

LEY DE STOKES

Analicemos el comportamiento de la ecuación de Navier-Stokes para $Re \ll 1$.

$$\frac{d\vec{V}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla \hat{p} + \nu \nabla^2 \vec{V} \quad (1)$$

Considerando U y D una velocidad y longitud características, podemos formar las siguientes variables adimensionales:

$$\vec{V}^* = \frac{\vec{V}}{U} \quad \vec{X}^* = \frac{\vec{X}}{D} \quad t^* = \frac{t}{D/\nu}$$

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = \frac{1}{D} \left(\frac{\partial}{\partial x^*}, \frac{\partial}{\partial y^*}, \frac{\partial}{\partial z^*} \right) = \frac{1}{D} \nabla^*$$

Reemplazando las variables anteriores en la ecuación de Navier-Stokes resulta:

$$\frac{U^2}{D} \frac{d\vec{V}^*}{dt^*} = -\frac{1}{\rho} \frac{1}{D} \nabla^* \hat{p} + \frac{\nu U}{D^2} \nabla^{*2} \vec{V}^*$$

$$\frac{DU}{\nu} \frac{d\vec{V}^*}{dt^*} = -\frac{1}{\rho} \frac{D}{\nu U} \nabla^* \hat{p} + \nabla^{*2} \vec{V}^*$$

Definiendo $\hat{p}^* = \frac{\hat{p} - \hat{p}_0}{\mu U/D}$, donde \hat{p}_0 es una presión motriz de referencia y llamando

$Re = \frac{DU}{\nu}$, resulta:

$$Re \frac{d\vec{V}^*}{dt^*} = -\nabla^* \hat{p}^* + \nabla^{*2} \vec{V}^* \quad (2)$$

Considerando $Re \ll 1$:

$$0 = -\nabla^* \hat{p}^* + \nabla^{*2} \vec{V}^*$$

$$\nabla^* \hat{p}^* = \nabla^{*2} \vec{V}^* \quad (3)$$

En forma dimensional, la ecuación anterior se escribe como:

$$0 = -\nabla \hat{p} + \mu \nabla^2 \vec{V} \quad (4)$$

Ec. (1):

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\nabla \hat{p} + \mu \nabla^2 \vec{V} \quad (5)$$

Luego, la comparación de Ecs. (4) y (5) nos indica que la condición $Re \ll 1$ es equivalente a considerar a un fluido con densidad nula, o sea, los efectos inerciales no existen.

Recordando un poco los cursos de cálculo:

$$\nabla^{*2} \vec{V}^* = \nabla^* (\nabla^* \cdot \vec{V}^*) - \nabla^* \times (\nabla^* \times \vec{V}^*)$$

Para fluido incompresible se tiene que $\nabla^* \cdot \vec{V}^* = 0$, por lo que se cumple

$$\nabla^{*2} \vec{V}^* = -\nabla^* \times \vec{\omega}^* \quad (6)$$

Combinando Ecs. (3) y (6):

$$\nabla^* \hat{p}^* = -\nabla^* \times \vec{\omega}^* \quad (7)$$

Recordando que la divergencia de un motor es nula, se tiene que: $\nabla^* \cdot \nabla^* \times \vec{\omega} = 0$, luego $\nabla^* \cdot \nabla^* \hat{p}^* = 0$, o sea, el laplaciano de la presión es nulo:

$$\nabla^{*2} \hat{p}^* = 0 \quad (8)$$

Además, el rotor del gradiente de un escalar es siempre nulo, por lo que $\nabla^* \times \nabla^* \hat{p}^* = 0$

Tomando el rotor de la Ec. 7:

$$\nabla^* \times \nabla^* \hat{p}^* = -\nabla^* \times \nabla^* \times \vec{\omega}^* \quad (9)$$

Usando nuevamente la identidad vectorial:

$$\nabla^{*2} \vec{\omega}^* = \nabla^* (\nabla^* \cdot \vec{\omega}^*) - \nabla^* \times (\nabla^* \times \vec{\omega}^*)$$

Pero: $\nabla^* \cdot \vec{\omega}^* = \nabla^* \cdot \nabla^* \times \vec{V}^* = 0$, luego $\nabla^{*2} \vec{\omega}^* = -\nabla^* \times (\nabla^* \times \vec{\omega}^*)$. Reemplazando en Ec. 9, resulta:

$$\nabla^{*2} \vec{\omega}^* = 0 \quad (10)$$

Luego, para flujos con $Re \ll 1$, se satisface la ecuación de Laplace tanto para la presión como para la vorticidad.

