

# Electromagnetismo Aplicado:

## I. Principios de Teoría Electromagnética y Propiedades de Medios Materiales

F.P. Mena

Primavera 2011

# I. Teoría E.M. y Materiales

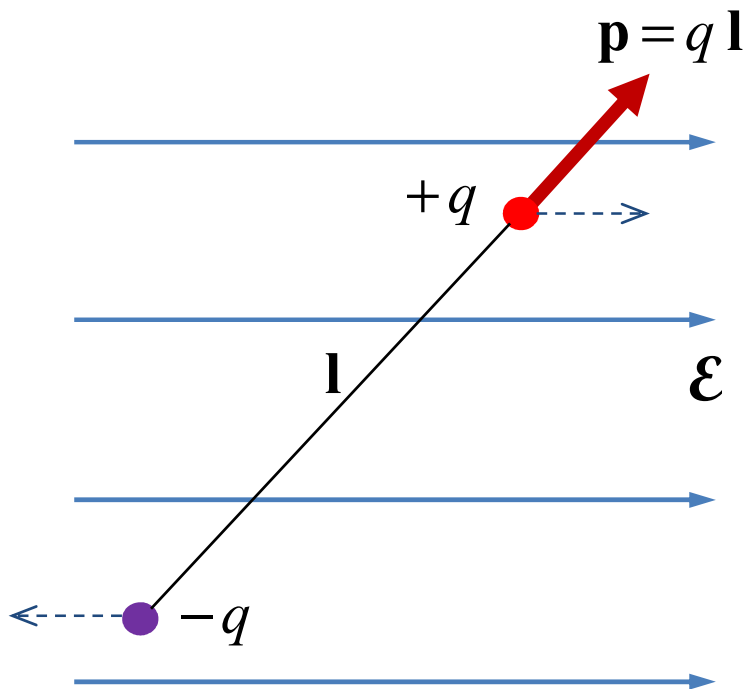
- Ecuaciones de Maxwell
- Materiales
  - Conductores
  - Dieléctricos
  - Materiales magnéticos.
- Condiciones de frontera
- Funciones de potenciales
- Ecuaciones diferenciales para potenciales.

# Dieléctricos

- Las preguntas a responder:
  - ¿De qué depende  $\epsilon$  a un nivel microscópico?
  - ¿Depende  $\epsilon$  de la frecuencia a la que varía  $E$ ?
  - ¿Cuál es la máxima intensidad de  $E$  que un dieléctrico puede soportar?
- Asumiremos:
  - No portadores
  - Constante dieléctrica es un escalar

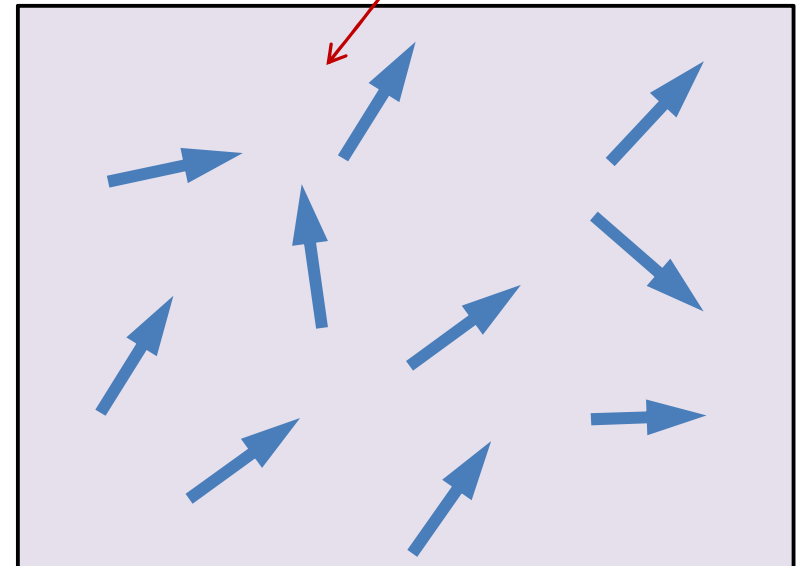
# Dieléctricos

- Polarización



Dipolo en un campo  
eléctrico

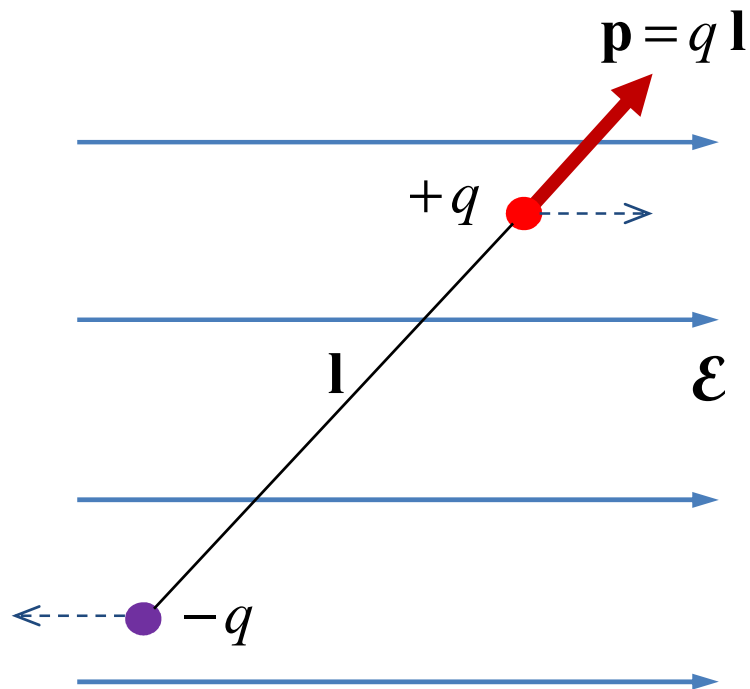
$$\mathcal{P} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\sum_i \mathbf{p}_i}{\Delta v} = \frac{d\mathbf{p}}{dv}$$



Dipolos en un  
material dieléctrico

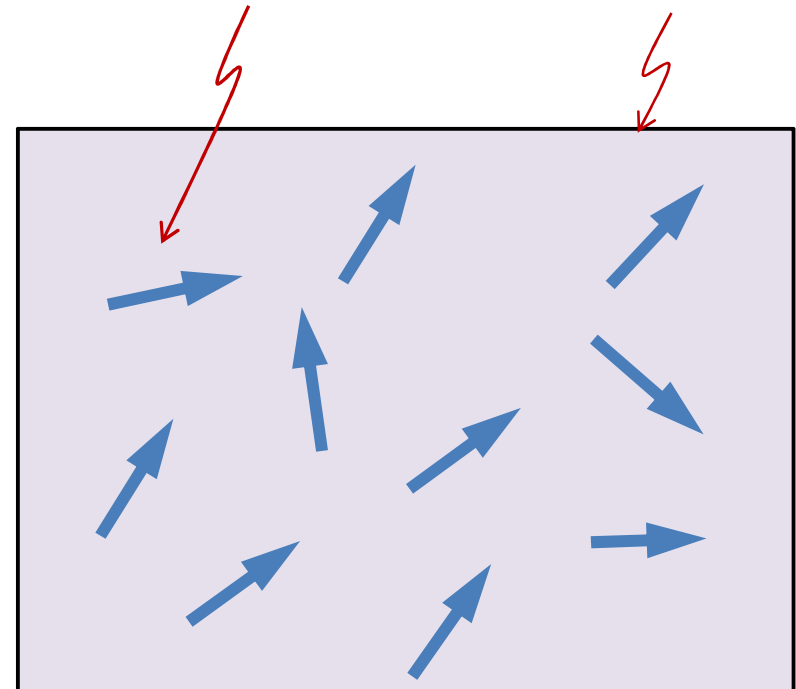
# Dieléctricos

- Polarización



$$\rho_{vb} = -\nabla \cdot \mathcal{P}$$

$$\rho_{sb} = \mathcal{P}_n$$



**PREGUNTAS:** ¿Cuál es el valor de  $\rho_{vb}$  si hay polarización total?

¿Qué unidades tiene  $\mathcal{P}$ ?

