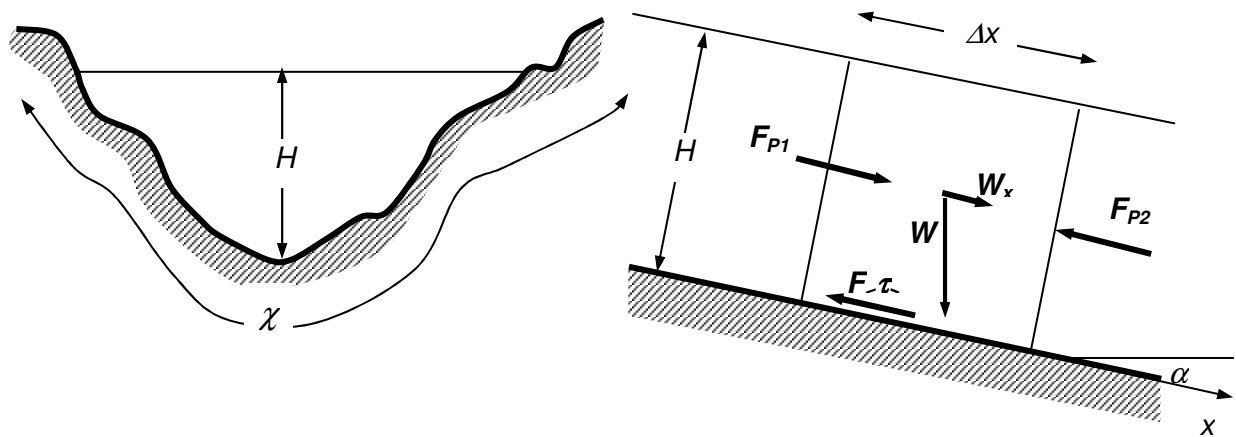


PROPIEDADES MECANICAS DEL ESCURRIMIENTO SIN SEDIMENTOS

Prof. ALDO TAMBURRINO TAVANTZIS

En esta clase se realizará un rápido repaso de algunas de las propiedades del escurrimiento sin sedimento.

ESFUERZO DE CORTE MEDIO EN UN FLUJO UNIFORME PERMANENTE EN UN CANAL PRISMÁTICO



Para el flujo permanente uniforme se cumple, el teorema de la cantidad de movimiento se reduce a:

$$\sum F_x = 0$$

$$W_x + F_{p1} - F_{p2} - F_{\tau} = 0$$

$$W_x = W \sin \alpha = \gamma A \Delta x \sin \alpha$$

$$F_{p1} = F_{p2}$$

$$F_{\tau} = \langle \tau \rangle \chi \Delta x$$

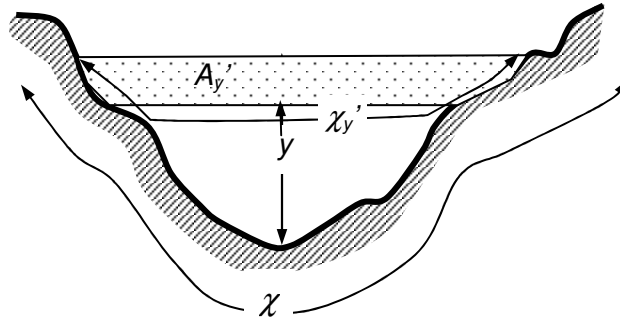
Donde $\langle \tau \rangle$ corresponde al esfuerzo de corte medio actuando sobre el perímetro mojado. Resulta:

$$\langle \tau \rangle = \gamma R \text{sen} \alpha$$

donde $R = A/\chi$ es el radio hidráulico. Considerando pendiente del canal pequeña, $\text{sen} \alpha \approx i$. Además, para escurrimiento uniforme: $i = J$, por lo que el esfuerzo de corte medio para el flujo permanente uniforme está dado por:

$$\langle \tau \rangle = \gamma R J = \gamma R i \quad (1)$$

Determinemos ahora el esfuerzo de corte a una distancia y desde el fondo para la situación de escurrimiento permanente uniforme en un canal de sección prismática.