Si ψ es la función de corriente, para flujo bidimensional se cumple:

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y} \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}$$

La vorticidad puede expresarse en términos de la función de corriente:

$$\nabla \times \vec{V} = \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} = \nabla^2 \Psi$$

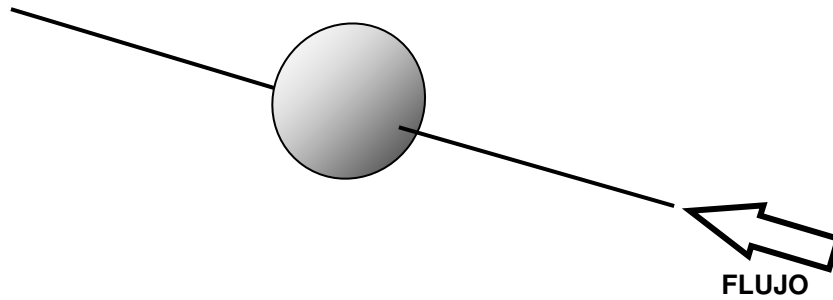
Ec. 10: $\nabla^2 \nabla \times \vec{V} = 0$, o sea: $\nabla^2 \nabla^2 \Psi = 0$. Luego, para $Re \ll 1$ se cumple:

$$\nabla^4 \Psi = 0 \quad (11)$$

con las condiciones de borde:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial s} = 0 \quad \frac{\partial \Psi}{\partial n} = 0$$

FLUJO DE STOKES ALREDEDOR DE UNA ESFERA



La ecuación de continuidad para flujo axisimétrico en coordenadas esféricas es:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 V_r) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (V_\theta \sin \theta) = 0$$

La función de corriente está relacionada con V_r , y V_θ a través de:

$$V_r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, \quad V_\theta = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial r}$$

En este caso, $\nabla^2 \nabla \times \vec{V} = 0$ queda:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right]^2 \Psi = 0 \quad (12)$$

En términos de la función de corriente, la condición de no deslizamiento sobre la esfera ($V_r = 0$ y $V_\theta = 0$ en $r = r_0$), se expresa como

$$\left. \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right|_{r_0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right|_{r_0} = 0$$

además, cuando $r \rightarrow \infty$, $v_r \rightarrow -U \cos \theta$, y $v_\theta \rightarrow U \sin \theta$.

La Ec. 12 con las condiciones de borde anteriores se resuelve fácilmente mediante el método de separación de variables, resultando:

$$\frac{\Psi}{r_0^2 U} = -\frac{1}{2} \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 \sin^2 \theta \left[\frac{1}{2} \left(\frac{r_0}{r} \right)^3 - \frac{3}{2} \left(\frac{r_0}{r} \right) + 1 \right] \quad (13)$$

de donde:

$$\frac{V_r}{U} = -\frac{1}{2} \cos \theta \left[\left(\frac{r_0}{r} \right)^3 - 3 \left(\frac{r_0}{r} \right) + 2 \right] \quad (14)$$

$$\frac{V_\theta}{U} = \frac{1}{4} \sin \theta \left[\left(\frac{r_0}{r} \right)^3 + 3 \left(\frac{r_0}{r} \right) - 4 \right] \quad (15)$$

La vorticidad está dada por:

$$\frac{\omega}{U/r_0} = -\frac{3}{2} \left(\frac{r_0}{r} \right)^2 \sin \theta \quad (16)$$

Considerando el resultado antes obtenido: $\nabla^* \hat{p}^* = \nabla^* \vec{\nabla}^*$ e integrando a lo largo de una línea de corriente:

$$d\hat{p}^* = \nabla^* \hat{p}^* \cdot d\vec{x}^* = \nabla^{*2} \vec{\nabla}^* \cdot d\vec{x}^*$$