# Dieléctricos

- Polarización y campo eléctrico:
  - La polarización es generada por el campo eléctrico sobre el material:

$$\mathcal{P} = f(\mathcal{E})$$

- $\mathcal{P}$  se puede representar como expansión de  $\mathcal{E}$ . En primera aproximación (material lineal):

$$\mathcal{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathcal{E}$$

$$\chi_e = \chi_e(\omega, T, \text{estructura})$$

# Dieléctricos

- Polarización y desplazamiento:

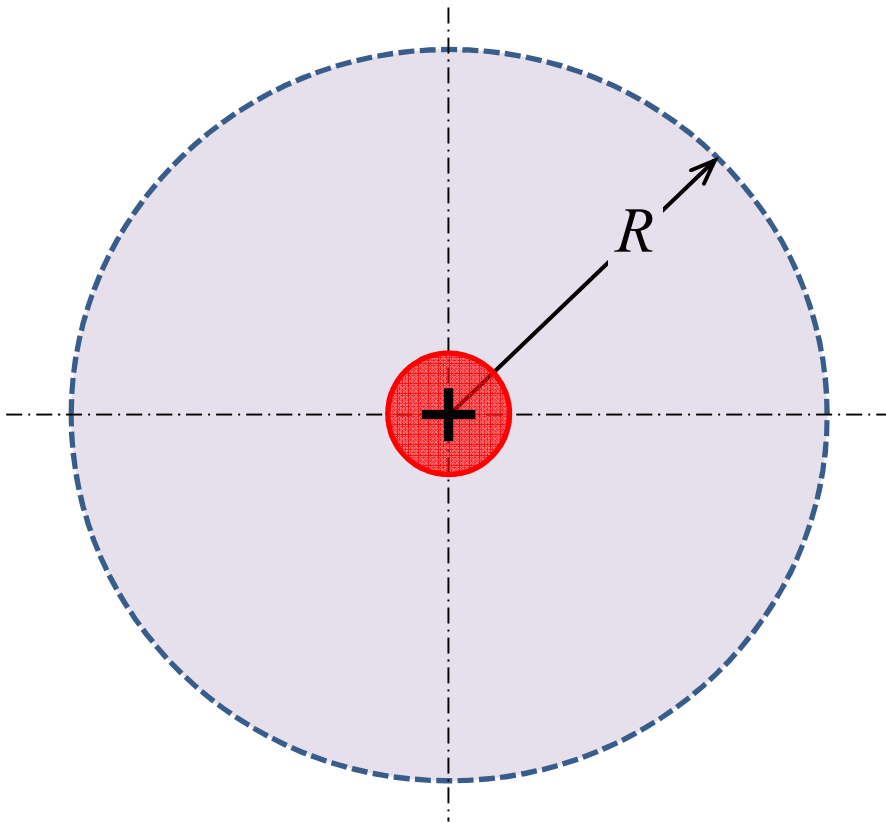
$$\begin{array}{l} \mathcal{P} = \varepsilon_0 \chi_e \mathcal{E} \\ \mathcal{D} = \varepsilon_0 \mathcal{E} + \mathcal{P} \end{array} \quad \longrightarrow \quad \mathcal{D} = \underbrace{\varepsilon_0 (1 + \chi_e)}_{\varepsilon} \mathcal{E}$$

- Mecanismos microscópicos de polarización
  - Electrónica
  - Iónica
  - Orientacional
  - Interfacial