Denominemos A_y el área de la sección de escurrimiento definida desde el fondo del cauce hasta una altura y y A_y' al área comprendida entre esta altura y y la altura total del escurrimiento, H . A una altura y se tiene el perímetro mojado χ_y' (notar que comprende las paredes y el agua). El equilibrio de fuerzas en la dirección x , a una distancia y del fondo da:

$$F_{<\tau>y} = W_x(y)$$

$$\langle \tau \rangle_y \Delta x \chi_y' = \gamma \Delta x A_y' \text{sen} \alpha$$

de donde resulta que el esfuerzo de corte medio a una altura y está dado por:

$$\langle \tau \rangle_y = \gamma R_y' \text{sen} \alpha$$

donde $R_y' = \frac{A_y'}{\chi_y'}$. Si $y = 0$, entonces $\langle \tau \rangle_y = \langle \tau \rangle$ y $R_y' = R$, por lo que obtenemos:

$$\frac{\langle \tau \rangle_y}{\langle \tau \rangle} = \frac{R_y'}{R} \quad (2)$$

Si tenemos una sección rectangular de ancho b : $R_y' = \frac{b(H-y)}{b+2(H-y)}$ y $R = \frac{bH}{b+2H}$, de donde se obtiene:

$$\frac{\langle \tau \rangle_y}{\langle \tau \rangle} = \left(1 - \frac{y}{H}\right) \frac{1 + \frac{2H}{b}}{1 + \frac{2(H-y)}{b}} \quad (3)$$

Si el flujo es bidimensional, se obtiene una distribución lineal del esfuerzo de corte:

$$\frac{H}{b} \rightarrow \infty, \quad \frac{\langle \tau \rangle_y}{\langle \tau \rangle} = \left(1 - \frac{y}{H}\right) \quad (4)$$

Notar que es usual no explicitar que se está trabajando con un esfuerzo de corte medio y escribir simplemente τ en lugar de $\langle \tau \rangle$.

DISTRIBUCION DE VELOCIDADES

FLUJO LAMINAR

Para determinar la distribución de velocidades en un flujo laminar debemos resolver la ecuación de Navier-Stokes:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla \hat{p} + \nu \nabla^2 \vec{V} \quad (5)$$

La ecuación anterior se ve enormemente simplificada al considerar flujo permanente uniforme:

$$0 = -\frac{1}{\rho} \nabla \hat{p} + \nu \nabla^2 \vec{V} \quad (6)$$

con las condiciones de borde:

$$\vec{V} = 0 \text{ en la frontera sólida, } \tau = 0 \text{ en la superficie libre} \quad (7)$$

La complejidad para obtener una solución de la Ecx. 6 depende de la geometría en la que actúan las condiciones de borde (7). Para el caso de un flujo bidimensional, la Ec. 6 se reduce a:

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (8)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial y} \quad (9)$$

con las condiciones de borde:

$$\begin{aligned} y = 0, \quad u &= 0 \\ y = H, \quad \tau &= \mu \frac{du}{dy} = 0 \\ y = H, \quad p &= 0 \end{aligned}$$

de donde resulta la distribución de velocidades:

$$u = \frac{g \operatorname{sen} \alpha}{\nu} H y \left(1 - \frac{1}{2} \frac{y}{H} \right) \quad (10)$$

En términos del esfuerzo de corte actuando en el fondo, $\tau_0 = \gamma H \operatorname{sen} \alpha$:

$$u = \frac{\tau_0}{\rho \nu} y \left(1 - \frac{1}{2} \frac{y}{H} \right) \quad (11)$$

Recordando la definición de velocidad friccional, $u_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}}$:

$$u = \frac{u_*^2}{\nu} H \frac{y}{H} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{y}{H} \right)$$

$$\frac{u}{u_*} = \frac{u_* H}{\nu} \frac{y}{H} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{y}{H} \right)$$

Llamando: $Re_{*H} = \frac{u_* H}{\nu} = H_+$, $u_+ = \frac{u}{u_*}$, $\eta = \frac{y}{H}$

La distribución de velocidades se escribe como:

$$u_+ = H_+ \eta \left(1 - \frac{1}{2} \eta\right) \quad (12)$$

La velocidad media $U = \frac{1}{H} \int_0^H u dy$ es fácil de calcular, resultando:

$$\frac{U}{u_*} = \frac{H_+}{3} \quad (13)$$

FLUJO TURBULENTO

La situación para flujo turbulento es más compleja, por cuanto se hace necesario integrar las ecuaciones de Reynolds, que resultan de considerar que la velocidad y presión instantáneas están compuestas de una parte medio temporal y otra fluctuante o turbulenta:

$$\begin{aligned} \vec{V}(t) &= \bar{\vec{V}} + \vec{V}'(t) \\ \hat{p}(t) &= \bar{\hat{p}} + \hat{p}'(t) \end{aligned} \quad (14)$$