Resulta:

$$\hat{p} = \hat{p}_\infty + \frac{3}{2} \frac{\mu U}{\tau_0} \left(\frac{\tau_0}{\tau} \right)^2 \cos \theta \quad (17)$$

Los esfuerzos viscosos están dados por:

$$\tau_{r\theta} = \mu \left(r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{V_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial V_r}{\partial \theta} \right)$$

$$\tau_{r\phi} = \tau_{r\psi} = 0$$

$$\tau_{rr} = \mu \left[2 \left(\frac{\partial V_r}{\partial r} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \vec{V} \right) \right] = 2\mu \frac{\partial V_r}{\partial r}$$

$$\tau_{\theta\theta} = \mu \left[2 \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V_\theta}{\partial \theta} + \frac{V_r}{r} \right) \right]$$

$$\tau_{\phi\phi} = \mu \left[2 \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V_\phi}{\partial \phi} + \frac{V_r}{r} + \frac{V_\theta \cot \theta}{r} \right) \right]$$

de donde resulta:

$$\tau_{r\theta} = \frac{3}{2} \mu \frac{U}{r_0} \sin \theta \left(\frac{r_0}{r} \right)^4$$

$$\tau_{rr} = -2\tau_{\phi\phi} = -2\tau_{\theta\theta} = 2\mu \frac{U}{r_0} \cos \theta \left(\left(\frac{r_0}{r} \right)^2 - \left(\frac{r_0}{r} \right)^4 \right)$$

Integrando sobre la superficie de la esfera y tomando la componente en la dirección del flujo de aproximación, resulta:

$$F_D = 6\pi\mu r_0 U \quad (18)$$

o, en términos del diámetro de la esfera:

$$F_D = 3\pi\mu D U \quad (19)$$

Se define el coeficiente de arrastre C_D a partir de:

$$F_D \equiv \frac{1}{2} C_D \rho U^2 A \quad (20)$$

donde A es el área transversal al flujo principal. Igualando las Ecs. 19 y 20, resulta:

$$C_D = \frac{24}{Re} \quad , \quad Re \ll 1 \quad (21)$$

SINGULARIDAD DE LA SOLUCION DE STOKES

En el análisis anterior se ha despreciado el efecto de la inercia. Veamos el comportamiento de los distintos términos de la ecuación de movimiento cuando $r \rightarrow \infty$

El esfuerzo viscoso más grande está dado por la componente θ de la ecuación de Navier-Stokes:

$$\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta\theta} \sin \theta) \quad (22)$$

Pero:

$$\tau_{\theta\theta} = -\frac{\mu U}{r_0} \cos \theta \left[\left(\frac{r_0}{r} \right)^2 - \left(\frac{r_0}{r} \right)^4 \right]$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta\theta} \sin \theta) = -\frac{\mu U}{r_0} \left[\left(\frac{r_0}{r} \right)^2 - \left(\frac{r_0}{r} \right)^4 \right] \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \cos \theta)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta\theta} \sin \theta) = -\frac{\mu U}{r_0} \left[\left(\frac{r_0}{r} \right)^2 - \left(\frac{r_0}{r} \right)^4 \right] (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

$$\frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta\theta} \sin \theta) \right) = -\frac{\mu U}{r r_0} \left[\left(\frac{r_0}{r} \right)^2 - \left(\frac{r_0}{r} \right)^4 \right] \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\sin \theta}$$

$$\frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta\theta} \sin \theta) \right) = -\frac{\mu U}{r_0^2} \left[\left(\frac{r_0}{r} \right)^3 - \left(\frac{r_0}{r} \right)^5 \right] \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{\sin \theta}$$

Si $r \rightarrow \infty$, $\frac{1}{r^5}$ tiende a cero más rápidamente que $\frac{1}{r^3}$

Luego:

$$\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta\theta} \sin \theta) \frac{\mu U}{r_0^2} \left(\frac{r_0}{r} \right)^3 \text{ si } r \rightarrow \infty \quad (23)$$