# Dieléctricos

- Polarización Electrónica

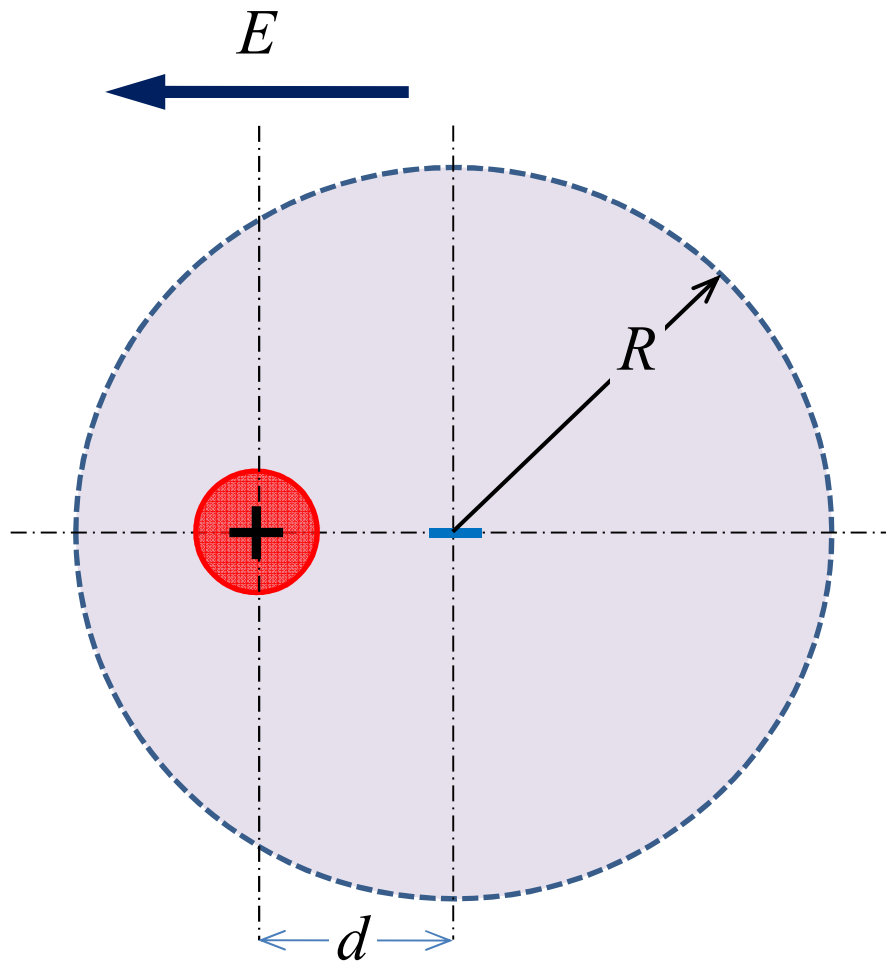
$$E = 0$$





# Dieléctricos

- Polarización Electrónica



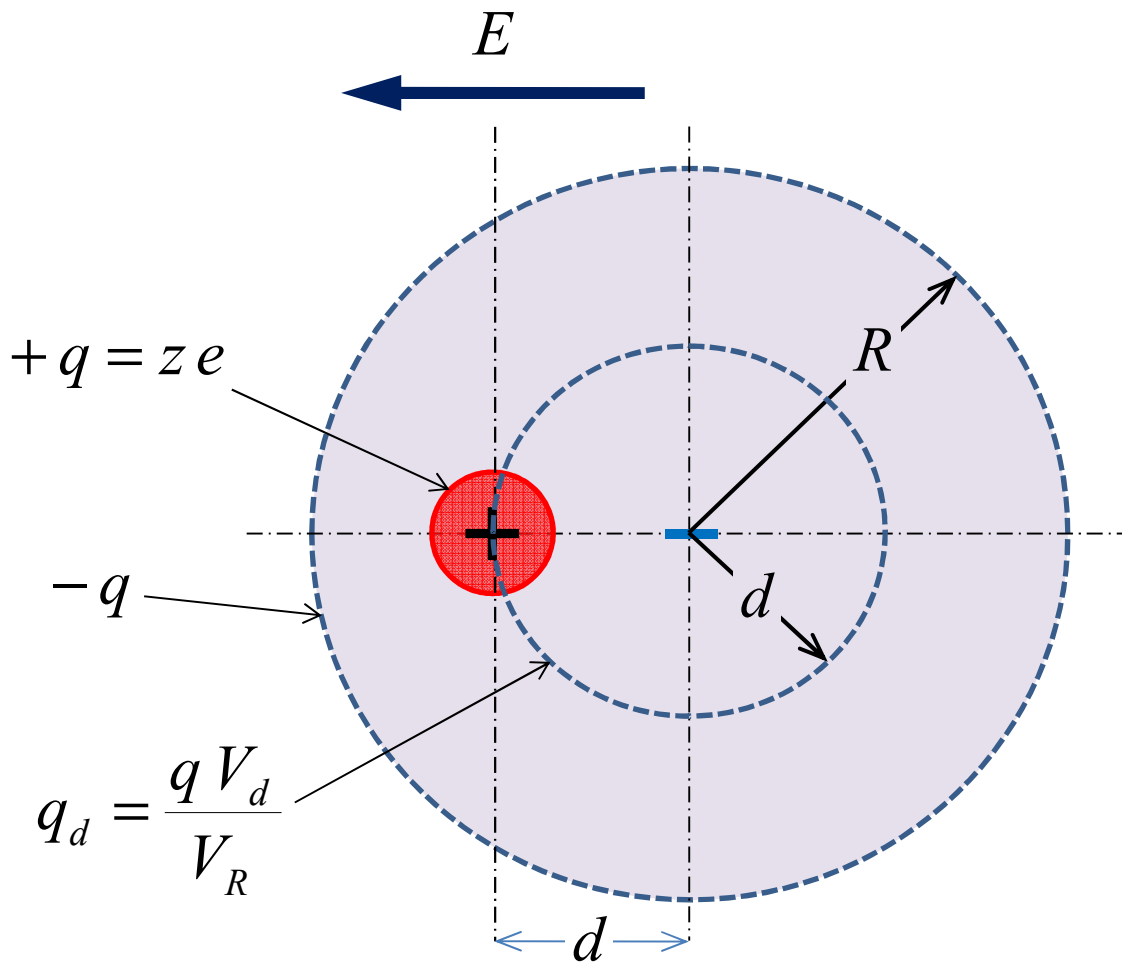
**PREGUNTA:** ¿Qué evita que la nube se separe indefinidamente?

Polarización del átomo:

$$p = q d$$

# Dieléctricos

- Polarización Electrónica



$$F_{\text{campo}} = qE$$

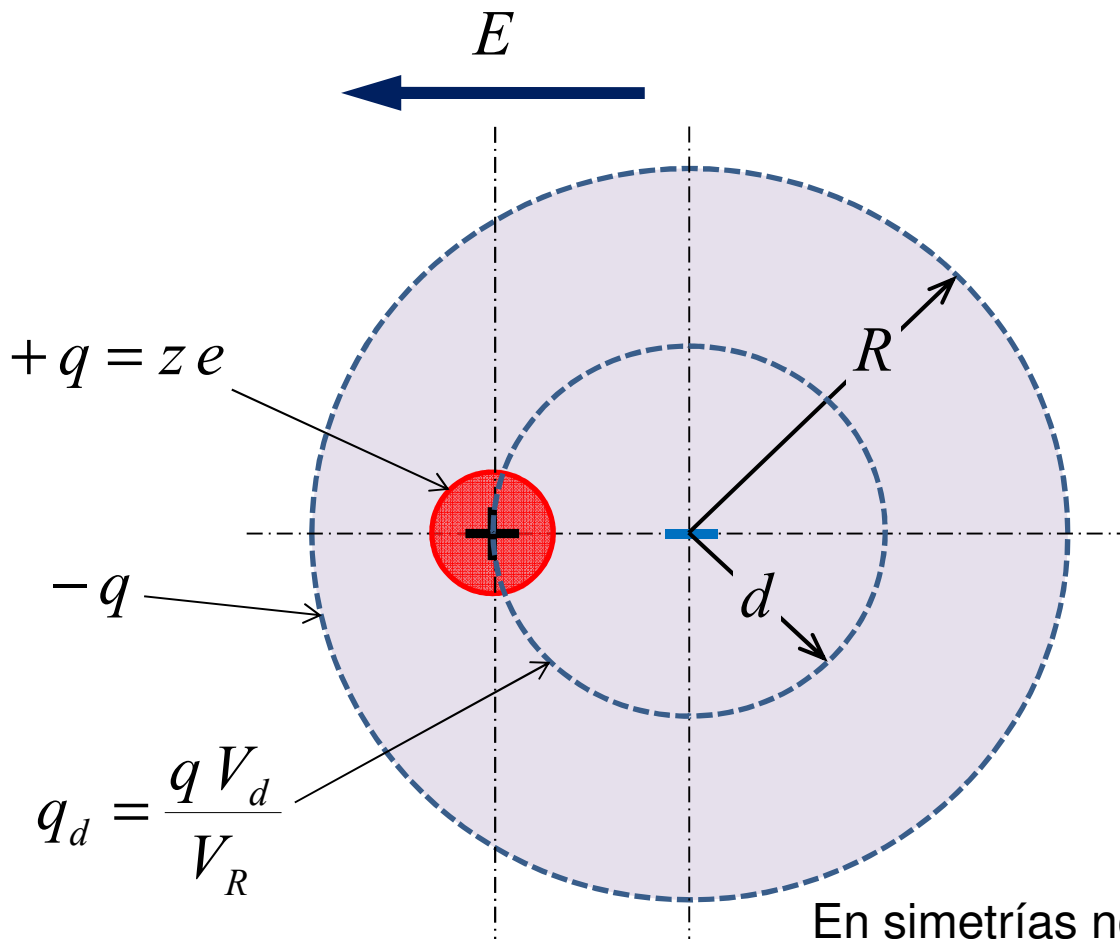
$$F_{\text{cargas}} = \frac{q q_d}{4 \pi \epsilon_0 d^2}$$