Al reemplazar la descomposición (14) en las Ecs. 5 y de continuidad, resulta para un fluido incompresible y flujo estadísticamente estacionario:

$$\bar{u}_j \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{\tau}_{ij} - \rho \overline{u_i' u_j'}) + g_i \quad (15)$$

donde

$$\bar{\tau}_{ij} = -\bar{p} \delta_{ij} + \rho \nu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (16)$$

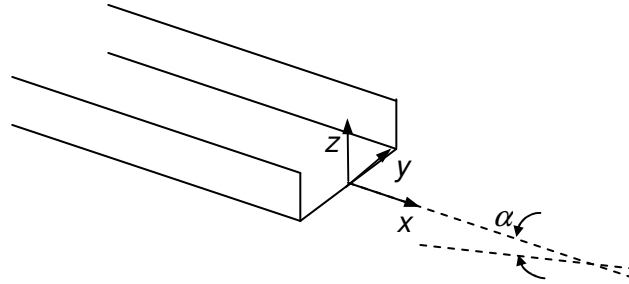
Para simplificar la notación, definimos:

$$T_{ij} = \bar{\tau}_{ij} - \rho \overline{u_i' u_j'} \quad (17)$$

En la Ecx. 17 vemos que se agregan términos asociados a la fluctuación turbulenta a los esfuerzos que actúan en la ecuación de Navier-Stokes. Los términos $-\rho \overline{u_i' u_j'}$ reciben el nombre de *esfuerzos aparentes* o esfuerzos de Reynolds. Hay que tener presente que estos términos corresponden a flujos de momentum y vienen del lado izquierdo de la ecuación de Navier-Stokes. Por conveniencia, se le pasa al lado derecho y se les trata como si provinieran de fuerzas superficiales, razón por lo que se les denomina *aparentes*.

El problema para integrar la Ec. 15, aún para la geometría más sencilla radica en que no se tienen expresiones deducidas exclusivamente de la teoría para $-\rho \overline{u_i' u_j'}$, debiendo siempre recurrirse a resultados experimentales (problema del cierre de la turbulencia).

ESFUERZO DE CORTE EN UN CANAL MUY ANCHO. ESCURRIMIENTO UNIFORME.



Consideremos α pequeño, de tal manera que $\text{sen} \alpha \approx i$. En este caso:

$$\bar{u}_i = (\bar{u}_1(x_3), 0, 0) = (u(z), 0, 0) \quad (18)$$

Los únicos componentes del tensor de esfuerzos medio T_{ij} que no son nulos son los siguientes:

$$T_{13} = \rho \nu \frac{d\bar{u}_1}{dx_3} - \rho \overline{u_1' u_3'} = \rho \nu \frac{d\bar{u}}{dz} - \rho \overline{u' w'} \equiv \tau \quad (19)$$

$$T_{33} = -\bar{p} - \rho \overline{u_3' u_3'} = -\bar{p} - \rho \overline{w'^2} \equiv -P \quad (20)$$

Las ecuaciones de Reynolds se reducen a:

$$i = 1: \quad 0 = \frac{1}{\rho} \frac{d\tau}{dz} + gi \quad (21)$$

$$i = 3: \quad 0 = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dz} - g \quad (22)$$

Las Ecs. 21 y 22 deben integrarse bajo las condiciones de borde:

$$y = H, \quad \tau = 0, \quad P = 0$$

resultando

$$\tau = \tau_0 \left(1 - \frac{z}{H} \right) \quad (23)$$

$$\tau_0 = \gamma H i$$

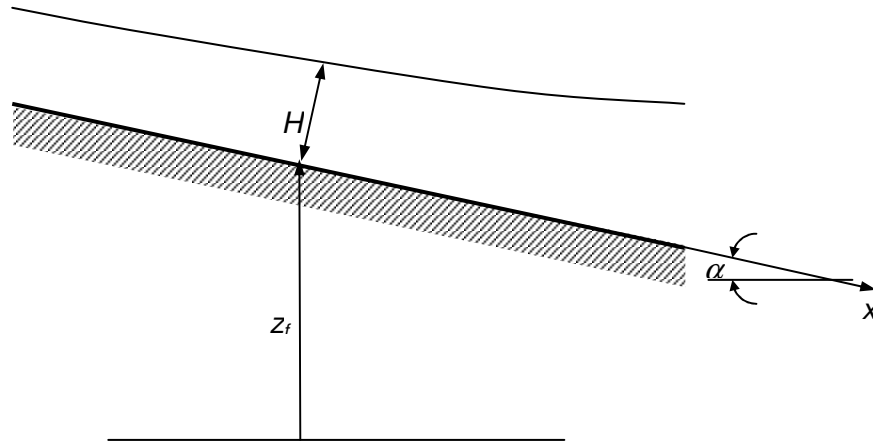
y

$$P = \gamma H \left(1 - \frac{z}{H} \right) \quad (24)$$

Notar que la Ec. 24 indica que la *presión media efectiva* (P) sigue la ley hidrostática y que el esfuerzo de corte medio varía linealmente, igual que para el caso analizado anteriormente (INSISTO: no es \bar{p} la que sigue la ley hidrostática, sino P).

ECUACION DE SAINT VENANT PARA EL FLUJO PERMANENTE

La ecuación de Saint Venant corresponde a la ecuación que rige en el flujo gradualmente variado en canales. En este caso, se considera que cualquier escala característica en la dirección x es mucho más grande que la profundidad del flujo, H . Esto es equivalente a hacer una aproximación del tipo capa límite.



Promediando las ecuaciones de Reynolds en la vertical, así como la ecuación de continuidad, o sea $\frac{1}{H} \int_0^H (Ec.15) dz$, resulta:

$$U \frac{\partial U}{\partial x} = -g \frac{\partial}{\partial x} (z_f + H) - \frac{1}{\rho} \frac{\tau_0}{H} \quad (25)$$

Continuidad:

$$\frac{\partial UH}{\partial x} = 0 \quad (26)$$

Consideremos ahora el caso en dos dimensiones, o sea, estamos permitiendo la existencia de una componente de la velocidad en la dirección y . Definiendo la velocidad media espacial en la dirección y como:

$$V = \frac{1}{H} \int_0^H \bar{v} dz \quad (27)$$

El esfuerzo de corte actuando en el fondo podemos descomponerlo en las direcciones x e y : τ_{0x} y τ_{0y} . En este caso, la integración en la vertical de las ecuaciones de Reynolds conduce a:

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = -g \frac{\partial}{\partial x} (z_f + H) - \frac{\tau_{0x}}{\rho H} \quad (28)$$

$$U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} = -g \frac{\partial}{\partial y} (z_f + H) - \frac{\tau_{0y}}{\rho H} \quad (29)$$

Continuidad:

$$\frac{\partial UH}{\partial x} + \frac{\partial VH}{\partial y} = 0 \quad (30)$$

DISTRIBUCION DE VELOCIDAD EN UN FLUJO TURBULENTO EN UN CANAL RECTANGULAR MUY ANCHO

Las Ecs. 19 y 23 y la definición de velocidad friccional nos conducen a:

$$T_{13} = \tau = \rho\nu \frac{d\bar{u}}{dz} - \rho\overline{u'w'} = \rho u_*^2 \left(1 - \frac{z}{H}\right) \quad (31)$$

Como dijimos anteriormente, el problema es evaluar $-\rho\overline{u'w'}$. Los enfoques basados en el concepto de viscosidad turbulenta y longitud de mezcla se han visto con cierto detalle en los cursos CI31A (Mecánica de Fluidos) y CI41A (Hidráulica), por lo que no lo repetiremos acá. Quien quiera repasar la materia, puede revisar cualquier buen libro de Mecánica de Fluidos.

Al utilizar la viscosidad turbulenta, podemos escribir

$$\overline{\rho u'w'} = -\rho\nu_T \frac{d\bar{u}}{dz} \quad (32)$$

Al considerar la longitud de mezcla de Prandtl es fácil ver que para flujos en los que existe esfuerzo de corte, en la cercanía de la pared, se tiene:

$$\nu_T = \ell^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dz} \right| \quad (33)$$

donde ℓ es la longitud de mezcla, dada por (von Kármán):

$$\ell = \kappa z, \quad \kappa = 0,4 \quad (33)$$

Considerando una región muy cercana a la pared, de tal manera que $z/H \ll 1$, entonces la Ec. 31 se reduce a:

$$\rho\nu \frac{d\bar{u}}{dz} + \ell^2 \left| \frac{d\bar{u}}{dz} \right| \frac{d\bar{u}}{dz} = \rho u_*^2 \quad (34)$$