El término convectivo más grande en la ecuación de Navier-Stokes es: $\rho v_r \frac{\partial v_r}{\partial r}$

Pero:

$$v_r = -\frac{1}{2} \cos \theta \left[\left(\frac{r_0}{r} \right)^3 - 3 \frac{r_0}{r} + 2 \right], \text{ de Ec. 14}$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} = -\frac{1}{2} \cos \theta \left[-3 \frac{r_0^3}{r^4} + 3 \frac{r_0}{r^2} \right]$$

$$\text{Luego, } \rho v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} \rightarrow \rho \frac{U^2}{r_0} \left(\frac{r_0}{r} \right)^2, \text{ si } r \rightarrow \infty \quad (24)$$

El cociente entre el término convectivo (Ec. 24) y el viscoso (Ec. 23) es:

$$\frac{\text{convectivo}}{\text{viscoso}} \sim \frac{\text{Ec.24}}{\text{Ec.23}} \sim \left(\rho \frac{U r_0}{\mu} \right) \frac{r}{r_0}, r \rightarrow \infty$$

$$\text{o } \frac{\text{convectivo}}{\text{viscoso}} \sim \text{Re} \frac{r}{r_0}, r \rightarrow \infty \quad (25)$$

Ec. 25 nos indica que la suposición $\text{Re} \rightarrow 0$ no es uniformemente válida para todo r .

La suposición términos convectivos \ll que el resto de los términos de la ecuación de Navier-Stokes si $\text{Re} \rightarrow 0$ es válida para r/r_0 fijo. Sin embargo, para Re muy pequeño, siempre podremos encontrar una distancia r en que la razón convectivo/viscoso no sea despreciable. Oseen se dio cuenta de esto (1910) y solucionó el problema.

Oseen linealizó los términos no lineales de la ecuación de Navier-Stokes:

$$((\vec{\nabla} \cdot \nabla) \vec{\nabla} \approx U \frac{\partial v_i}{\partial x} \quad (26)$$

Con la linearización anterior, la ecuación de Navier-Stokes se simplifica y puede integrarse, obteniéndose:

$$\frac{\Psi}{Ur_0^2} = \frac{1}{4} \left[2 \left(\frac{r}{r_0} \right)^2 + \left(\frac{r_0}{r} \right) \right] \sin^2 \theta - \frac{3}{2Re} (1 + \cos \theta) \left[1 - e^{-\frac{Re}{2} \frac{r}{r_0} (1 - \cos \theta)} \right] \quad (27)$$

de donde puede obtenerse:

$$F_D = 6\pi\mu \left(1 + \frac{3}{8} Re \right) \quad (28)$$

o

$$C_D = \frac{24}{Re} \left(1 + \frac{3}{16} Re \right), \quad Re < 1 \quad (29)$$

Goldstein (1929) expandió aún más el rango de validez para C_D obteniendo:

$$C_D = \frac{24}{Re} \left(1 + \frac{3}{16} Re - \frac{19}{1280} Re^2 + \frac{71}{20840} Re^3 - \dots \right), \quad Re < 2 \quad (30)$$