$$d = \frac{4 \pi \epsilon_0 R^3 E}{ze}$$

# Dieléctricos

- Polarización Electrónica

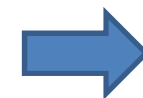


$$P = p N = q d N$$



$$P = \underbrace{4 \pi N R^3}_{\chi_{\text{atom}}} \epsilon_0 E$$

**EJEMPLO:**  $N = 3 \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3}$  y  
 $R = 6 \cdot 10^{-9} \text{ cm}$



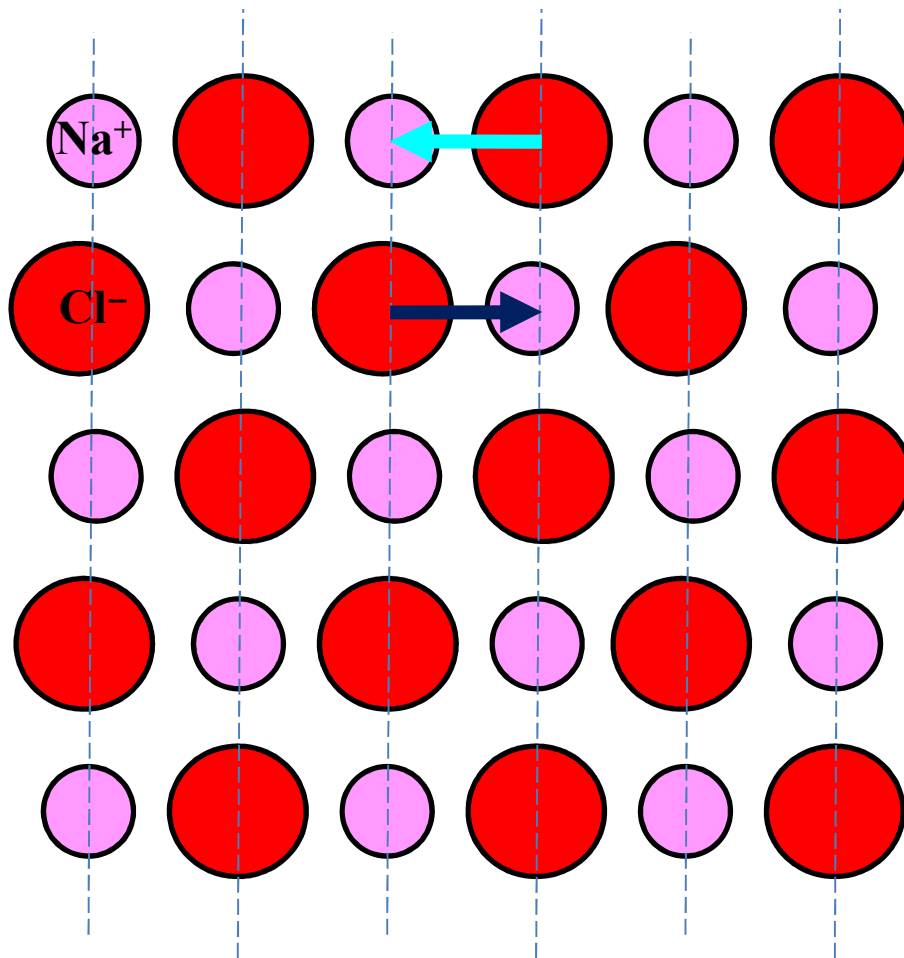
$$\epsilon_r = 1,000\ 0814$$

En simetrías no esféricas puede ser mucho mayor

# Dieléctricos

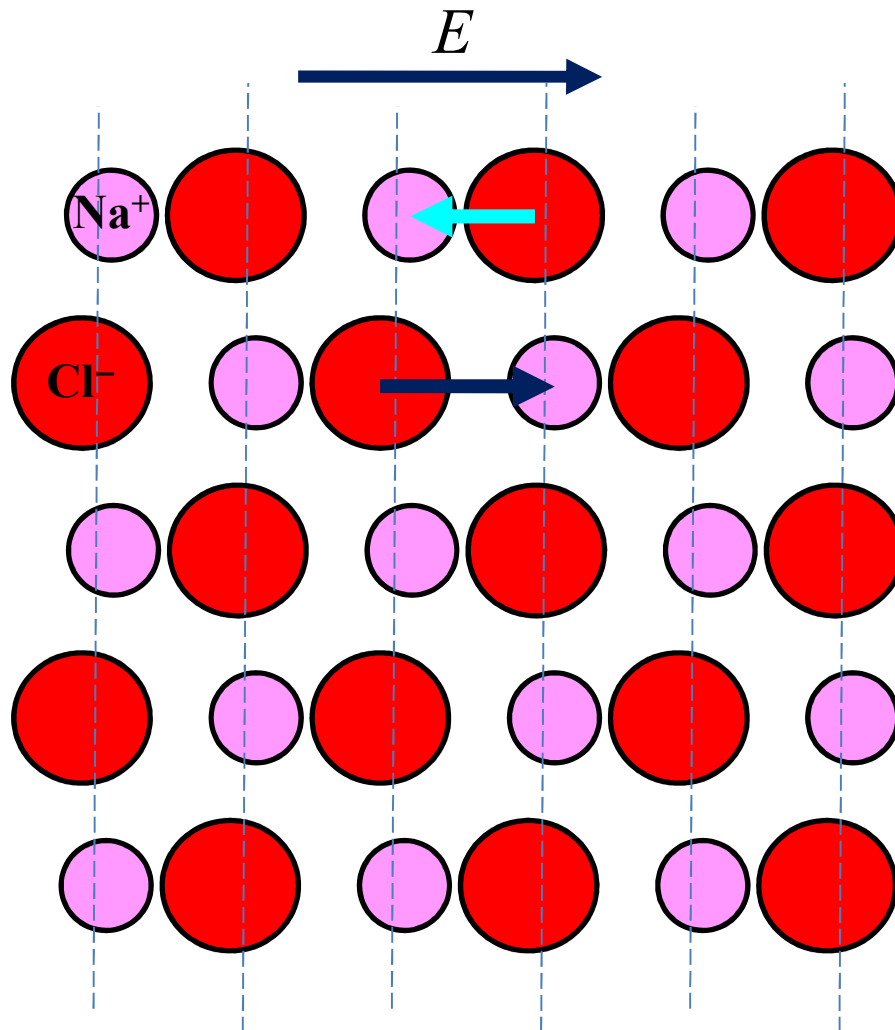
- Polarización Iónica

$$E = 0$$



# Dieléctricos

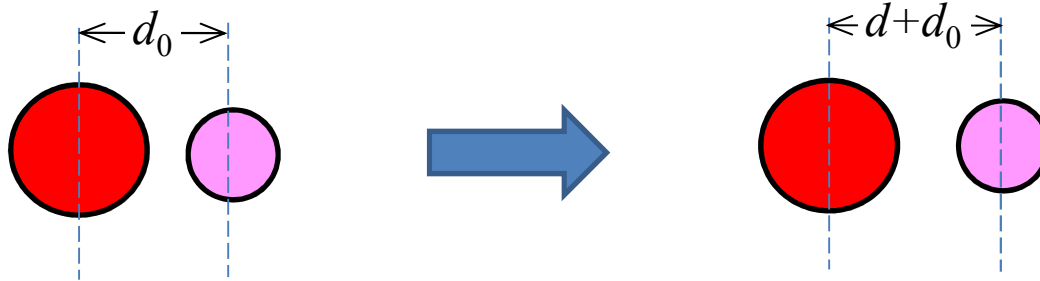
- Polarización Iónica



**PREGUNTA:** ¿Qué evita que los iones se separen indefinidamente?

# Dieléctricos

- Polarización Iónica



Fuerza eléctrica:

$$F_1 = q E$$

Fuerza elástica:

$$F_2 = k d$$

$$k = Y d_0$$

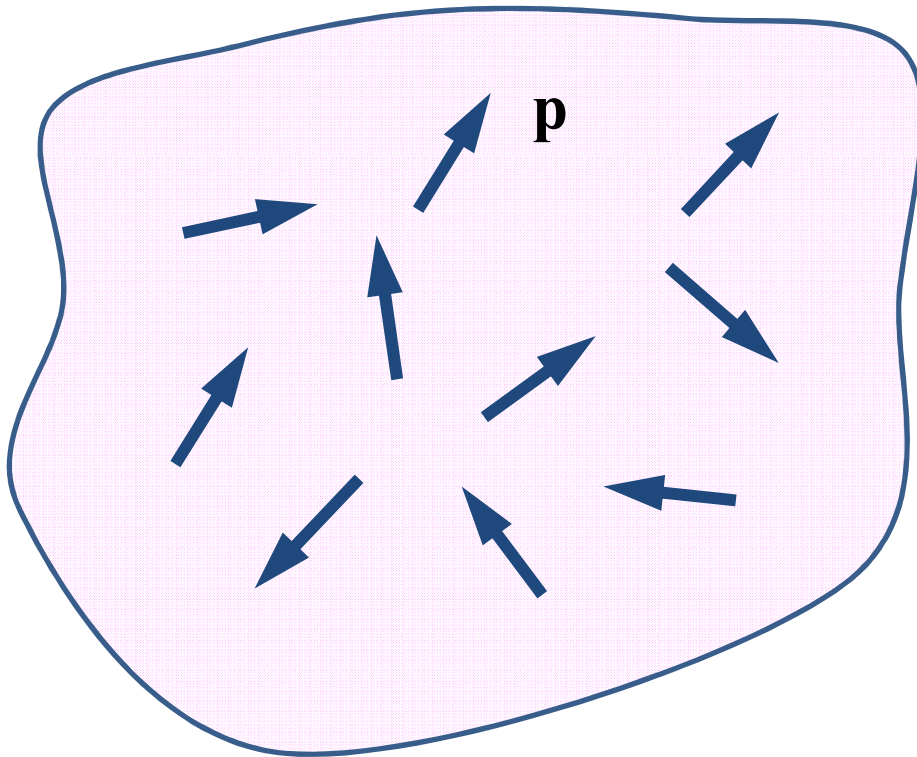
$$d = \frac{q E}{Y d_0}$$

$$P = \frac{N q^2 E}{Y d_0}$$

# Dieléctricos

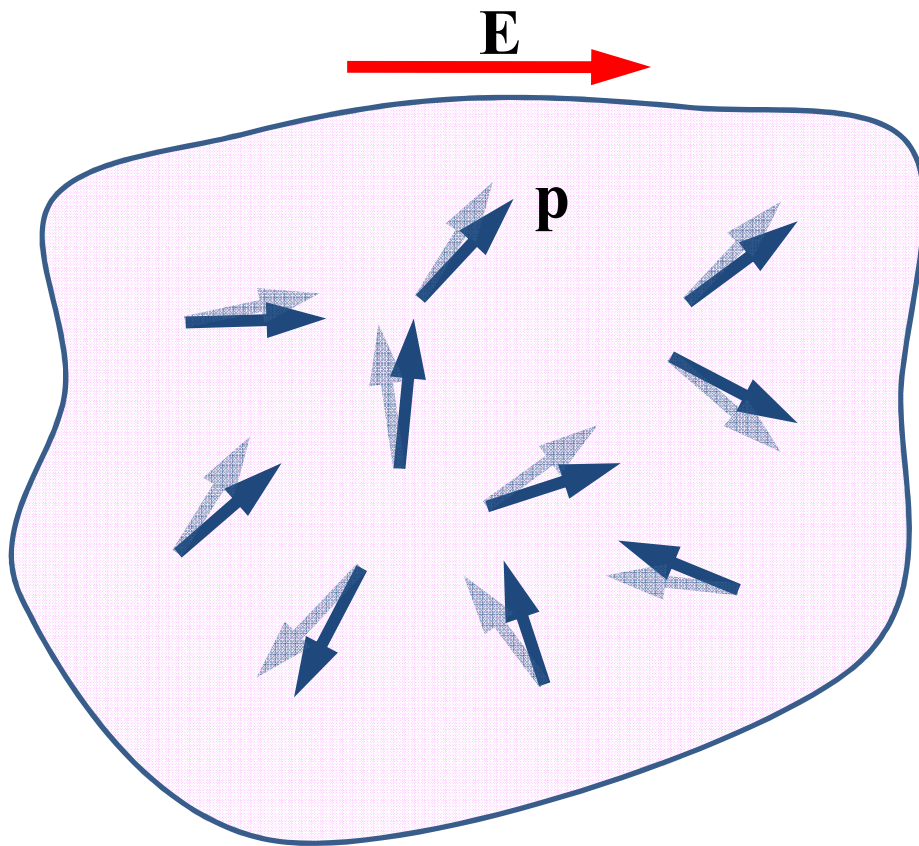
- Polarización Orientacional

$$\mathbf{E} = 0$$



# Dieléctricos

- Polarización Orientacional



Si  $\delta$  es el ángulo entre  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{E}$ :

La componente de  $\mathbf{p}$  en dirección de  $\mathbf{E}$  es

$$p_E = p \cos \delta$$



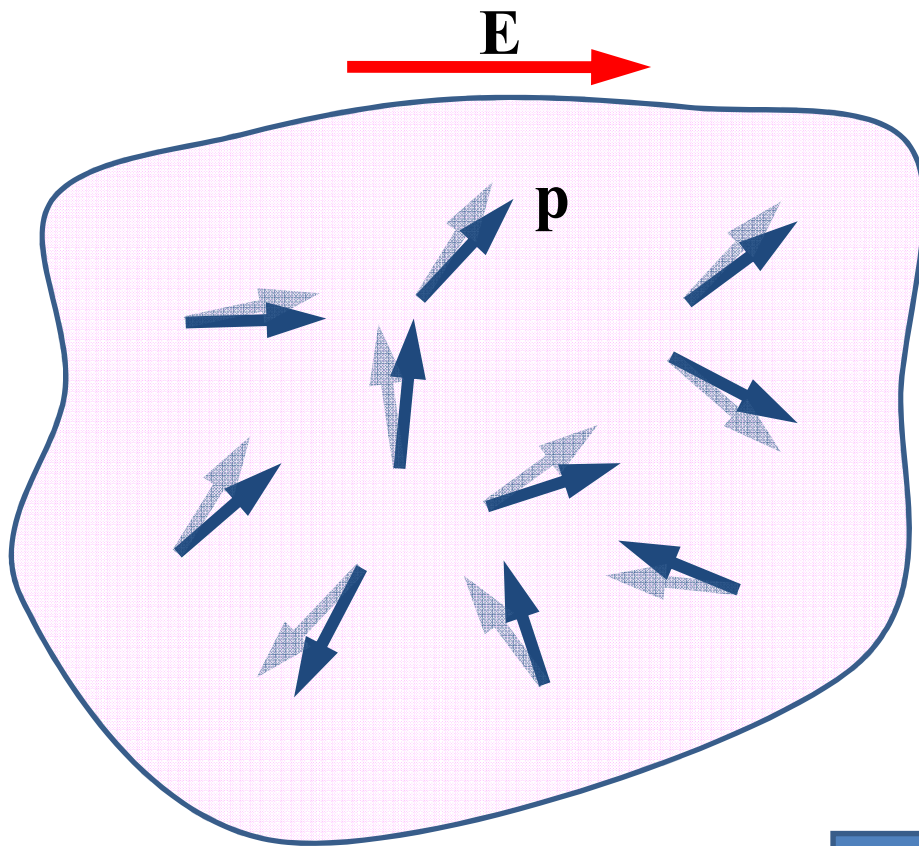
$$\langle p_E \rangle = \frac{\int_{\text{todos los } \delta} N(\delta) p_E dV_\delta}{\int_{\text{todos los } \delta} N(\delta) dV_\delta}$$

$N(\delta)$  es el número de dipolos que forman un ángulo  $\delta$  con el campo  $\mathbf{E}$



# Dieléctricos

- Polarización Orientacional



Si  $\delta$  es el ángulo entre  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{E}$ :