Consideremos ahora que aunque estamos muy cerca de la pared ($z/H \ll 1$), estamos lo suficientemente alejados como para decir que dominan los efectos turbulentos sobre los viscosos, o sea, podemos despreciar el término $\rho\nu \frac{d\bar{u}}{dz}$ de la Ec. 34. Usando la Ec. 33:

$$\kappa^2 z^2 \left(\frac{d\bar{u}}{dz} \right)^2 = u_*^2$$

$$\frac{d\bar{u}}{dz} = \frac{u_*}{\kappa z}$$

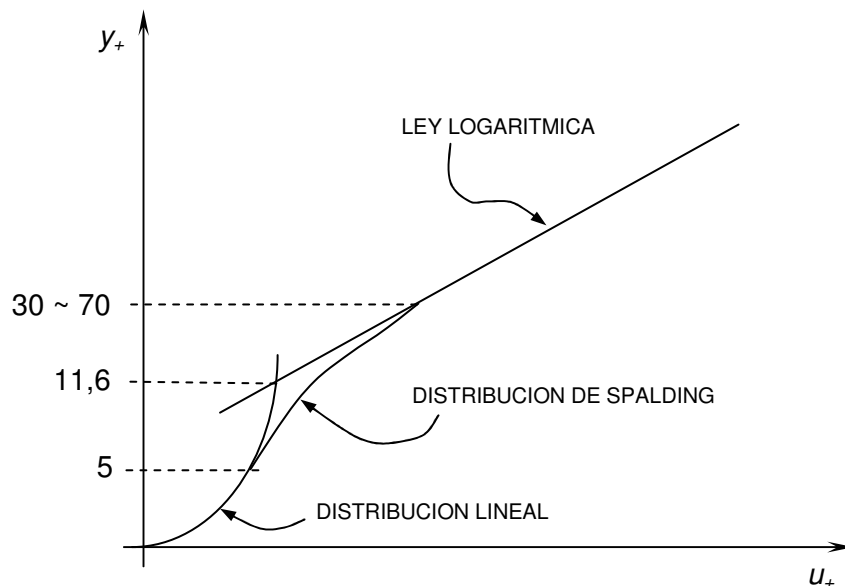
Integrando:

$$\frac{\bar{u}}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln z + C \quad (35)$$

La Ec. 35 es la bien conocida ley logarítmica. En estricto rigor, debido a las consideraciones hechas en su deducción, es aplicable sólo muy cerca de la pared, pero empíricamente se ha encontrado que es una muy buena aproximación en casi toda la profundidad del flujo en la mayoría de los escurrimientos en canales abiertos.

PERFIL DE VELOCIDAD EN PAREDES LISAS

En el curso de Mecánica de Fluidos vimos que el perfil de velocidades en una pared lisa es como el que se muestra en la figura siguiente:



Definiendo $y_+ = \frac{yu_*}{\nu}$, $u_+ = \frac{\bar{u}}{u_*}$ las distribuciones de velocidad están dadas por:

$$0 \leq y_+ \leq 5 \quad u_+ = y_+ \quad (36)$$

$5 \leq y_+ \leq 30 \sim 70$ Distribución de Spalding:

$$y_+ = u_+ + e^{-\kappa B} \left[e^{\kappa u_+ - 1} - 1 - \kappa u_+ - \frac{(\kappa u_+)^2}{2} - \frac{(\kappa u_+)^3}{6} \right] \quad (37)$$

$$30 \sim 70 \leq y_+, \quad \eta \leq 0,2 \quad u_+ = \frac{1}{\kappa} \ln y_+ + B \quad (38)$$

En las Ecs 37 y 38 $(\kappa, B) = (0,4, 5,5)$

$$0,2 \leq \eta \leq 1 \quad \frac{\bar{u} - \bar{u}_{max}}{u_*} = \frac{1}{\kappa'} \ln \eta \quad (39)$$

$$\kappa' = 0,265$$

La discusión de las Ecs. 38 y 39 se hizo en detalle en los cursos CI31A y CI41A, por lo que no se repetirá ahora. Recordar que la región turbulenta del flujo se subdivide en una región interior y otra exterior (*inner region* y *outer region*).

Recordar también que la definición de pared lisa o rugosa se hace a partir del tamaño relativo entre la aspereza de la pared (k_s) y el espesor de la subcapa viscosa, δ_v . Si $k_s < \delta_v$, entonces la pared es lisa. $\delta_{v+} = 5$, luego si $k_{s+} < 5$, la pared es lisa. La pared es rugosa si $k_{s+} \geq 30 \sim 70$. Entre los dos rangos anteriores se tiene la pared en transición lisa-rugosa.