ECUACIONES EMPIRICAS PARA C_D

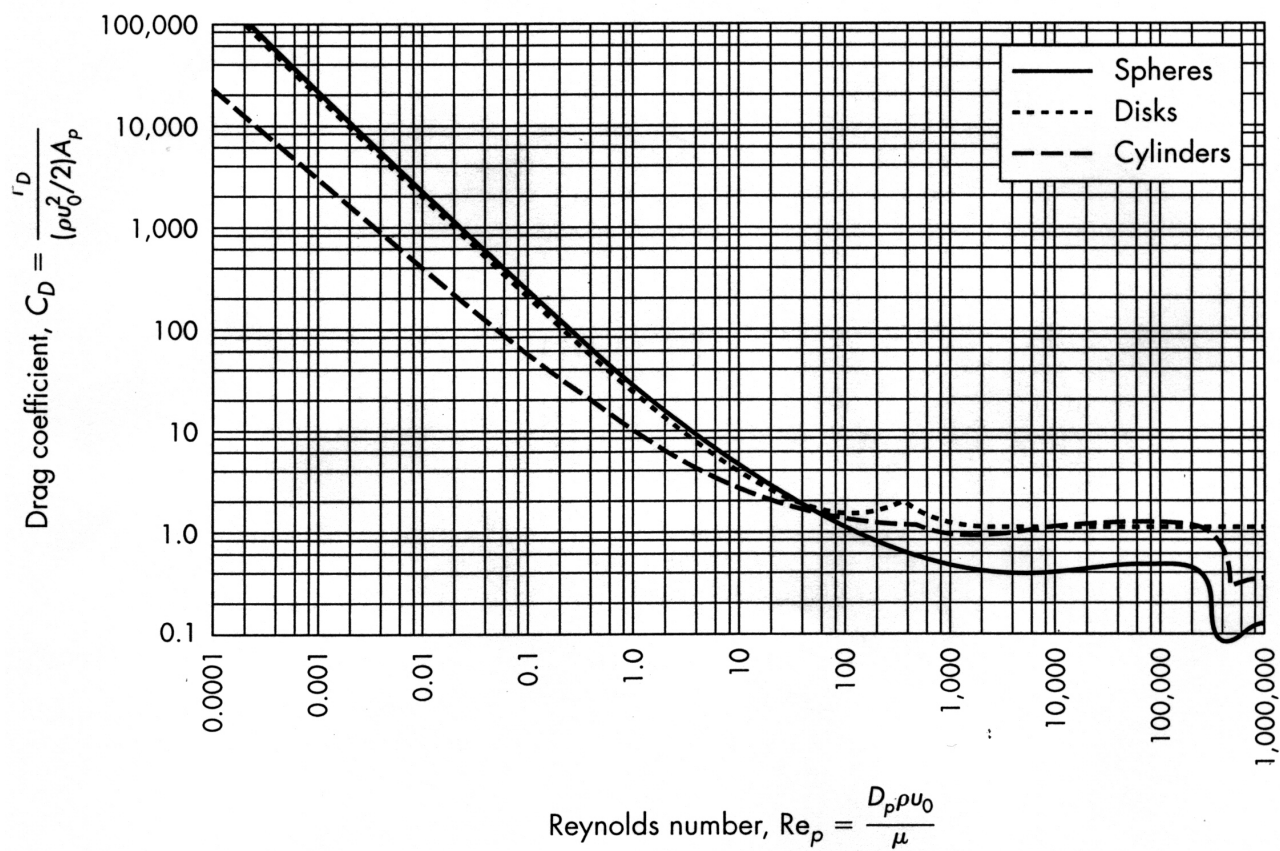
Debido a la complejidad de las ecuaciones, es extremadamente complejo expandir el rango de aplicación de una solución de la ecuación de Navier-Stokes para Re mayores que los resultados de Oseen o Goldstein. Es así como se ha optado para obtener relaciones para C_D en forma empírica. Algunas de estas relaciones son:

$$\text{Schiller et al. (1933): } C_D = \frac{24}{Re} \left(1 + 0,150 Re^{0,687} \right), \quad Re \leq 800$$