Energía de un dipolo  $\mathbf{p}$  en un campo  $\mathbf{E}$ :

$$U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E} = -pE \cos \delta$$

Número de dipolos con energía  $U$   
(distribución de Boltzman):

$$N(U) = A \exp(-U/kT)$$

$$k = 1.3806503 \times 10^{-23} \text{ m}^2 \text{ kg s}^{-2} \text{ K}^{-1}$$



$$N(\delta) = A \exp(pE \cos \delta / kT)$$

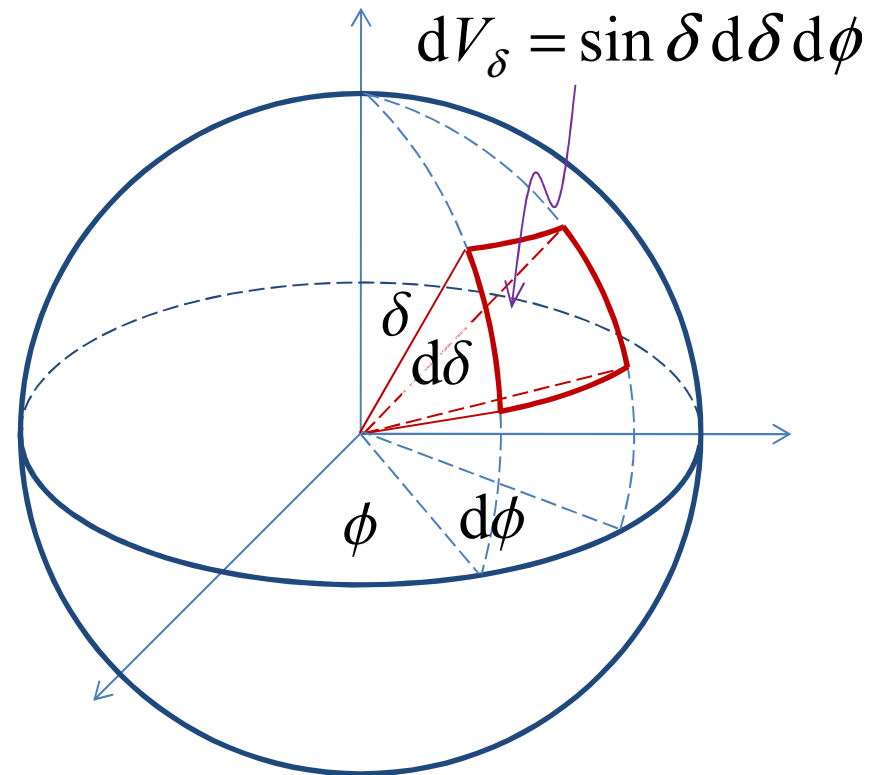
# Dieléctricos

- Polarización Orientacional

$$\langle p_E \rangle = \frac{\int_{\text{todos los } \delta} N(\delta) p_E dV_\delta}{\int_{\text{todos los } \delta} N(\delta) dV_\delta}$$



$$\langle p_E \rangle = \frac{\int_{\delta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} N(\delta) p_E \sin \delta d\delta d\phi}{\int_{\delta=0}^{\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} N(\delta) \sin \delta d\delta d\phi}$$



# Dieléctricos

- Polarización Orientacional

$$\Rightarrow \langle p_E \rangle = \frac{2\pi \int_0^\pi A \exp\left(\frac{pE \cos \delta}{kT}\right) p \cos \delta \sin \delta d\delta}{2\pi \int_0^\pi A \exp\left(\frac{pE \cos \delta}{kT}\right) \sin \delta d\delta}$$

$$x = \cos \delta$$

$$\beta = \frac{pE}{kT}$$

$$\Rightarrow \langle p_E \rangle = \frac{p \int_{-1}^1 \exp(\beta x) x dx}{\int_{-1}^1 \exp(\beta x) dx} = p \left[ \overbrace{\coth \beta - \frac{1}{\beta}}^{L(\beta)} \right] \quad \text{Función de Langevin}$$

$$\Rightarrow P = N p L(\beta) \quad \xrightarrow{\beta \ll 1} P \approx \frac{N p^2 E}{3kT}$$

# Dieléctricos - Polarización

- Polarización

$$p_{\text{el}} = 4\pi R^3 \epsilon_0 \boxed{E} \quad p_{\text{io}} = \frac{q^2 \boxed{E}}{Y d_0} \quad p_{\text{or}} = \frac{p^2 \boxed{E}}{3kT}$$

**PREGUNTA:** ¿Qué relación hay entre el  $E$  de estas ecuaciones y el  $E$  de  $P = \epsilon_0 \chi_e E$  ?

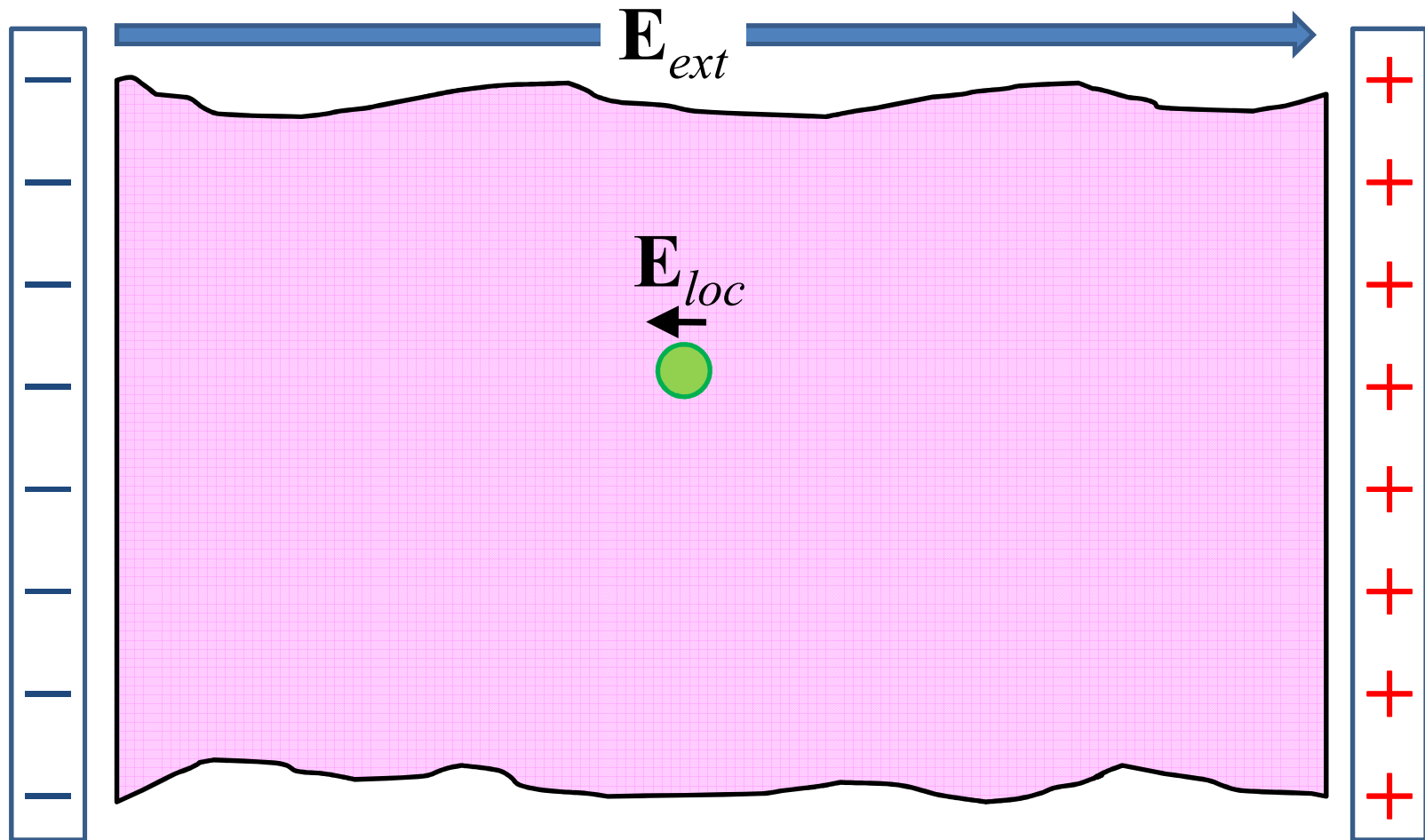
$$\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}_{\text{loc}}$$

$\alpha$  es conocida como polarizabilidad

¿Cómo se relaciona  $\alpha$  con  $\epsilon_r$ ?  $\equiv$  ¿Cómo se relaciona  $E$  con  $E_{\text{loc}}$ ?

