D}{A \cdot L} = q \cdot n \cdot v_D$$

$$j = \sigma \cdot E$$



2.2 Conceptos Generales

- Ley de Ohm y portadores
 - Calculemos la densidad de corriente

$$j = \frac{q \cdot N}{A \cdot t} = \frac{q \cdot n \cdot V \cdot v_D}{A \cdot L} = q \cdot n \cdot v_D \quad \longleftrightarrow \quad j = \sigma \cdot E$$

$$\sigma = \frac{q \cdot n \cdot v_D}{E} \quad \mu; \text{ Movilidad} \quad (\text{no confundir con permeabilidad})$$

[m² V⁻¹ s⁻¹]

PREGUNTA 1: ¿Espera usted que v_D/E sea constante? v_D es constante para un E dado

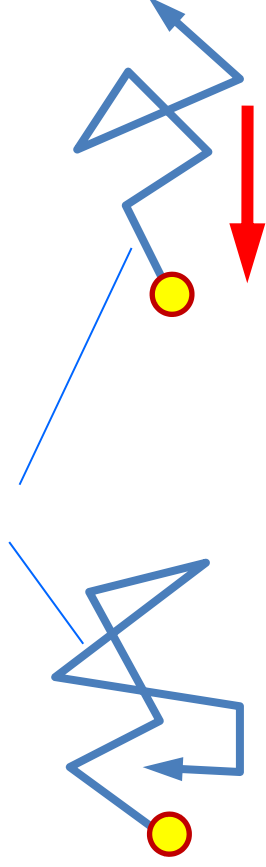
PREGUNTA 2: Pero al haber un campo E , ¿no esperaría usted que v_D crezca indefinidamente?

2.2 Conceptos Generales

- Dispersión

τ = tiempo promedio entre colisiones

l = distancia promedio entre colisiones $= \tau(v_0 + v_D)$



$$E = 0$$

$$\langle \mathbf{v} \rangle = 0$$

$$\langle v \rangle = v_0$$

$$E \neq 0$$

$$\langle \mathbf{v} \rangle = \mathbf{v}_D$$

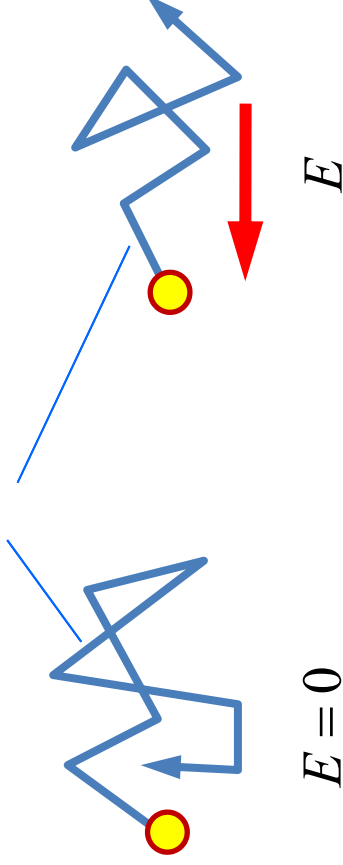
$$\langle v \rangle = v_0 + v_D$$

2.2 Conceptos Generales

- Dispersión y 2^{da} ley de Newton

τ = tiempo promedio entre colisiones

l = distancia promedio entre colisiones $= \tau(v_0 + v_D)$



$$F = m \frac{dv}{dt} = m \frac{v_D}{\tau}$$



$$qE = m \frac{v_D}{\tau}$$



$$\frac{v_D}{E} = \frac{q\tau}{m} = \mu$$

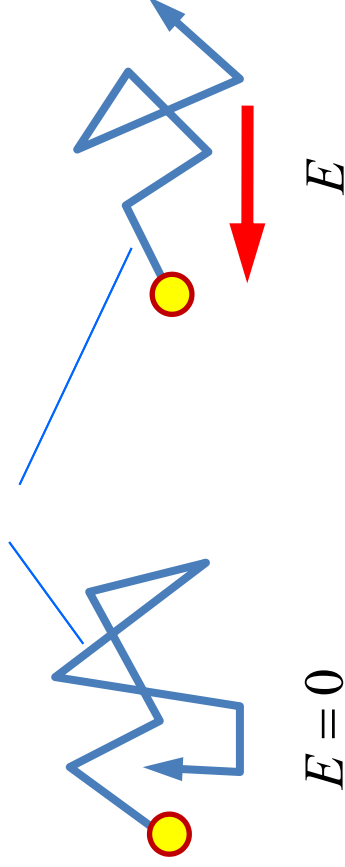
La movilidad mide la dispersión en un material

2.2 Conceptos Generales

- Dispersión y 2^{da} ley de Newton

τ = tiempo promedio entre colisiones

l = distancia promedio entre colisiones $= \tau(v_0 + v_D)$



$$\mu = \frac{q\tau}{m}$$



$$\sigma = q n \mu = \frac{q^2 n \tau}{m}$$

PREGUNTA: ¿Qué limita la velocidad en un microprocesador?

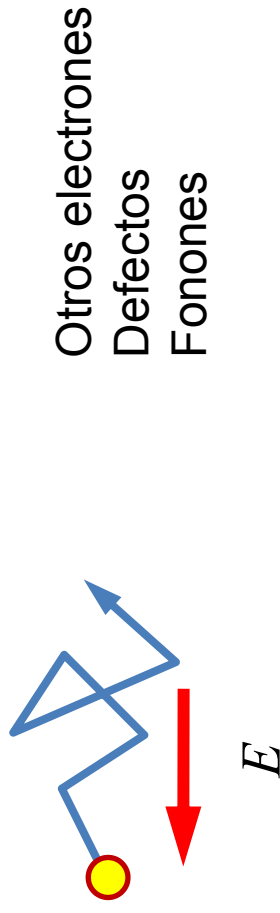
2.2 Conceptos Generales

- ¿Qué causa dispersión de materiales?
 - **Otros electrones**: importante solo a bajas temperaturas.
 - **Defectos** (impurezas, imperfecciones): causan calentamiento.
 - **Fonones** (vibraciones de la red): el más importante a temperaturas altas.

Moraleja del Día

- Ley de Ampère: **Un campo magnético es producido por campos eléctricos variables o por corrientes.**

- Dispersión de portadores



- Conductividad y movilidad

$$\sigma = q n \mu; \quad \mu = \frac{q \tau}{m}$$