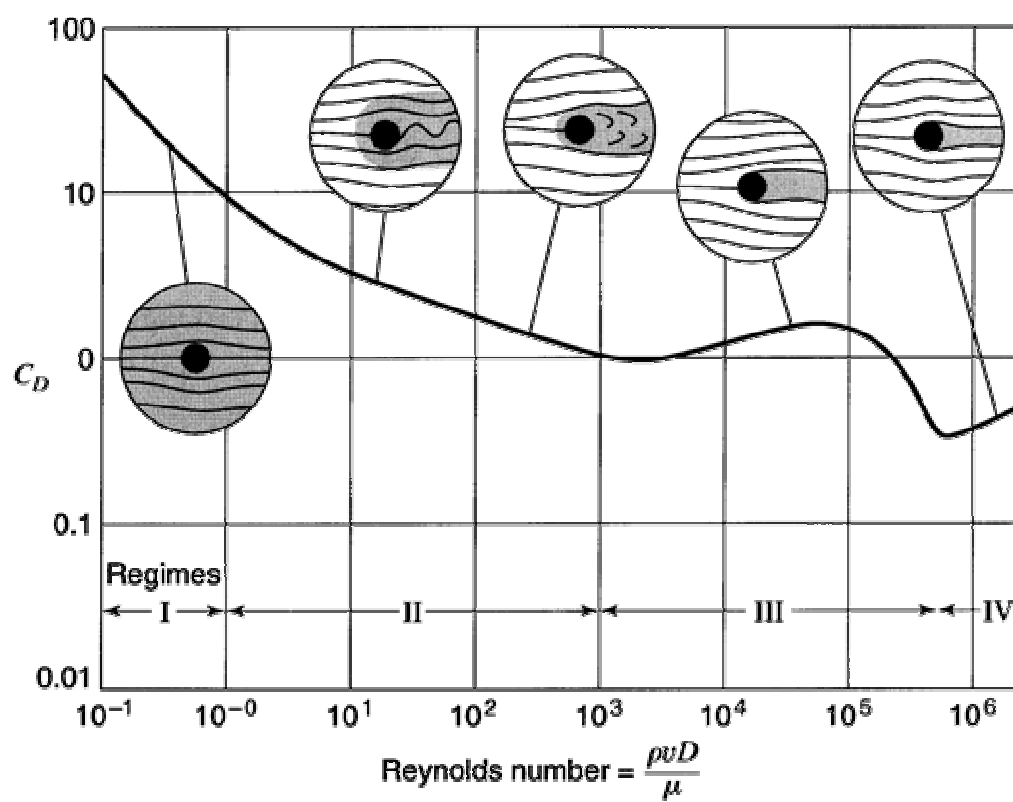
$$\text{Dallawalle (1943): } C_D = \frac{24,4}{Re} + 0,4$$

$$\text{Torobin et al. (1959): } C_D = \frac{24}{Re} \left(1 + 0,197 Re^{0,63} + 0,0026 Re^{1,38} \right), \quad 1 \leq Re \leq 100$$

$$\text{Olson (1961): } C_D = \frac{24}{Re} \left(1 + \frac{3}{16} Re \right)^{1/2}, \quad Re \leq 100$$



COMPORTAMIENTO DEL COEFICIENTE DE ARRASTRE CON EL NUMERO DE REYNOLDS



VELOCIDAD DE SEDIMENTACIÓN DE ESFERAS

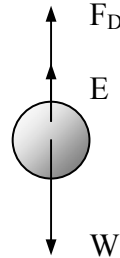
Consideramos una esfera sólida cayendo en un medio fluido infinito por la situación de equilibrio, o sea cuando el movimiento está en un régimen permanente. En este caso $m\vec{a} = \Sigma \vec{F}$, se reduce a:

$$E + F_D - W = 0$$

$$E = g\rho_s \forall$$

$$F_D = C_D \rho \frac{V^2}{2} A$$

$$W = g\rho_s \forall$$



$$\rho g \forall + C_D \rho \frac{V^2 A}{2} - \rho_s g \forall = 0$$

$$C_D \rho \frac{V^2 A}{2} = g \forall (\rho_s - \rho)$$

$$V^2 = \frac{2}{C_D} \frac{\forall}{A} g \left(\frac{\rho_s}{\rho} - 1 \right)$$

$$V_s = \sqrt{\frac{2}{C_D} \frac{\forall}{A} g \left(\frac{\rho_s}{\rho} - 1 \right)} \quad (1)$$

Para una esfera: $\forall = \frac{\pi}{6} D^3$, $A = \frac{\pi}{4} D^2$, luego $V_s = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{D}{C_D} g \left(\frac{\rho_s}{\rho} - 1 \right)}$

Si $Re \ll 1$, encontramos que $C_D = \frac{24}{Re} = \frac{24v}{V_s D}$, luego $V_s^2 = \frac{4}{3} \frac{D}{24} \frac{V_s D}{v} g \left(\frac{\rho_s}{\rho} - 1 \right)$

$$V_s = \frac{1}{18} \frac{D^2}{v} g \left(\frac{\rho_s}{\rho} - 1 \right), Re \ll 1, \text{ Rango de Stokes}$$