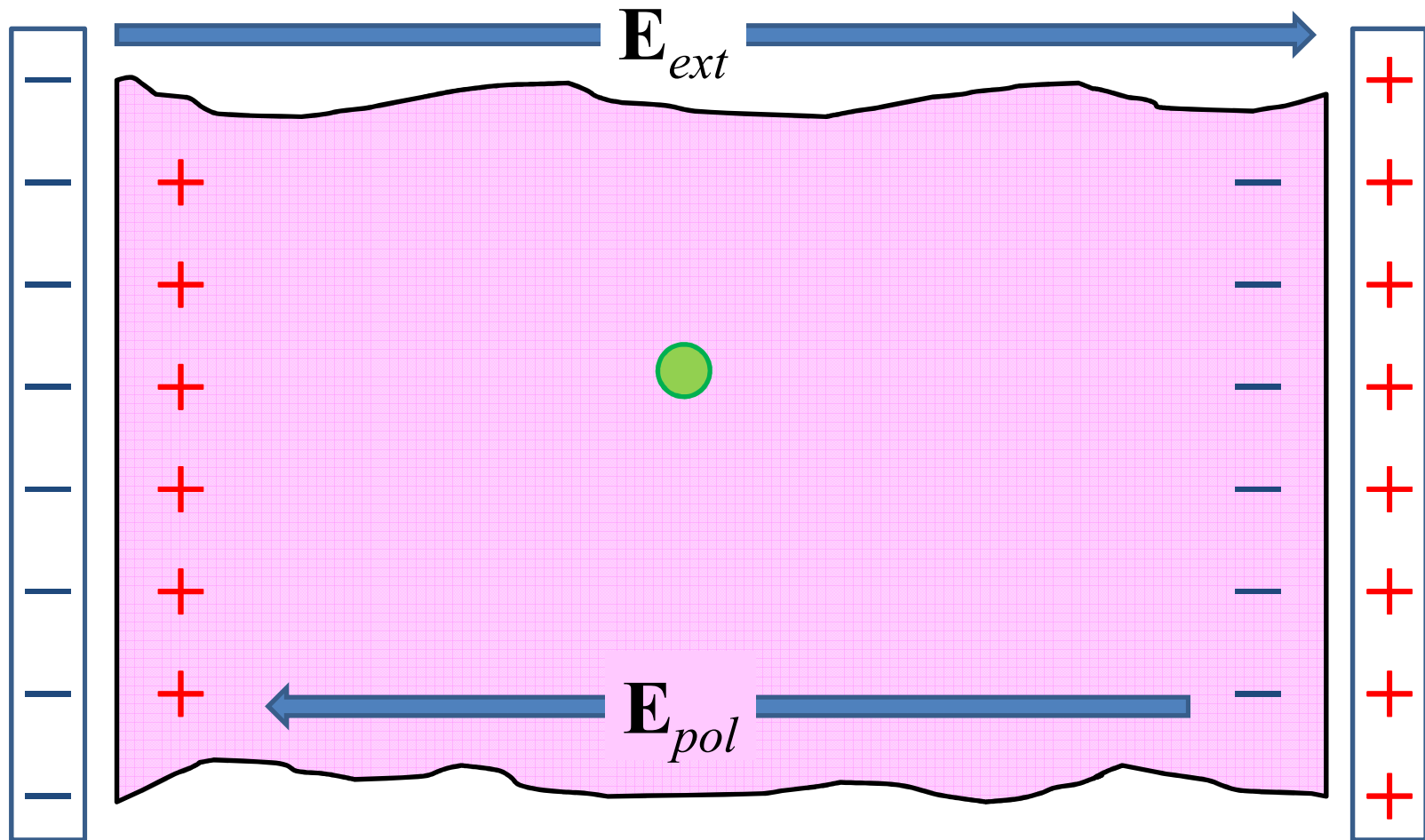
# Dielectricos - Campo Local

- Ecuación de Clausius-Mossotti ( $E_{ext} \leftrightarrow E_{loc}$ ):



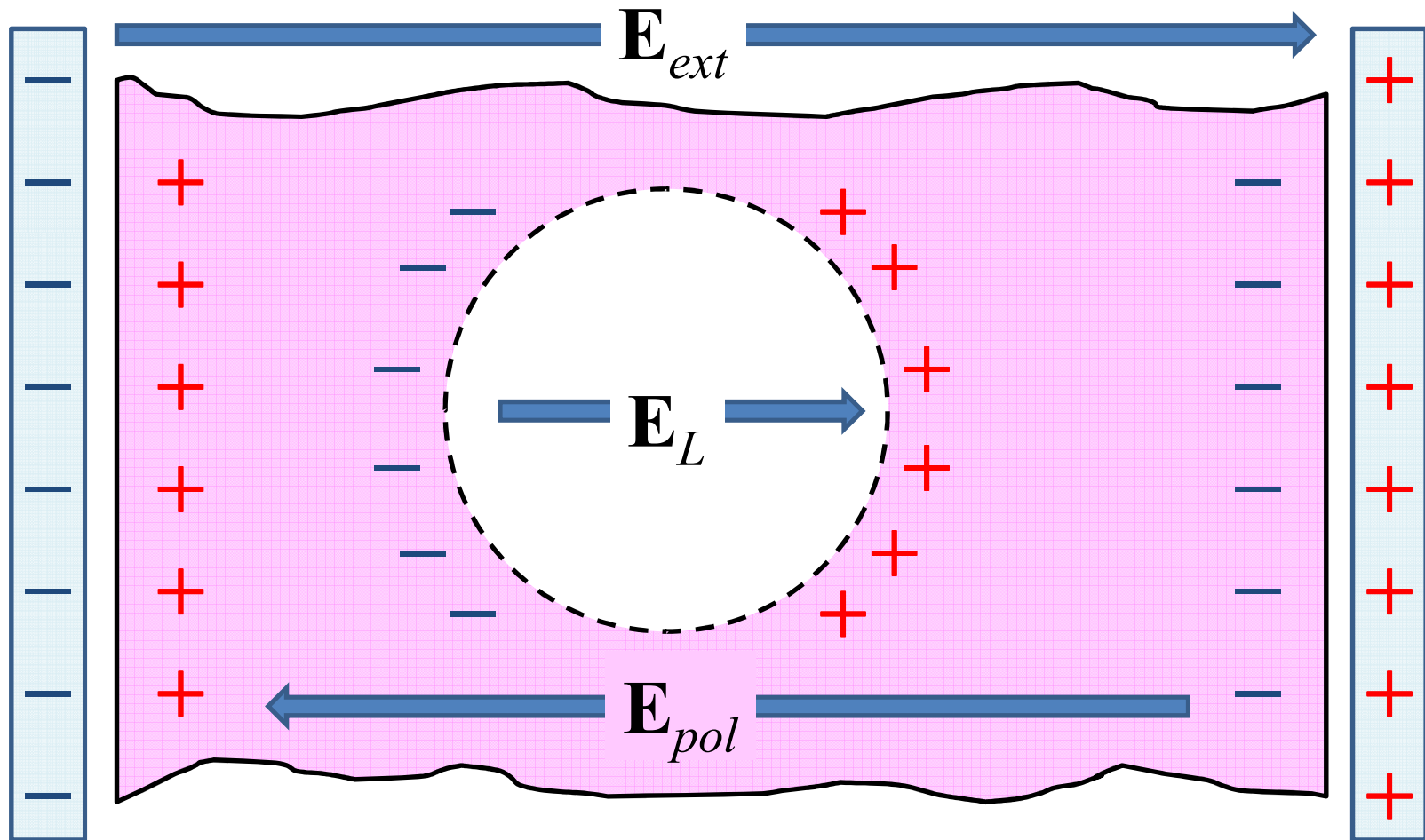
# Dieléctricos - Campo Local

- Ecuación de Clasius-Mossotti ( $E_{ext} \leftrightarrow E_{loc}$ ):