PERFIL DE VELOCIDAD EN PAREDES RUGOSAS

En este caso, el tamaño de las asperezas ha destruido completamente la subcapa viscosa, por lo que no existe una dependencia de la distribución de velocidades con la viscosidad, sino con k_s . Experimentalmente se ha encontrado que los parámetros de la Ec. 35 son:

$$u_+ = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{y}{k_s} \right) + B \quad (40)$$

con $(\kappa, B) = (0,4, 8,5)$. La ecuación anterior también se encuentra frecuentemente como:

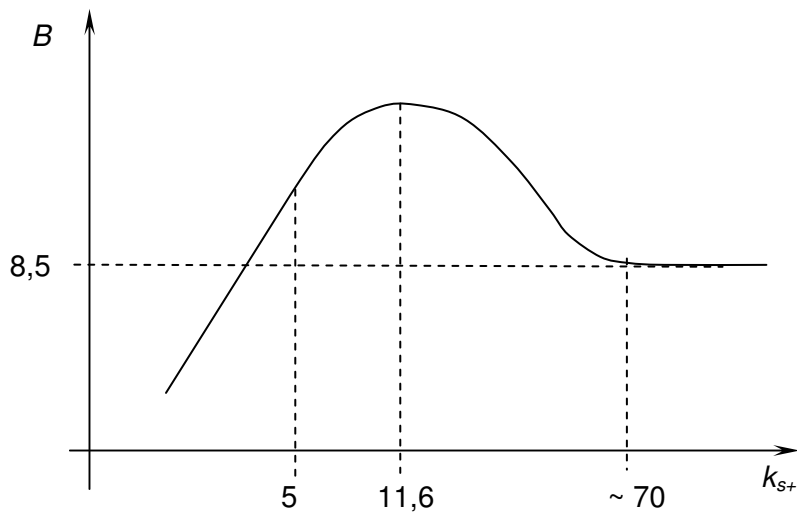
$$u_+ = \frac{1}{\kappa} \ln \left(30 \frac{y}{k_s} \right) \quad (40')$$

PARED EN TRANSICION LISA RUGOSA

En este caso, la distribución de velocidades depende tanto de ν como de k_s , llegándose a una relación del tipo:

$$u_+ = \frac{1}{\kappa} \ln \left(\frac{y}{k_s} \right) + B \quad (41)$$

donde $\kappa = 0,4$ y B es función de k_{s+} , obteniéndose de la relación gráfica determinada por Nikuradse:



LEYES DE RESISTENCIA EN CANALES

Existen una gran cantidad de leyes de resistencia deducidas para canales con fondo fijo. La más utilizada es la ecuación de Manning:

$$\frac{Qn}{\sqrt{i}} = AR^{\frac{2}{3}} \quad (42)$$

donde n depende de las características del canal. Para el caso de un fondo granular, Strickler determinó:

$$n = 0,038D^{\frac{1}{6}} \quad (43)$$

donde D es el tamaño representativo de las asperezas, en metros, usándose $D = D_{84}$ o $D = D_{90}$.

Es posible determinar un factor de fricción f a partir de la integración del perfil logarítmico de velocidades. Recordando que para flujo permanente uniforme vale la relación de Darcy-Weisbach:

$$i = J = f \frac{1}{4R} \frac{U^2}{2g} \quad (44)$$

puede obtenerse

$$\frac{U}{u_*} = \sqrt{\frac{8}{f}} \quad (45)$$

Al integrar la Ec. 40 para obtener U resulta:

$$\frac{U}{u_*} = \frac{1}{\kappa} \ln \left(11 \frac{H}{k_s} \right) \quad (46)$$

La Ec. 46 se conoce como la ley de resistencia de Keulegan para flujo turbulento rugoso. Una aproximación de la Ec. 46 es:

$$\frac{U}{u_*} = 8,1 \left(\frac{H}{k_s} \right)^{\frac{1}{6}} \quad (47)$$

La Ec. 45 y la definición de velocidad friccional conduce a:

$$\tau_0 = \frac{1}{8} \rho f U^2 \quad (48)$$

Y las Ecs. 46 y 48 llevan a:

$$f = 8 \left[\frac{1}{\kappa} \ln \left(11 \frac{H}{k_s} \right) \right]^{-2} \quad (49)$$

La Ec. 48 puede aproximarse a la situación de flujo en dos direcciones como:

$$(\tau_{0x}, \tau_{0y}) = \frac{1}{8} \rho f \sqrt{U^2 + V^2} (U, V) \quad (50)$$