Para tener una idea del tamaño de las partículas para que éstas se encuentren en el rango de Stokes, reemplacemos V_s en la condición $Re \ll 1$:

$$\frac{V_s D}{v} \ll 1 \Rightarrow \frac{1}{18} \frac{D^3}{v^2} g \left(\frac{\rho_s}{\rho} - 1 \right) \ll 1$$

$$D \ll \left(\frac{18}{g} \frac{v^2}{\left(\frac{\rho_s}{\rho} - 1 \right)} \right)^{1/3}$$

Si consideramos un sedimento natural y que el fluido es agua:
 $\frac{\rho_s}{\rho} \approx 2,65$, $v \approx 10^{-2}$ cm/s, $g = 980$ cm/s², resulta $D \ll 0,01$ cm. De acuerdo a la clasificación de sedimentos de la AGU, este tamaño corresponde a arenas muy finos, limos y arcillas.

Consideremos ahora el caso de Re muy grande, digamos $Re \geq 6 \times 10^5$. El gráfico C_D en f(Re) indica que para este rango, el coeficiente de arrastre toma un valor constante $C_D = 0.24$, luego.

$$V_s = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{D}{0,24} g \left(\frac{\rho_s}{\rho} - 1 \right)}$$

$$V_s = \sqrt{\frac{1}{0,18} g D \left(\frac{\rho_s}{\rho} - 1 \right)}, \quad Re \geq 6 \times 10^5$$

Estimemos el tamaño de un sedimento natural para estar en este rango:

$$Re \geq 6 \times 10^5$$

$$\frac{V^2 D^2}{v^2} \geq 36 \times 10^{10}$$

$$\frac{1}{0,18} \frac{g D}{v^2} \left(\frac{\rho_s}{\rho} - 1 \right) D^2 \geq 36 \times 10^{10}$$

$$D^3 \geq \frac{36 \times 10^{10} \times v^2 \times 0,18}{g \left(\frac{\rho_s}{\rho} - 1 \right)}$$

$D \geq 16$ cm. Este tamaño significa $V_s \approx 380$ cm/s (Bolones, según clasificación AGU)

En el rango $10^3 < Re < 2 \times 10^5$ podemos considerar que $C_D \approx 0.4$, luego:

$$V_s = \sqrt{\frac{10}{3} \left(\frac{\rho_s}{\rho} - 1 \right) g D}, 10^3 \leq Re \leq 2 \times 10^5$$

El rango de tamaño es:

$$\frac{V_s D^2}{\nu^2} \approx \alpha^2, \quad \alpha = 10^3 - 2 \times 10^5$$

$$\frac{10}{3} \left(\frac{\rho_s}{\rho} - 1 \right) \frac{g D^3}{\nu^2} \approx \alpha^2$$

$$D^3 \approx \frac{3}{10} \frac{\alpha^2 \nu^2}{g \left(\frac{\rho_s}{\rho} - 1 \right)}$$

$$D \approx (1,855 \times 10^{-8} \alpha^2)^{1/3}$$

$$\begin{aligned} \alpha = 10^3 & \Rightarrow D \approx 0,26 \text{ cm (grava muy fina, AGU)} \\ \alpha = 2 \times 10^5 & \Rightarrow D \approx 9 \text{ cm (bolón pequeño, AGU)} \end{aligned}$$

Luego, $0,26 \text{ cm} < D < 9 \text{ cm}$ para el rango $10^3 < Re < 2 \times 10^5$

VELOCIDAD DE SEDIMENTACION DE LAS PARTICULAS NATURALES

Las partículas naturales no son esféricas, por lo que las relaciones antes indicadas para determinar V_s en estricto rigor no son aplicables. En este caso, el problema se hace muchísimos más complejo ya que intervienen otros factores tales como la forma, rugosidad, etc, siendo imposible un enfoque analítico. El Comité de Interagencias de Recursos Hidráulicos (USA) recomienda usar los resultados experimentales que se presentan en forma gráfica, en función del factor de forma, FF y la temperatura del agua.