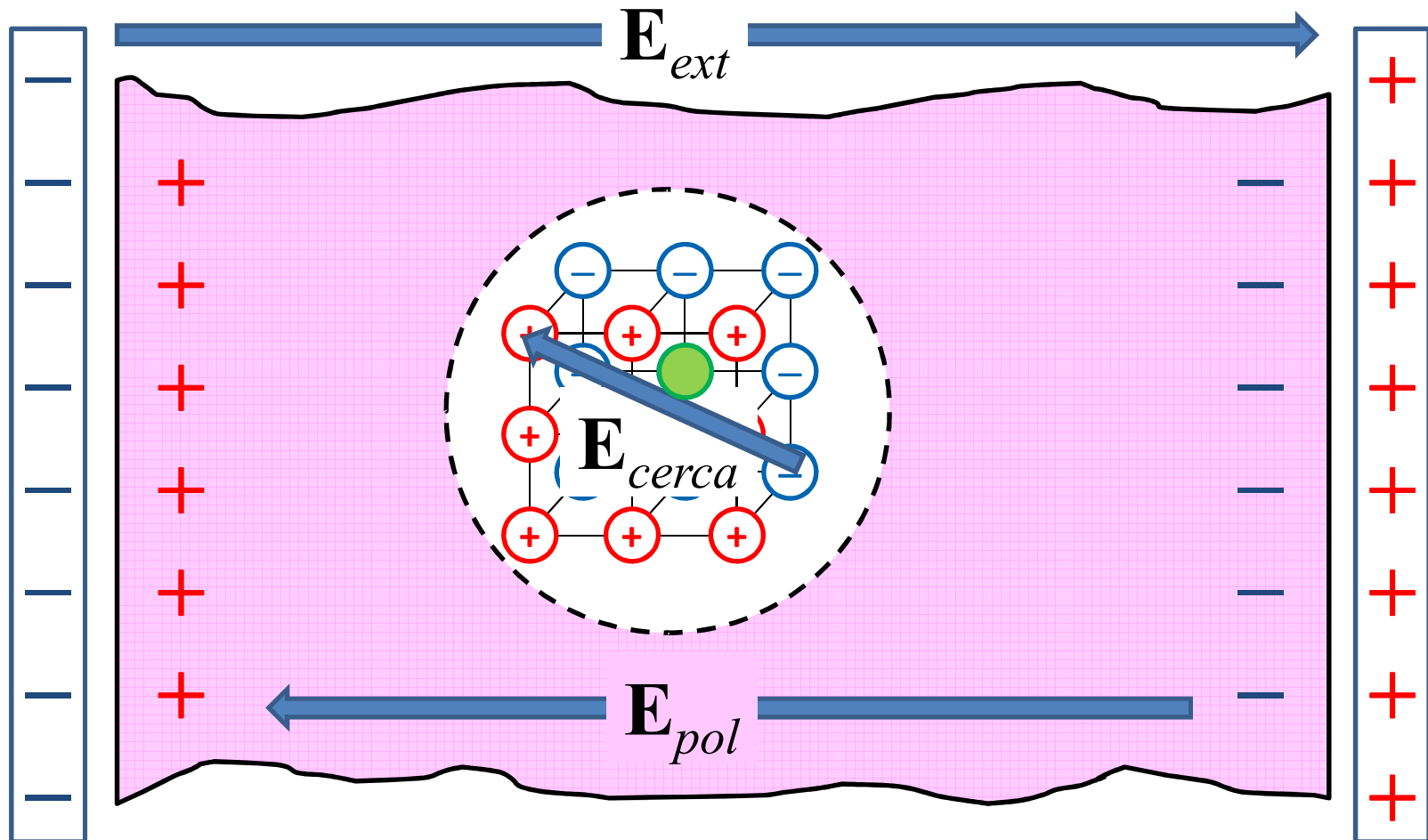
# Dieléctricos - Campo Local

- Ecuación de Clausius-Mossotti ( $E_{ext} \leftrightarrow E_{loc}$ ):



# Dieléctricos - Campo Local

- Ecuación de Clausius-Mossotti ( $E_{ext} \leftrightarrow E_{loc}$ ):





# Dieléctricos - Campo Local

- Ecuación de Clausius-Mossotti ( $E_{ext} \leftrightarrow E_{loc}$ ):
  - El campo local es la suma de todos los campos

$$\mathbf{E}_{loc} = \mathbf{E}_{ext} + \mathbf{E}_{pol} + \mathbf{E}_L + \mathbf{E}_{cerca}$$

- Para cada contribución tenemos

$$E_{ext} = V/d$$

$$E_{pol} = -P/\epsilon_0$$

$$E_L = \frac{fP}{\epsilon_0}$$

$$E_{cerca} = 0$$

**Thin plate:**  $f = 1$   
**Needle:**  $f = 0$   
**Sphere:**  $f = 1/3$



$$E_{loc} = E + \frac{P}{3\epsilon_0}$$

# Dieléctricos - Campo Local

- Ecuación de Clausius-Mossotti ( $E_{ext} \leftrightarrow E_{loc}$ ):
  - Polarización y polarizabilidad

$$\left. \begin{aligned} E_{loc} &= E + \frac{P}{3\epsilon_0} \\ p &= \alpha E_{loc} \end{aligned} \right\} \Rightarrow P = N\alpha \left( E + \frac{P}{3\epsilon_0} \right)$$

$$\Rightarrow P = \frac{N\alpha E}{1 - N\alpha/3\epsilon_0}$$

# Dieléctricos - Campo Local

- Ecuación de Clasius-Mossotti ( $E_{ext} \leftrightarrow E_{loc}$ ):
  - Polarización y permitividad

$$P = \chi_e \epsilon_0 E = (\epsilon_r - 1) \epsilon_0 E$$

$$P = N\alpha \left( E + \frac{P}{3\epsilon_0} \right)$$



$$\frac{N\alpha}{3\epsilon_0} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2}$$

Relaciona una cantidad  
microscópica ( $\alpha$ ) con una  
macroscópica ( $\epsilon_r$ )

# Moraleja del Día

- Polarización total es la suma de las distintas contribuciones:

- Electrónica  $P = 4 \pi N R^3 \epsilon_0 E$

- Iónica  $P = \frac{N q^2 E}{Y d_0}$

- Orientacional  $P = \frac{N p^2 E}{3 k T}$

# Moraleja del Día

- Polarización a un nivel microscópico (polarizabilidad):

$$\mathbf{p} = \alpha \mathbf{E}_{loc}$$

- $E_{loc}$  conecta el nivel micro con el macro

$$E_{loc} = E + \frac{P}{3\epsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{N\alpha}{3\epsilon_0} = \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2}$$